Analyse Fonctionnelle

Céline Esser

Université de Liège, Année académique 2020 – 2021

Table des matières

Chapitre 1

Espaces localement convexes

L'analyse fonctionnelle est une branche des mathématiques qui étudie les espaces fonctionnels, c'est-à-dire les espaces vectoriels constitués de fonctions (ou de suites) et munis d'une topologie naturellement associée. Les espaces vectoriels normés constituent un exemple basique de tels espaces. Par exemple, la topologie naturelle de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ peut être définie à partir de la norme

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$. Une base de voisinages de f est donnée par les boules ouvertes

$$b(f,r) := \left\{ g \in L^1(\mathbb{R}) : \|f-g\|_1 < r \right\}, \quad r > 0\,.$$

On retrouve bien qu'une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R})$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout $r > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $f_m \in b(f,r)$ pour tout $m \geq M$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\|f_m - f\|_1 \longrightarrow 0$$

lorsque $m \to +\infty$.

Sur l'espace $C^0(K)$ des fonctions continues sur un compact $K \subseteq \mathbb{R}$, la notion de convergence naturelle est donnée par la convergence uniforme. Notons en effet qu'une limite ponctuelle de fonctions continues ne donne pas nécessairement une fonction continue. Cette notion de convergence uniforme est donnée par la norme

$$\|f\|_K := \sup_{x\in K} |f(x)|$$

et par les systèmes de voisinages

$$b(f,r) := \left\{ g \in C^1(K) : \|f-g\|_K < r \right\}, \quad r > 0\,.$$

C'est la topologie la moins fine qui permet de conserver la continuité par passage à la limite.

Remarquons à présent que si l'on considère l'espace $C^0(\Omega)$ des fonctions continues sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, il suffit d'imposer la convergence uniforme sur tous les compacts de Ω pour conserver la continuité par passage à la limite. Autrement dit, une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $C^0(\Omega)$ converge vers f dans $C^0(\Omega)$ si et seulement si pour tout compact $K \subseteq \Omega$,

$$\|f_m - f\|_K \longrightarrow 0$$

lorsque $m \to +\infty$. On se retrouve ici avec toute une famille $\|\cdot\|_K$ de "semi-normes" qui définissent la topologie de $C^0(\Omega)$. Le but de ce chapitre est de formaliser cette constatation et d'étudier de manière plus générale les espaces fonctionnels dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes.

1.1 Semi-normes, semi-boules et topologie associée

Dans ce qui suit, X désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition 1.1.1 Une application $p : X \to [0, +\infty[$ est une *semi-norme* sur X si

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,
2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$

pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Une *norme* sur X est une semi-norme p sur X pour laquelle

3. $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque 1.1.2 Remarquons que la condition 2 implique que $p(0) = 0$. Ainsi la condition 3 peut se réécrire

$$p(x) = 0 \implies x = 0.$$

De plus, si p est une norme, on utilise en général la notation $\|\cdot\|$.

Exemples 1.1.3

— Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors $\|f\|_K := \sup_{x\in K} |f(x)|$ est une norme sur $C^0(K)$.

— Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et si $K \subseteq \Omega$ est compact, alors $p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|$ est une semi-norme sur $C^0(\Omega)$.

— Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, si $m \leq l$ sont deux naturels et si $K \subseteq \Omega$ est compact, alors $p_{K,m}(f) := \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|$ est une semi-norme sur $C^l(\Omega)$.

— Si $p \geq 1$, alors $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R}^d)$. Si $p = \infty$, alors $\|f\|_\infty := \sup_{\mathrm{pp}} |f|$ est une norme sur $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

— Si $\alpha \in]0, 1[$, on définit l'espace de Hölder $C^\alpha([a, b])$ comme l'ensemble des fonctions f définies sur $[a, b]$ telles que

$$\sup_{x,y\in[a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha([a,b])} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x,y\in[a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

— Si $p \geq 1$, alors $\|x\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur

$$\ell^p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, alors $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est une norme sur

$$\ell^\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

et sur
$$c_0 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\}.$$

— Si $m \in \mathbb{N}$, alors $p_m(x) := \max_{k\le m} |x_k|$ est une semi-norme sur $\omega := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Sauf mention explicite du contraire, les espaces $C^0(K), C^l(\Omega), L^p(\mathbb{R}^d), L^\infty(\mathbb{R}^d), C^\alpha([a,b]), \ell^p, \ell^\infty, c_0$ et ω seront toujours munis des (semi)-normes présentées dans cet exemple.

Une (semi-)norme p sur X définit naturellement une (semi-)métrique
$$(x, y) \mapsto p(x - y)$$
et les notions classiques de (semi-)boules.

Définition 1.1.4 Si p est une semi-norme sur X, les ensembles
$$b_p(x, r) = \{y \in X : p(x - y) < r\} \quad \text{et} \quad B_p(x, r) = \{y \in X : p(x - y) \le r\}$$
pour $x \in X$ et $r > 0$, sont appelés les *semi-boules de centre x et de rayon r associées à p*. Si $x = 0$, on écrit en général $b_p(r) := b_p(0, r)$ et $B_p(r) := B_p(0, r)$.

Le résultat suivant est immédiat. Il montre que l'on peut se ramener à l'étude de la boule unité centrée en 0.

Proposition 1.1.5 *Soit p une semi-norme sur X. Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on a*

1. *$b_p(x, r) = x + b_p(r)$ et $B_p(x, r) = x + B_p(r)$,*
2. *$b_p(r) = rb_p(1)$ et $B_p(r) = rB_p(1)$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire $y = x + (y - x)$ et $y = r\dfrac{y}{r}$. ■

Afin de pouvoir définir une topologie sur X à partir d'un ensemble de semi-normes, il faut s'assurer que les semi-boules associées forment un système de voisinages. Cette condition se traduit en une condition sur les semi-normes.

Définition 1.1.6 Soient p et q deux semi-normes sur X. On dit que p est *plus faible* que q, ce que l'on note $p \preceq q$, s'il existe $C > 0$ tel que $p \le Cq$.

Si $p \preceq q$ et $q \preceq p$, on dit que p et q sont *équivalents* et on note $p \approx q$.

La relation $p \preceq q$ se traduit facilement en terme d'inclusion entre les semi-boules associées.

Proposition 1.1.7 *Soient p, q deux semi-normes sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$p \preceq q$,*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $b_q(\eta) \subseteq b_p(\varepsilon)$,*
3. *il existe $C > 0$ tel que $b_q(1) \subseteq Cb_p(1)$.*

De plus, on a les mêmes équivalences pour les semi-boules $B_p(s)$ et $B_q(s)$, ainsi que pour les semi-boules centrées en $x \in X$.

Démonstration : $1 \Rightarrow 2$. Par définition, il existe $C > 0$ tel que $p \leq Cq$. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il suffit alors de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{C}$.

$2 \Rightarrow 3$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $b_q(\eta) \subseteq b_p(1)$. Par la Proposition 1.1.5, il suffit de prendre $C = \frac{1}{\eta}$.

$3 \Rightarrow 1$. Soit $x \in X$. Fixons $\lambda > q(x)$. Alors $\frac{x}{\lambda} \in b_q(1)$ et par hypothèse, on obtient donc que $p\left(\frac{x}{C\lambda}\right) = \frac{1}{C\lambda}p(x) < 1$. Par conséquent, $p(x) < C\lambda$, et comme $\lambda > q(x)$ est arbitraire, la conclusion s'ensuit.

■

Définition 1.1.8 Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur X. On dit que $\mathcal{P}$ est *filtrant* si pour tous $p, q \in \mathcal{P}$, il existe $r \in \mathcal{P}$ tel que

$$\max\{p, q\} \preceq r\,.$$

Lemme 1.1.9 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur X. Alors $\mathcal{P}$ est filtrant si et seulement si toute intersection finie de semi-boules associées à des semi-normes de $\mathcal{P}$ et de même centre contient une semi-boule du même type.*

Démonstration : On se ramène au cas de semi-boules centrées en 0 par la Proposition 1.1.5. Le résultat est alors immédiat au vu de la Proposition 1.1.7. ■

Comme vu au cours de topologie, une topologie peut être définie via les systèmes de voisinages de chaque point. En effet, rappelons que si pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que

($\mathcal{V}$1) si $V \in \mathcal{V}_x$, alors $x \in V$,

($\mathcal{V}$2) si $V, W \in \mathcal{V}_x$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}_x$,

($\mathcal{V}$3) $X \in \mathcal{V}_x$,

($\mathcal{V}$4) si $V \in \mathcal{V}_x$ et $V \subseteq W$, alors $W \in \mathcal{V}_x$,

($\mathcal{V}$5) si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $W \in \mathcal{V}_x$ tel que pour tout $y \in W$, on a $V \in \mathcal{V}_y$,

alors l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{\Omega \subseteq X : \forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}_x\}$$

est une topologie pour laquelle $\mathcal{V}_x$ forme le système de voisinages de x pour tout $x \in X$.

Proposition 1.1.10 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X. Pour tout $x \in X$, notons $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des parties de X qui contiennent une semi-boule $b_p(x, r)$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$. Il existe une unique topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ sur X telle que, pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ forme le système de voisinages de x. En particulier, les semi-boules $b_p(x, r)$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ forment une base de voisinages de x pour tout $x \in X$.*

Démonstration : Pour tout $x \in X$, on considère

$$\mathcal{V}_x = \{V \subseteq X : \exists r > 0\ \exists p \in \mathcal{P} \text{ tels que } b_p(x, r) \subseteq V\}.$$

Les conditions $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_3)$ et $(\mathcal{V}_4)$ sont trivialement vérifiées. Puisque $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant, la condition $(\mathcal{V}_2)$ est également satisfaite. Enfin, pour $(\mathcal{V}_5)$, il suffit de prendre $W = b_p(x, r)$. ■

La définition suivante permet de comparer les topologies définies à partir de semi-normes.

Définition 1.1.11 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux ensembles de semi-normes sur X. On dit que $\mathcal{P}$ est *plus faible* que $\mathcal{Q}$, ce que l'on note $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$, si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $p \preceq q$.

Si $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont *équivalents* et on note $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$.

Proposition 1.1.12 *Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux ensembles filtrants de semi-normes sur X, alors $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ si et seulement si $\mathcal{T}_\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{Q}$.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ et considérons $U \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$. Soit $x \in U$. Par définition de la topologie associée à $\mathcal{P}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(x, r) \subseteq U$. Par hypothèse, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $p \preceq q$. La Proposition 1.1.7 implique que $b_q(x, \eta) \subseteq b_p(x, r) \subseteq U$ pour un $\eta > 0$. Par conséquent, U est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$, ce qui suffit.

Supposons à présent que $\mathcal{T}_\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{Q}$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Alors $b_p(1)$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ et donc pour $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$. Il existe donc $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \subseteq b_p(1)$. En utilisant à nouveau la Proposition 1.1.7, on obtient $p \preceq q$. ■

Remarque 1.1.13 Par conséquent, $\mathcal{P}$ est plus faible que $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est moins fin que $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$.

1.2 Espaces vectoriels topologiques

Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur X, l'espace topologique $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ que nous venons de construire est un espace topologique qui rend les applications liées à la structure de l'espace vectoriel continues.

Définition 1.2.1 Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel X muni d'une topologie pour laquelle les applications

$$+ : X \times X \mapsto X : (x, y) \mapsto x + y$$

et

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

sont continues.

Proposition 1.2.2 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X. L'espace $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration : Pour la continuité de l'addition, considérons un voisinage W de $z = x + y$. Alors, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(z, r) \subseteq W$. Il suffit alors de remarquer que

$$b_p\left(x, \frac{r}{2}\right) + b_p\left(y, \frac{r}{2}\right) \subseteq b_p(z, r).$$

Pour la multiplication par un scalaire, soient W un voisinage de $z = \lambda x$, $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(z, r) \subseteq W$. On a

$$\{\mu \in \mathbb{K} : |\lambda - \mu| < r_1\} \cdot b_p(x, r_2) \subseteq b_p(z, r)$$

pour tous $r_1, r_2 > 0$ satisfaisant $r_1\big(r_2 + p(x)\big) + |\lambda| r_2 \leq r$, puisque

$$\begin{aligned} p(\mu y - z) = p(\mu y - \lambda x) &\leq p(\mu y - \lambda y) + p(\lambda y - \lambda x) \\ &\leq |\mu - \lambda| p(y) + |\lambda| p(y - x) \\ &< r_1\big(p(x - y) + p(x)\big) + |\lambda| r_2 \\ &< r_1\big(r_2 + p(x)\big) + |\lambda| r_2 \\ &\leq r \end{aligned}$$

si $\mu \in \mathbb{K}$ et $y \in X$ sont tels que $|\lambda - \mu| < r_1$ et $p(x - y) < r_2$. ■

La proposition suivante montre que la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par les voisinages de 0.

Proposition 1.2.3 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique, $x \in X$ et $V \subseteq X$. Alors V est un voisinage de x si et seulement si $V - x$ est un voisinage de* 0.

Démonstration : Supposons que V est un voisinage de x. En utilisant la continuité de l'addition en $(x, 0)$, on trouve un voisinage V' de x et un voisinage W de 0 tels que $V' + W \subseteq V$. En particulier, $x + W \subseteq V$, d'où $W \subseteq V - x$. Ainsi $V - x$ est bien un voisinage de 0. On procède de même pour la seconde implication. ■

Ainsi, grâce à la continuité de l'addition, les ouverts d'un espace vectoriel topologique sont obtenus en translatant les ouverts contenant 0. De même, la continuité de la multiplication par un scalaire permet d'obtenir que tout multiple d'un voisinage de 0 est également un voisinage de 0.

Proposition 1.2.4 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Si $U \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors $\lambda U \in \mathcal{T}$.*

Démonstration : Puisque $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, l'application

$$f_\lambda : X \to X : x \mapsto \frac{1}{\lambda} x$$

est continue. Par conséquent, $f_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. On conclut en remarquant que $f_\lambda^{-1}(U) = \lambda U$. ■

Terminons cette section en présentant quelques propriétés supplémentaires des voisinages de 0 d'un espace vectoriel topologique (et donc de tout espace à semi-normes). Pour cela, nous introduisons deux notions que des parties d'un espace vectoriel peuvent vérifier.

Définition 1.2.5 Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une partie A de X est *équilibrée* si $\lambda A \subseteq A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

En particulier, si A est équilibré, alors $0 \in A$.

Exemples 1.2.6

- Dans un espace normé, il est facile de voir que toute boule centrée en 0 est équilibrée.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité centrée en $(1/2, 0)$ n'est pas équilibrée. En effet, il suffit de prendre $x = (1, 0)$ et $\lambda = -1$.

— Les polynômes forment un sous-ensemble équilibré de $C^0([0,1])$. En effet, tout multiple d'un polynôme est encore un polynôme.

Lemme 1.2.7 *Dans un espace vectoriel topologique* $(X, \mathcal{T})$, *tout voisinage de* 0 *contient un voisinage de* 0 *équilibré.*

Démonstration : Soit U un voisinage de $0 = 0 \cdot 0$. Par continuité de la multiplication par un scalaire, il existe un voisinage V de 0 et $\varepsilon > 0$ tels que

$$W := b(0, \varepsilon) \cdot V = \{\lambda x : x \in V, |\lambda| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Alors W est un voisinage de 0 car il contient $\frac{\varepsilon}{2} V$ qui est un voisinage de 0 par la Proposition 1.2.4, et on vérifie immédiatement qu'il est équilibré. ■

Définition 1.2.8 Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une partie A de X est *absorbante* si pour tout $x \in X$, il existe $C > 0$ tel que $x \in \lambda A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geq C$.

Exemples 1.2.9
- Dans un espace normé, il est facile de voir que toute boule centrée en 0 est absorbante.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité centrée en $(1/2, 0)$ est absorbante (puisqu'elle contient une boule centrée en 0).
- Les polynômes forment un sous-ensemble de $C^0([0,1])$ qui n'est pas absorbant puisqu'on ne peut pas écrire toute fonction continue comme multiple d'un polynôme.

Lemme 1.2.10 *Dans un espace vectoriel topologique* $(X, \mathcal{T})$, *tout voisinage de* 0 *est absorbant.*

Démonstration : Cela découle à nouveau de la continuité de la multiplication par un scalaire. Fixons $x \in X$ et $V \subseteq X$ un voisinage de 0. Alors $0 = 0 \cdot x$ et il existe un voisinage W de x et $\varepsilon > 0$ tels que

$$b(0, \varepsilon) \cdot W \subseteq V.$$

En particulier, $\lambda x \in V$ pour tout $|\lambda| < \varepsilon$. Il suffit de prendre $C > \frac{1}{\varepsilon}$ pour conclure. ■

Au total, les Lemmes 1.2.7 et 1.2.10 donnent directement le résultat suivant.

Proposition 1.2.11 *Tout espace vectoriel topologique* $(X, \mathcal{T})$ *possède une base de voisinages de* 0 *équilibrés et absorbants.*

1.3 Espaces localement convexes et équivalence

Nous avons vu que tout espace vectoriel muni d'un ensemble filtrant de semi-normes définissait un espace vectoriel topologique. Néanmoins, tout espace vectoriel topologique n'est pas nécessairement lié à un ensemble filtrant de semi-normes. Dans cette section, nous ajoutons une hypothèse, la convexité locale, qui nous permettra d'obtenir une équivalence. Commençons par étudier certaines parties remarquables d'un espace vectoriel.

Définition 1.3.1 Une partie A de X est *convexe* si pour tous $x, y \in A$ et tous $\lambda, \mu \in [0,1]$ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a
$$\lambda x + \mu y \in A,$$
autrement dit si le segment joignant x à y est inclus dans A.

En procédant par induction, on a bien sûr que
$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j x_j \in A$$
pour tous $x_1, \ldots, x_J \in A$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_J \in [0,1]$ tels que $\sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1$.

Proposition 1.3.2 *Toute intersection non-vide de parties convexes de X est convexe. On peut donc définir l'*enveloppe convexe $\mathrm{co}(A)$ *d'une partie non-vide A de X comme l'intersection de toutes les parties convexes de X contenant A. C'est la plus petite partie convexe de X qui contient A et elle est donnée par*
$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j a_j : J \in \mathbb{N}_0, a_j \in A, \lambda_j > 0 \textit{ et } \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Démonstration : La première partie est immédiate. De plus, on vérifie facilement que $\mathrm{co}(A)$ est une partie convexe qui contient A. Il faut donc montrer que si C est une partie convexe de X qui contient A, alors $\mathrm{co}(A) \subseteq C$. Soient $a_1, \ldots, a_J \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_J > 0$ tels que $\sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1$. Comme $A \subseteq C$, on a $a_1, \ldots, a_J \in C$ et puisque C est convexe, il vient $\sum_{j=1}^{J} \lambda_j a_j \in C$, ce qui suffit. ■

Définition 1.3.3 Une partie A de X est *absolument convexe* si pour tous $x, y \in A$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, on a
$$\lambda x + \mu y \in A.$$

En procédant par induction, on a bien sûr que
$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j x_j \in A$$
pour tous $x_1, \ldots, x_J \in A$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_J \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^{J} |\lambda_j| \leq 1$.

Comme dans le cas des ensembles convexes, on a le résultat suivant (laissé à titre d'exercice).

Proposition 1.3.4 *Toute intersection non-vide de parties absolument convexes de X est absolument convexe. On peut donc définir l'*enveloppe absolument convexe $\Gamma(A)$ *d'une partie non-vide A de X comme l'intersection de toutes les parties absolument convexes de X contenant A. C'est la plus petite partie absolument convexe de X qui contient A et elle est* *donnée par*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j a_j : J \in \mathbb{N}_0, a_j \in A, \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{j=1}^{J} |\lambda_j| \leq 1 \right\}.$$

La proposition suivante donne le lien existant entre les ensembles convexes et absolument convexes.

Proposition 1.3.5 *Une partie A de X est absolument convexe si et seulement si elle est convexe et équilibrée.*

Démonstration : Il est clair que toute partie absolument convexe est convexe et équilibrée. Réciproquement, si A est convexe et équilibré, soient $x, y \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, alors on a clairement que $\lambda x + \mu y \in C$. Sinon, il vient

$$\lambda x + \mu y = |\lambda| \underbrace{\frac{\lambda}{|\lambda|} x}_{\in A} + |\mu| \underbrace{\frac{\mu}{|\mu|} y}_{\in A} + (1 - |\lambda| - |\mu|) \underbrace{0}_{\in A} \in A$$

puisque 0 appartient à tout ensemble non-vide équilibré. ■

Proposition 1.3.6 *Soit A une partie de X.*

1. *Si A est absorbant, alors l'enveloppe linéaire de A est X,*
2. *Si A est absolument convexe, alors l'enveloppe linéaire de A est égale à $\bigcup_{c>0} cA$.*

Démonstration : 1. Soit $x \in X$. Il existe $c > 0$ tel que $x \in cA$, et on trouve $y \in A$ tel que $x = cy$, ce qui suffit.

2. Clairement, $\bigcup_{c>0} cA$ est inclus dans l'enveloppe linéaire de A. Il suffit donc de montrer que l'enveloppe linéaire de A est incluse dans $\bigcup_{c>0} cA$. Soit donc $x = \sum_{j=0}^{J} \lambda_j x_j$ une combinaison linéaire d'éléments de A. Si $\sum_{j=0}^{J} |\lambda_j| = 0$, alors $x \in A$ puisque A est absolument convexe. Sinon, on a

$$x = \sum_{k=0}^{J} |\lambda_k| \sum_{j=0}^{J} \frac{\lambda_j}{\sum_{k=0}^{J} |\lambda_k|} x_j \in \sum_{k=0}^{J} |\lambda_k| A.$$

■

Corollaire 1.3.7 *Une partie absolument convexe A de X est absorbante si et seulement si $X = \bigcup_{c>0} cA$.*

Démonstration : $\Rightarrow$ C'est immédiat par définition des ensembles absorbants.

$\Leftarrow$ Cela découle directement de la Proposition 1.3.6. ■

Définition 1.3.8 Un espace vectoriel topologique est *localement convexe* si tout élément admet une base de voisinages constituée d'ensembles convexes.

En général, on parle alors d'*espace localement convexe*, en omettant les termes "vectoriel" et "topologique". Nous allons voir que tout espace vectoriel muni d'un ensemble filtrant de semi-normes est localement convexe. Réciproquement, pour tout espace localement convexe, nous allons construire une famille filtrante de semi-normes qui définit de manière équivalente la topologie de l'espace. Ainsi, on aura démontré l'équivalence entre les deux notions.

La proposition suivante montre que pour vérifier qu'un espace vectoriel topologique est localement convexe, il suffit d'examiner ce qui se passe au voisinage de 0. De plus, on peut imposer aux éléments de la base de voisinages de 0 d'être absolument convexes et absorbants.

Proposition 1.3.9 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(X, \mathcal{T})$ est localement convexe,*
2. *0 admet une base de voisinages convexes,*
3. *0 admet une base de voisinages absolument convexes,*
4. *0 admet une base de voisinages absolument convexes et absorbants.*

Démonstration : $1 \Rightarrow 2$. C'est immédiat.

$2 \Rightarrow 3$. Soit $\mathcal{B}$ une base de voisinages convexes de 0. Pour tout $V \in \mathcal{B}$, par le Lemme 1.2.7, on peut considérer un ensemble équilibré $W_V \subseteq V$. Alors on a également $\mathrm{co}(W_V) \subseteq V$ et on vérifie facilement que

$$\left\{\mathrm{co}(W_V) : V \in \mathcal{B}\right\}$$

est une base de voisinages de 0 formée d'ensembles convexes. De plus, ces ensembles sont équilibrés car les ensembles W_V le sont (il suffit d'utiliser la caractérisation de l'enveloppe convexe). On conclut par la Proposition 1.3.5.

$3 \Rightarrow 4$. Par le Lemme 1.2.10, on sait que tout voisinage de 0 est absorbant, ce qui suffit.

$4 \Rightarrow 1$. Il est clair que le translaté d'un ensemble convexe est convexe. On utilise alors la Proposition 1.2.3 pour conclure. ■

Lemme 1.3.10 *Soit p une semi-norme sur X. Alors les semi-boules $b_p(r)$ associées à p et centrées en 0 sont des parties absolument convexes et absorbantes.*

Démonstration : Soit $r > 0$. Si $x, y \in b_p(r)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sont tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, alors

$$p(\lambda x + \mu y) \leq |\lambda| p(x) + |\mu| p(y) < r(|\lambda| + |\mu|) \leq r,$$

ce qui montre que $b_p(r)$ est absolument convexe. De plus, si $x \in X$, on a

$$x \in b_p(p(x) + 1) = \frac{p(x) + 1}{r} b_p(r),$$

ce qui suffit par le Corollaire 1.3.7. ■

Théorème 1.3.11 *Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur X, alors $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est un espace localement convexe.*

Démonstration : Il suffit de combiner la Proposition 1.3.9 et le Lemme 1.3.10. ■

Montrons à présent que la topologie d'un espace localement convexe peut être définie à partir d'un ensemble filtrant de semi-normes. Pour cela, commençons par construire une famille de semi-normes. Au vu du Corollaire 1.3.7, la définition suivante est légitime.

Définition 1.3.12 Soit A une partie absolument convexe et absorbante de X. La *jauge de Minkowski* de A est définie par

$$P_A : X \to [0, +\infty[\, : x \mapsto \inf\{c > 0 : x \in cA\}.$$

Nous allons montrer que P_A définit une semi-norme et que celle-ci donne des semi-boules unitaires qui encadrent A.

Proposition 1.3.13 *Soit A une partie absolument convexe et absorbante de X. Alors P_A est une semi-norme sur X telle que*

$$b_{P_A}(1) \subseteq A \subseteq B_{P_A}(1).$$

Démonstration : Montrons tout d'abord que P_A est une semi-norme. Soient $x, y \in X$ et soient $c_1, c_2 > 0$ tels que $x \in c_1 A$ et $y \in c_2 A$. Comme A est absolument convexe, on a

$$x + y \in c_1 A + c_2 A = (c_1 + c_2) \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} A + \frac{c_2}{c_1 + c_2} A \right) \subseteq (c_1 + c_2) A,$$

d'où $P_A(x + y) \leq c_1 + c_2$. En prenant les deux bornes inférieures, on obtient donc

$$P_A(x + y) \leq P_A(x) + P_A(y).$$

De même, si $\lambda \in K$ est non-nul, alors $\frac{\lambda x}{|\lambda|} \in c_1 A$ puisque A est équilibré. On en tire que

$$\lambda x = |\lambda| \frac{\lambda x}{|\lambda|} \in |\lambda| c_1 A,$$

d'où $P_A(\lambda x) \leq |\lambda| c_1$. Par conséquent, $P_A(\lambda x) \leq |\lambda| P_A(x)$. De plus, en appliquant l'égalité précédente au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur λx, on obtient

$$|\lambda| P_A(x) = |\lambda| P_A \left(\frac{\lambda}{\lambda} x \right) \leq P_A(\lambda x),$$

d'où l'égalité.

Enfin, il est clair que $P_A(0) = 0$.

Montrons à présent l'inclusion des boules. Si $x \in b_{P_A}(1)$, on a $P_A(x) < 1$ et il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $x \in cA$. Comme A est équilibré, il vient $x \in A$.

