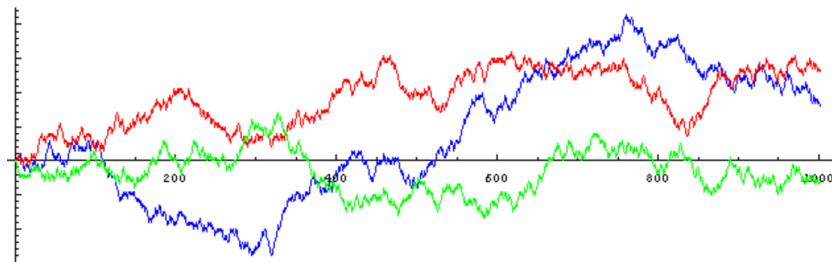


Introduction aux Processus Stochastiques



Céline ESSER

Année académique 2025 – 2026

Sur base du cours créé avec Yvik SWAN en 2018 – 2019

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Premières définitions	5
1.2	Questions	7
2	Chaînes de Markov et premières propriétés	9
2.1	Définition, graphe de transition et matrice de transition	9
2.2	Propriété de Markov	15
2.3	Probabilités de transition et lois marginales	17
2.4	Temps d'atteinte, probabilités d'atteinte	19
2.5	Classification des états d'une chaîne de Markov	22
2.5.1	Classes de communication	22
2.5.2	Périodicité	27
2.5.3	États persistants et états transitoires	28
3	Comportement asymptotique d'une chaîne de Markov	43
3.1	Distribution invariante	43
3.2	Chaînes régulières sur un espace d'états fini	46
3.3	Chaînes irréductibles sur un espace d'états fini	51
3.4	Chaînes irréductibles sur un espace d'états infini	55
3.5	Matrice fondamentale pour les chaînes irréductibles finies	55
3.5.1	Temps moyen de premier passage	56
3.5.2	Matrice fondamentale	58
3.6	Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov	62
3.6.1	Monte-Carlo	62
3.6.2	Génération de nombres aléatoires uniformément distribués	64
3.6.3	Algorithme de Metropolis-Hasting	67
4	Processus de Poisson	70
4.1	Processus de comptage	70
4.2	Processus de Poisson	71
4.3	Généralisations	79
4.3.1	Processus de Poisson non-homogène	79
4.3.2	Processus de Poisson composé	80
4.4	Application : Leaky bucket	81

5	Processus Markoviens	85
5.1	Introduction aux processus markoviens	85
5.2	Définition et propriétés de base	85
5.3	Equations de Kolmogorov et générateur	92
5.4	Classification des états et distribution stationnaire	97
5.5	Chaînes de Markov vs Processus Markoviens	101
5.6	Files d'attente	102
5.6.1	Définition et notations	102
5.6.2	Exemple : File d'attente $M/M/1/\infty$	105
5.6.3	Loi de Little	109
6	Marches aléatoires et mouvement Brownien	113
6.1	Marches aléatoires et martingales	113
6.2	Mouvement Brownien	116
	Références	124

Avant-propos

Ces notes de cours ont été rédigées pour le cours *Introduction aux Processus Stochastiques*. L'objectif de ce cours est de fournir aux étudiants une compréhension rigoureuse et opérationnelle des principaux modèles stochastiques utilisés pour la modélisation de systèmes évolutifs soumis à l'aléa. Le fil conducteur de ce cours est l'étude de systèmes aléatoires dont l'évolution future dépend uniquement de l'état présent : c'est ce que l'on appelle le *caractère markovien*. Nous nous intéresserons à la modélisation probabiliste de tels systèmes, à l'analyse de leur comportement à long terme, à la notion de stabilité, ainsi qu'à l'utilisation de méthodes de simulation numérique pour les explorer.

Le premier chapitre introduit la notion générale de processus stochastique. Nous y présentons les concepts fondamentaux de processus à temps discret ou continu, d'espace d'états, de trajectoire et de loi finie-dimensionnelle.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés à l'étude des chaînes de Markov à temps discret. Après avoir introduit la propriété de Markov et la notion de matrice de transition, nous étudions la classification des états, l'existence et l'unicité des lois stationnaires, ainsi que le théorème d'ergodicité. Une courte introduction aux méthodes MCMC (Markov Chain Monte Carlo) est également proposée.