Enfin, si $x \in A$, il est clair que $P_A(x) \leq 1$, c'est-à-dire $x \in B_{P_A}(1)$.

■

Le théorème suivant montre qu'il y a équivalence entre les notions d'espace localement convexe et d'espace muni d'un ensemble filtrant de semi-normes.

Théorème 1.3.14 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique localement convexe. Si $\mathcal{B}$ est une base de voisinages absolument convexes et absorbants de 0, alors la topologie $\mathcal{T}$ est définie à partir de l'ensemble filtrant de semi-normes*

$$\mathcal{P} = \{P_V : V \in \mathcal{B}\}.$$

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\mathcal{P}$ est filtrant. Soient $U, V \in \mathcal{B}$. Alors $U \cap V$ est un voisinage de 0 et il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subseteq U \cap V$. On a alors $P_U \leq P_{U\cap V} \leq P_W$ et $P_V \leq P_{U\cap V} \leq P_W$.

Notons $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ la topologie associée à l'ensemble filtrant de semi-normes $\mathcal{P}$. Par la Proposition 1.2.2, on sait que $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ est un espace vectoriel topologique. Afin de montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{P}$, il suffit donc d'analyser les voisinages de 0.

Soit U un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$. Alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subseteq U$. Par la Proposition 1.3.13, on a $b_{P_B}(1) \subseteq B$. On en tire que B, et donc U, est un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$.

Soit maintenant U un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_\mathcal{P}$. Alors il existe $V \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b_{P_V}(\varepsilon) \subseteq U$. Par la Proposition 1.3.13, on a $V \subseteq B_{P_V}(1) \subseteq b_{P_V}(2)$. Par conséquent, $\frac{\varepsilon}{2}V \subseteq b_{P_V}(\varepsilon) \subseteq U$ et on obtient la conclusion car $\frac{\varepsilon}{2}V$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$, par continuité de la multiplication par un scalaire. ∎

On est donc amené à redéfinir la notion d'espace localement convexe.

Définition 1.3.15 (Définition alternative) Un *espace localement convexe* $(X, \mathcal{P})$ est un espace vectoriel X muni d'un ensemble filtrant $\mathcal{P}$ de semi-normes.

Lorsqu'on parlera de la topologie d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$, on parlera toujours de la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$.

1.4 Espaces séparés, normés et métrisables

Dans cette section, nous montrons que les propriétés d'espace séparé, d'espace normé et d'espace métrisable peuvent se traduire via l'ensemble filtrant de semi-normes.

Rappelons tout d'abord qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé si pour tous $x, y \in X$, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \emptyset$. Si un espace est séparé, alors la limite d'une suite convergente est unique.

Proposition 1.4.1 *Un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est séparé si et seulement si pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) \neq 0$.*

Démonstration : Supposons que la topologique $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est séparée. Soit $x \neq 0$. Alors il existe $p, q \in \mathcal{P}$ et $r, s > 0$ tels que

$$b_p(x, r) \cap b_q(0, s) = \emptyset.$$

Par conséquent, $q(x) \geq s > 0$, ce qui suffit.

Pour la réciproque, soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $x - y \neq 0$ et il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x - y) > 0$. Si on pose $r = \frac{p(x-y)}{2} > 0$, on a

$$b_p(x, r) \cap b_p(y, r) = \emptyset,$$

ce qui suffit. ∎

Exemple 1.4.2 L'espace $C^0(\Omega)$ muni des semi-normes $p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$ pour tous les compacts K de Ω est séparé. Si on le munit d'une seule de ces semi-normes, ce n'est plus un espace séparé.

Remarque 1.4.3 Si $\mathcal{P} = \{p\}$ contient une seule semi-norme, alors $(X, \mathcal{P})$ est séparé si et seulement si p est une norme.

Définition 1.4.4 On dit que l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est
- *normé* si $\mathcal{P}$ est équivalent à une norme,
- *à semi-normes dénombrables* si $\mathcal{P}$ est équivalent à un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur X.

Exemple 1.4.5 Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes fini, alors il est équivalent à l'un de ses éléments. En particulier, si $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors il est normé.

Exemple 1.4.6 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $l \in \mathbb{N}$. Sur $C^\infty(\Omega)$, on considère la suite des semi-normes

$$p_m(f) = \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_m} |\partial^\alpha f(x)|$$

où

$$K_m = \big\{x \in \Omega : |x| \leq m \text{ et } \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq m\big\}.$$

Cet ensemble de semi-normes est équivalent à celui présenté dans l'Exemple 1.1.3. Ainsi, $C^\infty(\Omega)$ est un espace à semi-normes dénombrables.

La proposition suivante montre que tout espace localement convexe séparé de dimension finie n est homéomorphe à l'espace $\mathbb{K}^n$ muni de sa topologie usuelle.

Proposition 1.4.7 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Si X est de dimension finie n, alors $(X, \mathcal{P})$ est normé. Plus précisément, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de X, alors $\mathcal{P} \approx \|\cdot\|$, où*

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\| = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |\lambda_j|.$$

Démonstration : Commençons par montrer que $\mathcal{P} \preceq \|\cdot\|$. Si $p \in \mathcal{P}$ et si $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, alors

$$p(x) \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| p(e_j) \leq C\|x\|$$

si $C = \sum_{j=1}^n p(e_j)$.

Pour montrer que $\|\cdot\| \preceq \mathcal{P}$, commençons par montrer que $\mathcal{P}$ contient une norme. Soit $x_1 \neq 0$. Comme l'espace est séparé, il existe $p_1 \in \mathcal{P}$ tel que $p_1(x_1) \neq 0$. Le sous-espace vectoriel L_1 défini par $L_1 := \{x \in X : p_1(x) = 0\}$ est de dimension $\leq n-1$. Si $\dim L_1 = 0$, alors p_1 est une norme. Sinon, il existe $x_2 \in L_1 \setminus \{0\}$ et une semi-norme $p_2 \in \mathcal{P}$ telle que $p_2(x_2) \neq 0$. Le sous-espace vectoriel $L_2 = \{x \in X : p_1(x) = p_2(x) = 0\}$ est de dimension $\leq \dim(L_1) - 1$. On continue alors de proche en proche et on obtient un nombre fini de semi-normes $p_1, \ldots, p_L$, avec $L \leq n$, telles que

$$\bigl\{x \in X : p_l(x) = 0 \ \ \forall l \in \{1, \ldots, L\}\bigr\} = \{0\}.$$

Comme $\mathcal{P}$ est filtrant, il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que $p_l \preceq p_0$ pour tout $l \in \{1, \ldots, L\}$. Il est clair que $p_0(x) = 0$ implique que $x = 0$, et donc que p_0 est une norme. Montrons pour conclure que $\|\cdot\| \preceq p_0$. Considérons l'application

$$T : \mathbb{K}^n \to [0, +\infty[: (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto p_0\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right).$$

Comme précédemment, on a

$$T\bigl((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - (\mu_1, \ldots, \mu_n)\bigr) = p_0\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) e_j\right) \leq \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |\lambda_j - \mu_j| \sum_{j=1}^{n} p_0(e_j).$$

On en tire que T est une application continue et il s'ensuit que sa borne inférieure r sur le compact $S = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |\lambda_j| = 1\}$ de $\mathbb{K}^n$ est réalisée en un point de S. Comme p_0 est une norme, on sait que $r > 0$. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a donc

$$r \leq T\left(\frac{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |\lambda_j|}\right),$$

d'où

$$\max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |\lambda_j| \leq \frac{1}{r} p_0\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right),$$

ce qui suffit. ■

Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 1.4.8 *Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie, alors elles sont équivalentes.*

Intéressons-nous à présent aux espaces à semi-normes dénombrables. Ils occupent une place très importante dans l'étude des espaces localement convexes car ils permettent d'obtenir des espaces métrisables.

Lemme 1.4.9 *Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur X, alors $\mathcal{P}$ est équivalent à un ensemble croissant de semi-normes sur X, c'est-à-dire de la forme*

$$\{p_m : m \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad p_m \leq p_{m+1} \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : Si $\mathcal{P} = \{q_m : m \in \mathbb{N}\}$, il suffit de prendre $p_m = \max\{q_1, \ldots, q_m\}$. ■

Théorème 1.4.10 *Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est à semi-normes dénombrables si et seulement si il est métrisable.*

Démonstration : Supposons que $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble croissant de semi-normes équivalent à $\mathcal{P}$. Posons

$$d(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} \frac{p_m(x-y)}{1+p_m(x-y)}$$

pour tous $x, y \in X$. Remarquons que la série converge car son terme général est majoré par 2^{-m}. De plus, d définit bien une distance sur X car :

- $d(x,y) \geq 0$ pour tous $x, y \in X$,
- si $d(x,y) = 0$, alors $p_m(x-y) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où $x = y$ par la Proposition 1.4.1, puisque l'espace est séparé,
- $d(x,y) = d(y,x)$ pour tous $x, y \in X$,
- l'inégalité triangulaire résulte directement de la relation

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a+2ab+b}{1+a+b+ab} \geq \frac{a+ab+b}{1+a+b+ab} \geq \frac{a+b}{1+a+b}$$

pour tous $a, b \geq 0$, où la dernière inégalité provient de la croissance de la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

Montrons à présent l'équivalence des topologies. Soient $x \in X$ et $r > 0$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{m=M+1}^{+\infty} 2^{-m} < \frac{r}{2}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{r}{2}$. Ainsi, si $p_M(x-y) < \varepsilon$, on a

$$d(x,y) < \sum_{m=0}^{M} 2^{-m} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{r}{2} < 2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < r,$$

d'où

$$\{y \in X : p_M(x-y) < \varepsilon\} \subseteq \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Ainsi, la topologie engendrée par d est moins fine que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

De plus, si $x \in X$ et $r > 0$, alors

$$\left\{y \in X : d(x,y) < 2^{-m}\frac{r}{1+r}\right\} \subseteq \{y \in X : p_m(x-y) < r\}$$

et la topologie engendrée par d est plus fine que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Réciproquement, supposons que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ peut être définie par une métrique d. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $p_m \in \mathcal{P}$ et $r_m > 0$ tels que

$$\{x \in X : p_m(x) < r_m\} \subseteq \left\{x \in X : d(x,0) < \frac{1}{m}\right\}.$$

L'ensemble dénombrable $\mathcal{Q} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de semi-normes plus faible que $\mathcal{P}$. Montrons qu'on a aussi $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\{x \in X : d(x,0) < \frac{1}{m}\right\} \subseteq \{x \in X : p(x) < 1\}$$

puisque d définit la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Par définition de p_m, on obtient que $b_{p_m}(r_m) \subseteq b_p(1)$ et donc $p \preceq p_m$ par la Proposition 1.1.7. ∎

Corollaire 1.4.11 *Un espace localement convexe séparé* $(X, \mathcal{P})$ *est métrisable si et seulement si* 0 *possède une base dénombrable de voisinages pour* $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. *En particulier, dans ce cas, il existe une suite décroissante* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formant une base de voisinages de* 0 *pour* $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Démonstration : Supposons que $(X, \mathcal{P})$ est métrisable. Soit d une distance définissant la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Alors, il suffit de poser

$$V_n = \left\{ x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Réciproquement, si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante formant une base de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathcal{P}$ et $r_n > 0$ tels que

$$b_{p_n}(r_n) \subseteq V_n.$$

On peut bien sûr supposer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Posons $\mathcal{Q} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ et montrons que $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$. Cela suffira par le Théorème 1.4.10. Par définition, on a clairement $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$. De plus, si $p \in \mathcal{P}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n \subseteq b_p(1)$. On en tire que $b_{p_n}(r_n) \subseteq b_p(1)$ et donc $p \preceq p_n$. ∎

Remarque 1.4.12 Par translation des voisinages, on a en fait obtenu qu'un espace localement convexe séparé est métrisable si et seulement si il est à base dénombrable de voisinages.

1.5 Espaces séparables et théorème de Stone-Weierstrass

Dans la section précédente, nous avons obtenu grâce au Corollaire 1.4.11 qu'un espace localement convexe séparé est à base dénombrable de voisinages si et seulement si il est métrisable (par translation des voisinages). Nous allons ici nous intéresser à l'existence d'une base de topologie dénombrable. Puisque tout espace à base dénombrable est à base dénombrable de voisinages, il est clair que l'on doit travailler avec des espaces localement convexes métrisables. De plus, tout espace à base dénombrable est séparable. Rappelons qu'un espace topologique est *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense. Dans le cas d'un espace topologique métrisable, la séparabilité est équivalente à l'existence d'une base dénombrable de topologie. Naturellement, on a donc le résultat suivant.

Proposition 1.5.1 *Un espace localement convexe séparé* $(X, \mathcal{P})$ *est à base dénombrable si et seulement si il est métrisable et séparable.*

Un exemple d'espace localement convexe séparable est donné par l'espace $C^0([a, b])$ des fonctions continues sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. En effet, on sait par le Théorème de Weierstrass que toute fonction de $C^0([a, b])$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes. Il suffit donc de prendre l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels pour obtenir la séparabilité de $C^0([a, b])$. Nous allons à présent généraliser ce résultat d'approximation polynomiale au cas de l'espace $C^0(X)$ des fonctions continues sur X et à valeurs complexes, pour un espace topologique compact X donné. On le munit de la norme

$$\|f\|_{C^0(X)} := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Commençons par démontrer un lemme.

Lemme 1.5.2 *Soit X un espace topologique compact contenant au moins deux points et D une partie de $C^0(X, \mathbb{R})$. Supposons que*

1. *si $f, g \in D$, alors $\max\{f, g\} \in D$ et $\min\{f, g\} \in D$,*
2. *pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, et tous $r, s \in \mathbb{R}$, il existe $f \in D$ tel que $f(x) = r$ et $f(y) = s$.*

Alors D est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Démonstration : Soit $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $x \in X$. Alors par la deuxième hypothèse, pour tout $y \in X \setminus \{x\}$, il existe $g \in D$ tel que $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. En particulier, $g(y) > f(y) - \varepsilon$ et par continuité de f et g, il existe un voisinage ouvert V de y sur lequel $g > f - \varepsilon$.

En utilisant la compacité de X, il existe donc des ouverts $V_1, \ldots, V_n$ de X et des fonctions $g_1, \ldots, g_n \in D$ tels que $X = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, $g_j > f_j - \varepsilon$ sur V_j et $g_j(x) = f(x)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Posons $h = \max\{g_1, \ldots, g_n\}$. En utilisant la première hypothèse, $h \in D$ et par construction, on a $h > f - \varepsilon$ sur X et $h(x) = f(x)$. Par continuité de h et f, il existe donc un voisinage ouvert U de x sur lequel $h < f + \varepsilon$.

En utilisant à nouveau la compacité de X, on obtient des ouverts $U_1, \ldots, U_m$ de X et des fonctions $h_1, \ldots, h_m \in D$ tels que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, $h_j > f - \varepsilon$ sur X et $h_j < f + \varepsilon$ sur U_j pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que la fonction $\min\{h_1, \ldots, h_m\}$ appartient à D par la première hypothèse et satisfait

$$\sup_{x \in X} \left| f(x) - \min\{h_1(x), \ldots, h_m(x)\} \right| < \varepsilon.$$

■

Les hypothèses du théorème d'approximation polynomiale seront plus fortes que celles faites dans le lemme précédent. Notons qu'il s'agit de conditions purement algébriques qui vont néanmoins impliquer un résultat topologique.

Théorème 1.5.3 (Stone-Weierstrass) *Soit X un espace topologique compact contenant au moins deux points et soit $C^0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles ou complexes. Supposons que D est une sous-algèbre de $C^0(X)$ telle que*

1. *D est stable par conjugaison complexe,*
2. *D contient les constantes,*
3. *pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in D$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors D est dense dans $C^0(X)$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que l'adhérence $\overline{D}$ de D est également une sous-algèbre stable par conjugaison complexe qui satisfait trivialement les hypothèses 1, 2 et 3.

Traitons tout d'abord le cas réel. Fixons $f \in \overline{D}$. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $\sup_{x \in X} |f(x)| < 1$. En utilisant le théorème de Weierstrass [1], on peut considérer

1. On peut aussi proposer une construction de cette suite de polynômes, en utilisant la série de Taylor de la fonction $h \mapsto \sqrt{1-h}$ et en remarquant que $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$. L'intérêt est qu'alors on peut retrouver le théorème de Weierstrass en corollaire de celui-ci.

une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$. Comme $\overline{D}$ est une sous-algèbre qui contient les constantes, on sait que $P_n(f) \in \overline{D}$. De plus, la suite $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|$ puisque $f(x) \in]-1,1[$ pour tout $x \in X$. On en tire que $|f| \in \overline{D}$. Montrons à présent que $\overline{D}$ satisfait les hypothèses du Lemme 1.5.2, ce qui donnera la conclusion. Remarquons premièrement que si $f, g \in \overline{D}$, on a

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\big(f+g+|f-g|\big) \in \overline{D} \quad \text{et} \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}\big(f+g-|f-g|\big) \in \overline{D}.$$

Deuxièmement, fixons $x \neq y$ dans X et $r, s \in \mathbb{R}$. On sait par hypothèse qu'il existe $f \in D$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Posons $h(t) = r + \frac{f(t)-f(x)}{f(y)-f(x)}(s-r)$. Alors $h \in D$ et satisfait $h(x) = r$ et $h(y) = s$.

Pour le cas complexe, on remarque que si $D' = D \cap C^0(X,\mathbb{R})$, alors D' satisfait également les hypothèses du théorème. Par la première partie de la preuve, on sait donc que $\overline{D'} = C^0(X,\mathbb{R})$. Si $f \in C^0(X,\mathbb{C})$, il suffit d'écrire $f = \Re f + i\Im f$ et d'approcher chaque morceau par une fonction de D'. ■

1.6 Opérateurs linéaires continus et relativement ouverts

Les transitions naturelles entre espaces vectoriels sont données par les opérateurs linéaires. Dans le cas des espaces topologiques, on travaille avec les applications continues. Ainsi, lorsqu'on travaille avec des espaces vectoriels topologiques tels que les espaces localement convexes, il est naturel de s'intéresser aux opérateurs linéaires continus. Dans le résultat suivant, nous montrons comment la continuité se traduit en termes de semi-normes. Remarquons que si $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire et si q est une semi-norme sur Y, alors $q \circ T$ est une semi-norme sur X. Afin d'obtenir la continuité de T, il suffit de montrer que T vérifie une *majoration de continuité*, comme prouvé dans le résultat suivant.

Proposition 1.6.1 *Soient $(X,\mathcal{P})$ et $(Y,\mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est continu,*
2. *T est continu en 0,*
3. *pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $q \circ T \preceq p$.*

Démonstration : $1 \Rightarrow 2$. Cette implication est évidente.

$2 \Rightarrow 3$. Soit $q \in \mathcal{Q}$. Comme $b_q(1)$ est un voisinage de $0 = T(0)$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b_p(\varepsilon) \subseteq T^{-1}\big(b_q(1)\big) = b_{q\circ T}(1)$. On conclut alors par la Proposition 1.1.7.

$3 \Rightarrow 1$. Soient $x \in X$ et $b_q(T(x),\varepsilon)$ un voisinage de $T(x)$. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que $q \circ T \leq Cp$. La Proposition 1.1.7 donne l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que

$$b_p(x,\eta) \subseteq b_{q\circ T}(x,\varepsilon) = T^{-1}(b_q(T(x),\varepsilon)),$$

ce qui suffit. ■

Remarque 1.6.2 La Proposition 1.1.12 est une conséquence directe de la continuité de l'opérateur $id : (X,\mathcal{Q}) \to (X,\mathcal{P})$.

Corollaire 1.6.3 *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Si T est continu, alors T est uniformément continu.*

Démonstration : Puisque T est continu, pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que $q \circ T \leq Cp$. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc $q(T(x) - T(y)) < \varepsilon$ si $p(x - y) < \frac{\varepsilon}{C}$. ■

Définition 1.6.4 Si $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ sont deux espaces localement convexes, l'espace vectoriel des opérateurs $T : X \to Y$ linéaires et continus est noté $\mathrm{L}(X, Y) = \mathrm{L}\big((X, \mathcal{P}), (Y, \mathcal{Q})\big)$.

Nous reviendrons sur l'étude de ces espaces vectoriels dans le chapitre 5.

Le résultat suivant montre qu'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie est toujours continue.

Corollaire 1.6.5 *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes. Si X est séparé et de dimension finie et si $T : X \to Y$ est une application linéaire, alors T est continue.*

Démonstration : Comme X est de dimension finie, on sait par la Proposition 1.4.7 que $\mathcal{P} \approx \|\cdot\|$ où

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |\lambda_j|$$

et où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de X. Soit $q \in \mathcal{Q}$. Si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, on a

$$q\big(T(x)\big) \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| q(T(e_j)) \leq \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |\lambda_j| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} q(T(e_j))}_{:=C} = C\|x\|,$$

ce qui suffit par la Proposition 1.6.1. ■

Terminons par un mot sur les applications ouvertes.

Définition 1.6.6 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $T : X \to Y$ est *relativement ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de $\mathrm{im}(T)$. Elle est *ouverte* si elle est relativement ouverte et surjective.

Dans le cas d'opérateurs linéaires entre espaces localement convexes, on a la caractérisation suivante.

Proposition 1.6.7 *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors T est relativement ouvert si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \cap \mathrm{im}(T) \subseteq T\big(b_p(1)\big)$.*

Démonstration : Supposons que T est relativement ouvert. Alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, $T\big(b_p(1)\big)$ est ouvert dans $\mathrm{im}(T)$. Comme $0 = T(0) \in T\big(b_p(1)\big)$, on sait qu'il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \cap \mathrm{im}(T) \subseteq T\big(b_p(1)\big)$, ce qui suffit.

Réciproquement, soient Ω un ouvert de $(X, \mathcal{P})$, $y \in T(\Omega)$ et $x \in \Omega$ tel que $y = T(x)$. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b_p(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Par hypothèse, il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que

$b_q(r) \cap \operatorname{im}(T) \subseteq T\big(b_p(1)\big)$. Alors on a

$$y \in b_q(y, \varepsilon r) \cap \operatorname{im}(T) \subseteq T\big(b_p(x, \varepsilon)\big) \subseteq T(\Omega),$$

d'où la conclusion. ■

Remarque 1.6.8 Si on travaille dans des espaces séparés à semi-normes dénombrables, on peut travailler avec les distances invariantes par translation données dans le Théorème 1.4.10. On obtient alors que T est relativement ouvert si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$b(0, r) \cap \operatorname{im}(T) \subseteq T\big(b(0, \varepsilon)\big)$$

où les boules sont définies dans leurs espaces respectifs avec les distances associées.

1.7 Exercices

Exercice 1.7.1 *Si p et q sont des semi-normes sur X et si $r > 0$, montrer que $p + q$, rp et $\max\{p, q\}$ sont des semi-normes sur X.*

Exercice 1.7.2 *Si p est une semi-norme sur X, alors $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ pour tous $x, y \in X$.*

Exercice 1.7.3 *Soient $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X, $p \in \mathcal{P}$, $x \in X$ et $r > 0$. Montrer que l'adhérence pour la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ de la semi-boule ouverte $b_p(x, r)$ est la semi-boule fermée $B_p(x, r)$.*

Exercice 1.7.4 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et soit U un voisinage de 0. Alors il existe un voisinage V de 0 tel que $V + V \subseteq U$.*

Exercice 1.7.5 *Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas un espace vectoriel topologique.*

Exercice 1.7.6 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique muni d'une distance d invariante par translation et compatible avec la topologie. Montrer que*

1. *pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$, $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$,*
2. *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers 0, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers l'infini et telle que $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans X.*

Exercice 1.7.7 *Si $f, g \in C^0(\mathbb{R})$, on pose*

$$d(f, g) = \min\big\{1, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\big\}.$$

1. *Montrer que d est une distance sur $C^0(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $(C^0(\mathbb{R}), d)$ n'est pas un espace vectoriel topologique.*

Exercice 1.7.8 *Démontrer la Proposition 1.3.4.*

Exercice 1.7.9 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Montrer que*

1. *l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de X est un sous-espace vectoriel de X,*

2. *l'adhérence d'une partie convexe de X est convexe,*
3. *l'adhérence d'une partie absolument convexe de X est absolument convexe,*
4. *l'intérieur de tout sous-espace vectoriel propre de X est vide,*
5. *l'intérieur d'une partie convexe de X est convexe,*
6. *l'intérieur d'une partie absolument convexe de X est absolument convexe.*

Exercice 1.7.10 *Soit X un espace vectoriel. Montrer que*

1. *une partie A de X est convexe si et seulement si $(s+t)A = sA + tA$ pour tous $s, t \geq 0$,*
2. *si A et B sont deux parties convexes de X, alors $A + B$ est convexe,*
3. *si A et B sont deux parties équilibrées de X, alors $A + B$ est équilibré.*

Exercice 1.7.11 *Soit $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leq |z_2|\}$. Montrer que B est équilibré mais que son intérieur ne l'est pas.*

Exercice 1.7.12 *Soient X et Y deux espaces topologiques compacts. Montrer que si D est l'espace engendré par l'ensemble*

$$\{(x, y) \mapsto f(x)g(y) : f \in C^0(X), g \in C^0(Y)\}$$

des fonctions continues à variables séparées, alors D est dense dans $C^0(X \times Y)$. En déduire que $C^0(X \times Y)$ est séparable.

Exercice 1.7.13 *Montrer que toute fonction continue, 1-périodique et à valeurs complexes est la limite uniforme dans $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques 1-périodiques.*

Exercice 1.7.14 *Soit $p \in]0, 1[$. On désigne par $L^p([0, 1])$ l'espace des fonctions mesurables sur $[0, 1]$ telles que $|f|^p$ est intégrable, quotienté par la relation $=_{pp}$. On pose*

$$\delta_p(f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

pour tout $f \in L^p([0, 1])$.

1. *Montrer que l'application d_p définie par*

   $$d_p(f, g) = \delta_p(f - g), \quad \forall f, g \in L^p([0, 1])$$

   est une distance sur $L^p([0, 1])$.
2. *Soit $f \in L^p([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la continuité de l'application $x \mapsto \int_0^x |f(t)|^p dt$, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in L^p([0, 1])$ qui satisfont $\delta_p(f_j) \leq \varepsilon$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $f = \frac{1}{n}(f_1 + \cdots + f_n)$.*
3. *En déduire que le seul voisinage convexe de 0 dans $L^p([0, 1])$ est $L^p([0, 1])$ et que ce n'est pas un espace localement convexe.*

Exercice 1.7.15 *Soit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de $[0, 1]$ telle que $a_p \neq a_q$ pour $p \neq q$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$. Si $f \in C^0([0, 1])$, on pose*

$$\|f\|_{A,\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |f(a_n)|.$$

1. *Montrer que* $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ *est une semi-norme sur* $C^0([0,1])$. *A quelle(s) condition(s) a-t-on une norme ?*
2. *Montrer que la topologie définie par* $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ *est moins fine que celle de la convergence uniforme.*
3. *Montrer que* $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ *et* $\|\cdot\|_{A',\alpha'}$ *définissent la même topologie sur* $C^0([0,1])$ *si et seulement si*
$$A = A' \quad \textit{et} \quad \exists c, C > 0 \,:\, c\alpha_n \leq \alpha'_n \leq C\alpha_n \,\forall n \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

Construction d'espaces localement convexes

Dans ce chapitre, nous présentons quelques techniques classiques de construction d'espaces localement convexes : les sous-espaces, les espaces produits et les espaces quotients. Nous nous intéressons ensuite à un cas particulier de limites projectives et un cas particulier de limites inductives. Nous retrouvons en particulier la définition de la topologie de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$.

2.1 Sous-espaces

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Rappelons que si Y est un sous-ensemble de X, alors on peut munir Y de la topologie la moins fine rendant l'inclusion $i : Y \to X$ continue. C'est la topologie induite par X sur Y. En particulier, les ouverts de Y sont de la forme $\Omega \cap Y$ où $\Omega \in \mathcal{T}$. Dans le cas où X est un espace localement convexe et Y est un sous-espace vectoriel, cette topologie peut également être définie via les restrictions des semi-normes de X.

Définition 2.1.1 Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X. Notons $\mathcal{P}|_Y$ la restriction des semi-normes de $\mathcal{P}$ à Y. Alors $\mathcal{P}|_Y$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur Y et l'espace $(Y, \mathcal{P}|_Y)$ est un *sous-espace* (localement convexe) de $(X, \mathcal{P})$. Pour simplifier les notations, on le note également $(Y, \mathcal{P})$.

Il est clair que l'injection canonique $i : (Y, \mathcal{P}|_Y) \to (X, \mathcal{P})$ est continue. De plus, les boules de Y sont de la forme $b_p(y, \varepsilon) \cap Y$ où $b_p(x, \varepsilon)$ est une boule de X. Ainsi, la topologie de $(Y, \mathcal{P}|_Y)$ correspond à la topologie induite par X sur Y.

2.2 Espaces produits

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces topologiques. On considère le produit

$$\prod_{i \in I} X_i = \big\{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i \ \forall i \in I\big\}.$$

On peut munir ce produit de la topologie la moins fine rendant les projections

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

continues pour tout $j \in I$. C'est la topologie produit et une base de cette topologie est donnée par les produits d'ouverts qui n'ont qu'un nombre fini de termes propres. De plus, si $(Y, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$, alors f est continue si et seulement si les applications $\pi_j \circ f$ sont continues pour tout $j \in I$.

Si les X_i, $i \in I$, sont des espaces vectoriels, on munit le produit de l'addition et de la multiplication scalaire définies composante à composante.

Définition 2.2.1 Soit $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes. On considère

$$\mathcal{P} = \left\{ \sup_{j \in J} p_j \circ \pi_j : J \subseteq I \text{ fini }, p_j \in \mathcal{P}_j \right\}.$$

Il est clair qu'il s'agit d'un ensemble filtrant de semi-normes sur $X = \prod_{i \in I} X_i$. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est appelé le *produit* (localement convexe) des espaces $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$.

Remarquons que les boules de cette topologie sont données par les produits de la forme

$$\prod_{i \in I} B_i \quad \text{où} \quad B_i = \begin{cases} b_{p_i}(x_i, \varepsilon) & \text{si} \quad i \in J \\ X_i & \text{si} \quad i \notin J \end{cases}$$

avec $J \subseteq I$ fini, $p_i \in \mathcal{P}_i$, $x_i \in X_i$ et $\varepsilon > 0$. La topologie définie via la Définition 2.2.1 correspond donc à la topologie produit.

2.3 Espaces quotients

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Le quotient $X/_\sim$ est l'espace formé des classes d'équivalences de X pour $\sim$. On peut munir cet espace de la topologie la plus fine rendant le passage au quotient

$$\pi : X \to X/_\sim : x \mapsto [x]_\sim$$

continu. On l'appelle la topologie quotient. Rappelons qu'un sous-ensemble U de $X/_\sim$ est ouvert pour la topologie quotient si et seulement si $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. De plus, une application $f : X/L \to Y$ est continue si et seulement si $f \circ \pi_L : X \to Y$ est continue.

Considérons un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ et L un sous-espace vectoriel de X. On s'intéresse à l'espace quotient X/L formé des classes d'équivalences de X pour la relation $\sim_L$ définie par

$$x \sim_L y \iff x - y \in L.$$

Ainsi, on a $[x]_L = x + L$. Par conséquent,

$$\inf_{l \in L} p(x + l) = \inf_{y \in [x]_L} p(y)$$

et la définition suivante est légitime.

Définition 2.3.1 Soit $p \in \mathcal{P}$. On définit

$$p_L : X/L \to [0, +\infty[: [x]_L \mapsto \inf_{l \in L} p(x + l).$$

Notons que si p est une norme, $p_L([x]_L)$ est la distance induite par cette norme entre x et L. Nous allons à présent montrer que la famille $\{p_L : p \in \mathcal{P}\}$ permet de définir la topologie quotient de X/L.

Proposition 2.3.2 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et L un sous-espace vectoriel de X.*

1. *Pour tout $p \in \mathcal{P}$, l'application p_L est une semi-norme sur X/L.*
2. *L'ensemble de semi-normes $\mathcal{P}_L = \{p_L : p \in \mathcal{P}\}$ est filtrant.*
3. *La topologie de $(X/L, \mathcal{P}_L)$ est la topologie quotient de X/L.*

Démonstration : 1. Soient $[x], [y] \in X/L$. On a

$$p_L([x] + [y]) = p_L([x + y]) = \inf_{l \in L} p(x + y + l).$$

Si $l_1, l_2 \in L$, on a $l_1 + l_2 \in L$ et donc

$$\inf_{l \in L} p(x + y + l) = \inf_{l_1, l_2 \in L} p(x + y + l_1 + l_2) \leq \inf_{l_1 \in L} p(x + l_1) + \inf_{l_2 \in L} p(y + l_2).$$

On en tire que $p_L([x] + [y]) \leq p_L([x]) + p_L([y])$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on a

$$L = \left\{ \frac{l}{|\lambda|} : l \in L \right\}$$

puisque L est un sous-espace vectoriel. Par conséquent, on obtient

$$p_L([\lambda x]) = \inf_{l \in L} p(\lambda x + l) = |\lambda| \inf_{l \in L} p(x + \tfrac{l}{|\lambda|}) = |\lambda| \inf_{l' \in L} p(x + l').$$

Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

2. C'est immédiat puisque $\mathcal{P}$ est filtrant.

3. Notons $\mathcal{T}_{X/L}$ la topologie quotient de X/L. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il est clair que $p_L \circ \pi_L \leq p$ et donc la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_L}$ rend la projection π_L continue. Ainsi, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_L} \subseteq \mathcal{T}_{X/L}$. Pour démontrer l'autre inclusion, considérons $U \in \mathcal{T}_{X/L}$ et $[x] \in U$. Alors $\pi_L^{-1}(U)$ est un ouvert de X qui contient x, et il existe $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(x, r) \subseteq \pi_L^{-1}(U)$. Montrons que $b_{p_L}([x], r) \subseteq U$, d'où la conclusion. Soit donc $y \in X$ tel que $\inf_{l \in L} p(x - y + l) < r$. Alors il existe $l \in L$ tel que $y - l \in b_p(x, r) \subseteq \pi_L^{-1}(U)$. Ainsi $[y - l] = [y] \in U$. ■

Proposition 2.3.3 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et L un sous-espace vectoriel de X. L'espace $(X/L, \mathcal{P}_L)$ est séparé si et seulement si L est fermé dans X.*

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} p_L([x]) = 0 \ \forall p \in \mathcal{P} &\iff \inf_{l \in L} p(x + l) = 0 \ \forall p \in \mathcal{P} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0\,,\ \forall p \in \mathcal{P}\,,\ b_p(x, \varepsilon) \cap L \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{L}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $(X/L, \mathcal{P}_L)$ est séparé, alors $x \in \overline{L}$ implique que $[x] = 0$, c'est-à-dire $x \in L$. Réciproquement, si L est fermé, alors l'équivalence précédente se réécrit

$$p_L([x]) = 0 \ \forall p \in \mathcal{P} \iff x \in L \iff [x] = [0],$$

ce qui suffit. ■

Terminons cette section par la construction du séparé d'un espace localement convexe. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Par la Proposition 1.4.1, si $(X, \mathcal{P})$ n'est pas séparé, alors l'ensemble N défini par

$$N = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x \in X : p(x) = 0\}$$

est différent de $\{0\}$.

Lemme 2.3.4 *L'ensemble N est un sous-espace vectoriel fermé de X.*

Démonstration : Soient $x, y \in N$. Alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $p(x) = p(y) = 0$. Puisque $0 \leq p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0$, on obtient que $p(x+y) = 0$. Ainsi $x + y \in N$. De même, si $x \in N$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, d'où $\lambda x \in N$.

De plus, si $x \notin N$, alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) > 0$. Ainsi $b_p(x, r) \subseteq X \setminus N$ si $r = \frac{p(x)}{2}$, ce qui montre que N est une partie fermée de X. ■

Définition 2.3.5 Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. L'espace quotient $(X/N, \mathcal{P}_N)$ est un espace localement convexe séparé. On le note $(\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{P}})$ et on l'appelle le *séparé* de $(X, \mathcal{P})$.

Le résultat suivant donne une description des semi-normes du séparé d'un espace localement convexe.

Proposition 2.3.6 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p_N([x]_N) = p(x).$$

Démonstration : Soient $x \in X$ et $p \in \mathcal{P}$. Pour tout $y \in N$, on a

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) = p(x) \quad \text{et} \quad p(x) = |p(x) - p(y)| \leq p(x+y),$$

ce qui suffit. ■

Exemple 2.3.7 Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $p \geq 1$, l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des applications $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable. On le munit de la semi-norme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cet espace n'est pas séparé puisque $\|f\|_p = 0$ lorsque $f = 0$ μ-presque partout. En notant $\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des applications $\mathcal{A}$-mesurables de X dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent presque partout, l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est défini par le quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ par $\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Il s'agit d'un espace séparé pour la norme

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.4 Limites projectives

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. Bien sûr, l'espace $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un espace vectoriel. On suppose que chaque espace X_n est muni d'un ensemble filtrant de semi-normes $\mathcal{P}_n$. L'objectif est de munir X d'une structure d'espace localement convexe. Naturellement, on va considérer la famille de semi-normes obtenues en "filtrant" l'ensemble de semi-normes $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Définition 2.4.1 On considère l'ensemble filtrant de semi-normes

$$\mathcal{P} = \left\{ \sup_{n\in J} p_n : J \subseteq \mathbb{N} \text{ fini },\ p_n \in \mathcal{P}_n \right\}$$

sur X. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est appelé la *limite projective* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est noté

$$\varprojlim_n X_n.$$

Notons qu'une base de voisinages de 0 dans X est donnée par les intersections finies de la forme

$$\bigcap_{n\in J} b_{p_n}(\varepsilon)$$

où $J \subseteq \mathbb{N}$ est fini, $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in J$ et $\varepsilon > 0$.

Le résultat suivant justifie l'introduction de cet ensemble de semi-normes sur X.

Proposition 2.4.2 *La topologie de la limite projective est la topologie localement convexe la plus faible qui rend les inclusions*

$$i_n : X \to X_n$$

continues pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Il est clair que la topologie de la limite projective rend les inclusions $i_n : X \to X_n$ continues puisque $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si $\mathcal{Q}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur X rendant les inclusions continues, montrons que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$. Soit donc $J \subseteq \mathbb{N}$ fini et $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in J$. Pour tout $n \in J$, la continuité de i_n sur $(X, \mathcal{Q})$ permet de trouver $q_n \in \mathcal{Q}$ tel que $p_n \preceq q_n$. Comme Q est filtrant et que J est fini, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $\sup_{n\in J} q_n \preceq q$. Par conséquent, $\sup_{n\in J} p_n \preceq q$, ce qui suffit. ■

Les propriétés des espaces localements convexes $(X_n, \mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, se transfère facilement à leur limite projective. Par exemple, si les espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont séparés, alors $\varprojlim_n X_n$ est séparé.

Exemple 2.4.3 Un exemple trivial mais fondamental est l'exemple d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ à semi-normes dénombrables. Si $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, on peut évidemment écrire

$$X = \varprojlim_n X_n$$

où X_n est l'espace localement convexe X muni de la semi-norme p_n.

Exemple 2.4.4 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts dont l'union donne Ω (comme construite dans l'exemple 1.4.6). Alors

$$C^0(\Omega) = \varprojlim_n C^0(K_n).$$

2.5 Limites inductives

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. On suppose que chaque espace X_n est muni d'un ensemble filtrant de semi-normes $\mathcal{P}_n$ rendant les inclusions

$$i_n : X_n \to X_{n+1}$$

continues. L'espace $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un espace vectoriel et on souhaite le munir d'une structure d'espace localement convexe.

Définition 2.5.1 Si $\pi = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\gamma = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, on pose

$$p_{\pi,\gamma}(x) = \inf \left\{ \sum_{n\in J} c_n p_n(x_n) : J \subseteq \mathbb{N} \text{ fini }, x = \sum_{n\in J} x_n \text{ avec } x_n \in X_n \right\}.$$

On vérifie facilement que $p_{\pi,\gamma}$ est une semi-norme sur X et que l'ensemble formé des semi-normes de la forme $p_{\pi,\gamma}$ est filtrant. On peut donc considérer la définition suivante.

Définition 2.5.2 L'espace localement convexe $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ muni de l'ensemble filtrant des semi-normes de la forme $p_{\pi,\gamma}$ est appelé la *limite inductive* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note

$$\varinjlim_n X_n.$$

Le lemme suivant donne une description des semi-boules de la limite inductive.

Lemme 2.5.3 *Si $\pi = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\gamma = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, on a*

$$b_{p_{\pi,\gamma}}(1) = \Gamma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_{p_n}\left(\frac{1}{c_n}\right)\right)$$

Démonstration : D'une part, si $p_n(x) < \frac{1}{c_n}$, alors $p_{\pi,\gamma}(x) < 1$. Ainsi, $b_{p_n}(\frac{1}{c_n}) \subseteq b_{p_{\pi,\gamma}}(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme les semi-boules sont localement convexes, on en tire que

$$\Gamma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_{p_n}\left(\frac{1}{c_n}\right)\right) \subseteq b_{p_{\pi,\gamma}}(1).$$

D'autre part, si $x \in b_{p_{\pi,\gamma}}(1)$, il existe une décomposition finie $x = \sum_{n\in J} x_n$ telle que

$$\sum_{n\in J} c_n p_n(x_n) < 1.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \sum_{n \in J} c_n + \sum_{n \in J} c_n p_n(x_n) < 1.$$

Si $\lambda_n = c_n\big(p_n(x_n) + \varepsilon\big)$, on peut écrire

$$x = \sum_{n \in J} \lambda_n \frac{x_n}{\lambda_n}$$

avec

$$\sum_{n \in J} |\lambda_n| = \sum_{n \in J} c_n p_n(x_n) + \varepsilon \sum_{n \in J} c_n < 1$$

et

$$p_n\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) = \frac{1}{c_n(p_n(x_n) + \varepsilon)} p_n(x_n) < \frac{1}{c_n}.$$

■

Remarque 2.5.4 Par conséquent, tout ensemble de la forme

$$\Gamma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_{p_n}(r_n)\right)$$

est un ouvert de la limite inductive X. De plus, si $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé, alors pour tout $n \leq n_0$, la continuité de l'inclusion de X_n dans X_{n_0} nous permet de trouver une semi-boule $b_{p_n}(r_n)$ de X_n telle que $b_{p_n}(r_n) \subseteq b_{p_{n_0}}(r_{n_0})$. On en tire que l'ensemble

$$\Gamma\left(\bigcup_{n \geq n_0} b_{p_n}(r_n)\right)$$

est également ouvert dans X.

Nous allons voir que la topologie de la limite inductive est la topologie localement convexe finale relative à la famille d'applications $I_n : X_n \to X$.

Proposition 2.5.5 *La limite inductive de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la topologie localement convexe la moins faible rendant les inclusions*

$$I_n : X_n \to X$$

continues.

Démonstration : Si $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, on a

$$p_{\pi,\gamma} \circ I_n \leq c_n \, p_n,$$

ce qui montre que la topologie de la limite inductive rend I_n continu.

De plus, soit $\mathcal{Q}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur Y rendant les inclusions continues. Alors, si $q \in \mathcal{Q}$, il existe p_n et $c_n > 0$ tels que $q \circ I_n \leq c_n\, p_n$. On en tire que

$$q(f) \leq \sum_{j \in J} q(f_j) \leq \sum_{j \in J} c_j\, p_j(f_j)$$

pour toute décomposition finie de f en les $f_j \in X_j$. Ainsi, $q \leq p_{\pi,\gamma}$ où $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui suffit. ■

Le résultat suivant est naturel.

Corollaire 2.5.6 *Soit $X = \varinjlim_n X_n$ et $(Y, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe. Une application linéaire $T : X \to Y$ est continue si et seulement si sa restriction $T|_{X_n}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration : Si T est continue, alors l'application $T|_{X_n} = T \circ I_n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la Proposition 2.5.5. Réciproquement, supposons que $T|_{X_n}$ est continu pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $q \in \mathcal{Q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathcal{P}_n$ et $c_n > 0$ tel que $q \circ T|_{X_n} \leq c_n\, p_n$. Alors,

$$q \circ T(x) \leq \sum_{n \in J} q \circ T(x_n) \leq \sum_{n \in J} c_n\, p_n(x_n)$$

pour toute décomposition finie de x en les $x_n \in X_n$. Ainsi, $q \leq p_{\pi,\gamma}$ où $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où la conclusion. ■

Par conséquent, la topologie de la limite inductive induit dans chaque espace X_n des semi-normes plus faibles que celles de X_n. Cependant, en général, on n'a pas l'équivalence. Cela implique que les propriétés des limites inductives ne peuvent pas toujours être obtenues à partir des propriétés des espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$. On va se placer dans un cadre plus restreint, mais cependant rencontré régulièrement en pratique.

Définition 2.5.7 Une limite inductive est *stricte* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les semi-normes induites par X_{n+1} dans X_n sont équivalentes aux semi-normes de X_n. Une limite inductive est *hyperstricte* si elle est stricte et si chaque X_n est fermé dans X_{n+1}.

Ainsi, une limite inductive est stricte si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $(X_n, \mathcal{P}_n)$ est un sous-espace localement convexe de $(X_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1})$.

Exemple 2.5.8 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact. Pour tout compact K de Ω, on pose

$$\mathcal{D}^K(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \subseteq K\}$$

et on le munit de l'ensemble des semi-normes définies par

$$\|f\|_{K,k} := \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|$$

avec $k \in \mathbb{N}$. Alors, si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de compacts dont l'union est égale à Ω, on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la limite inductive associée aux espaces $\mathcal{D}^{K_n}(\Omega)$, i.e.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^{K_n}(\Omega).$$

De plus, la limite inductive est hyperstricte.

Exemple 2.5.9 L'espace C_0^∞ des germes des fonctions C^∞ en 0 est l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\infty(\,]-\varepsilon, \varepsilon[\,)$. On le munit de la topologie de la limite inductive

$$C_0^\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} C^\infty\left(\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right).$$

Cette limite inductive est hyperstricte.

Le résultat suivant montre que les espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$ sont des sous-espaces localement convexes de la limite inductive stricte.

Proposition 2.5.10 *Si X est la limite inductive stricte de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors les semi-normes induites par X dans chaque X_n sont équivalentes aux semi-normes de X_n.*

Démonstration : Fixons $n \in \mathbb{N}$. La continuité de l'inclusion $I_n : X_n \to X$ obtenue dans le Corollaire 2.5.6 permet d'affirmer que l'ensemble de semi-normes induit par X sur X_n est plus faible que $\mathcal{P}_n$. Soit à présent une semi-norme p_n de X_n. Par hypothèse, les semi-normes induites par X_{n+1} sur X_n sont équivalentes à $\mathcal{P}_n$ et il existe donc une semi-norme $p_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$ et un rayon $r_1 > 0$ tels que

$$b_{p_{n+1}}(r_1) \cap X_n \subseteq b_{p_n}(1).$$

De même, il existe une semi-norme $p_{n+2} \in \mathcal{P}_{n+2}$ et un rayon $r_2 > 0$ tels que

$$b_{p_{n+2}}(r_2) \cap X_{n+1} \subseteq b_{p_{n+1}}(r_1)$$

et en itérant la construction, on construit une suite de semi-boules $b_{p_{n+i}}(r_i)$ de X_{n+i} telles que

$$b_{p_{n+i}}(r_i) \cap X_{n+i-1} \subseteq b_{p_{n+i-1}}(r_{i-1}).$$

Montrons que

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} b_{p_{n+i}}(r_i)\right) \cap X_n = b_{p_n}(1)$$

où $r_0 = 1$. On obtiendra alors la conclusion par la Remarque 2.5.4. Bien sûr, il suffit de montrer l'inclusion $\subseteq$, l'autre inclusion étant évidente. Soit donc $x \in X_n$ tel que

$$x = \sum_{j=0}^{L} \lambda_j x_j$$

avec $\sum_{j=0}^{L} |\lambda_j| \leq 1$ et $x_j \in \bigcup_{i=0}^{+\infty} b_{p_{n+i}}(r_i)$ pour tout $j \in \{0, \ldots, L\}$. Au vu de la construction des semi-boules, on peut grouper les éléments x_j en fonction de leur appartenance respective aux ensembles $b_{p_{n+L}}(r_L)$, $b_{p_{n+L-1}}(r_{L-1}) \cap (X_{n+L-1} \setminus b_{p_{n+L}}(r_L))$ jusqu'à $b_{p_n}(1) \cap (X_n \setminus b_{p_{n+1}}(r_1))$. On peut donc écrire

$$x = \underbrace{\sum_j \lambda_{j,0} x_{j,0}}_{\in b_{p_n}(r_0)} + \underbrace{\sum_j \lambda_{j,1} x_{j,1}}_{\in b_{p_{n+1}}(r_1)} + \cdots + \underbrace{\sum_j \lambda_{j,L} x_{j,L}}_{\in b_{p_{n+L}}(r_L)}.$$

Remarquons que

$$\sum_j \lambda_{j,L} x_{j,L} = x - \sum_j \lambda_{j,0} x_{j,0} - \cdots - \sum_j \lambda_{j,L-1} x_{j,L-1} \in X_{n+L-1},$$

d'où

$$\sum_j \lambda_{j,L} x_{j,L} \in X_{n+L-1} \cap b_{p_{n+L}}(r_L) \subseteq b_{p_{n+L-1}}(r_{L-1}).$$

De même,

$$\sum_j \lambda_{j,L} x_{j,L} + \sum_j \lambda_{j,L-1} x_{j,L-1} \in X_{n+L-2} \cap b_{p_{n+L-1}}(r_{L-1}) \subseteq b_{p_{n+L-2}}(r_{L-2}).$$

En continuant de proche en proche, on obtient que

$$x \in X_n \cap b_{p_{n+1}}(r_1) \subseteq b_{p_n}(1),$$

d'où la conclusion. ■

Attention, cette condition ne donne pas une caractérisation de la topologie de la limite inductive. Autrement dit, un ensemble de semi-normes sur X qui induit dans chaque X_n des semi-normes équivalentes à $\mathcal{P}_n$ n'est pas nécessairement équivalent à l'ensemble des semi-normes de la forme $p_{\pi,\gamma}$.

Corollaire 2.5.11 *Si X est la limite inductive stricte de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si les espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont séparés, alors X est séparé.*

Démonstration : Soit $x \in X$ tel que $p_{\pi,\gamma}(x) = 0$ pour tous π et γ. Comme $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$. Par la Proposition 2.5.10, $p_n(x) = 0$ pour tout $p_n \in \mathcal{P}_n$, ce qui permet d'obtenir la conclusion. ■

Nous allons à présent nous placer dans le cadre de limites inductives hyperstrictes pour obtenir des propriétés supplémentaires.

Proposition 2.5.12 *Si X est la limite inductive hyperstricte de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors un ensemble $F \subseteq X_n$ est fermé dans X si et seulement si il est fermé dans X_n.*

Démonstration : Comme les semi-normes de X_n sont équivalentes à celles induites par X, tout ensemble $F \subseteq X_n$ fermé dans X est fermé dans X_n. Supposons à présent que $F \subseteq X_n$ est fermé dans X_n. Puisque X_n est fermé dans X_{n+1} et que la topologie induite par X_{n+1} sur X_n est celle de X_n, l'ensemble F est également fermé dans X_{n+1}. De plus, X_{n+1} est fermé dans X_{n+2} et les semi-normes induites par X_{n+2} sont équivalentes à celles de X_{n+1}. Ainsi, F est fermé dans X_{n+2}. On continue ainsi de proche en proche pour obtenir que F est fermé dans X_{n+i} pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit à présent $x \in X \setminus F$. Alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_{n+i}$. Comme F est fermé dans X_{n+i}, il existe une semi-boule $b_{p_{n+i}}(x, r)$ de X_{n+i} qui ne rencontre pas F. La Proposition 2.5.10 implique que $b_{p_{n+i}}(x, r)$ est également un ouvert de X, d'où la conclusion. ■

Corollaire 2.5.13 *Si X est la limite inductive hyperstricte de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si $A \subseteq X_n$, alors*

$$\overline{A}^X = \overline{A}^{X_m}$$

pour tout $m \geq n$.

Démonstration : Fixons $m \geq n$. Puisque les semi-normes induites par X sur X_m sont équivalentes à celles de X_m par la Proposition 2.5.10, on a

$$\overline{A}^{X_m} \subseteq \overline{A}^{X}.$$

De plus, la Proposition 2.5.12 implique que $\overline{A}^{X_m}$ est fermé dans X et puisqu'il contient A, on obtient l'autre inclusion. ■

Corollaire 2.5.14 *Si X est la limite inductive stricte de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors la limite inductive est hyperstricte si et seulement si chaque X_n est fermé dans X.*

Démonstration : Supposons que la limite inductive est hyperstricte. Puisque X_n est fermé dans lui-même, il est également fermé dans X par la Proposition 2.5.12. Réciproquement, si X_n est fermé dans X, alors il est également fermé dans X_{n+1} par l'équivalence des semi-normes données dans la Proposition 2.5.10. ■

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 *Montrer que*

1. *tout produit fini d'espaces normés est normé,*
2. *tout produit dénombrable d'espaces à semi-normes dénombrables est à semi-normes dénombrables.*

Exercice 2.6.2 *Soit $(X_n, \mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces localement convexes. Montrer que les suites du produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ n'ayant qu'un nombre fini de composantes non-nulles forment un sous-ensemble dense du produit.*

Exercice 2.6.3 *Soit X_i, $i \in I$, une famille d'espaces vectoriels. L'ensemble*

$$\left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \#\{i \in I : x_i \neq 0\} < +\infty \right\}$$

est un sous-espace vectoriel du produit, appelé somme directe *des X_i, $i \in I$, et noté*

$$\bigoplus_{i\in I} X_i.$$

Soit $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes. On considère

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i\in I} c_i\, p_i \circ \pi_i : c_i \geq 0\,,\, p_i \in \mathcal{P}_i \right\}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est appelé la* somme directe *(localement convexe) des espaces $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$.*
2. *Montrer que cette topologie rend les injections canoniques*

$$s_j : X_j \to \bigoplus_{i\in I} X_i : x \mapsto (\delta_{ij} x)_{i\in I}$$

continues.