Le chapitre 4 est consacré aux processus de Poisson, qui constituent un cas particulier de processus de comptage. Nous montrons que le processus de Poisson est un modèle fondamental pour représenter les phénomènes d'arrivées aléatoires, ses temps inter-arrivées suivant une loi exponentielle. Nous présentons également deux généralisations de ce processus. Enfin, nous illustrons son utilité à travers l'application du *leaky bucket*, un modèle couramment utilisé pour étudier la régulation du flux de données dans les réseaux informatiques et la gestion des files d'attente.

Le chapitre 5 est consacré aux processus markoviens à temps continu, dont les processus de Poisson font partie. Nous montrons qu'ils peuvent être décrits grâce aux paramètres des temps de séjour dans chaque état et d'une chaîne de Markov liée, appelée *chaîne des sauts*. Ensuite, nous introduisons les modèles de files d'attente pour lesquels $X(t)$ donne le nombre de clients dans un système à l'instant t , en considérant des arrivées et des départs dans le système suivant une certaine loi. Nous introduisons en détail le modèle $M/M/1$ et ses propriétés fondamentales : condition de stabilité, loi stationnaire, temps d'attente moyen. Nous terminons par la formule de Little.

Le chapitre 6 introduit les marches aléatoires, la notion de martingale et le mouvement Brownien.

Nous montrons comment les marches aléatoires constituent un modèle fondamental de déplacement aléatoire et comment, après renormalisation, elles mènent naturellement à la définition du mouvement Brownien, qui joue un rôle central dans la modélisation de phénomènes de diffusion, par exemple.

Le niveau mathématique requis pour ce cours correspond à un cours standard de probabilités : variables aléatoires, lois usuelles, espérance, lois conditionnelles, variance et indépendance, théorème limite. Aucune connaissance préalable en processus stochastiques ou en martingales n'est supposée.

Ces notes ont été rédigées sur la base des notes rédigées avec Yvik Swan en 2018–2019, ainsi que de nombreux échanges avec les étudiants et de plusieurs années d'enseignement du cours. Toute remarque ou correction est la bienvenue.

1 Introduction

L'objectif de ce cours est d'étudier et de modéliser des phénomènes aléatoires qui évoluent au cours du temps. Ces phénomènes peuvent se rencontrer dans des contextes très variés : réseaux informatiques, files d'attente, populations, physique, finances, etc.

1.1 Premières définitions

Définition 1.1.1. Un processus stochastique sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in I}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indexées par un ensemble I .

- ▷ Si l'ensemble I est dénombrable (typiquement $\mathbb{N}$), on parle de processus stochastique à temps discret.
- ▷ Si I est non-dénombrable (typiquement $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$), on parle de processus stochastique à temps continu.

Un processus stochastique modélise un système qui évolue au cours du temps : la variable X_t peut être interprétée comme l'état de ce système au temps t .

Exemple 1.1.2.

- ▷ **Nombre de paquets sur un routeur à l'instant t** : le trafic réseau est aléatoire et varie au cours du temps.
- ▷ **Nombre de clients dans une file** : la file d'attente dans une banque ou un supermarché peut être vue comme un processus stochastique, avec des arrivées et départs aléatoires.
- ▷ **Taille d'une population** : la population d'une espèce peut varier aléatoirement selon les naissances, décès et migrations.
- ▷ **Position d'une particule** : en physique, le mouvement d'une particule soumis à des forces aléatoires (diffusion) est un exemple classique de processus stochastique.
- ▷ **Cours d'une action** : le prix d'une action varie de manière imprédictible au cours du temps et peut être modélisé par un processus stochastique.

L'ensemble S des valeurs prises par les variables aléatoires $(X_t)_{t \in I}$ est appelé l'espace d'états.

- ▷ Si S est dénombrable, on parle de processus à *espace d'états discret*.
- ▷ Si S est non-dénombrable, on parle de processus à *espace d'états continu*.

Ainsi, les processus stochastiques peuvent être classés selon deux critères principaux : *le temps* et *l'espace d'état*.