3. *Montrer que si $\mathcal{Q}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur $\bigoplus_{i\in I} X_i$ qui rend les injections canoniques continues, alors $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$.*
4. *Montrer que l'injection canonique*

$$I : \bigoplus_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_i$$

est continue.

Exercice 2.6.4 *Soit $T : X \to Y$ une application linéaire entre espaces vectoriels. Alors $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de X et on a la factorisation*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_{\ker(T)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ X/\ker(T) \arrow[r, "T_0"'] & \mathrm{im}(T) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

où T_0 est un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est le théorème d'isomorphie. On va à présent considérer des espaces localement convexes $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ et s'intéresser à la continuité de T_0 et T_0^{-1}.

1. *Montrer que T_0 est continu si et seulement si T est continu.*
2. *Montrer que T_0^{-1} est continu si et seulement si T est relativement ouvert.*

Chapitre 3

Espaces localement convexes complets

Dans ce chapitre, nous étudions deux classes d'espaces localement convexes qui jouent un rôle central en analyse fonctionnelle : les espaces de Banach et de Fréchet. Ces espaces sont des espaces complets et dans un premier temps, nous introduisons cette notion dans le cadre des espaces localement convexes. Nous présentons également trois théorèmes fondamentaux liés aux espaces de Fréchet : le théorème de Banach-Steinhaus, le théorème de l'opérateur ouvert et le théorème du graphe fermé. Quelques premières conséquences de ces résultats sont également démontrées.

3.1 Suites, filtres et convergence

Certains espaces topologiques ne sont pas à base dénombrable de voisinages. Dans ces espaces, on ne peut pas utiliser les suites pour caractériser les différentes notions topologiques. On peut alors utiliser la notion de *filtre* qui permet de généraliser celle de convergence.

Définition 3.1.1 Soit X un ensemble non vide. Un *filtre* sur X est une famille non-vide $\mathcal{F}$ de parties de X qui vérifie les propriétés suivantes :

($\mathcal{F}$1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

($\mathcal{F}$2) si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, alors $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

($\mathcal{F}$3) Si $F_1 \in \mathcal{F}$ et $F_1 \subseteq F_2$, alors $F_2 \in \mathcal{F}$.

Exemples 3.1.2
- Si $Y \subseteq X$ est non-vide, alors $\mathcal{F}_Y = \{F \subseteq X : Y \subseteq F\}$ est un filtre sur X.
- Si X est infini, alors l'ensemble $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ est fini }\}$ est un filtre sur X.
- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X, l'ensemble des parties de X qui contiennent une queue de cette suite est un filtre sur X, appelé le *filtre associé à* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x est un filtre sur X, appelé le *filtre des voisinages de* x.

Définition 3.1.3 Soit $\mathcal{B}$ une famille non-vide de parties non-vides de X telle que pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subseteq B_1 \cap B_2$. Alors

$$\mathcal{F} = \left\{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } B \subseteq F\right\}$$

est un filtre sur X, appelé le *filtre engendré par* $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ est la *base* du filtre.

On vérifie directement que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ et en utilisant ($\mathcal{F}3$), que $\mathcal{F}$ est le plus petit filtre contenant $\mathcal{B}$.

Définition 3.1.4 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X *converge* vers $x \in X$ si $\mathcal{F}$ contient le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x. On dit que x est un point *limite* du filtre $\mathcal{F}$.

Remarque 3.1.5 Bien sûr, un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x si $\mathcal{F}$ contient une base de voisinages $\mathcal{B}_x$ de x. Il suffit pour cela d'utiliser la propriété ($\mathcal{F}3$).

Remarque 3.1.6 Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X *converge* vers $x \in X$ si pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$. C'est équivalent à dire que le filtre associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. La notion de convergence de filtres généralise donc bien celle de convergence de suites.

Comme dans le cas des suites convergentes, l'unicité de la limite est asurée lorsque l'on travaille dans des espaces séparés.

Proposition 3.1.7 *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé et si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X qui converge, alors sa limite est unique.*

Démonstration : Supposons qu'il existe $x \neq y$ dans X tels que $\mathcal{F}$ converge vers x et vers y. Comme X est séparé, il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $W \in \mathcal{V}_y$ tels que $V \cap W = \emptyset$. Par définition de la convergence de $\mathcal{F}$, on a $V \in \mathcal{F}$ et $W \in \mathcal{F}$, et donc par la propriété ($\mathcal{F}2$), $\emptyset = V \cap W \in \mathcal{F}$. Ceci est impossible vu ($\mathcal{F}1$). ■

Soit Y un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur Y, alors c'est la base d'un filtre sur X. Ainsi, lorsque l'on parle d'un filtre $\mathcal{F}$ de Y qui converge dans X, cela signifie que le filtre de X engendré par $\mathcal{F}$ converge.

Proposition 3.1.8 *Une partie Y d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est fermée si et seulement si Y contient la limite de tous ses filtres convergents dans X.*

Démonstration : Supposons que Y est fermé. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Y qui converge vers x dans $(X, \mathcal{T})$. Alors, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $V \in \mathcal{F}$. En particulier, $V \cap Y \neq \emptyset$ et $x \in \overline{Y} = Y$.

Réciproquement, si $x \in \overline{Y}$, alors $\mathcal{F} = \{V \cap Y : V \in \mathcal{V}_x\}$ est un filtre sur Y. De plus, c'est la base du filtre $\mathcal{V}_x$ de X qui converge vers x. Par hypothèse, on a donc $x \in Y$, ce qui suffit. ■

Remarque 3.1.9 En fait, nous avons montré qu'un point x est adhérent à un ensemble Y si et seulement si x est la limite dans X d'un filtre de Y.

Les filtres permettent également de donner une caractérisation de la continuité d'une application comme le montre le résultat suivant. Pour cela, nous introduisons la notion de filtre image. Si $f : X \to Y$ et si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, l'ensemble $\{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est un filtre sur Y appelé *filtre image* de $\mathcal{F}$ par f et est noté $f(\mathcal{F})$.

Proposition 3.1.10 *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ de X qui converge vers $x \in X$, le filtre image $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration : Supposons que f est continu. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de X qui converge vers x. Soit V un voisinage de $f(x)$. Par continuité, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x et donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Donc $V \in f(\mathcal{F})$, ce qui suffit.

Réciproquement, soit V un voisinage de $f(x)$. On sait que le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x converge vers x, donc par hypothèse, $f(\mathcal{V}_x)$ converge vers $f(x)$. Ainsi, $V \in f(\mathcal{V}_x)$, d'où $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$. ■

Remarque 3.1.11 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *séquentiellement continu* si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers x, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Si $(X, \mathcal{T})$ est à base dénombrable de voisinages, alors on sait que f est séquentiellement continu si et seulement si f est continu. En particulier, si X est métrisable, on peut utiliser le “critère par les suites”.

Terminons cette section par le résultat suivant qui caractérise la convergence de filtres dans le cas d'espaces localement convexes. Ce sera le point de départ pour définir les filtres de Cauchy dans la section suivante.

Proposition 3.1.12 *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Alors $\mathcal{F}$ converge vers $x \in X$ si et seulement pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $p(x-y) < \varepsilon$ pour tout $y \in F$.*

Démonstration : $\Rightarrow$ Il suffit de prendre $F = b_p(x, \varepsilon)$.

$\Leftarrow$ On utilise la Remarque 3.1.5. ■

3.2 Filtres de Cauchy et espaces complets

Au vu de la Proposition 3.1.12, il semble naturel de généraliser la notion de suite de Cauchy au moyen des filtres dans les espaces localement convexes de la manière suivante.

Définition 3.2.1 Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est *de Cauchy* si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que

$$p(x-y) < \varepsilon \quad \forall\, x, y \in F.$$

Remarque 3.2.2 Soit $\mathcal{F}$ le filtre associé à une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Alors $\mathcal{F}$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_n - x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N.$$

Proposition 3.2.3 *Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe, alors tout filtre convergent sur X est de Cauchy.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{F}$ est un filtre sur X qui converge vers $x \in X$. Alors par la Proposition 3.1.12, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $p(x-y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $y \in F$. Par conséquent, pour tous $y, z \in F$, on a

$$p(y-z) \leq p(y-x) + p(x-z) < \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

En général, la réciproque de ce résultat est fausse. On introduit donc naturellement la notion suivante.

Définition 3.2.4 Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est *complet* si tout filtre de Cauchy sur X converge. De manière plus générale, une partie Y de X est *complète* si tout filtre de Cauchy sur Y converge dans Y.

Proposition 3.2.5 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Alors toute partie complète Y de X est fermée.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Y qui converge vers $x \in X$. Comme $\mathcal{F}$ converge, la Proposition 3.2.3 implique que $\mathcal{F}$ est de Cauchy. Comme Y est complet, $\mathcal{F}$ converge dans Y (donc dans X) et on en tire que $x \in Y$. On obtient la conclusion en utilisant la Proposition 3.1.8. ■

Corollaire 3.2.6 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Si Y est un sous-espace vectoriel de X de dimension finie, alors Y est complet et fermé dans X.*

Démonstration : La Proposition 1.4.7 implique que la topologie de Y est donnée par la topologie usuelle de $\mathbb{K}^{\dim Y}$. Ainsi, Y est un espace complet et la Proposition 3.2.5 donne que Y est fermé. ■

Proposition 3.2.7 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé et complet. Alors toute partie fermée de X est complète.*

Démonstration : Soit Y une partie fermée de X et soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur Y. Alors $\mathcal{F}$ est également un filtre de Cauchy de X et comme X est complet, il converge. Comme Y est fermé, le point limite appartient à Y, ce qui suffit. ■

Dans ce qui suit, nous montrons que dans le cas d'un espace à semi-normes dénombrables, on peut se limiter à étudier les convergences des suites.

Définition 3.2.8 Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est *séquentiellement-complet*, ce que l'on note *sq-complet*, si toute suite de Cauchy sur X converge. De manière plus générale, une partie Y de X est *séquentiellement-complète*, ce que l'on note *sq-complète*, si toute suite de Cauchy sur Y converge dans Y.

Théorème 3.2.9 *Un espace séparé à semi-normes dénombrables $(X, \mathcal{P})$ est complet si et seulement si il est sq-complet.*

Démonstration : Il est clair que tout espace complet est sq-complet. Réciproquement, supposons que l'espace est sq-complet. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $(X, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ avec $p_m \leq p_{m+1}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $F_m \in \mathcal{F}$ tel que

$$p_m(x - y) < \frac{1}{m} \quad \forall\, x, y \in F_m.$$

Quitte à remplacer F_m par $F_m \cap F_{m-1} \cap \cdots \cap F_1$, en utilisant la propriété $(\mathcal{F}2)$, on peut supposer que la suite $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $x_m \in F_m$. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy puisque $p_m(x_r - x_s) < \frac{1}{m}$ pour tous $r, s \geq m$. Par hypothèse, elle converge vers $x \in X$.

Pour conclure, il reste à montrer que $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{F}$, où $\mathcal{B}_x$ est l'ensemble des boules centrées en x. Fixons $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq m$ tel que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $p_m(x_N - x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $y \in F_N$, on a alors

$$p_m(y-x) \leq p_m(y-x_N) + p_m(x_N - x) \leq p_N(y-x_N) + p_m(x_N - x) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On en tire que $F_N \subseteq b_{p_m}(x,\varepsilon)$ et par la propriété $(\mathcal{F}3)$, on a $b_{p_m}(x,\varepsilon) \in \mathcal{F}$. ■

Corollaire 3.2.10 *Un espace normé est complet si et seulement si il est sq-complet.*

Lorsque l'on travaille dans un espace à semi-normes dénombrables, on dispose d'une distance d et donc de la notion usuelle de suites de Cauchy. Notons que la propriété “être de Cauchy” dépend de la distance choisie : si d_1 et d_2 sont deux distances qui définissent la même topologie sur un espace X, alors (X, d_1) peut être complet sans que (X, d_2) le soit. La complétude n'est donc pas une notion topologique. Cette remarque est illustrée dans les exercices 3.6.2 et 3.6.3.

Le résultat suivant montre que les suites de Cauchy d'un espace à semi-normes dénombrables sont les mêmes que les suites de Cauchy définies à partir de la distance introduite dans le Théorème 1.4.10.

Proposition 3.2.11 *Considérons un espace séparé à semi-normes dénombrables $(X,\mathcal{P})$ avec*
$\mathcal{P} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$, où $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissant. Si d est la distance définie sur X par

$$d(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} \frac{p_m(x-y)}{1+p_m(x-y)},$$

alors une suite de X est de Cauchy pour $\mathcal{P}$ si et seulement si elle l'est pour d. En particulier, $(X,\mathcal{P})$ est complet si et seulement si (X,d) l'est.

Démonstration : Il suffit d'imiter la preuve du Théorème 1.4.10 et d'utiliser les inclusions qui existent entre les boules définies à partir $\mathcal{P}$ et celles définies à partir de d. ■

Proposition 3.2.12 *Soient $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes séparés complets et $\mathcal{F}$ un filtre sur le produit $\prod_{i\in I} X_i$.*

1. *Le filtre $\mathcal{F}$ converge vers $x \in \prod_{i\in I} X_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, le filtre image $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $\pi_i(x)$ dans X_i.*
2. *Le filtre $\mathcal{F}$ est de Cauchy dans $\prod_{i\in I} X_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, le filtre image $\pi_i(\mathcal{F})$ est de Cauchy dans X_i.*

En particulier, tout produit d'espaces localement convexes complets est complet.

Démonstration : La preuve est immédiate par définition du système de semi-normes $\prod_{i\in I} \mathcal{P}_i$. ■

3.3 Espaces de Banach et de Fréchet

Dans cette section, on s'intéresse aux espaces normés ou à semi-normes dénombrables complets. Ce sont des espaces très importants qui apparaissent couramment en analyse.

Définition 3.3.1 Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Par le Corollaire 3.2.10, un espace de Banach est un espace normé sq-complet.

Exemples 3.3.2

— Les espaces de suites ℓ^p, avec $p \geq 1$ et ℓ^∞ sont des espaces de Banach. Comme c_0 est un sous-espace fermé de ℓ^∞, il s'agit également d'un espace de Banach.

— Si K est un compact de $\mathbb{R}$, l'espace $C^0(K)$ est un espace de Banach.

— Si $p \geq 1$, les espaces $L^p(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$ sont de Banach.

Définition 3.3.3 Un *espace de Fréchet* est un espace séparé à semi-normes dénombrables complet.

Par le Théorème 3.2.9, un espace de Fréchet est un espace séparé à semi-normes dénombrables sq-complet.

Exemples 3.3.4

— L'espace de suites ω est un espace de Fréchet.

— Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et si $l \in \mathbb{N}$, l'espace $C^l(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

Nous allons à présent regarder ce que donnent les constructions classiques d'espaces localement convexes présentées au Chapitre 2 par rapport aux familles d'espaces de Banach et de Fréchet.

Pour les sous-espaces localement convexes, la Proposition 3.2.7 implique directement le résultat suivant.

Proposition 3.3.5

1. *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach un espace de Banach.*
2. *Tout sous-espace fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.*

De même, la preuve du résultat suivant est immédiate au vu de la Proposition 3.2.12.

Proposition 3.3.6

1. *Tout produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.*
2. *Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.*

Pour les espaces quotients, nous introduisons tout d'abord la notion de série. Nous obtenons ensuite un critère fondamental de complétion pour les espaces à semi-normes dénombrables.

Définition 3.3.7 Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de X. La suite des sommes partielles $\left(\sum_{m=0}^{M} x_m\right)_{M\in\mathbb{N}}$ s'appelle la *série* associée à $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Si elle converge dans $(X, \mathcal{P})$, on note

$$\sum_{m=0}^{+\infty} x_m$$

sa limite. On dit que la série est *absolument convergente* dans $(X, \mathcal{P})$ si pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p(x_m) < +\infty.$$

Il est clair que toute série absolument convergente est de Cauchy : en effet, on a pour tout $p \in \mathcal{P}$

$$p\left(\sum_{m=r}^{s} x_m\right) \leq \sum_{m=r}^{s} p(x_m) \longrightarrow 0$$

si $r, s \to +\infty$. En particulier, dans un espace complet, toute série absolument convergente est convergente. Ceci donne en fait une caractérisation des espaces de Fréchet et de Banach.

Proposition 3.3.8 *Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace séparé à semi-normes dénombrables et si toute série absolument convergente de $(X, \mathcal{P})$ est convergente, alors $(X, \mathcal{P})$ est complet.*

Démonstration : Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(X, \mathcal{P})$. Supposons que $\mathcal{P}$ est donné par la suite croissante de semi-normes $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Par induction, nous pouvons en extraire une sous-suite $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$p_k(x_{m_k} - x_m) \leq 2^{-k} \quad \forall m \geq m_k.$$

Remarquons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} p_N(x_{m_1}) + \sum_{k=1}^{+\infty} p_N(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) &\leq p_N(x_{m_1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p_N(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) + \sum_{k=N}^{+\infty} p_k(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) \\ &\leq p_N(x_{m_1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p_N(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) + \sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k} < +\infty. \end{aligned}$$

On en tire que la série $x_{m_1} + \sum_{k=1}^{M}(x_{m_{k+1}} - x_{m_k})$ est absolument convergente et par hypothèse, elle converge donc. Ainsi, la sous-suite

$$x_{m_{M+1}} = x_{m_1} + \sum_{k=1}^{M}(x_{m_{k+1}} - x_{m_k})$$

converge vers un élément $x \in X$. On en déduit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$p_N(x_m - x) \leq p_N(x_m - x_{m_k}) + p_N(x_{m_k} - x) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

si k est suffisamment grand et si $m \geq m_k$. ■

Remarque 3.3.9 On vient de montrer que si une suite de Cauchy d'un espace localement convexe admet une sous-suite convergente, alors elle est convergente.

Corollaire 3.3.10 *Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé et si toute série absolument convergente de $(X, \|\cdot\|)$ est convergente, alors $(X, \|\cdot\|)$ est complet.*

Corollaire 3.3.11

1. *Tout quotient d'un espace de Banach par un sous-espace fermé est un espace de Banach.*
2. *Tout quotient d'un espace de Fréchet par un sous-espace fermé est un espace de Fréchet.*

Démonstration : On sait que le quotient est séparé par la Proposition 2.3.3. Nous présentons ensuite la preuve dans le cas d'un espace de Fréchet $(X, \mathcal{P})$, où $\mathcal{P}$ est donné par la suite croissante de semi-normes $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Soit L un sous-espace fermé de $(X, \mathcal{P})$ et soit $\sum_{k=0}^{+\infty}[x_k]$ une série absolument convergente de X/L. Par définition des semi-normes de l'espace quotient, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $y_m \in [x_m]$ tel que $p_m(y_m) \leq p_{L,m}([x_m]) + 2^{-m}$. La série $\sum_{m=0}^{+\infty} y_m$ est absolument convergente dans $(X, \mathcal{P})$ puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p_N(y_m) \leq \sum_{m=0}^{N-1} p_N(y_m) + \sum_{m=N}^{+\infty} p_m(y_m) \leq \sum_{m=0}^{N-1} p_N(y_m) + \sum_{m=N}^{+\infty} \left(p_{L,m}([x_m]) + 2^{-m}\right) < +\infty.$$

Par conséquent, la série converge dans $(X, \mathcal{P})$. Comme le passage au quotient π_L est une application linéaire continue entre espaces métrisables, on en déduit que la série $\sum_{m=0}^{+\infty}[x_m]$ converge dans le quotient X/L. On conclut par la Proposition 3.3.8. ■

Le résultat suivant est facile à vérifier.

Proposition 3.3.12 *Tout limite projective d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet. En particulier, toute limite projective d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.*

Intéressons-nous à présent au cas des limites inductives. Comme on perd le caractère dénombrable des semi-normes, une limite inductive d'espaces de Banach ou de Fréchet n'est pas un espace de Fréchet. On introduit alors les définitions suivantes.

Définition 3.3.13 Un *espace* (LB) est une limite inductive d'espaces de Banach. Un *espace* (LF) est une limite inductive d'espaces de Fréchet.

Si la limite inductive d'espaces de Banach ou de Fréchet X_n, $n \in \mathbb{N}$, est stricte, alors on a automatiquement que X_n est fermé dans X_{n+1} comme le montre le résultat suivant.

Proposition 3.3.14 *Toute limite inductive stricte d'espaces de Fréchet est hyperstricte.*

Démonstration : Supposons que la limite inductive des X_n, $n \in \mathbb{N}$, est stricte. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les semi-normes induites par X_{n+1} sur X_n sont équivalentes aux semi-normes de X_n. Par conséquent, X_n est un sous-espace complet de X_{n+1} et par la Proposition 3.2.5, il est donc fermé dans X_{n+1}. ■

Ainsi, un espace (LB) ou (LF) strict est hyperstrict. Le résultat suivant montre que le passage à la limite inductive stricte conserve le caractère complet des espaces. La preuve de ce résultat sera admise.

Proposition 3.3.15 *Tout espace (LB) ou (LF) strict est complet.*

Esquissons l'idée de la preuve dans le cas sq-complet. Cette preuve est basée sur le lemme suivant, que l'on admet également.

Lemme 3.3.16 *Soit X la limite inductive hyperstricte d'espaces X_n, $n \in \mathbb{N}$. Une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de X converge dans X si et seulement si elle appartient à un des espaces X_n et converge dans cet espace X_n.*

Soit $X = \varinjlim_n X_n$ une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X et soit p une semi-norme de X. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p(x_r - x_s) < 1$ pour tous $r, s \geq N$. On en tire que $p(x_r) \leq p(x_N) + 1$ pour tout $r \geq N$ et donc

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} p(x_m) < +\infty$$

(on vient de montrer que toute suite de Cauchy définissait un ensemble borné, notion que l'on introduira dans le Chapitre 4). Par conséquent, la suite $(\frac{x_m}{m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans X. Par le Lemme 3.3.16, il existe n_0 tel que $(\frac{x_m}{m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de X_{n_0}. En particulier, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de X_{n_0}. En utilisant la Proposition 3.3.14, on obtient que X_{n_0} est un sous-espace localement convexe de X et donc la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est également de Cauchy dans X_{n_0}. Comme cet espace est complet, elle y converge et converge donc également dans X.

3.4 Théorème de Banach-Steinhaus

Dans cette section, nous présentons le théorème de Banach-Steinhaus ainsi que quelques unes de ses applications. Ce résultat très puissant donne une condition ponctuelle pour obtenir l'équicontinuité d'une famille d'applications linéaires. Commençons par introduire cette notion.

Définition 3.4.1 Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Une famille $(T_i)_{i\in I}$ d'opérateurs de $\mathrm{L}(X, Y)$ est *équicontinue* si pour tout $q \in \mathcal{Q}$ il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{i\in I} q \circ T_i \leq Cp.$$

La preuve du théorème de Banach-Steinhaus, énoncé ci-dessous, repose sur la construction de fermés bien choisis d'intérieur non-vide. Rappelons qu'un espace est de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. En passant au complémentaire, un espace est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Rappelons également que tout espace métrique complet (donc en particulier tout espace de Fréchet par la Proposition 3.2.11) est un espace de Baire.

Théorème 3.4.2 (Banach-Steinhaus) *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe, et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs de $\mathrm{L}(X, Y)$. Supposons que pour tout $q \in \mathcal{Q}$,*

$$\sup_{i\in I} q\big(T_i(x)\big) < +\infty$$

pour tout $x \in X$, alors la famille $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \big\{x \in X : \sup_{i\in I} q\big(T_i(x)\big) \leq n\big\} = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}\big(B_q(0, n)\big).$$

Par continuité des opérateurs T_i, il est clair que F_n est un fermé de X. De plus, par hypothèse, on a

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Puisque X est un espace de Baire, on en tire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel l'intérieur de F_n est non-vide (sinon X serait d'intérieur vide). Ainsi, il existe $p \in \mathcal{P}$, $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$B_p(x_0, \varepsilon) \subseteq F_n.$$

Puisque $B_p(x_0, \varepsilon) = x_0 + B_p(\varepsilon)$, on a

$$\sup_{i\in I} q\big(T_i(x - x_0)\big) \leq n$$

pour tout $x \in B_p(\varepsilon)$, et donc

$$q\big(T_i(x)\big) \leq q\big(T_i(x - x_0)\big) + q\big(T_i(x_0)\big) \leq 2n$$

pour tout $i \in I$. Puisque pour tout $x \in X$ tel que $p(x) \neq 0$, on a $\frac{\varepsilon}{p(x)}x \in B_p(\varepsilon)$, on obtient

$$q\big(T_i(x)\big) = \frac{p(x)}{\varepsilon} q\left(T_i\big(\frac{\varepsilon}{p(x)}x\big)\right) \leq \frac{2n}{\varepsilon} p(x)$$

pour tout $i \in I$. Il reste à traîter le cas où $p(x) = 0$. On remarque que pour tout $\delta > 0$, $\frac{x}{\delta} \in B_p(\varepsilon)$ et donc il vient

$$q\big(T_i(x)\big) = \delta q\left(T_i\big(\frac{1}{\delta}x\big)\right) \leq 2n\delta.$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, il vient $q\big(T_i(x)\big) = 0$, ce qui suffit. ■

Présentons à présent quelques applications du théorème de Banach-Steinhaus.

Corollaire 3.4.3 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe séparé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de $\mathrm{L}(X, Y)$. Supposons que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y vers un élément que l'on note $T(x)$. Alors l'application*

$$T : X \to Y : x \mapsto T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$$

est un opérateur linéaire continu.

Démonstration : Il est clair que l'opérateur T est linéaire. De plus, comme la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} q\big(T_n(x)\big) < +\infty$$

pour tout $q \in \mathcal{Q}$. Le Théorème 3.4.2 implique qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} q \circ T_n \leq Cp\,.$$

En passant à la limite, il vient $q \circ T \leq Cp$ et T est donc continu par la Proposition 1.6.1. ■

Corollaire 3.4.4 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathcal{T})$ un espace vectoriel métrisable, $(Z, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe et $B : X \times Y \to Z$ une application bilinéaire. Supposons que les applications*

$$B_x : Y \to Z : y \mapsto B(x, y) \quad \text{et} \quad B^y : X \to Z : x \mapsto B(x, y)$$

sont continues pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$. Alors B est continu.

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers x_0 et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Y qui converge vers y_0. Comme l'espace $X \times Y$ est métrisable, il suffit de montrer que $B(x_n, y_n)$ converge vers $B(x_0, y_0)$. Soient $q \in \mathcal{Q}$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, comme l'application B_x est continue, on sait que la suite $\big(B_x(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B_x(y_0)$. On en tire que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} q\big(B(x, y_n)\big) < +\infty$$

pour tout $x \in X$. Par le Théorème 3.4.2, la famille $(B^{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} q \circ B^{y_n} \leq Cp.$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 et $\big(B_{x_0}(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B_{x_0}(y_0)$ par continuité, on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_n - x_0) < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{et} \quad q\big(B_{x_0}(y_n - y_0)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $n \geq N$. Il vient alors

$$\begin{aligned} q\big(B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0)\big) &\leq q\big(B(x_n - x_0, y_n)\big) + q\big(B(x_0, y_n - y_0)\big) \\ &\leq Cp(x_n - x_0) + q\big(B(x_0, y_n - y_0)\big) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N$, ce qui suffit. ■

Comme dernière application, nous donnons un complément à l'étude de la convergence des séries de Fourier. Rappelons que si $f \in L^2([0, 2\pi])$, on peut définir ses coefficients de Fourier par la relation

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy.$$

La série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

converge vers f dans $L^2([0, 2\pi])$. Néanmoins, l'étude de la convergence ponctuelle est plus complexe. Pour les fonctions de classe C^1, on sait qu'on a la convergence ponctuelle. Nous allons démontrer un résultat négatif concernant la convergence ponctuelle dans le cas des fonctions continues. Notons $S_N f(x)$ les sommes partielles de la série de Fourier, c'est-à-dire

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Réintroduisons également le noyau de Dirichlet, défini par

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

On vérifie directement que la relation

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) D_N(x-y)dy$$

est satisfaite pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3.4.5 *Il existe une fonction continue 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour laquelle la suite des sommes partielles $(S_N f(0))_{N\in\mathbb{N}}$ en 0 diverge.*

Démonstration : Considérons l'espace $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme $\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$. Il est clair qu'il s'agit d'un espace de Banach [1]. Considérons l'application linéaire

$$T_N : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : f \mapsto S_N f(0).$$

Comme D_N est une fonction paire et 2π-périodique, on a

$$|T_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(y)|\,|D_N(y)|dy \leq \|f\| \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(y)|dy}_{:=C_N}$$

et en appliquant la Proposition 1.6.1 dans le cas d'espaces normés, on obtient que T_N est continu. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, la suite des sommes partielles $(S_N f(0))_{N\in\mathbb{N}}$ en 0 converge. En particulier, par définition de T_N, on a $\sup_{N\in\mathbb{N}} |T_N f| < +\infty$ pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Le Théorème 3.4.2 de Banach-Steinhaus nous donne l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |T_N(f)| \leq C\|f\|$$

pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Considérons une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et 2π-périodiques telles que $\|f_k\| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k\to+\infty} f_k(t) = \mathrm{sign}(D_N(t))$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. D'une part, on a

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |T_N(f_k)| \leq C\|f_k\| \leq C$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le Théorème de la convergence dominée,

$$|T_N(f_k)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f_k(y)D_N(-y)dy\right| \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(-y)|dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(y)|dy$$

lorsque $k \to +\infty$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |D_N(y)|dy \leq 2\pi C$$

1. On peut le voir comme le sous-espace fermé de $C^0([0, 2\pi])$ formé des fonctions f telles que $f(0) = f(2\pi)$.

pour tout $N \in \mathbb{N}$. D'autre part, remarquons que

$$D_N(y) = e^{-iNy} \sum_{n=0}^{2N} e^{iny} = e^{-iNy} \frac{e^{(2N+1)iy} - 1}{e^{iy} - 1} = \frac{e^{(N+1)iy} - e^{-iNy}}{e^{iy} - 1} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

si $y \in]0, 2\pi[$. Ainsi, puisque $|\sin(t)| \leq t$ pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |D_N(y)| dy &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right| dy \\
&\geq 2 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})y\right)}{y} \right| dy \\
&= 2 \int_0^{(N+\frac{1}{2})2\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx.
\end{aligned}$$

Au total, on obtient

$$\int_0^{(N+\frac{1}{2})2\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \leq \pi C$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable. Par conséquent, il existe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que $\sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N f| = +\infty$, et donc la suite $(S_N f(0))_{N \in \mathbb{N}}$ diverge. ■

3.5 Théorèmes de l'opérateur ouvert et du graphe fermé

Dans cette section, nous présentons deux théorèmes très classiques d'analyse fonctionnelle. Nous commençons par le Théorème de l'opérateur ouvert, appelé également le Théorème de Banach-Schauder (dans le cas de deux espaces de Banach), ou open mapping theorem.

Théorème 3.5.1 (Opérateur ouvert) *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces de Fréchet et $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Si T est surjectif, alors T est ouvert.*

La preuve de ce résultat est basée sur un lemme que nous énonçons ci-dessous.

Lemme 3.5.2 *Soient X un espace de Fréchet, Y un espace séparé à semi-normes dénombrables et $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que*

$$b_Y(0, \delta_\varepsilon) \subseteq \overline{T\big(b_X(0, \varepsilon)\big)}$$

où les boules sont définies à partir des distances d_X et d_Y sur X et Y respectivement données par le Théorème 1.4.10. Alors

$$b_Y(0, \delta_\varepsilon) \subseteq T\big(b_X(0, \varepsilon')\big)$$

pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$.

Démonstration : Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons le $\delta > 0$ correspondant. Soient $\varepsilon' > \varepsilon$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\varepsilon_0 = \varepsilon$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \varepsilon'$. Soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par l'hypothèse, avec $\delta_0 = \delta$. On peut bien sûr supposer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Fixons à présent $y_0 \in b_Y(0, \delta_0)$. Alors $y_0 \in \overline{T\big(b_X(0, \varepsilon_0)\big)}$ et donc il existe $y_1 \in b_Y(y_0, \delta_1) \cap T\big(b_X(0, \varepsilon_0)\big)$. Ainsi, on trouve $x_1 \in b_X(0, \varepsilon_0)$ tel que $y_1 = T(x_1)$ satisfait $d'(0, y_0 - y_1) = d'(y_1, y_0) < \delta_1$. Par conséquent, $y_0 - y_1 \in b_Y(0, \delta_1) \subseteq \overline{T\left(b_X\big(0, \varepsilon_1\big)\right)}$ et donc $b_Y(y_0 - y_1, \delta_2)$ rencontre $T\left(b_X\big(0, \varepsilon_1\big)\right)$. On en tire l'existence de $x_2 \in b_X(0, \varepsilon_1)$ tel que $y_2 = T(x_2)$ satisfait $d'(0, y_0 - y_1 - y_2)) < \delta_2$. En continuant de la sorte, on construit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ telle que $d(0, x_k) < \varepsilon_{k-1}$ et $d'(0, y_0 - y_1 - y_2 - \cdots - y_k) < \delta_k$ si $y_k = T(x_k)$. En particulier, la suite $T(x_1 + \cdots + x_k) = y_1 + \cdots + y_k$ converge vers y_0. Par construction, on a aussi

$$d_X\left(\sum_{k=M}^{N} x_k, 0\right) \leq \sum_{k=M}^{N} d_X(x_k, 0) \leq \sum_{k=M}^{N} \varepsilon_{k-1}$$

et la série $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ est donc de Cauchy. Comme X est complet pour la distance d par la Proposition 3.2.11, on obtient que la série converge dans X vers un élément x_0. Par continuité, on trouve $y_0 = T(x_0)$. De plus, on a clairement que $x_0 \in b_X(0, \varepsilon')$ par choix de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc montré que $b_Y(0, \delta) \subseteq T(b_X(0, \varepsilon'))$, ce qui permet de conclure. ■

Démonstration du Théorème 3.5.1 : Soient d et d' les distances définies sur X et Y respectivement par le Théorème 1.4.10 et soit $\varepsilon > 0$. Comme $b_X(0, \frac{\varepsilon}{2})$ est un voisinage de 0 dans l'espace vectoriel topologique X, le Lemme 1.2.10 permet d'affirmer qu'il est absorbant et donc d'écrire $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\, b_X(0, \frac{\varepsilon}{2})$. Comme T est surjectif et linéaire, on a

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\, T\big(b_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2})\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\, \overline{T\big(b_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2})\big)}.$$

L'espace Y est de Fréchet et donc est un espace de Baire. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel l'intérieur de $n\, \overline{T\big(b_X(0, \frac{\varepsilon}{2})\big)}$ est non-vide (sinon l'intérieur de Y serait vide). Puisque la multiplication par le scalaire n est un homéomorphisme, $\overline{T\big(b_X(0, \frac{\varepsilon}{2})\big)}$ est également d'intérieur non-vide. Il existe donc $y \in Y$ et $r > 0$ tels que $b_Y(y, r) \subseteq \overline{T\big(b_X(0, \frac{\varepsilon}{2})\big)}$. On en tire que

$$b_Y(0, r) = b_Y(y, r) - y \subseteq \overline{T\big(b_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2})\big)} - y \subseteq \overline{T\big(b_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2})\big)} - \overline{T\big(b_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2})\big)} \subseteq \overline{T\big(b_X(0, \varepsilon)\big)}$$

en utilisant la linéarité de T. On conclut en utilisant le Lemme 3.5.2 et la Remarque 1.6.8. ■

En particulier, on obtient directement les résultats importants suivants.

Corollaire 3.5.3 *Toute bijection linéaire continue entre espaces de Fréchet est un homéomorphisme.*

Corollaire 3.5.4 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux systèmes dénombrables de semi-normes sur X pour lesquels $(X, \mathcal{P})$ et $(X, \mathcal{Q})$ sont des espaces de Fréchet. Si $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le Théorème 3.5.1 à l'application surjective et continue $\mathrm{id} : (X, \mathcal{P}) \to (X, \mathcal{Q})$. ■

Proposition 3.5.5 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est injectif et $\operatorname{im} T$ est fermé.*
2. *Il existe $C > 0$ tel que $\|T(x)\|_Y \geq C\|x\|_X$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration : $1 \Rightarrow 2$. Par hypothèse, $\operatorname{im} T$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach Y et est donc un espace de Banach. On en tire que $T : X \to \operatorname{im} T$ est une bijection linéaire continue entre espaces de Banach, et donc T^{-1} est continu sur $\operatorname{im} T$ par le Corollaire 3.5.3. Cela donne la condition 2.

$2 \Rightarrow 1$. L'hypothèse implique immédiatement que T est injectif. De plus, supposons $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\operatorname{im} T$ qui converge vers y. Puisque

$$\|T(x_p) - T(x_q)\|_Y \geq C\|x_p - x_q\|_X,$$

la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc vers un élément $x \in X$. Par continuité de T, on a $T(x) = y$ et donc $y \in \operatorname{im} T$, ce qui suffit. ■

Présentons à présent une application dans le contexte de la transformée de Fourier.

Corollaire 3.5.6 *La transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans*

$$C_0^0(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}$$

n'est pas surjective.

Démonstration : On sait que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est continue et tend vers 0 à l'infini. De plus, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\|\mathcal{F}^- f\|_\infty \leq \|f\|_1$. Ainsi, l'opérateur $\mathcal{F}^- : L^1(\mathbb{R}) \to C_0^0(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire continu entre les espaces de Banach $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(C_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. De plus, il est injectif car $\mathcal{F}^- f = 0$ implique que $f = 0$. Procédons par l'absurde et supposons $\mathcal{F}^-$ est surjectif. Alors par le Théorème 3.5.1, $\mathcal{F}^-$ est une application ouverte. La Proposition 1.6.7 dans le cas d'espaces normés implique l'existence d'un $r > 0$ tel que $b_{\|\cdot\|_\infty}(r) \subseteq \mathcal{F}^-\big(b_{\|\cdot\|_1}(1)\big)$. On va montrer que c'est impossible en construisant une suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R})$ telles que $\|\mathcal{F}^- f_k\|_\infty < r$ pour tout k suffisamment grand et $\|f_k\|_1 \to \infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, posons $h_k = \chi_{]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}[}$ et $f_k = \mathcal{F}^+(h_k * h_1) = \mathcal{F}^+ h_k\, \mathcal{F}^+ h_1$. Alors, on a

$$\|\mathcal{F}^- f_k\|_\infty = \frac{2\pi}{k}\|h_k * h_1\|_\infty \leq \frac{4\pi}{k} < r$$

pour k suffisamment grand. De plus,

$$\|f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}_\xi^+ h_k\, \mathcal{F}_\xi^+ h_1\right| d\xi = 4\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(\xi/k)}{\xi} \cdot \frac{\sin(\xi)}{\xi}\right| d\xi\,.$$

Comme $\sin(u) \geq \frac{2}{\pi}u$ si $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on trouve

$$\|f_k\|_1 \geq 4\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \left|\frac{\sin(\xi/k)}{\xi} \cdot \frac{\sin(\xi)}{\xi}\right| d\xi \geq \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \left|\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right| d\xi$$

qui tend vers l'infini lorsque $k \to +\infty$, puisque la fonction $\xi \mapsto \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. On obtient donc une contradiction, d'où la conclusion. ■

La preuve du Théorème de l'opérateur ouvert permet également de donner une caractérisation de la surjectivité d'un opérateur linéaire continu dans le cas d'espaces de Banach.

Corollaire 3.5.7 *Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Alors T est surjectif si et seulement si il existe $R > 0$ tel que*

$$b_Y(1) \subseteq \overline{T\big(b_X(R)\big)}.$$

Démonstration : Supposons que T est surjectif. Alors, en imitant la preuve du Théorème 3.5.1, on trouve qu'il existe $r > 0$ tel que $b_Y(r) \subseteq \overline{T\big(b_X(1)\big)}$. On en tire que

$$b_Y(1) \subseteq \tfrac{1}{r}\overline{T\big(b_X(1)\big)} = \overline{T\big(b_X(\tfrac{1}{r})\big)},$$

ce qui suffit.

Pour la réciproque, remarquons que les hypothèses du Lemme 3.5.2 sont satisfaites. On en tire que

$$b_Y(1) \subseteq T\big(b_X(R')\big)$$

pour tout $R' > R$. Soit $y \in Y$. Alors il existe $r > 0$ tel que $y \in r b_Y(1)$. Donc $y = rT(x) = T(rx)$ pour un $x \in b_X(R')$, ce qui suffit. ■

Pour conclure les applications du théorème de l'opérateur ouvert, on va utiliser le résultat précédent pour montrer que tout espace de Banach séparable peut être identifié à un quotient [2] de l'espace ℓ^1. L'espace ℓ^1 est donc “universel” parmi les espaces de Banach séparables.

Corollaire 3.5.8 *Si X est un espace de Banach séparable, alors il existe une surjection linéaire continue de ℓ^1 sur X.*

Démonstration : Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense dans la boule unité de X. Pour toute suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n$ est absolument convergente dans X puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|.$$

Comme X est un espace de Banach, la série est également convergente dans X. On peut donc considérer l'application

$$T : \ell^1 \to X : (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n.$$

Cette application est clairement linéaire et continue. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = T(e_n)$. Par conséquent, pour $R > 1$, on a

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq T(b_{\|\cdot\|_{\ell^1}}(R)),$$

d'où

$$b_X(1) \subseteq \overline{T(b_{\|\cdot\|_{\ell^1}}(R))}.$$

Le Corollaire 3.5.7 donne alors la surjectivité de T. ■

2. Il faut considérer le quotient de ℓ^1 par le noyau de la surjection obtenue dans le Corollaire.

Intéressons-nous à présent au théorème du graphe fermé. Pour cela, rappelons que le *graphe* d'une application $T : X \to Y$ est l'ensemble défini par

$$\mathcal{G}(T) = \big\{(x, T(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Proposition 3.5.9 *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $T : X \to Y$ une application. Si T est continu et si $(Y, \mathcal{T}')$ est séparé, alors $\mathcal{G}(T)$ est fermé.*

Démonstration : Si $(x, y) \notin \mathcal{G}(T)$, alors $y \neq T(x)$ et comme $(Y, \mathcal{T}')$ est séparé, il existe des ouverts disjoints $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}'$ tels que $T(x) \in \Omega_1$ et $y \in \Omega_2$. Par continuité de T, $T^{-1}(\Omega_1)$ est un ouvert de $(X, \mathcal{T})$ qui contient x. On obtient donc que $T^{-1}(\Omega_1) \times \Omega_2$ est un ouvert de $X \times Y$ qui contient (x, y) et tel que $\big(T^{-1}(\Omega_1) \times \Omega_2\big) \cap \mathcal{G}(T) = \emptyset$. ■

Pour les opérateurs linéaires entre espaces de Fréchet, on a la réciproque suivante.

Théorème 3.5.10 (Graphe fermé) *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces de Fréchet et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Si $\mathcal{G}(T)$ est fermé, alors T est continu.*

Démonstration : Par la Proposition 3.2.12, on sait que $X \times Y$ muni de la famille de semi-normes $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ est un espace de Fréchet. Comme $\mathcal{G}(T)$ est un sous-espace fermé de $X \times Y$, il s'agit également d'un espace de Fréchet. Considérons la projection $\pi_X : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$. Par définition de la topologie produit, il s'agit d'une application continue. Sa restriction $\pi_X|_{\mathcal{G}(T)}$ à $\mathcal{G}(T)$ est injective, et donne donc une bijection continue de $\mathcal{G}(T)$ dans X. Par le Corollaire 3.5.3, $(\pi_X|_{\mathcal{G}(T)})^{-1}$ est continu. Pour conclure, il suffit de remarquer que $T = \pi_Y \circ i \circ (\pi_X|_{\mathcal{G}(T)})^{-1}$ où $i : \mathcal{G}(T) \to X \times Y$ est l'inclusion et $\pi_Y : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto y$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(T) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X \arrow[u, "(\pi_X|_{\mathcal{G}(T)})^{-1}"] \arrow[r, "T"'] & Y
\end{tikzcd}$$

■

Remarque 3.5.11 Puisqu'on travaille avec des espaces métrisables, afin de vérifier que $\mathcal{G}(T)$ est fermé, il suffit de montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans X et $\big(T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans Y, alors $T(x) = y$.

Terminons ce chapitre par une application de ce théorème. Rappelons qu'un *espace de Hilbert* est un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Un opérateur linéaire T d'un espace de Hilbert dans lui-même est *autoadjoint* si $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ pour tous x, y. Nous allons voir que cette condition algébrique implique la continuité de T. De même, si l'espace est réel, la condition algébrique $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout x implique la continuité de T.

Corollaire 3.5.12 (Théorèmes de Hellinger-Toeplitz) *Soit H un espace de Hilbert.*

1. *Soient $S, T : H \to H$ deux applications linéaires telles que*

$$\langle S(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

pour tous $x, y \in H$. Alors S et T sont continus.

2. *Si H est réel et si $T : H \to H$ est une application linéaire telle que $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, alors T est continu.*

Démonstration : 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x et $\big(T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point y. Pour $z \in H$, on a

$$\langle z, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle z, T(x_n)\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle S(z), x_n\rangle = \langle S(z), x\rangle = \langle z, T(x)\rangle$$

d'où $\langle z, y - T(x)\rangle = 0$. En prenant $z = y - T(x)$, on trouve $\|y - T(x)\| = 0$ et donc $y = T(x)$. Par conséquent, $\mathcal{G}(T)$ est fermé et le Théorème 3.5.10 implique que T est continu. On fait de même pour S.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x et $\big(T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point y. Quitte à remplacer x_n par $x_n - x$ et y par $y - T(x)$, on peut supposons que x_n tend vers 0. Montrons que $y = 0$, ce qui suffit pour assurer la continuité de T par le Théorème 3.5.10. Pour tout $h \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq \langle T(x_n + \lambda h), x_n + \lambda h\rangle = \langle T(x_n), x_n\rangle + \lambda\langle T(x_n), h\rangle + \lambda\langle T(h), x_n\rangle + \lambda^2\langle T(h), h\rangle.$$

En faisant tendre n vers l'infini, il vient alors

$$\lambda\langle y, h\rangle + \lambda^2\langle T(h), h\rangle \geq 0.$$

Comme cette relation est valide pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on trouve que $\langle y, h\rangle = 0$ pour tout $h \in H$, et donc $y = 0$. ■

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1 *Soit $f : X \to Y$ une application et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Montrer que le filtre image de $\mathcal{F}$ par f est le filtre engendré par $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$.*

Exercice 3.6.2

1. *Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un même espace vectoriel X qui définissent la même topologie. Montrer qu'elles définissent les mêmes suites de Cauchy.*
2. *Soit $X =]0, 1]$. Sur X, on considère la distance euclidienne d_1 et la distance d_2 définie par*

$$d_2(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

   (a) *Montrer que (X, d_1) n'est pas complet.*
   (b) *Montrer que d_2 définit bien une distance sur X et que l'espace (X, d_2) est complet.*
   (c) *Montrer que les topologies induites sur X par d_1 et d_2 sont équivalentes.*

Exercice 3.6.3 *Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application continue n'est pas nécessairement une suite de Cauchy.*

Exercice 3.6.4 *Démontrer que les espaces de l'Exemple 3.3.2 sont des espaces de Banach.*

Exercice 3.6.5 *Démontrer que les espaces de l'Exemple 3.3.4 sont des espaces de Fréchet.*

Exercice 3.6.6 *En utilisant le Corollaire 3.3.10, montrer que l'espace $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ est complet pour tout espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$.*

Exercice 3.6.7 *Soient $(X,\mathcal{P})$ et $(Y,\mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes. Montrer qu'une famille $(T_i)_{i\in I}$ d'opérateurs de $\mathrm{L}(X,Y)$ est équicontinue si et seulement si pour tout voisinage W de 0 dans Y, il existe un voisinage V de 0 dans X tel que $V\subseteq T_i^{-1}(W)$ pour tout $i\in I$.*

Exercice 3.6.8 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n<+\infty$ pour toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^2. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, considérons l'application linéaire*

$$T_N:\ell^2\to\mathbb{C}:(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\sum_{n=0}^{N}a_nb_n.$$

1. *Montrer que*[3]
$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2}=\inf\left\{C>0:|T_N(b)|\le C\|b\|_{\ell^2}\ \forall b\in\ell^2\right\}$$
2. *En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, en déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$.*

Exercice 3.6.9 *Considérons l'espace $L^1(\mathbb{T})$ constitué des fonctions 2π-périodiques intégrables sur $[0,2\pi]$. Si $f\in L^1(\mathbb{T})$, on note $\hat f(n)$ son $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier.*

1. *Montrer que l'application linéaire*
$$T:L^1(\mathbb{T})\to c_0(\mathbb{Z}):f\mapsto\left(\hat f(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$
est continue.
2. *En utilisant l'injectivité de T (admis ou vu dans un autre cours) et en procédant par l'absurde, montrer que T n'est pas surjectif.*

Exercice 3.6.10 *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $C^0([0,1])$ pour laquelle $C^0([0,1])$ est un espace de Banach. Supposons que la convergence pour la norme $\|\cdot\|$ implique la convergence ponctuelle. Montrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{[0,1]}$ sont équivalentes.*

Exercice 3.6.11 *Fixons $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ et posons*

$$\|x\|_{\boldsymbol{a}}=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_nx_n|$$

pour tout $x\in\ell^\infty$.

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\boldsymbol{a}$ pour que $\|\cdot\|_{\boldsymbol{a}}$ soit une norme sur ℓ^∞.*
2. *Dans ce cas, démontrer que $\|\cdot\|_{\boldsymbol{a}}$ n'est âs équivalent à la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ de ℓ^∞.*
3. *En déduire que $(\ell^\infty,\|\cdot\|_{\boldsymbol{a}})$ n'est pas complet.*

3. On calcule ce que l'on appellera la norme de l'opérateur T_N.

Exercice 3.6.12 *1. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach. Supposons qu'ils sont inclus dans un même espace vectoriel. On peut donc considérer leur somme $X+Y$. Pour tout $z \in X+Y$, on pose*

$$\|z\|_{X+Y} = \inf\big\{\|x\|_X + \|y\|_Y : z = x+y\,,\, x \in X\,,\, y \in Y\big\}.$$

A l'aide du Corollaire 3.3.10, montrer que l'espace $X+Y$ muni de cette norme est un espace de Banach.

2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soient A et B deux sous-espaces vectoriels fermés de X tels que $X = A+B$. En utilisant le point précédent et le théorème du graphe fermé, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ avec

$$x = a+b \quad \text{et} \quad \|a\| + \|b\| \leq C\|x\|.$$

Exercice 3.6.13 *Soit $g \in L^2([0,1])$ tel que $fg \in L^2([0,1])$ pour tout $f \in L^2([0,1])$. Considérons l'application*

$$\mathcal{M}_g : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) : f \mapsto fg.$$

Montrer que $\mathcal{M}_g$ est une application continue

1. *en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus,*
2. *en utilisant le théorème du graphe fermé.*

Chapitre 4

Ensembles bornés, précompacts et compacts

Dans ce chapitre, nous étudions certains sous-ensembles particuliers d'espaces localement convexes. Nous présentons leurs propriétés et les liens existant entre eux.

4.1 Parties bornées

Définition 4.1.1 Une partie B de l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est *bornée* si

$$\sup_{x \in B} p(x) < +\infty \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

En d'autres termes, une partie B est bornée si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $C > 0$ tel que $B \subseteq b_p(C)$. On dit que B est absorbé par les semi-boules centrées en 0. Il est clair que deux systèmes de semi-normes équivalents définissent les mêmes ensembles bornés.

Exemples 4.1.2 On vérifie immédiatement les assertions suivantes.

— Toute partie finie de X est bornée.
— Toute union finie d'ensembles bornés est bornée.
— Tout sous-ensemble d'un ensemble borné est borné.
— Toute combinaison linéaire de bornés est bornée.
— Toute suite de Cauchy définit un ensemble borné.
— L'adhérence d'un ensemble borné est bornée.
— L'enveloppe absolument convexe d'un ensemble borné est bornée.
— L'image linéaire continue d'un ensemble borné est bornée.

Proposition 4.1.3 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ qui tend vers 0. Une partie B de X est bornée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B, la suite $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans X.*

Démonstration : Supposons que B est borné. Fixons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de B, $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$. Comme B est borné, il existe $C > 0$ tel que $B \subseteq b_p(C)$. Ainsi

$$p(\lambda_n x_n) \leq |\lambda_n| C < \varepsilon$$

si n est suffisamment grand.

Réciproquement, supposons que B n'est pas borné. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n \in B$ tel que $p(x_n) \geq \frac{1}{|\lambda_n|}$. Alors la suite $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 dans X puisque $p(\lambda_n x_n) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposition 4.1.4 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et $p \in \mathcal{P}$. Si une semi-boule associée à p est bornée dans X, alors $\mathcal{P} \approx \{p\}$. Si de plus $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors p est une norme.*

Démonstration : Supposons qu'il existe une semi-boule $b_p(x, \varepsilon)$ bornée. Par translation et dilatation, il est clair que la semi-boule $b_p(1)$ est également bornée. On en tire que pour tout $q \in \mathcal{P}$, il existe donc $C > 0$ tel que $b_p(1) \subseteq b_q(C)$. D'où la conclusion par la Proposition 1.1.7. ■

Définition 4.1.5 Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est *borné* si $T(B)$ est borné dans Y pour tout borné B de X.

Bien sûr, tout opérateur linéaire continu est borné. On a la réciproque partielle suivante.

Proposition 4.1.6 *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Si $(X, \mathcal{P})$ est à semi-normes dénombrables et si $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné, alors T est continu.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{P} \approx \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ où la suite de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Supposons que T n'est pas continu. Alors, par la Proposition 1.6.1, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n \in X$ satisfaisant $p_n(x_n) = 1$ et $q(T(x_n)) \geq n$. Comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, il est facile de vérifier que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans X. Par hypothèse, on sait que T est un opérateur borné et on en tire que $\{T(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans Y, ce qui contredit $q(T(x_n)) \geq n$. ■

En particulier, lorsque l'on travaille avec des opérateurs linéaires entre espaces normés, les notions d'opérateur borné et continu coïncident.

4.2 Parties précompactes

Définition 4.2.1 Une partie K d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est *précompacte pour* $p \in \mathcal{P}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} b_p(x_j, \varepsilon).$$

On dit que K est *précompact* si K est précompact pour tout $p \in \mathcal{P}$.