Temps	Espace d'état	Exemple
discret	discret	Chaînes de Markov
continu	discret	Processus de Poisson
continu	continu	Mouvement brownien

Étant donné $\omega \in \Omega$, on s'intéresse à la collection

$$X(\omega) = \{X_t(\omega) : t \in I\},$$

appelée une *réalisation* ou *trajectoire* du processus. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des valeurs prises par le processus au cours du temps pour un ω fixé. On peut voir une trajectoire comme le “parcours” suivi par le processus dans son espace d'états au fil du temps. Pour chaque ω fixé, on obtient ainsi une suite ou une fonction de valeurs qui représente une évolution possible du processus.

Exemple 1.1.3. Soit X l'ensemble des résultats possibles d'un lancer de pièce répété indéfiniment (*pile* = 1, *face* = 0). On a $I = \mathbb{N}$ et $S = \{0, 1\}$: il s'agit d'un processus stochastique discret à espace d'états discret. Des réalisations possibles sont :

- ▷ $(1, 0, 0, 0, \dots)$,
- ▷ $(0, 0, 0, 1, \dots)$,
- ▷ $(1, 1, 1, 1, \dots)$,
- ▷ $(0, 1, 0, 1, \dots)$.

Il y a bien sûr une infinité de réalisations possibles.

Exemple 1.1.4. Le mouvement Brownien est un processus à temps continu et à espace d'état continu. Chaque trajectoire est continue mais non différentiable en tout point. Pour tout t , X_t est gaussien et les trajectoires sont des fonctions à valeurs réelles.

La *loi finie-dimensionnelle* d'un processus stochastique désigne la distribution jointe d'un nombre fini de variables aléatoires extraites du processus. Par exemple, la loi de $(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3})$ fournit toutes les probabilités jointes que le processus prenne certaines valeurs aux instants t_1, t_2, t_3 . Connaître toutes les lois finies-dimensionnelles revient à connaître le processus complet.

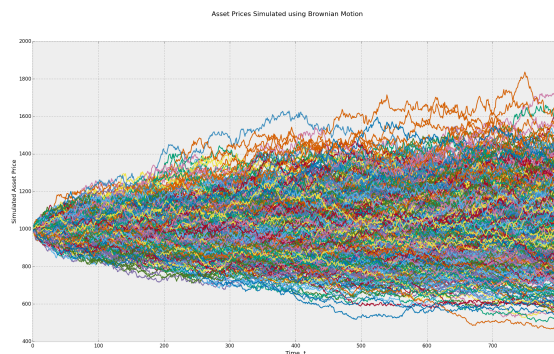


FIGURE 1.1 – Plusieurs trajectoires d'un mouvement Brownien

1.2 Questions

Étant donné un sous-ensemble A de l'espace d'états S , on peut se poser des questions telles que :

- ▷ Que vaut $\mathbb{P}(X_t \in A)$?
- ▷ Combien de temps (en moyenne) le processus passe-t-il dans A ?
- ▷ Combien de temps (en moyenne) faudra-t-il au processus pour atteindre A ?
- ▷ Combien de fois (en moyenne) un certain comportement est-il observé ?
- ▷ Quel est le comportement optimal par rapport à un but donné ?

Exemple 1.2.1. *On considère un promeneur ivre qui sort du bar et se déplace dans une rue droite bordée de lampadaires à intervalles réguliers. A chaque lampadaire, il s'arrête pour se reposer. Comme il est ivre, lorsqu'il repart, il a oublié d'où il venait et choisit donc un sens ou l'autre aléatoirement. Retournera-t-il au bar ? Si oui, combien d'étapes lui faudra-t-il pour atteindre le bar ?*

Exemple 1.2.2. *En temps normal, sur le temps de midi à la cafétaria de Montéfiore, on constate qu'en moyenne 13 étudiants arrivent par minute. Les étudiants se répartissent en une seule file et sont servis par deux employés au comptoir qui travaillent indépendamment à un rythme donné. Que peut-on dire sur la longueur de la file d'attente ?*

Tout cela dépend de la structure de dépendance entre les variables aléatoires. Par exemple, pour un processus à temps discret $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la loi de l'observation présente X_n en fonction des observations passées $X_1, \dots, X_{n-1}$ peut prendre des formes variées :

- ▷ Si les X_n sont indépendants, la loi conditionnelle de X_n connaissant $X_1, \dots, X_{n-1}$ est simplement la loi de X_n : le futur est totalement indépendant du passé, et tout est calculable.