Ainsi, une partie est précompacte si on peut la recouvrir par un nombre fini de translatés de la boule $b_p(\varepsilon)$, quels que soient $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$. De manière équivalente, on écrit que K est précompact si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie A de X telle que

$$K \subseteq A + b_p(\varepsilon).$$

Bien sûr, toute partie précompacte est bornée puisque si $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} b_p(x_j, \varepsilon)$, alors

$$\sup_{x\in K} p(x) \leq \sup_{j\in\{1,\ldots,n\}} p(x_j) + \varepsilon < +\infty.$$

On vérifie facilement que deux systèmes de semi-normes équivalents définissent les mêmes ensembles précompacts.

Exemples 4.2.2 On vérifie immédiatement les assertions suivantes.
- Toute partie finie de X est précompacte.
- Toute union finie d'ensembles précompacts est précompacte.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble précompact est précompact.
- Toute combinaison linéaire de précompacts est précompacte.
- Toute suite de Cauchy définit un ensemble précompact.
- L'adhérence d'un ensemble précompact est précompacte.
- L'enveloppe absolument convexe d'un ensemble précompact est précompact.

Le résultat suivant donne une caractérisation utile des précompacts via les suites.

Proposition 4.2.3 *Une partie K de X est précompacte si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de K, il existe une sous-suite $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour p.*

Démonstration : Supposons que K est précompact. Soit $p \in \mathcal{P}$ et soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Il existe alors une partie finie A_0 de X telle que $K \subseteq A_0 + b_p(1)$. Il existe donc $y_0 \in A_0$ pour lequel $y_0 + b_p(1)$ contient une infinité d'éléments $(x_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De même, $K \cap \big(y_0 + b_p(1)\big)$ est précompact et peut être recouvert par un nombre fini de translatés de la boule $b_p(\frac{1}{2})$. Il existe donc $A_1 \subseteq X$ fini tel que $K \cap \big(y_0 + b_p(1)\big) \subseteq A_1 + b_p(\frac{1}{2})$. On peut trouver $y_1 \in A_1$ tel que $y_1 + b_p(\frac{1}{2})$ contient une infinité d'éléments de la suite $(x_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$. Soit $(x_m^{(2)})_{m\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite. On itère la construction et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on trouve $y_k \in X$ et une sous-suite $(x_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m^{(k-1)})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_m^{(k)} \in y_k + b_p(\tfrac{1}{2^k})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_{m_k} = x_k^{(k)}$. Alors la suite $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy car

$$p(x_{m_r} - x_{m_s}) \leq p(x_r^{(r)} - y_s) + p(y_s - x_s^{(s)}) < \frac{1}{2^{s-1}}$$

si $r \geq s$, puisque $x_r^{(r)}$ est un élément de la suite $(x_m^{(s)})_{m\in\mathbb{N}}$.

Supposons à présent que K n'est pas précompact. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tel que K ne peut pas être recouvert par un nombre fini de translatés de la semi-boule $b_p(\varepsilon)$. Soit $x_1 \in K$. Alors $K \not\subseteq x_1 + b_p(\varepsilon)$ et il existe $x_2 \in K \setminus \big(x_1 + b_p(\varepsilon)\big)$. On construit ainsi de proche en proche une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_{m+1} \in K \setminus \big(\{x_1, \ldots, x_m\} + b_p(\varepsilon)\big).$$

La suite ainsi construite ne possède pas de sous-suite de Cauchy pour p puisque

$$p(x_r - x_s) \geq \varepsilon$$

si $r > s$. ■

Corollaire 4.2.4 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace à semi-normes dénombrables. Une partie K de X est précompacte si et seulement si de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Démonstration : Supposons que K est précompact. Soit $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de X. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Par la Proposition 4.2.3, il existe une sous-suite $(x_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour p_1. De même, on construit ensuite une sous-suite $(x_m^{(2)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour p_2. En itérant, on construit pour tout $k \in \mathbb{N}$ une sous-suite $(x_m^{(k+1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour p_{k+1}. Considérons la sous-suite $(x_k^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Elle est de Cauchy pour tout p_k puisque c'est une sous-suite de chaque $(x_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$. ■

Les ensembles précompacts fournissent une caractérisation des espaces de dimension finie.

Théorème 4.2.5 (Riesz) *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Alors X est de dimension finie si et seulement si une semi-boule de X est précompacte.*

Démonstration : Si X est de dimension finie, alors par la Proposition 1.4.7, on sait que X est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ et toute boule est clairement précompacte.

Réciproquement, supposons qu'il existe une semi-boule $b_p(x, \varepsilon)$ précompacte. Par translation et dilatation, il est clair que $b_p(1)$ est également précompact. On en tire que $b_p(1)$ est borné et par la Proposition 4.1.4, $\mathcal{P} \approx \{p\}$. Puisque l'espace est séparé, on obtient que p est une norme. Fixons $\varepsilon \in]0, 1[$. Par précompacité, il existe une partie finie $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de X telle que

$$b_p(1) \subseteq A + b_p(\varepsilon).$$

Montrons que A engendre X. Comme $b_p(1)$ est absorbant, il suffit de montrer que tout élément de $b_p(1)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de A. Soit $x \in b_p(1)$. Alors il existe $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$x = x_{j_1} + \varepsilon y_1$$

où $y_1 \in b_p(1)$. De même, il existe $j_2 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$y_1 = x_{j_2} + \varepsilon y_2$$

où $y_2 \in b_p(1)$. Donc

$$x = x_{j_1} + \varepsilon x_{j_2} + \varepsilon^2 y_2.$$

En itérant, on construit une suite $(j_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ de $\{1, \ldots, n\}$ et une suite $(y_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ de $b_p(1)$ telles que

$$x = \sum_{l=1}^{m} x_{j_l} \varepsilon^{l-1} + \varepsilon^m y_m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. On en tire que $x = \sum_{l=1}^{+\infty} x_{j_l} \varepsilon^{l-1}$ puisque

$$p\left(x - \sum_{l=1}^{m} x_{j_l} \varepsilon^{l-1}\right) = \varepsilon^m p(y_m) < \varepsilon^m \to 0$$

si m tend vers l'infini. On conclut en remarquant que par unicité de la limite, on a également

$$\sum_{l=1}^{+\infty} x_{j_l} \varepsilon^{l-1} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l \,:\, j_l = j} \varepsilon^{l-1} \right) x_j.$$

■

4.3 Parties compactes et extractables

Rappelons qu'un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini. De manière équivalente, toute famille de fermés de X dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide est d'intersection non vide. La compacité peut se traduire à l'aide de la notion de filtre.

Définition 4.3.1 Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Un point $x \in X$ est *adhérent* à $\mathcal{F}$ si x est adhérent à tous les éléments de $\mathcal{F}$.

L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{F}$ est donc donné par $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$.

Remarque 4.3.2 Il est clair que si un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x dans un espace séparé, alors x est l'unique point adhérent à $\mathcal{F}$.

Proposition 4.3.3 *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si tout filtre $\mathcal{F}$ sur X a un point d'adhérence.*

Démonstration : Supposons tout d'abord que $(X, \mathcal{T})$ est compact. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Alors $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ est une intersection de fermés de X dont toute intersection finie est non-vide par $(\mathcal{F}2)$ et $(\mathcal{F}3)$. En utilisant la définition de la compacité via les fermés, on trouve que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ est non vide, et tout point de cette intersection est un point d'adhérence au filtre.

Réciproquement, considérons une famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X telle que pour tout $J \subseteq I$ fini, l'ensemble $F^J := \bigcap_{i\in J} F_i$ est non-vide. Alors la famille définie par $\mathcal{B} := \{F^J : J \subseteq I \text{ fini }\}$ est la base d'un filtre $\mathcal{F}$. Par hypothèse, $\mathcal{F}$ admet un point d'adhérence. On obtient donc

$$\emptyset \neq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i,$$

ce qui suffit. ∎

Définition 4.3.4 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *extractable* s'il est séparé et si de toute suite de X, on peut extraire une sous-suite qui converge.

Bien sûr, en utilisant la topologie induite, on peut étendre directement ces notions pour définir des ensembles compacts et extractables.

Proposition 4.3.5 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et soit K un ensemble compact (resp. extractable) de X. Alors*

1. *K est sq-complet,*
2. *K est précompact,*
3. *K est borné.*

Démonstration : 1. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans K. Traitons tout d'abord le cas où K est compact. Si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs distinctes, alors elle converge puisqu'elle est ultimement constante. On peut donc supposer qu'elle prend une infinité de valeurs distinctes. Supposons que pour tout $x \in K$, il existe $p_x \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon_x > 0$ tel que $x + b_{p_x}(\varepsilon_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite. Comme K est compact et puisque

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} x + b_{p_x}(\varepsilon_x),$$

on peut en extraire un recouvrement fini. On en tire que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, ce qui est impossible. Ainsi, il existe $x \in K$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, la semi-boule $x + b_p(\varepsilon)$ contient une infinité d'éléments de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Fixons $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque la suite est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_r - x_s) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $r, s \geq N$. De plus, par construction de x, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in x + b_p(\frac{\varepsilon}{2})$. Alors

$$p(x - x_m) \leq p(x - x_n) + p(x_n - x_m) < \varepsilon$$

si $m \geq N$, ce qui montre que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Supposons à présent que K est extractable. Alors $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente dans K et elle converge donc dans K.

2. Il est clair que tout compact K est précompact en utilisant le recouvrement de K par les boules $b_p(x, \varepsilon)$, $x \in K$.

Si K est extractable, alors toute suite de K possède une sous-suite convergente, qui est donc de Cauchy pour p quel que soit $p \in \mathcal{P}$. Cela suffit par la Proposition 4.2.3.

3. C'est immédiat par le point 2 puisque tout précompact est borné. ■

Dans $\mathbb{R}^n$, on sait qu'un ensemble est compact si et seulement si il est extractable. Nous allons montrer que ce résultat reste valide dans le cas d'espaces à semi-normes dénombrables.

Théorème 4.3.6 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace séparé à semi-normes dénombrables et K une partie de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *K est compact,*
2. *K est extractable,*
3. *K est précompact et complet.*

Démonstration : Comme l'espace est à semi-normes dénombrables, on sait par le Théorème 3.2.9 que tout ensemble est complet si et seulement si il est sq-complet. Ainsi, par la Proposition 4.3.5, on a $1 \Rightarrow 3$ et $2 \Rightarrow 3$. On vérifie facilement que $3 \Rightarrow 2$. En effet, si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de K, alors comme K est précompact, le Corollaire 4.2.4 donne une sous-suite de Cauchy, qui converge donc vers un élément de K puisque K est complet.

Il reste à montrer que $3 \Rightarrow 1$. Procédons par l'absurde et supposons que K n'est pas compact. Alors il existe un recouvrement ouvert Ω_i, $i \in I$, de K dont on ne peut extraire un recouvrement fini. Supposons que $\mathcal{P} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ où la suite $(p_m)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme K est précompact, il existe $A_0 \subseteq K$ fini tel que

$$K \subseteq A_0 + b_{p_0}(1).$$

Alors il existe $y_0 \in A_0$ tel que $K \cap \big(y_0 + b_{p_0}(1)\big)$ ne peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles Ω_i, $i \in I$. L'ensemble $K \cap \big(y_0 + b_{p_0}(1)\big)$ est précompact et par le même raisonnement, il existe donc $y_1 \in K \cap \big(y_0 + b_{p_0}(1)\big)$ tel que $K \cap \big(y_0 + b_{p_0}(1)\big) \cap \big(y_1 + b_{p_1}(\frac{1}{2})\big)$ ne peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles Ω_i, $i \in I$. On construit ainsi une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de K telle que $y_{m+1} \in K \cap \big(y_0 + b_{p_0}(1)\big) \cap \cdots \cap \big(y_m + b_{p_m}(\frac{1}{2^m})\big)$ et $K \cap \big(y_0 + b_{p_0}(1)\big) \cap \cdots \cap \big(y_{m+1} + b_{p_{m+1}}(\frac{1}{2^{m+1}})\big)$ ne peut être recouvert par un nombre fini d'ensembes Ω_i, $i \in I$. La suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy car si $s, r > m$, on a

$$p_m(y_r - y_s) \leq p_m(y_r - y_m) + p_m(y_m - y_s) < \frac{1}{2^{m-1}}$$

puisque $y_r, y_s \in y_m + b_{p_m}(\frac{1}{2^m})$. Comme K est complet, la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $y \in K$. Comme les ensembles Ω_i, $i \in I$, forment un recouvrement ouvert de K, il existe $i \in I$, $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $y + b_p(\varepsilon) \subseteq \Omega_i$. Si $m \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand, on a $y_m \in y + b_p\big(\varepsilon/2\big)$ et $b_{p_m}(\frac{1}{2^m}) \subseteq b_p(\frac{\varepsilon}{2})$, ce qui implique que $y_m + b_{p_m}(\frac{1}{2^m}) \subseteq y + b_p(\varepsilon) \subseteq \Omega_i$. Ceci est impossible puisque $y_m + b_{p_m}(\frac{1}{2^m})$ serait alors recouvert par Ω_i. On en tire la conclusion. ∎

En combinant le résultat précédent avec la Proposition 3.2.7, on obtient le corollaire suivant. Rappelons qu'un ensemble est relativement compact si son adhérence est compacte.

Corollaire 4.3.7 *Dans un espace de Fréchet, un ensemble est précompact si et seulement si il est relativement compact.*

Démonstration : Supposons que K est précompact dans un espace complet. Alors $\overline{K}$ est précompact et complet par la Proposition 3.2.7. On en tire que $\overline{K}$ est compact. Réciproquement, si $\overline{K}$ est compact, il est précompact et donc K l'est également. ∎

4.4 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Le Théorème d'Arzelà-Ascoli permet de caractériser les compacts de l'espace de Banach $C^0(X)$, lorsque X est un compact. Commençons par un lemme, qui est basé sur un procédé d'extraction diagonale.

Lemme 4.4.1 *Soit D un ensemble dénombrable et $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Supposons que la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est simplement bornée sur D, c'est-à-dire*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |f_m(x)| < +\infty \quad \forall x \in D.$$

Alors il existe une sous-suite de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur D.

Démonstration : Supposons que $D = \{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. La suite de scalaires $(f_m(x^{(0)}))_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée et il existe donc une sous-suite $\big(f_m^{(0)}(x^{(0)})\big)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathbb{K}$. De même, la suite $(f_m^{(0)}(x^{(1)}))_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente $(f_m^{(1)}(x^{(1)}))_{m\in\mathbb{N}}$. En continuant de la sorte, on construit pour tout $k \in \mathbb{N}$, une sous-suite $(f_m^{(k+1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(f_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_m^{(k+1)}(x^{(k+1)}))_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, la suite $(f_m^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge en tout point de D. ∎

Afin d'énoncer le théorème suivant, il est nécessaire de considérer la notion d'équicontinuité dans le cas d'une famille d'applications $\mathcal{F}$ définies sur un espace métrique X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *équicontinu* si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ si $d(x, y) < \eta$.

Théorème 4.4.2 (Arzelà-Ascoli) *Soit X un espace métrique compact. Une partie $\mathcal{K}$ de $C^0(X)$ est précompacte si et seulement si elle est simplement bornée et équicontinue.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{K}$ est précompact. Alors $\mathcal{K}$ est borné et donc il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} \sup_{x \in X} |f(x)| \leq C.$$

En particulier, pour tout $x \in X$, $\sup_{f \in \mathcal{K}} |f(x)| < +\infty$ et $\mathcal{K}$ est donc simplement borné. Montrons à présent que $\mathcal{K}$ est une partie équicontinue. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{K}$ est précompact, il existe $f_1, \ldots, f_n \in C^0(X)$ tels que

$$\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} b(f_j, \tfrac{\varepsilon}{3})$$

où les boules sont définies à partir de la norme uniforme sur X. Comme les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont continues, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $y \in X$ tel que $d(x, y) \leq \eta$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $f \in \mathcal{K}$. Alors il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f \in b(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$. On obtient alors que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq \varepsilon$$

pour tout $y \in X$ tel que $d(x, y) \leq \eta$, ce qui suffit.

Supposons à présent que $\mathcal{K}$ est simplement borné et équicontinu. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in X$, l'ensemble

$$U_{n,x} = \left\{ y \in X : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{3n} \, \forall f \in \mathcal{K} \right\}$$

est un voisinage ouvert de x par équicontinuité. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a $X = \bigcup_{x \in X} U_{n,x}$ et comme X est compact, il existe un sous-ensemble fini $X_n \subseteq X$ tel que

$$X = \bigcup_{x \in X_n} U_{n,x} \, .$$

Considérons l'ensemble dénombrable $X_\infty = \bigcup_{n \in N} X_n$. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{K}$. Comme $\mathcal{K}$ est simplement borné, le Lemme 4.4.1 donne l'existence d'une sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement dans X_∞. Soient $y \in X$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Alors il existe $x \in X_n \subseteq X_\infty$ tel que $y \in U_{n,x}$. On a alors

$$\begin{aligned} |f_{k(m)}(y) - f_{k(l)}(y)| &\leq |f_{k(m)}(y) - f_{k(m)}(x)| + |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)| + |f_{k(l)}(x) - f_{k(l)}(y)| \\ &< \frac{2}{3n} + |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)| \end{aligned}$$

pour tous $m, l \in \mathbb{N}$. Comme $y \in X$ est arbitraire, on en tire que

$$\sup_{y \in X} |f_{k(m)}(y) - f_{k(l)}(y)| \leq \frac{2}{3n} + \sup_{x \in X_n} |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)|$$

pour tous $m, l \in \mathbb{N}$. Comme X_n est fini et comme la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge simplement, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in X_n} |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)| \leq \frac{1}{3n}$$

si $m, l \geq N$. Ainsi

$$\sup_{y \in X} |f_{k(m)}(y) - f_{k(l)}(y)| \leq \frac{1}{n}$$

pour tous $l, m \geq N$ et la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est donc uniformément de Cauchy sur X. Cela suffit par le Corollaire 4.2.4. ∎

Remarque 4.4.3 L'espace $C^0(X)$ est un espace de Banach. Par conséquent, par le Corollaire 4.3.7, le Théorème 4.4.2 fournit également une description des ensembles relativement compacts de $C^0(X)$.

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Montrer que*

1. *toute partie finie de X est bornée,*
2. *toute union finie d'ensembles bornés est bornée,*
3. *tout sous-ensemble d'un ensemble borné est borné,*
4. *toute combinaison linéaire de bornés est bornée,*
5. *toute suite de Cauchy définit un ensemble borné,*
6. *l'adhérence d'un ensemble borné est bornée,*
7. *l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble borné est bornée,*
8. *l'image linéaire continue d'un ensemble borné est bornée.*

Exercice 4.5.2 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Montrer que*

1. *toute partie finie de X est précompacte,*
2. *toute union finie d'ensembles précompacts est précompacte,*
3. *tout sous-ensemble d'un ensemble précompact est précompact,*
4. *toute combinaison linéaire de précompacts est précompacte,*
5. *toute suite de Cauchy définit un ensemble précompact,*
6. *l'adhérence d'un ensemble précompact est précompacte,*
7. *l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble précompact est précompact.*

Exercice 4.5.3 *Dans un espace à semi-normes dénombrables, montrer que tout ensemble précompact est séparable.*

Exercice 4.5.4 *Soient* $\alpha \in]0,1[$ *et* $C^\alpha([0,1])$ *l'espace de Hölder formé des fonctions* f *définies sur* $[0,1]$ *telles que*

$$|f|_\alpha := \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$

1. *Montrer que*
$$\|f\|_{C^\alpha([0,1])} = \|f\|_{[0,1]} + |f|_\alpha$$
définit une norme sur $C^\alpha([0,1])$.
2. *Montrer que* $\big(C^\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{C^\alpha([0,1])}\big)$ *est un espace de Banach.*
3. *Montrer que la boule unité de* $C^\alpha([0,1])$ *est un compact de* $C^0([0,1])$ *muni de sa norme usuelle.*

Exercice 4.5.5 *Soit* X *un espace métrique compact et* $\mathcal{F}$ *une famille équicontinue d'applications définies sur* X *et à valeurs complexes. Pour tout* $x \in X$, *on pose*

$$\mathcal{F}(x) = \big\{f(x) : f \in \mathcal{F}\big\}.$$

1. *Montrer que l'ensemble*
$$A = \big\{x \in X : \mathcal{F}(x) \text{ est borné}\big\}$$
est ouvert et fermé dans X.
2. *En déduire que si* X *est connexe et* $A \neq \emptyset$, *alors* $\mathcal{F}$ *est une partie relativement compacte de* $C^0(X)$.

Exercice 4.5.6 *Soit* X *un sous-espace fermé de* $C^0([0,1])$. *Supposons que toute fonction* f *de* X *est de classe* C^1 *(c'est-à-dire est la restriction à* $[0,1]$ *d'une fonction dérivable sur un voisinage de* $[0,1]$*).*

1. *Considérons l'application*
$$D : X \to C^0([0,1]) : f \mapsto f'$$
où X *est muni de la norme* $\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_{[0,1]}, \|f'\|_{[0,1]}\}$. *En appliquant le théorème du graphe fermé à* D, *montrer qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*
$$\|f'\|_{[0,1]} \leq C\|f\|_{[0,1]}.$$
2. *Utiliser le Théorème d'Arzela-Ascoli pour en déduire que* X *est de dimension finie.*

Exercice 4.5.7 *Soit* $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ *une application continue. On définit l'application* $T_K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ *en posant*

$$T_K(f)(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy.$$

1. *Montrer que* T_K *est une application linéaire continue.*
2. *Montrer que la famille* $\{T_K(f) : \|f\|_{[0,1]} \leq 1\}$ *est équicontinue.*
3. *En utilisant le Théorème d'Arzela-Ascoli, en déduire que l'ensemble*
$$\big\{T_K(f) : \|f\|_{[0,1]} \leq r\big\}$$
est relativement compact pour tout $r > 0$.

Exercice 4.5.8 *Fixons $c \in \ell^2$. Montrer que l'ensemble $\{x \in \ell^2 : |x_n| \leq |c_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de ℓ^2.*

Exercice 4.5.9 *Soient X et Y deux espaces normés. On dit qu'un opérateur $T : X \to Y$ est* compact *si $T(B_X)$ est relativement compact, où $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.*

1. *Si X est de dimension infinie, montrer que l'identité de X dans lui-même n'est pas un opérateur compact.*
2. *Soient K un compact de $\mathbb{R}$ et $k \in C^0(K \times K)$. Montrer que l'opérateur $T : C^0(K) \to C^0(K)$ défini par*
$$T(f)(x) = \int_K f(y)k(x,y)dy$$
est un opérateur compact de $C^0(K)$.
3. *Montrer que l'opérateur de Volterra $V : L^2([0,1]) \to C^0([0,1])$ défini par*
$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
est un opérateur compact.
4. *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes qui ne converge pas vers 0. On définit l'opérateur $T : \ell^2 \to \ell^2$ par*
$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
   (a) *Montrer que T est un opérateur linéaire continu.*
   (b) *Montrer que T n'est pas compact.*

Chapitre 5

Dual topologique

Le dual topologique d'un espace vectoriel topologique est le sous-espace du dual algébrique formé des formes linéaires continues. Dans ce chapitre, nous étudions le dual topologique dans le cas particulier d'espaces localement convexes et nous montrons que celui-ci n'est jamais trivial. Nous étudions ensuite le cas particulier d'espaces normés et nous munissons le dual topologique d'une norme naturellement associée. Nous étudions le cas particulier des espaces de suites ℓ^p. Enfin, nous introduisons deux topologies liées à la donnée d'un espace localement convexe et de son dual topologique : l'espace faible et le dual simple.

5.1 Définition et Théorème de Hahn-Banach

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'espace dual associé à un espace localement convexe.

Définition 5.1.1 Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe et si l'espace $\mathbb{K}$ est muni de la valeur absolue $|\cdot|$, alors l'espace $\mathrm{L}(X, \mathbb{K})$ est appelé le *dual (topologique)* de X. On le note X'.

La Proposition 1.6.1 permet d'affirmer que le dual de $(X, \mathcal{P})$ est formé des applications linéaires $T : X \to \mathbb{K}$ pour lesquelles il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$|T(x)| \leq C\, p(x) \quad \forall x \in X.$$

Ainsi, il existe un voisinage U de 0 dans $(X, \mathcal{P})$ tel que $T(U)$ est borné dans $\mathbb{K}$.

Exemples 5.1.2

- Si $X = C^0(K)$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $T \in X'$ si et seulement si T est une application linéaire définie sur $C^0(K)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe une constante $C > 0$ telle que
$$|T(f)| \leq C \sup_{x \in K} |f(x)|$$
pour tout $f \in C^0(K)$. Par exemple, l'application $\delta_a : f \mapsto f(a)$ appartient à X' pour tout $a \in K$.
- Si $X = \mathcal{D}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $X' = \mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. Par le Corollaire 2.5.6 et par définition de la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ comme limite inductive des espaces $\mathcal{D}^K(\Omega)$, une application linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution si pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que
$$|T(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^K(\Omega)$.

Remarque 5.1.3 Le dual topologique X' de X est un sous-espace vectoriel du dual algébrique X^* de X. Dans le cas où X est séparé et de dimension finie, le Corollaire 1.6.5 implique que $X' = X^*$. Cette égalité est néanmoins fausse en toute généralité.

Remarque 5.1.4 On peut définir une application bilinéaire sur $X' \times X$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ en posant

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X' \times X \to \mathbb{K} : (T, x) \mapsto T(x).$$

Dans la littérature, on trouve souvent les notations $\langle T, \cdot \rangle$, $\langle \cdot , x \rangle$ et $\langle T, x \rangle$.

Le résultat suivant donne une condition équivalente pour obtenir la continuité d'une forme linéaire. En particulier, on obtient qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Proposition 5.1.5 *Soit $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe. Si $T : X \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire non-nulle sur X, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est continu,*
2. *$\ker(T)$ est fermé,*
3. *il existe une semi-boule $b_p(x, r)$ de X telle que $T\big(b_p(x, r)\big) \subsetneq \mathbb{K}$.*

Démonstration : $1 \Rightarrow 2$. Si T est continu, alors $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ est fermé.

$2 \Rightarrow 3$. Soit x un élément de l'ouvert $X \setminus \ker(T)$. Il existe donc $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tel que $b_p(x, r) \cap \ker(T) = \emptyset$. Ainsi $T\big(b_p(x, r)\big) \neq \mathbb{K}$.

$3 \Rightarrow 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus T\big(b_p(x, r)\big)$. Par linéarité de T, on a alors $\lambda - T(x) \notin T\big(b_p(r)\big)$. Montrons que

$$|T(y)| \leq \frac{|\lambda - T(x)|}{r} p(y)$$

pour tout $y \in X$, ce qui suffit par la Proposition 1.6.1. Considérons $y \in X$ tel que $p(y) < r$. Alors $\mu y \in b_p(r)$ pour tout $\mu \in [0, 1]$, et donc $T(\mu y) = \mu T(y) \neq \lambda - T(x)$. On en tire que $|T(y)| \neq \frac{|\lambda - T(x)|}{\mu}$ pour tout $\mu \in [0, 1]$ et par conséquent, $|T(y)| < |\lambda - T(x)|$. Si $y \in X$ est quelconque, on se ramène au cas précédent en considérant $(r - \varepsilon)\frac{y}{p(y)}$ et en faisant tendre ensuite ε vers 0. ■

Nous allons montrer que le dual topologique d'un espace non-trivial X n'est jamais réduit à $\{0\}$. Il s'agira d'une conséquence du Théorème de Hahn-Banach énoncé ci-dessous. Commençons par le cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Lemme 5.1.6 (Hahn-Banach réel) *Soient X un espace vectoriel réel, p une semi-norme sur X et Y un sous-espace vectoriel de X. Supposons que $T : Y \to \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire telle que*

$$|T(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Alors il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\widetilde{T} : X \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{T}|_Y = T$ et

$$|\widetilde{T}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (T^*, Z) où Z est un sous-espace vectoriel de X qui contient Y et où $T^* : Z \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire qui prolonge T et telle que $|T^*(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in Z$. Remarquons que $(T, Y) \in \mathcal{E}$ et donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'ordre définie par

$$(T_1^*, Z_1) \leq (T_2^*, Z_2) \iff Z_1 \subseteq Z_2 \text{ et } T_2^*|_{Z_1} = T_1^*.$$

Montrons que $\mathcal{E}$ est inductif. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{E}$. Alors,

$$Z_0 = \bigcup_{(T^*,Z)\in\mathcal{C}} Z$$

est un sous-espace vectoriel de X. De plus, l'application T_0^* définie par

$$T_0^*(x) = T^*(x)$$

où $(T^*, Z) \in \mathcal{C}$ est tel que $x \in Z$, est bien définie, linéaire et majorée par p sur Z puisque les éléments de $\mathcal{C}$ sont totalement ordonnés. On en tire que $(T_0^*, Z_0) \in \mathcal{E}$ majore $\mathcal{C}$. En appliquant le Lemme de Zorn, on obtient donc l'existence d'un élément maximal $(\widetilde{T}, Z)$ dans $\mathcal{E}$. Pour conclure, il suffit de montrer que $Z = X$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in X \setminus Z$. Nous allons alors construire un couple $(T^*, Z+\rangle x_0 \langle\,)$ appartenant à $\mathcal{E}$ tel que $T^*|_Z = \widetilde{T}$. Cela contradira alors le caractère maximal de $(\widetilde{T}, Z)$. Si $x \in Z+\rangle x_0 \langle$, alors x admet une décomposition unique sous la forme

$$x = z + \lambda x_0 \quad \text{où} \quad z \in Z, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose alors

$$T_s(x) = \widetilde{T}(z) + \lambda s.$$

Il est clair que T_s est une extension linéaire de $\widetilde{T}$ sur $Z+\rangle x_0 \langle$. Il reste à trouver $s \in \mathbb{R}$ tel que $|T_s(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in Z+\rangle x_0 \langle$. Remarquons que

$$\widetilde{T}(z_1) + \widetilde{T}(z_2) = \widetilde{T}(z_1 + z_2) \leq p(z_1 + z_2) \leq p(z_1 - x_0) + p(z_2 + x_0)$$

pour tous $z_1, z_2 \in Z$, d'où

$$\widetilde{T}(z_1) - p(z_1 - x_0) \leq p(z_2 + x_0) - \widetilde{T}(z_2).$$

En particulier, on obtient

$$s_0 := \sup\left\{\widetilde{T}(z_1) - p(z_1 - x_0) : z_1 \in Z\right\} \leq p(z_2 + x_0) - \widetilde{T}(z_2) < +\infty$$

pour tout $z_2 \in Z$. On en tire que pour tout $z_1 \in Z$, on a

$$\widetilde{T}(z_1) - s_0 \leq p(z_1 - x_0)$$

et

$$\widetilde{T}(z_1) + s_0 \leq p(z_1 + x_0)$$

où la deuxième relation est obtenue en prenant $z_2 = z_1$. Ainsi, si $\lambda > 0$, on a

$$|T_{s_0}(z+\lambda x_0)| = \lambda\left|\widetilde{T}(\tfrac{z}{\lambda}) + s_0\right| \leq \lambda p(\tfrac{z}{\lambda} + x_0) = p(z+\lambda x_0),$$

si $\lambda < 0$, on a

$$|T_{s_0}(z+\lambda x_0)| = -\lambda\left|\widetilde{T}(\tfrac{-z}{\lambda}) - s_0\right| \leq -\lambda p(\tfrac{-z}{\lambda} - x_0) = p(z+\lambda x_0)$$

et si $\lambda = 0$, on a $|T_{s_0}(z)| \leq p(z)$, ce qui suffit. ■

Théorème 5.1.7 (Hahn-Banach) *Soient X un espace vectoriel, p une semi-norme sur X et Y un sous-espace vectoriel de X. Supposons que $T : Y \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire telle que*

$$|T(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Alors il existe une forme linéaire $\widetilde{T} : X \to \mathbb{K}$ telle que $\widetilde{T}|_Y = T$ et

$$|\widetilde{T}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Démonstration : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il s'agit du résultat démontré dans le Lemme 5.1.6. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, considérons l'application

$$\Re T : Y \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto \Re T(x).$$

Il est clair que $\Re T$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace Y muni d'une structure de $\mathbb{R}$-vectoriel. Clairement, on a également $|\Re T(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in Y$. Par le Lemme 5.1.6, il existe donc une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\widetilde{\Re T} : X \to \mathbb{R}$ qui prolonge $\Re T$ et telle que $|\widetilde{\Re T}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$. Remarquons que

$$T(y) = \Re T(y) + i\Im T(y) = \Re T(y) - i\Re(iT(y)) = \Re T(y) - i\Re T(iy)$$

pour tout $y \in Y$. Ainsi, l'application

$$\widetilde{T} : X \to \mathbb{C} : x \mapsto \widetilde{\Re T}(x) - i\widetilde{\Re T}(ix)$$

est une extension de T à X. Vérifions qu'elle convient. Il s'agit d'une forme linéaire puisque pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(\lambda x) &= \widetilde{\Re T}(\lambda x) - i\widetilde{\Re T}(i\lambda x) \\
&= \Re\lambda\,\widetilde{\Re T}(x) + \Im\lambda\,\widetilde{\Re T}(ix) - i\Re\lambda\,\widetilde{\Re T}(ix) + i\Im\lambda\,\widetilde{\Re T}(x) \\
&= \Re\lambda\,\widetilde{T}(x) + i\Im\lambda\,\widetilde{T}(x) \\
&= \lambda\widetilde{T}(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(x+y) &= \widetilde{\Re T}(x+y) - i\widetilde{\Re T}(ix+iy) \\
&= \widetilde{\Re T}(x) - i\widetilde{\Re T}(ix) + \widetilde{\Re T}(y) - i\widetilde{\Re T}(iy) \\
&= \widetilde{T}(x) + \widetilde{T}(y).
\end{aligned}$$

De plus, $\widetilde{T}$ est majorée par p puisque si $x \in X$ est tel que $\widetilde{T}(x) \neq 0$, on a

$$|\widetilde{T}(x)| = e^{-i\arg(\widetilde{T}(x))}\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}(e^{-i\arg(\widetilde{T}(x))}x)$$

et puisqu'il s'agit d'un nombre réel, on a

$$|\widetilde{T}(x)| = \Re\big(\widetilde{T}(e^{-i\arg(\widetilde{T}(x))}x)\big) = \widetilde{\Re T}(e^{-i\arg(\widetilde{T}(x))}x) \le p(e^{-i\arg(\widetilde{T}(x))}x) = p(x).$$

Cela conclut la preuve. ■

Présentons à présent quelques conséquences du théorème de Hahn-Banach. Commençons par montrer qu'il permet de prouver l'existence de nombreuses formes linéaires continues sur un espace localement convexe séparé donné.

Corollaire 5.1.8 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X. Toute forme linéaire continue sur Y admet un prolongement linéaire continu sur X. En particulier, si $X \neq \{0\}$ est séparé, alors $X' \neq \{0\}$.*

Démonstration : Si $T : Y \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur Y, alors il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que $|T(y)| \le Cp(y)$ pour tout $y \in Y$. En considérant la semi-norme $p' = Cp$, le Théorème 5.1.7 de Hahn-Banach permet de construire le prolongement recherché.

De plus, on sait par le Corollaire 1.6.5 que si $X \neq \{0\}$ est séparé, il existe des formes linéaires continues sur tout sous-espace Y de dimension finie de X. Vu ce qu'on vient de montrer, on peut donc affirmer que $X' \neq \{0\}$. ■

Le corollaire suivant montre que si l'espace X est séparé, on peut également séparer les points de X via une forme linéaire continue. On obtient également une formule de représentation des semi-normes.

Corollaire 5.1.9 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe.*

1. *Si $x \in X$ et si $p \in \mathcal{P}$, alors il existe $T \in X'$ tel que $|T| \le p$ et $T(x) = p(x)$.*
2. *Si $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors X' sépare les points : pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $T \in X'$ tel que $T(x) \neq T(y)$.*
3. *Si $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p(x) = \sup\{|T(x)| : T \in X', |T| \le p\}.$$

Démonstration : 1. Si $p(x) = 0$, il suffit de poser $T = 0$. Sinon, considérons l'application linéaire continue

$$T : \rangle x \langle \to \mathbb{K} : \lambda x \mapsto \lambda p(x).$$

Remarquons que $|T(\lambda x)| = |\lambda| p(x) = p(\lambda x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Par le Théorème 5.1.7 de Hahn-Banach, on peut étendre T sur X en une forme linéaire continue $\widetilde{T}$ telle que $|\widetilde{T}(y)| \le p(y)$ pour tout $y \in X$.

2. Si $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$ et puisque l'espace est séparé, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x - y) \neq 0$ par la Proposition 1.4.1. Le point 1 donne alors l'existence d'une forme linéaire $T \in X'$ telle que $T(x) - T(y) = T(x - y) = p(x - y) \neq 0$, ce qui suffit.

3. D'une part, il est clair que $\sup\{|T(x)| : T \in X', |T| \le p\} \le p(x)$. De plus, par le point 1, on sait qu'il existe $T_0 \in X'$ tel que $|T_0| \le p$ et $T_0(x) = p(x)$. En particulier, on a donc $p(x) \le \sup\{|T(x)| : T \in X', |T| \le p\}$, d'où la conclusion. ■

Remarque 5.1.10 Grâce au point 2, dans le cas où X est un espace séparé, nous avons obtenu l'injectivité de l'application linéaire

$$X \to (X')^* : x \mapsto \langle \cdot , x \rangle$$

définie par $\langle T, x \rangle = T(x)$. Ainsi, X peut être identifié à un sous-espace de $(X')^*$.

Présentons une dernière conséquence du Théorème de Hahn-Banach, qui nous permettra d'obtenir un critère de densité.

Corollaire 5.1.11 *Soit Y un sous-espace fermé de l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Pour tout $x \in X \setminus Y$, il existe $T \in X'$ tel que $T(x) = 1$ et $T|_Y = 0$.*

Démonstration : Posons $Y_0 = Y + \rangle x \langle$ et considérons l'application $T : Y_0 \to \mathbb{K} : y + \lambda x \mapsto \lambda$. Alors T est une application linéaire telle que $T|_Y = 0$ et $T(x) = 1$. Elle est de plus continue par la Proposition 5.1.5 car $\ker T = Y$ est fermé. ■

Corollaire 5.1.12 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X. Le sous-espace Y est dense dans X si et seulement si 0 est l'unique forme de X' qui s'annule sur Y.*

Démonstration : Il est clair que si Y est dense dans X, alors toute forme continue qui s'annule sur Y s'annule sur X. Réciproquement, on vérifie facilement que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique est encore un sous-espace vectoriel [1]. Ainsi, $\overline{Y}$ est un sous-espace vectoriel de X et par le Corollaire 5.1.11, si $\overline{Y} \neq X$, alors il existe $T \in X'$, $T \neq 0$, tel que $T|_{\overline{Y}} = 0$. ■

Remarque 5.1.13 Si $A \subseteq X$, on pose

$$A^{\perp} := \big\{ T \in X' : T(x) = 0 \ \forall x \in A \big\}.$$

C'est l'orthogonal de A dans le dual X'. Le résultat précédent se réécrit de la manière suivante : un sous-espace vectoriel Y est dense dans X si et seulement si $Y^{\perp} = \{0\}$.

Exemple 5.1.14 Pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| > 1$, on définit la fonction $f_a : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ par

$$f_a(t) = \frac{1}{a - t}.$$

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexes telle que $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$, montrons que l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_{a_n} est dense dans $C_0([-1, 1])$. Nous allons appliquer le critère donné par le Corollaire 5.1.12. Soit $T : C_0([-1, 1]) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue telle que $T(f_{a_n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que si $|a| > 1$, on a

$$f_a(t) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{t}{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{a^{k+1}}$$

1. Laissé en exercice.

où la série converge uniformément sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $C_0([-1, 1])$. Par continuité et linéarité de T, on en tire que

$$T(f_a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \frac{1}{a^{n+1}} = \varphi\left(\frac{1}{a}\right),$$

où λ_n est égal à T évalué en la fonction $t \mapsto t^n$, et où $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n z^{n+1}$. Remarquons que $|\lambda_n| \leq \|T\| \|t \mapsto t^n\|_\infty = \|T\|$ et donc la série définissant φ définit une fonction holomorphe sur la boule unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. De plus, par hypothèse sur T, on a $0 = T(f_{a_n}) = \varphi\left(\frac{1}{a_n}\right)$. En utilisant le principe des zéros isolés, on en tire que $\varphi = 0$, d'où $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, T s'annule sur chaque fonction $t \mapsto t^n$, et donc par linéarité de T sur chaque polynôme. Comme les polynômes forment un ensemble dense de $C_0([-1, 1])$, la continuité de T permet d'affirmer que $T = 0$.

5.2 Dual d'un espace normé et norme opérateur

Dans cette section, nous étudions le cas particulier du dual d'un espace normé $(X, \|\cdot\|)$. Nous commençons par montrer que l'on peut munir le dual X' d'une topologie naturelle, qui en fait un espace complet. Nous nous intéressons ensuite au *bidual* de l'espace X.

Soit $T \in X'$. Comme T est une forme continue, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|T(x)| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X.$$

La définition suivante est donc légitime.

Définition 5.2.1 Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $T \in X'$. On définit la *norme opérateur* de T par

$$\|T\| := \inf\left\{C > 0 : |T(x)| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\right\}.$$

En général, on utilise la notation $\|\cdot\|$ pour la norme sur X et la norme opérateur. Le contexte permet de les distinguer.

Proposition 5.2.2 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé.*

1. *La norme opérateur définit une norme sur X'.*
2. *Pour tout $T \in X'$, on a*

$$\|T\| = \sup\left\{|T(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\right\} = \sup\left\{|T(x)| : x \in X, \|x\| = 1\right\}.$$

3. *Pour tout $T \in X'$ et tout $x \in X$, on a*

$$|T(x)| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

Démonstration : 1. Soient $T, S \in X'$ et $C_1, C_2 > 0$ tels que $|T(x)| \leq C_1\|x\|$ et $|S(x)| \leq C_2\|x\|$ pour tout $x \in X$. Alors

$$|T(x) + S(x)| \leq (C_1 + C_2)\|x\|,$$

d'où $C_1 + C_2 \geq \|T + S\|$. Il s'ensuit que $\|T\| + \|S\| \geq \|T + S\|$.

En procédant de la même manière, on vérifie directement que $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$ si $\lambda \in \mathbb{K}$. De plus, si $\lambda \neq 0$, on a

$$\|T\| = \|\frac{1}{\lambda}\lambda T\| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda T\|$$

d'où $|\lambda|\,\|T\| \leq \|\lambda T\|$.

Enfin, il est clair que $\|T\| = 0$ implique $T = 0$.

2. Soit $C > 0$ tel que $|T(x)| \leq C\|x\|$ pour tout $x \in X$. Si $\|x\| \leq 1$, on a en particulier $|T(x)| \leq C$ et il s'ensuit que

$$\sup\big\{|T(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\big\} \leq \|T\|.$$

Pour conclure, il reste à montrer que

$$\|T\| \leq \sup\big\{|T(x)| : x \in X, \|x\| = 1\big\}.$$

Si $x \neq 0$, alors $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ et

$$|T(x)| = \|x\|\big|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\big| \leq \|x\| \sup\big\{|T(y)| : y \in X, \|y\| = 1\big\}.$$

La définition de la norme opérateur permet d'obtenir le résultat.

3. Il suffit de remarquer que

$$|T(x)| = \|x\|\big|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\big| \leq \|x\|\,\|T\|$$

en utilisant le point 2. ■

En pratique, pour démontrer qu'une forme linéaire $T : X \to \mathbb{K}$ est continue, on montre que

$$\sup\big\{|T(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\big\} < +\infty.$$

Le résultat suivant montre que le dual d'un espace normé est toujours complet.

Proposition 5.2.3 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Muni de la norme opérateur, le dual X' de X est un espace de Banach.*

Démonstration : Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X'. Par la Proposition 5.2.2, on sait que

$$|T_q(x) - T_p(x)| \leq \|T_q - T_p\|\,\|x\|$$

pour tout $x \in X$. On en tire que pour tout $x \in X$ fixé, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle converge donc. Notons $T(x)$ sa limite. Par linéarité des applications T_n, il est clair que l'application T ainsi définie est linéaire.

Montrons que T est continue et que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T au sens de la norme opérateur. Comme la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X', elle est bornée dans X'. Soit $C > 0$ tel que $\|T_n\| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en tire que pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1$, on a

$$|T(x)| = \lim_{n\to+\infty} |T_n(x)| \leq C$$

et T est donc continu. Enfin, on sait que

$$|T_n(x) - T_p(x)| \leq \varepsilon_n \|x\|$$

pour tous $x \in X$ et $p \geq n$, si $\varepsilon_n = \sup_{q \geq n} \|T_n - T_q\|$. En faisant tendre p vers l'infini, il vient alors

$$|T_n(x) - T(x)| \leq \varepsilon_n \|x\|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$. On en tire que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, on sait que $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui permet de conclure. ∎

Le résultat suivant est une réécriture du Corollaire 5.1.9 dans le cas d'un espace normé.

Proposition 5.2.4 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x \in X$, on a*

$$\|x\| = \sup\{|T(x)| : T \in X', \|T\| \leq 1\}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que

$$|T(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$$

est équivalent à $\|T\| \leq 1$, et ensuite d'utiliser le Corollaire 5.1.9. ∎

On sait par la Remarque 5.1.10 qu'à tout $x \in X$ peut être associé naturellement une forme linéaire sur X', définie par

$$\langle \cdot , x \rangle : X' \to \mathbb{K} : T \mapsto T(x).$$

Cette forme linéaire est continue sur X' muni de la norme opérateur puisque par la Proposition 5.2.2

$$|T(x)| \leq C\|T\|$$

pour tout $T \in X'$, où $C = \|x\|$. Ainsi, elle appartient au dual topologique X'' de X'. On appelle cet espace l'espace *bidual* de X. La proposition précédente peut s'interpréter de la manière suivante : le plongement linéaire canonique

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \to X'' : x \mapsto \langle \cdot , x \rangle$$

préserve la norme, c'est-à-dire $\|x\| = \|\langle \cdot , x \rangle\|$ puisque par la Proposition 5.2.2, on sait que $\sup\{|T(x)| : T \in X', \|T\| \leq 1\} = \|\langle \cdot , x \rangle\|$. En particulier, X peut être identifié à un sous-espace fermé de X''.

Définition 5.2.5 Un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ est *réflexif* si le plongement canonique

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \to X'' : x \mapsto \langle \cdot , x \rangle$$

est surjectif. Il s'agit alors d'une isométrie.

Par la Proposition 5.2.3, tout espace réflexif est un espace de Banach.

Exemples 5.2.6

- Il est facile de vérifier que tout espace normé de dimension finie est réflexif.
- On verra que tout espace de Hilbert est réflexif.
- On verra que les espaces ℓ^p, $1 < p < +\infty$ sont réflexifs et que les espaces ℓ^1, ℓ^∞ et c_0 ne le sont pas.

Proposition 5.2.7 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Si X' est séparable, alors X est séparable.*

Démonstration : Soit $D = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de X'. Par la Proposition 5.2.2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $|T_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|T_n\|$. Soit Y le sous-espace vectoriel de X engendré par $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que Y est dense dans X. Pour cela, considérons $T \in X'$ tel que $T|_Y = 0$ et montrons que $T = 0$, ce qui suffit par le Corollaire 5.1.12. Soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite telle que $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans X'. Remarquons que, vu le choix de x_{n_k}, on a

$$\|T_{n_k} - T\| \geq |T_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k})| = |T_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2}\|T_{n_k}\|.$$

Puisque $\|T_{n_k} - T\|$ tend vers 0, on en tire que $\lim_{k\to+\infty} \|T_{n_k}\| = 0$. Cela implique que $T = 0$.

Pour conclure que X est séparable, il suffit alors de remarquer que les éléments de Y peuvent être approchés par des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, des éléments de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble dénombrable est donc dense dans X. ■

Remarque 5.2.8 La réciproque de ce résultat est fausse. En effet, considérons l'espace normé $C_0([0,1])$. Puisque les polynômes à coefficients rationnels sont denses dans $C_0([0,1])$ par le Théorème de Weierstrass, l'espace est séparable. On vérifie facilement que les formes linéaires $\delta_x : f \in C_0([0,1]) \mapsto f(x)$ sont continues pour tout $x \in [0,1]$ et que

$$\|\delta_x - \delta_y\| = \sup\left\{|f(x) - f(y)| : f \in C_0([0,1]), \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq 1\right\} = 2$$

si $x \neq y$. Comme $[0,1]$ n'est pas dénombrable, on ne peut pas approcher les formes δ_x, $x \in [0,1]$, par une famille dénombrable. Il s'ensuit que le dual de $C_0([0,1])$ n'est pas séparable.

Un autre exemple est donné par l'espace ℓ^1 dont on montrera que le dual est ℓ^∞, qui n'est pas séparable.

Proposition 5.2.9 *Un espace normé X est réflexif si et seulement si son espace dual X' est réflexif.*

Démonstration : $\Rightarrow$ Si X est réflexif, alors $X = X''$ et donc $X' = X'''$.

$\Leftarrow$ Supposons que X' est réflexif. Comme X est identifié à un sous-espace vectoriel fermé de X'', on va montrer que $X = X''$ en utilisant le Corollaire 5.1.12. Supposons donc que $x''' \in X'''$ est tel que $x'''|_X = 0$. Comme X' est réflexif, il existe $x' \in X'$ tel que $x'''(T) = T(x')$ pour tout $T \in X''$. Comme x''' s'annule sur X, on a

$$0 = x'''(\langle \cdot , x \rangle) = \langle x' , x \rangle = x'(x)$$

pour tout $x \in X$, et donc la forme x' est nulle. On en tire que $x'''(T) = 0$ pour tout $T \in X''$, c'est-à-dire $x''' = 0$. Le Corollaire 5.1.12 permet d'affirmer que X est dense dans X'', d'où $X = X''$ puisque X est fermé. ■

Pour tout espace normé X, on obtient les inclusions suivantes

$$X \subseteq X'' \subseteq X^{(4)} \subseteq X^{(6)} \subseteq \ldots$$

et

$$X' \subseteq X''' \subseteq X^{(5)} \subseteq X^{(7)} \subseteq \dots$$

La Proposition 5.2.9 implique que ces suites sont soit constantes, soit strictement croissantes.

5.3 Dual d'un espace de Hilbert

Dans le cas d'un espace de Hilbert, on peut avoir une description complète des formes linéaires continues. Commençons par montrer que le produit scalaire permet de définir toute une famille de H'. Nous montrerons ensuite que cette famille donne le dual topologique H' tout entier.

Lemme 5.3.1 *Soient H un espace de Hilbert et $a \in H$. L'application $\Phi_a : H \to \mathbb{K}$ définie par $\Phi_a(x) = \langle x, a\rangle$ appartient à H' et $\|\Phi_a\| = \|a\|$.*

Démonstration : On peut bien sûr supposer que $a \neq 0$. Il est facile de vérifier que Φ_a est linéaire. De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\Phi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\|\|a\| \quad \forall x \in H,$$

ce qui montre que Φ_a est continu et satisfait $\|\Phi_a\| \leq \|a\|$. Enfin, si $x = \frac{a}{\|a\|}$, on a $\|x\| = 1$ et $|\Phi_a(x)| = \|a\|$, d'où $\|\Phi_a\| \geq \|a\|$ par la Proposition 5.2.2. ■

Théorème 5.3.2 (Représentation de Riesz) *Soient H un espace de Hilbert et $T \in H'$. Alors il existe $a \in H$ tel que $T = \Phi_a$.*

Démonstration : Soit $T \in H'$. Si $T = 0$, alors $T = \Phi_0$. Si $T \neq 0$, alors $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel propre fermé de H [2]. Soit $z \notin \ker(T)$ et $x = z - P_{\ker(T)}(z)$. Alors $x \perp y$ pour tout $y \in \ker(T)$. Par linéarité, on peut supposer que $\|x\| = 1$. Remarquons que

$$T(x)y - T(y)x \in \ker T$$

pour tout $y \in H$. Par conséquent, on a

$$0 = \langle T(x)y - T(y)x, x\rangle = T(x)\langle y, x\rangle - T(y)\|x\|^2 = T(x)\langle y, x\rangle - T(y)$$

et on en tire que $T(y) = \langle y, \overline{T(x)}x\rangle$ pour tout $y \in H$. Ainsi, $a = \overline{T(x)}x$ convient. ■

Proposition 5.3.3 *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration : Soient H un espace de Hilbert et $S \in H''$. On vérifie directement que l'application $T_0 : H \to \mathbb{K} : x \mapsto \overline{S(\Phi_x)}$ est une forme linéaire sur H. Elle est également continue comme composée d'applications continues. Par le Théorème 5.3.2, il existe $a \in H$ tel que $T_0 = \Phi_a$. Pour conclure, il suffit de montrer que $S(T) = T(a)$ pour tout $T \in H'$. Si $T \in H'$, alors le Théorème 5.3.2 donne à nouveau $b \in H$ tel que $T = \Phi_b$, d'où

$$S(T) = S(\Phi_b) = \overline{\Phi_a(b)} = \overline{\langle b, a\rangle} = \langle a, b\rangle = \Phi_b(a) = T(a).$$

■

La théorème de représentation de Riesz permet également de définir la notion d'opérateur adjoint.

2. On peut donc considérer la projection orthogonale sur $\ker(T)$.

Définition 5.3.4 Soient H un espace de Hilbert et $T \in H'$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in H'$ tel que
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
pour tous $x, y \in H$. On dit que T^* est l'*adjoint* de T.

Démonstration : Si $x \in H$, l'application $y \in H \mapsto \langle T(x), y\rangle$ est une forme linéaire continue. Par le Théorème 5.3.2 de représentation de Riesz, il existe donc un unique vecteur z tel que $\langle T(x), y\rangle = \langle y, z\rangle$ pour tout $y \in H$. Il suffit alors de poser $T^*(x) = z$ et d'utiliser le Théorème 3.5.12 de Hellinger-Toeplitz pour obtenir la continuité de T^*. La preuve de l'unicité est immédiate. ■

5.4 Dual des espaces ℓ^p

Dans cette section, nous nous intéressons aux espaces ℓ^p et nous donnons une caractérisation complète de leur dual. Commençons par rappeler que si $p \in]1, +\infty[$, alors $\frac{1}{p} \in]0, 1[$ et il existe un nombre réel q tel que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Les nombres p et q sont appelés des *exposants conjugués*. On étend cette définition en imposant que les nombres 1 et $+\infty$ sont des exposants conjugués. Rappelons également les inégalités de Hölder.