- ▷ Si $X_n = g_n(X_1)$, alors X_n n'est plus aléatoire une fois X_1 observé : le processus devient déterministe.
- ▷ Si $X_n = g(X_1, \dots, X_{n-1}) + Y_n$, le processus peut devenir arbitrairement complexe et parfois insoluble.

Dans ce cours, nous allons nous intéresser à un type particulier de dépendance, appelé *Markovienne*, où la loi du futur ne dépend que de l'état présent, et pas du passé complet.

2 Chaînes de Markov et premières propriétés

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui permet de modéliser l'évolution d'un système aléatoire dans un espace d'états discret. La propriété fondamentale des chaînes de Markov est que son évolution future ne dépend que de la valeur présente, indépendamment du passé. Les chaînes de Markov jouent un grand rôle à la fois dans la théorie et dans les applications : leur structure est suffisamment riche pour modéliser de nombreux phénomènes aléatoires et suffisamment simple pour permettre de répondre à de multiples questions sur le comportement de ces phénomènes.

2.1 Définition, graphe de transition et matrice de transition

Soit E un ensemble dénombrable (typiquement, on prendra $E = \{1, \dots, N\}$ ou $E = \mathbb{N}$).

Définition 2.1.1. *Un processus stochastique à temps discret $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et à espace d'états discret $S = \{s_j : j \in E\}$ est une chaîne de Markov si*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{i_{n+1}} \mid X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_n = s_{i_n}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{i_{n+1}} \mid X_n = s_{i_n}) \quad (2.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in E$.

La chaîne de Markov est homogène si ces probabilités ne dépendent pas de n , c'est-à-dire si

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = \mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) = p_{ij} \quad (2.2)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in E$.

Ainsi, toute l'information utile pour la prédiction du futur d'une chaîne de Markov est contenue dans l'état présent.

Remarque 2.1.2. *L'ensemble E est fini ou dénombrable. Très souvent, on identifie S et E (avec $E = \{0, \dots, N\}$ ou $E = \mathbb{N}$). Ainsi, par exemple, on écrira $\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ à la place de $\mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i)$. De plus, on notera $\mathbb{P}_i$ la probabilité conditionnelle à*

l'événement $\{X_0 = s_i\}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}_i(X_1 = s_j) = \mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i).$$

Vu les propriétés (2.1) et (2.2), le comportement d'une chaîne de Markov peut être résumé dans un graphe ou dans une matrice. On est donc amené à considérer les définitions suivantes.

Définition 2.1.3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Les états et les probabilités de transitions sont représentés dans un graphe^a appelé le graphe de transition :

- ▷ les sommets du graphe sont les points de S ;
- ▷ on met une arête orientée $(s_i \rightarrow s_j)$ du sommet s_i vers le sommet s_j si $p_{ij} > 0$, et on indique la valeur de p_{ij} sur cette arête.

Les probabilités de transition $\{p_{ij} : i, j \in E\}$ sont rassemblées dans une matrice de dimension $\#E \times \#E$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

appelée la matrice de transition^b de la chaîne.

La distribution de X_0 est appelée la distribution initiale de la chaîne.

- a. pas nécessairement connexe et potentiellement infini,
- b. la matrice de transition est potentiellement infinie.

Les notions précédentes nous amènent naturellement à la définition compacte suivante.