Proposition 5.4.1 *Si $p, q \in [1, +\infty]$ sont des exposants conjugués, alors pour tout $x \in \ell^p$ et tout $y \in \ell^q$, on a $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Il est donc légitime de considérer, pour $y \in \ell^q$, l'application linéaire
$$T_y : \ell^p \to \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$
Les inégalités de Hölder impliquent que T_y est continu et tel que $\|T_y\| \leq \|y\|_q$. Dans le cas où $p = q = 2$, l'espace ℓ^2 est de Hilbert et on a $T_y = \Phi_{\overline{y}}$. On sait par le Théorème 5.3.2 de représentation de Riesz que ces formes linéaires permettent d'obtenir une description complète de l'espace dual. Montrons que c'est également le cas pour les espaces ℓ^p.

Lemme 5.4.2 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit q son exposant conjugué.*

Pour tout $y \in \ell^q$, on a
$$\|y\|_q = \sup\left\{ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1 \right\},$$
c'est-à-dire $\|y\|_q = \|T_y\|$.

Démonstration : Par les inégalités de Hölder, on sait déjà que $\|y\|_q \geq \|T_y\|$. Il suffit donc de montrer que $\|y\|_q \leq \|T_y\|$.

Supposons tout d'abord que $p = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n la suite canonique définie par $e_{n,m} = \delta_{n,m}$. On a $\|e_n\|_1 = 1$ et $|T(e_n)| = |y_n|$. Ainsi, $\|T_y\| \geq |y_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\|T_y\| \geq \|y\|_\infty$.

Supposons à présent que $p > 1$. On peut bien sûr supposer que $y \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n y_n = |y_n|$. Si N est suffisamment grand, on peut considérer $A_N := \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q\right)^{-1/p}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_n = A_N \lambda_n |y_n|^{q/p}$ si $n \leq N$, et $x_n = 0$ si $n > N$. On obtient alors

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^N A_N^p |\lambda_n|^p |y_n|^q\right)^{1/p} = A_N \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q\right)^{1/p} = 1.$$

Puisque $q = 1 + \frac{q}{p}$, il vient

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\right| = A_N \sum_{n=0}^N |y_n|^{1+\frac{q}{p}} = A_N \sum_{n=0}^N |y_n|^q = \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q\right)^{1/q},$$

d'où

$$\sup\left\{\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Big| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\right\} \geq \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

Comme N peut être choisi arbitrairement grand, on obtient la conclusion. ∎

Remarque 5.4.3 Dans la deuxième partie de la preuve précédente, on a montré que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} \leq \sup\left\{\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Big| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\right\}$$

quelle que soit la suite y. Ainsi, $y \in \ell^q$ si et seulement si

$$\sup\left\{\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Big| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\right\} < +\infty.$$

On a construit une injection continue naturelle

$$\ell^q \to (\ell^p)' : y \mapsto T_y$$

qui préserve la norme. Le résultat suivant montre que cette injection est également surjective et par conséquent, il s'agit d'une isométrie entre le dual de l'espace ℓ^p et l'espace ℓ^q.

Proposition 5.4.4 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit q son exposant conjugué. Pour tout $T \in (\ell^p)'$, il existe $y \in \ell^q$ tel que $T = T_y$. En particulier, $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ topologiquement.*

Démonstration : Supposons que $p = 1$. Vu ce qui précède, il suffit de montrer que si $T \in (\ell^1)'$, alors il existe $y \in \ell^\infty$ tel que $T = T_y$. Considérons la suite y définie par $y_n = T(e_n)$. On a $|y_n| \leq \|T\|$ et donc $y \in \ell^\infty$. Puisque $x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N x_n e_n$ pour tout $x \in \ell^1$, où la limite a lieu dans ℓ^1, la linéarité et la continuité de T permettent d'obtenir le résultat.

Supposons à présent que $p > 1$. Soit $T \in (\ell^p)'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n la suite définie par $e_{n,m} = \delta_{n,m}$. Pour tout $x \in \ell^p$, on a $x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N x_n e_n$, où la limite a lieu dans ℓ^p. Par continuité et linéarité de T, on a donc

$$T(x) = \lim_{N\to+\infty} T\left(\sum_{n=0}^N x_n e_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N x_n T(e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n T(e_n).$$

En utilisant la Remarque 5.4.3, on en tire que la suite $(T(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^q car

$$\sup\left\{\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n T(e_n)\Big| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\right\} = \|T\| < +\infty.$$

Ainsi, $T = T_y$ si y est la suite définie par $y_n = T(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'égalité $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ provient alors du Lemme 5.4.2.

Par le Corollaire 3.5.3 du théorème de l'opérateur ouvert, la bijection linéaire continue

$$\ell^q \to (\ell^p)' : y \mapsto T_y$$

entre espaces de Banach est un homéomorphisme. ■

Le résultat suivant est immédiat.

Corollaire 5.4.5 *Si $p \in]1, +\infty[$, alors l'espace ℓ^p est réflexif.*

Terminons cette section par le calcul du dual de l'espace c_0.

Proposition 5.4.6 *On a $(c_0)' \simeq \ell^1$ topologiquement.*

Démonstration : Si $y \in \ell^1$, on peut considérer l'application linéaire

$$T_y : c_0 \to \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Elle est continue puisque

$$|T_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty \quad \forall x \in c_0$$

et en particulier, $\|T_y\| \leq \|y\|_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n y_n = |y_n|$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit x la suite définie par $x_n = \lambda_n$ pour tout $n \leq N$ et $x_n = 0$ pour $n > N$. Alors, $x \in c_0$ et on a $\|x\|_\infty = 1$, d'où

$$\|T_y\| \geq |T_y(x)| = \left|\sum_{n=0}^N \lambda_n y_n\right| = \sum_{n=0}^N |y_n|.$$

Comme $N \in \mathbb{N}$ est arbitraire, on en tire que $\|T_y\| \geq \|y\|_1$.

Enfin, si $T \in (c_0)'$, vérifions comme précédemment que la suite $(T(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n T(e_n) = |T(e_n)|$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^N \lambda_n e_n \in c_0$ et

$$\left|T\Big(\sum_{n=0}^N \lambda_n e_n\Big)\right| = \left|\sum_{n=0}^N \lambda_n T(e_n)\right| = \sum_{n=0}^N |T(e_n)|.$$

En utilisant la continuité de T, il vient

$$\sum_{n=0}^N |T(e_n)| \leq \|T\| \, \|\sum_{n=0}^N \lambda_n e_n\|_\infty = \|T\|.$$

Comme $N \in \mathbb{N}$ est arbitraire, on en tire que $(T(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\|(T(e_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \leq \|T\|$. Comme T satisfait $T = T_y$, on obtient la conclusion. ■

Remarque 5.4.7 Le cas de l'espace ℓ^∞ est plus délicat à traiter. En effet, la suite $\left(\sum_{n=0}^N x_n e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^∞. Les arguments précédents ne peuvent donc plus s'appliquer dans cette situation.

Corollaire 5.4.8 *Les espaces ℓ^1, ℓ^∞ et c_0 ne sont pas réflexifs.*

Démonstration : Puisque $(c_0)' \simeq \ell^1$ et $(\ell^1)' \simeq \ell^\infty$, l'espace c_0 n'est pas réflexif. On obtient alors que ℓ^1 et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs en utilisant la Proposition 5.2.9. ■

5.5 L'espace faible et le dual simple

Dans cette section, nous introduisons deux topologies liées à la paire (X, X'), étant donné un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Notons que ces topologies proviennent de considérations plus générales dans le contexte de la donnée d'une *paire duale*, c'est-à-dire un triplet (X, Y, B) où X et Y sont deux espaces vectoriels et $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire non-dégénérée.

Commençons par remarquer que pour tout $T \in X'$, l'application $|T|$ définit une semi-norme sur X. On peut donc considérer le système filtrant de semi-normes sur X défini par

$$\mathcal{P}_a := \Big\{ \max\left\{|T| : T \in A'\right\} : A' \subseteq X', \#A' < +\infty \Big\}.$$

Définition 5.5.1 L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P}_a)$ est appelé l'*espace faible* et est noté X_a. Sa topologie est notée $\sigma(X, X')$ et appelée la *topologie faible*.

Remarquons que si $A' = \{T_1, \ldots, T_n\} \subseteq X'$, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $|T_k| \preceq p_k$ par la Proposition 1.6.1. Comme $\mathcal{P}$ est filtrant, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p_k \preceq p$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, d'où $|T| \preceq p$. Ainsi, $\mathcal{P}_a \preceq \mathcal{P}$ i.e. la topologie faible est plus faible que la topologie associée à $\mathcal{P}$. La topologie faible $\sigma(X, X')$ est donc moins fine que la topologie de X.

Une base de voisinages de 0 de la topologie faible est donnée par les intersections finies du type

$$\bigcap_{T\in A'} T^{-1}(b(0, r))$$

où $A' \subseteq X'$ est fini, $r > 0$ et $b(0,r)$ est la boule ouverte centrée en 0 de rayon r dans $\mathbb{K}$. On en tire que la topologie faible sur X est la topologie initiale relative aux applications de X'. C'est donc la topologie la moins fine pour laquelle toutes les applications de X' sont continues. En particulier, une application $S : (Y, \mathcal{T}) \to X_a$ est continue si et seulement si $T \circ S : Y \to \mathbb{K}$ est continue pour tout $T \in X'$.

Remarquons également que si X est séparé, l'espace X_a est séparé par le Corollaire 5.1.9. Nous allons montrer que le dual de l'espace faible est le même que le dual de X. Commençons par un lemme algébrique.

Lemme 5.5.2 *Soient $T, T_1, \ldots, T_n \in X^*$. Si*

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker T_n \subseteq \ker T,$$

alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_k$.

Démonstration : Considérons l'application linéaire $S : X \to \mathbb{K}^n : x \mapsto \big(T_1(x), \ldots, T_n(x)\big)$. Remarquons que si $S(x) = S(y)$, alors $x - y \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker T_n$ et donc $T(x-y) = 0$ par hypothèse. Par linéarité, on en tire que $T(x) = T(y)$ et l'application

$$f : \operatorname{im} S \to \mathbb{K} : S(x) \mapsto T(x)$$

est bien définie. Il est clair que f est linéaire et on peut l'étendre en une application linéaire $\widetilde{f} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ en considérant un supplémentaire de $\operatorname{im} S$ dans $\mathbb{K}^n$. Si $\lambda_k = \widetilde{f}(e_k)$, on a

$$T(x) = f\big(S(x)\big) = \widetilde{f}\big(S(x)\big) = \widetilde{f}\big(T_1(x), \ldots, T_n(x)\big) = \widetilde{f}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k(x) e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_k(x).$$

Ceci permet de conclure que $T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_k$. ■

Proposition 5.5.3 *On a $(X_a)' = X'$.*

Démonstration : On sait que $X' \subseteq (X_a)'$ car chaque $T \in X'$ est continu pour la topologie faible. Soit à présent $T \in (X_a)'$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}_0$, $T_1, \ldots, T_n \in X'$ et $C > 0$ tels que

$$|T(x)| \leq C \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} |T_k(x)|$$

pour tout $x \in X$. En particulier, $\bigcap_{k=1}^{n} \ker T_n \subseteq \ker T$ et le Lemme 5.5.2 implique que T est une combinaison linéaire de $T_1, \ldots, T_n$. Cela implique que $T \in X'$, d'où la conclusion. ■

Néanmoins, en général, les topologies $\mathcal{T}_P$ et $\sigma(X, X')$ sont différentes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.5.4 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. On sait que la topologie faible est moins fine que la topologie donnée par la norme de X, c'est-à-dire $\mathcal{P}_a \preceq \|\cdot\|$. Montrons que les topologies sont équivalentes si et seulement si X est de dimension finie. Si $\|\cdot\| \preceq \mathcal{P}_a$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, $T_1, \ldots, T_n \in X'$ et $C > 0$ tels que

$$\|x\| \leq C \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} |T_k(x)| \quad \forall x \in X.$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme, on en tire que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker T_k \subseteq \{x \in X : \|x\| = 0\} = \{0\}.$$

Par conséquent, l'application

$$S : X \to \mathbb{K}^n : x \mapsto \big(T_1(x), \ldots, T_n(x)\big)$$

est linéaire et injective. Par conséquent, X est de dimension finie. La réciproque découle de la Proposition 1.4.7, puisque la topologie faible sur X est séparée.

La notion de convergence liée à la topologie de l'espace faible est appelée la convergence faible : une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si $\big(T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$ pour tout $T \in X'$. La convergence en norme et la convergence faible coïncident donc dans les espaces normés de dimension finie. Dans les espaces normés de dimension infinie, la convergence en norme (on parle de *convergence forte*) implique la convergence faible, mais la réciproque est fausse en général, comme illustré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.5.5 Plaçons-nous dans l'espace ℓ^2 et considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite canonique e_n définie par $e_{n,k} = \delta_{n,k}$. Si $T \in (\ell^2)'$, on sait par la Proposition 5.4.4 qu'il existe $x \in \ell^2$ tel que

$$T(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k \quad \forall y \in \ell^2.$$

Ainsi, on a

$$T(e_n) = x_n \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$, et on en tire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0. D'autre part, on a $\|e_n\|_2 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas en norme vers 0 dans ℓ^2.

Remarque 5.5.6 Il existe néanmoins des espaces normés de dimension infinie pour lesquels les deux notions de convergence coïncident : c'est le cas par exemple de l'espace ℓ^1.

Le résultat suivant montre que toute application linéaire continue donne une application linéaire continue entre les espaces faibles correspondants.

Proposition 5.5.7 *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Si une application linéaire $T : X \to Y$ est continue, alors $T : X_a \to Y_a$ est continue. La réciproque est vraie si X et Y sont des espaces de Fréchet.*

Démonstration : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $T_1, \ldots, T_n \in Y'$. On cherche $m \in \mathbb{N}$, $S_1, \ldots, S_m \in X'$ et $C > 0$ tels que

$$\max_{k\in\{1,\ldots,n\}} |T_k(T(x))| \leq C \max_{k\in\{1,\ldots,m\}} |S_k(x)| \quad \forall x \in X.$$

Il suffit de remarquer que $C = 1$, $m = n$ et $S_k = T_k \circ T \in X'$ conviennent.

Réciproquement, si $T : X_a \to Y_a$ est continue, alors son graphe (vu comme sous-ensemble de $X_a \times Y_a$) est fermé puisque les topologies faibles sont séparées. Comme la topologie produit $X_a \times Y_a$ est plus faible que la topologie produit de $X \times Y$, le graphe de T est également fermé dans $X \times Y$. Par conséquent, si X et Y sont des espaces de Fréchet, le Théorème 3.5.10 du graphe fermé permet de conclure. ∎

Intéressons-nous à présent à l'espace dual X'. Dans le cas où X est un espace normé, nous l'avons muni d'une norme naturellement associée. Nous avons donc deux topologies sur X', à savoir

— la topologie *forte* associée à la norme de X',

— la topologie *faible* $\sigma(X', X'')$.

Nous savons que la topologie faible sur X' est strictement moins fine que la topologie forte sur X' si X est de dimension infinie. Nous allons à présent munir X' d'une topologie suffisamment faible pour que la boule unité $b_{X'}(0,1)$ associée à la norme de X' soit relativement compacte, même si l'espace est de dimension infinie. Il s'agit de la topologie *simple* ou *faible*-$*$.

Nous allons nous placer dans le cas général d'un espace localement convexe. Pour tout $x \in X$, l'application $|\langle \cdot, x\rangle| : T \in X' \mapsto |T(x)| \in \mathbb{K}$ définit une semi-norme sur X'. Remarquons qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X' converge pour cette semi-norme vers T si et seulement si la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$. Afin d'obtenir un ensemble filtrant de semi-normes qui traduiront cette convergence ponctuelle, on considère l'ensemble

$$\mathcal{P}_s := \Big\{ \max\big\{ |\langle\,\cdot\,, x\rangle| : x \in A\big\} : A \subseteq X, \#A < +\infty \Big\}.$$

Définition 5.5.8 L'espace localement convexe $(X', \mathcal{P}_s)$ est appelé le *dual topologique simple* et est noté X'_s. Sa topologie est notée $\sigma(X', X)$ et appelée la *topologie simple (ou faible-$*$)* sur X'.

Exemple 5.5.9 La notion de convergence introduite sur l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions est la convergence liée à la topologie simple.

Par définition, la topologie simple est séparée [3]. En transposant ce qui a été fait pour la topologie faible, on montre qu'il s'agit de la topologie la moins fine pour laquelle toutes les applications $T \in X' \mapsto T(x)$ sont continues. En particulier, une application $S : (Y, \mathcal{T}) \to X'_s$ est continue si et seulement si $\langle\,\cdot\,, x\rangle \circ S : Y \to \mathbb{K} : y \mapsto (S(y))(x)$ est continue pour tout $x \in X$.

Bien sûr, X' peut être identifié à un sous-espace du produit $\mathbb{K}^X$ via l'application

$$T \in X' \mapsto (T(x))_{x\in X} \in \mathbb{K}^X.$$

La topologie de X'_s est alors la topologie induite par $\mathbb{K}^X$ sur X' : en effet, la topologie de $\mathbb{K}^X$ est la topologie la moins fine telle que les projections $(\lambda_x)_{x\in X} \mapsto \lambda_x$ sont continues.

Dans le résultat suivant, on montre que seules les formes linéaires du type $\langle \cdot, x\rangle : T \in X' \mapsto T(x)$ sont continues pour la topologie simple.

Proposition 5.5.10 *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Alors*

$$(X'_s)' = \{\langle\,\cdot\,, x\rangle : x \in X\}.$$

Démonstration : Bien sûr, il suffit de montrer que $(X'_s)' \subseteq \{\langle \cdot, x\rangle : x \in X\}$. Soit $\Phi : X' \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue pour la topologie simple. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $C > 0$ tels que

$$|\Phi(T)| \le C \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} |T(x_k)|$$

3. Il suffit de vérifier que si $T(x) \neq T(y)$, alors il existe un scalaire λ pour lequel $|T(\lambda x)| \neq |T(\lambda y)|$.

pour tout $T \in X'$. Le Lemme 5.5.2 (appliqué avec X') implique qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle \cdot\,, x_k \rangle = \langle \cdot\,, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \rangle,$$

ce qui suffit. ■

Remarque 5.5.11 En fait, nous pourrions déduire toutes les propriétés du dual simple en considérant la topologie faible associée à la paire duale $(X', \delta(X), \delta)$, où $\delta = \langle \cdot\,, \cdot \rangle : X \to X''$.

Remarque 5.5.12 La topologie simple $\sigma(X', X)$ est moins fine que la topologie faible $\sigma(X', X'')$ de X' puisque X peut être identifié à un sous-espace de X''. En général, ces deux topologies sont différentes. Néanmoins, si l'espace X est normé et réflexif, les topologies coïncident. En fait, il s'agit même d'une caractérisation des espaces réflexifs.

Remarque 5.5.13 Si X est un espace normé, nous avons à présent trois topologies sur X', à savoir

— la topologie *forte* associée à la norme de X',
— la topologie *faible* $\sigma(X', X'')$,
— la topologie *simple* ou *faible-*$*$ $\sigma(X', X)$.

Comme dans le cas de la topologie faible, on montre que la topologie forte coïncide avec la topologie simple (et donc avec la topologie faible) si et seulement si $\dim X < +\infty$.

La notion de convergence associée à la topologie simple est la *convergence simple (ou ponctuelle ou faible-*$*$*)* : une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X' converge simplement si $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 5.5.14 Dans X', la convergence faible implique la convergence simple. En particulier, les limites sont alors identiques. Par contre, la réciproque est fausse en général. Par exemple, considérons $X = c_0$. Alors, on sait que X' s'identifie à ℓ^1 et X'' à ℓ^∞. La suite canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^1 (en fait, les formes T_{e_n} de c_0 associées) définie par $e_{n,k} = \delta_{n,k}$ converge vers 0 simplement dans ℓ^1 puisque pour tout $x \in c_0$, on a

$$T_{e_n}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_{n,k} x_k = x_n \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini. Néanmoins, pour la suite $x \in \ell^\infty$ définie par $x_k = 1$ pour tout k, on a

$$T_x(e_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e_{n,k} = x_n = 1$$

qui ne converge pas vers 0. Ainsi, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Comme elle est moins fine que les autres topologies considérées sur X', on peut espérer que la topologie simple nous fournisse plus d'ensembles compacts. C'est effectivement ce que nous obtenons dans le résultat suivant.

Théorème 5.5.15 (Alaoglu) *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et U un voisinage de 0. Alors le polaire*

$$U^{\triangle} = \{T \in X' : |T(x)| \leq 1 \, \forall x \in U\}$$

est simplement compact, c'est-à-dire compact dans $(X', \sigma(X', X))$.

Démonstration : Soit p une semi-norme sur X telle que $B_p(1) \subseteq U$ (on peut prendre un rayon égal à 1 quitte à multiplier $p \in \mathcal{P}$ par une constante). On a alors

$$U^{\triangle} \subseteq \big(B_p(1)\big)^{\triangle} = \big\{T \in X' : |T(x)| \leq p(x) \, \forall x \in X\big\}.$$

De plus, on a

$$\big\{T \in X' : |T(x)| \leq p(x) \, \forall x \in X\big\} = \left(\prod_{x \in X} [-p(x), p(x)]\right) \cap X^*$$

où l'on identifie X^* avec un sous-espace du produit $\mathbb{K}^X$. Le produit est compact dans $\mathbb{K}^X$ par le Théorème de Tychonoff (tout produit de compacts est compact). De plus, le dual algébrique X^* est fermé pour la topologie produit puisque

$$X^* = \bigcap_{x,y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}} \ker\big(\langle \cdot\,, \lambda x + \mu y\rangle - \lambda\langle \cdot\,, x\rangle - \mu\langle \cdot\,, y\rangle\big)$$

et les noyaux d'applications continues sont fermés. Ainsi, $\big(B_p(1)\big)^{\triangle}$ est compact dans $\mathbb{K}^X$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $U^{\triangle}$ est fermé pour la topologie simple. C'est évident puisque si $T \notin U^{\triangle}$, il existe $x \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|T(x)| > 1 + \varepsilon$. Alors

$$\{S \in X' : |T(x) - S(x)| < \varepsilon\}$$

est un ouvert de $\sigma(X', X)$ qui ne rencontre pas $U^{\triangle}$. ■

Dans le cas d'un espace normé X, le polaire de la boule unité fermée B est donné par

$$B^{\triangle} = \{T \in X' : |T(x)| \leq 1 \ \forall x \in B\} = \{T \in X' : \|T\| \leq 1\}.$$

Il s'agit donc de la boule unité fermée dans X'. On sait par le Théorème 4.2.5 de Riesz que si X (et donc X') est de dimension infinie, cette boule n'est jamais compacte dans l'espace normé X'. Le Théorème d'Alaoglu implique qu'elle est néanmoins simplement compacte. C'est un des intérêts majeurs de la topologie simple sur X'.

5.6 Exercices

Exercice 5.6.1 *Montrer que la topologie faible $\sigma(X, X')$ est métrisable si et seulement si X est de dimension finie.*

Exercice 5.6.2 *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace de $(X, \mathcal{P})$. On pose*

$$Y^{\perp} = \{T \in X' : T(y) = 0 \ \forall y \in Y\}.$$

1. *Montrer que le dual topologique de Y est isomorphe au quotient $X'/Y^\perp$.*
2. *Montrer que le dual topologique de l'espace quotient X/Y est isomorphe au sous-espace vectoriel $Y^\perp$.*

Exercice 5.6.3 *Soit $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes.*

1. *Montrer que le dual topologique du produit $\prod_{i\in I} X_i$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{i\in I} X_i'$ (cfr Liste 2).*
2. *Montrer que le dual topologique de la somme directe $\bigoplus_{i\in I} X_i$ est isomorphe au produit $\prod_{i\in I} X_i'$.*

Exercice 5.6.4 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments linéairement indépendants de X. Si $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, montrer qu'il existe $f \in X'$ tel que $f(x_k) = c_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Exercice 5.6.5 *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. Soit $L(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y. On définit la* norme opérateur *de T par*

$$\|T\| := \inf\big\{C > 0 : \|T(x)\|_Y \le C\|x\|_X \ \forall x \in X\big\}.$$

Montrer que

1. *la norme opérateur définit une norme sur $L(X,Y)$,*
2. *pour tout $T \in L(X,Y)$, on a*
$$\|T\| = \sup\big\{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \le 1\big\} = \sup\big\{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\big\},$$
3. *pour tout $T \in X'$ et tout $x \in X$, on a*
$$\|T(x)\|_Y \le \|T\|\,\|x\|_X.$$

Exercice 5.6.6 *On munit l'espace $L^{1/2}([0,1])$ de la distance définie par*

$$d(f,g) = \int_0^1 \sqrt{|f(x) - g(x)|}ds.$$

Montrer que la seule forme linéaire continue sur $L^{1/2}([0,1])$ est la forme linéaire nulle[4].

Exercice 5.6.7 *On munit l'espace $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à coefficients complexes de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Si $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme linéaire*

$$T_a : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} : P \mapsto P(a).$$

1. *A quelle(s) condition(s) sur a la forme T_a est-elle continue ?*
2. *Dans ce cas, calculer $\|T_a\|$.*

Exercice 5.6.8 *Soit $\varphi \in C^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Considérons l'application*

$$T : C^0([0,\pi], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^\pi \varphi(x) f(x) dx.$$

4. On sait que cet espace n'est pas localement convexe (cfr Liste 1).

1. *Montrer que T appartient au dual de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.*
2. *Si $\varphi \geq 0$, calculer $\|T\|$.*
3. *Si $\varphi(x) = \cos(x)$, calculer $\|T\|$.*

Exercice 5.6.9 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite formant une partie dense de $[0,1]$. On considère l'application*

$$T : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(a_n).$$

1. *Montrer que T appartient au dual de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $\|T\| = 1$.*

Bibliographie

[1] Garnir H. G., De Wilde M., Schmets J. (1968) *Analyse fonctionnelle I.* Birkhäuser, Basel.

[2] Jarchow H. (1981) *Locally Convex Spaces.* Teubner, Stuttgart.

[3] Köthe G. (1969) *Topological Vector Spaces 1.* Springer, Berlin.

[4] Matheron, E. *Topologie, Analyse Fonctionnelle.* Notes de cours, `http://matheron.perso.math.cnrs.fr/enseignement_mpfichiers/topanafonc.pdf`.

[5] Meise R., Vogt D. (1997) *Introduction to Functional Analysis.* Oxford Graduate Texts in Mathematics 2.

[6] Rudin, W. (1991) *Functional Analysis.* Second Edition, McGraw-Hill, Inc

[7] Schmets, J. (2004 – 2005) *Analyse Fonctionnelle.* Notes de cours, Université de Liège.

[8] Schneiders, J.P. (2010 – 2011) *Analyse Fonctionnelle.* Notes de cours, Université de Liège.

[9] Wengenroth, J. (2007 – 2008) *Analyse Fonctionnelle.* Notes de cours, Université de Liège.