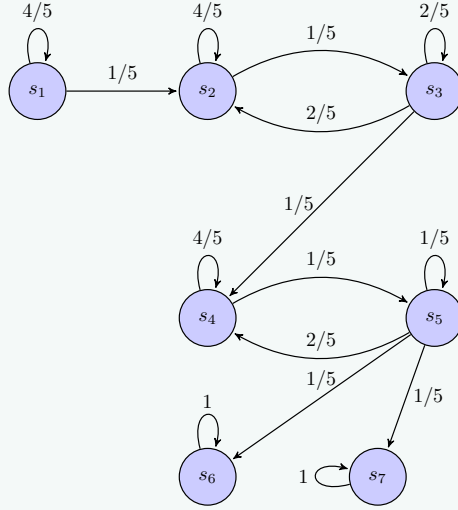
Définition 2.1.4. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $\mathbf{P}$ et de distribution initiale $\mathbf{u}$, noté

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P}),$$

si

- ▷ $X_0 \sim \mathbf{u}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_0 = s_j) = u_j$ pour tout $j \in E$,
- ▷ $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait (2.1) et (2.2).

Exemple 2.1.5. Considérons le graphe de transition suivant :



Il définit une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on considère la distribution initiale

$$\mathbf{u} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0),$$

cela signifie que notre chaîne commence dans le premier état. Si on considère la distribution initiale

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\right),$$

la chaîne commence dans un des trois premiers états avec la même probabilité.

Théorème 2.1.6. Posons $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)^T$. La matrice de transition $\mathbf{P}$ est une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice

- ▷ dont tous les éléments sont positifs ou nuls
- ▷ telle que $\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

La seconde assertion signifie que la somme des éléments de chaque ligne de $\mathbf{P}$ vaut 1. Autrement dit, $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de $\mathbf{P}$ de valeur propre 1.

Démonstration. Pour tout $i \in E$, on a évidemment

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) = 1$$

puisqu'on passe en revue toutes les possibilités de transition. ■

Bien sûr, réciproquement, toute matrice stochastique $\mathbf{P}$ et toute distribution initiale $\mathbf{u}$ (vecteur ligne dont tous les éléments sont positifs et dont la somme des éléments donne 1) définissent une chaîne de Markov.

Le théorème suivant est direct et donne une description alternative du processus. Il montre que les lois jointes de la chaîne de Markov sont entièrement caractérisées par la matrice de transition et par la distribution initiale.

Théorème 2.1.7. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique à temps discret et à espace d'états S . Alors*

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$$

si et seulement si pour tout $N \geq 1$ et tous $i_0, \dots, i_N \in E$

$$\mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_N = s_{i_N}) = u_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_N}. \quad (2.3)$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$. Procédons par récurrence sur N . Si $N = 1$, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}) = \mathbb{P}(X_1 = s_{i_1} \mid X_0 = s_{i_0}) \mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}) = p_{i_0 i_1} u_{i_0}.$$

Supposons à présent le résultat vérifié pour $N - 1$. Il vient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_N = s_{i_N}) \\ &= \mathbb{P}(X_N = s_{i_N} \mid X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_{N-1} = s_{i_{N-1}}) \mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_{N-1} = s_{i_{N-1}}) \\ &= p_{i_{N-1} i_N} u_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-2} i_{N-1}} \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence et en utilisant les propriétés (2.1) et (2.2).

Supposons à présent que (2.3) est vérifié. On a alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{N+1} = s_{i_{N+1}} \mid X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_N = s_{i_N}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{N+1} = s_{i_{N+1}}, X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_N = s_{i_N})}{\mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_N = s_{i_N})} \\ &= \frac{u_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_N i_{N+1}}}{u_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_N}} \\ &= p_{i_N i_{N+1}}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}$. Il reste à montrer que $\mathbf{u}$ est bien la distribution initiale. On a

$$\mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}) = \sum_{i_1 \in E} \mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}) = \sum_{i_1 \in E} u_{i_0} p_{i_0 i_1} = u_{i_0} \sum_{i_1 \in E} p_{i_0 i_1} = u_{i_0}$$

puisque la matrice $\mathbf{P}$ est stochastique. ■

Exemple 2.1.8. Reprenons la chaîne de Markov de l'Exemple 2.1.5 et de distribution initiale

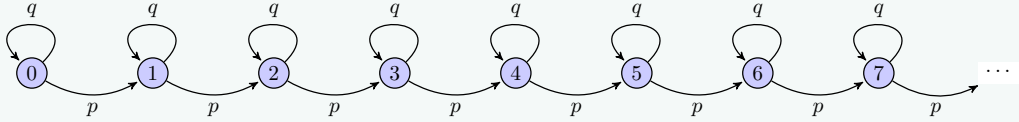
$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right).$$

La probabilité de commencer dans l'état s_3 , puis de passer dans l'état s_2 et ensuite de revenir dans l'état s_3 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_0 = s_3, X_1 = s_2, X_2 = s_3) = u_3 p_{3,2} p_{2,3} = \frac{1}{3} \frac{2}{5} \frac{1}{5} = \frac{2}{75}.$$

Présentons à présent quelques exemples supplémentaires de chaînes de Markov.

Exemple 2.1.9 (Processus de comptage). Considérons un processus à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ de graphe de transition

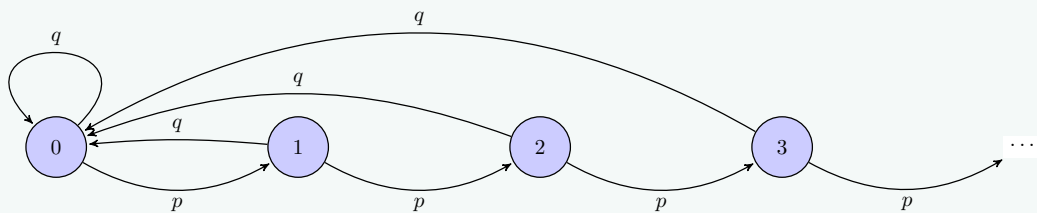


avec $q = 1 - p$, c'est-à-dire de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

On considère la distribution initiale triviale $\mathbf{u} = (1, 0, 0, \dots)$. Ce processus de Markov compte le nombre de succès lors d'une répétition d'une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p .

Exemple 2.1.10 (Processus des instants de succès consécutifs). Considérons un processus à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ de graphe de transition



avec $q = 1 - p$, c'est-à-dire de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

On considère la distribution initiale triviale $\mathbf{u} = (1, 0, 0, \dots)$. Ce processus compte le nombre de succès consécutifs lors d'une répétition d'une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p .

Exemple 2.1.11. D'après Kemeny, Snell et Thompson^a, le pays d'Oz dispose de nombreuses ressources, mais il n'est pas gâté par le climat : il n'y a jamais deux beaux jours consécutifs.

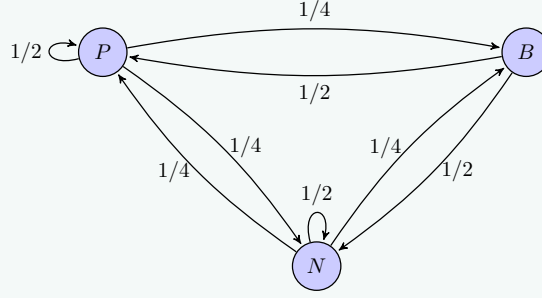
Si une journée est belle, le lendemain, il y a autant de chances d'avoir de la neige que de la pluie. Si la journée est neigeuse ou pluvieuse, il y a une probabilité de $1/2$ de retrouver le même temps le lendemain ; sinon, c'est-à-dire en cas de changement par rapport à la neige ou à la pluie, la moitié du temps on bénéficie d'une belle journée le lendemain.

Cela décrit une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & B & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ B \\ N \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Si aujourd'hui il fait beau, la distribution initiale est donnée par $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$.

Le graphe de transition correspondant à cette chaîne de Markov est représenté ci-dessous :



a. J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, 3rd ed. (Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1974).

2.2 Propriété de Markov

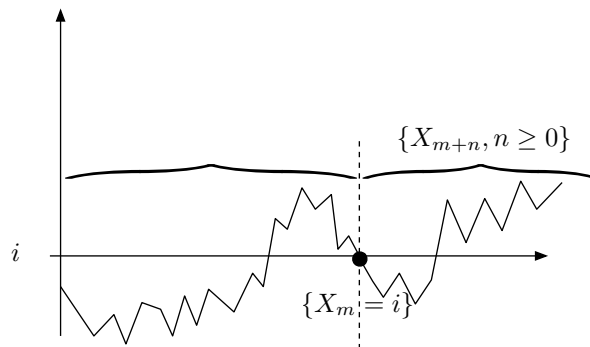
Le résultat immédiat suivant renforce l'idée qu'une chaîne de Markov est un processus sans mémoire. On note δ_i le vecteur dont la i^e composante vaut 1 et les autres sont égales à 0.

Théorème 2.2.1 (Propriété de Markov). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$. Si $s_i \in S$, alors conditionnellement à $\{X_m = s_i\}$, on a*

$$(X_{m+n})_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\delta_i, \mathbf{P}),$$

indépendamment de $X_0, \dots, X_m$.

Ce théorème signifie que, dans une chaîne de Markov, le futur est indépendant du passé conditionnellement au présent. On peut commencer à observer le processus à tout moment : la distribution du processus ne change pas.



Corollaire 2.2.2. *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$, alors pour tous $n, m \geq 1$ et tous $i_0, \dots, i_m \in E$*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{i_1}, \dots, X_{n+m} = s_{i_m} \mid X_n = s_{i_0}) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}. \quad (2.4)$$

Démonstration. Par la propriété de Markov, conditionnellement à l'événement $\{X_n = s_{i_0}\}$, le processus $(X_{m+n})_{m \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov $CM(\delta_{i_0}, \mathbf{P})$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 2.1.7. ■

Corollaire 2.2.3. *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$, alors pour tout $i \in E$, la durée de séjour dans l'état s_i suit une loi géométrique de paramètre $1 - p_{ii}$.*

Démonstration. Sachant qu'on se trouve dans l'état s_i , on doit montrer que la probabilité qu'on y reste durant plus de k étapes est égale à p_{ii}^k . Par le Corollaire 2.2.2, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \dots = X_{n+k} = s_i \mid X_n = s_i) = (p_{ii})^k,$$

ce qui suffit. ■

Dans le Théorème 2.2.1, l'instant “présent” m peut être remplacé par un instant “présent” aléatoire, appelé *temps d'arrêt*.

Définition 2.2.4. *Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement*

$$\{T \leq n\}$$

dépend uniquement des variables $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Autrement dit, la décision de savoir si l'arrêt s'est produit jusqu'au temps n ne peut être prise qu'en connaissant l'histoire du processus jusqu'au temps n .

Exemple 2.2.5. *Pour $s \in S$,*

- ▷ $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = s\}$ *est un temps d'arrêt : il correspond au premier moment où la chaîne atteint l'état s .*
- ▷ $T = \sup\{n \geq 0 : X_n = s\}$ *n'est pas un temps d'arrêt : pour savoir si la chaîne s'arrête à ce temps, il faut connaître le futur complet de la chaîne.*

Théorème 2.2.6 (Propriété de Markov forte). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$ une chaîne de Markov. Si T est un temps d'arrêt pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors, conditionnellement à l'événement $\{T < +\infty\}$ et à $\{X_T = s_i\}$, on a*

$$(X_{T+n})_{n \geq 0} \sim CM(\delta_i, \mathbf{P}).$$

2.3 Probabilités de transition et lois marginales

L'homogénéité d'une chaîne de Markov implique que tout le caractère aléatoire du processus est contenu dans trois éléments essentiels :

- ▷ la structure du graphe de transition,
- ▷ les valeurs des probabilités de transition rassemblées dans la matrice $\mathbf{P}$,
- ▷ la distribution initiale $\mathbf{u}$.

Nous verrons que, à long terme, dans certains cas, la distribution initiale devient peu pertinente et que le comportement de la chaîne est essentiellement déterminé par $\mathbf{P}$.

Avant d'étudier le comportement à long terme, commençons par introduire les *probabilités de transition* sur plusieurs étapes :

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) = \mathbb{P}(X_n = s_j \mid X_0 = s_i) =: p_{ij}^{(n)}.$$

Autrement dit, il s'agit de la probabilité que la chaîne, partant de l'état s_i , se trouve dans l'état s_j après n étapes. Nous allons voir que cette probabilité peut être calculée simplement à l'aide des puissances de la matrice de transition. Commençons par regarder sur un exemple ce qu'il se passe pour une probabilité de transition en 2 pas.

Exemple 2.3.1 (Exemple 2.1.11, suite). *Considérons la chaîne de Markov de matrice de transition*

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & B & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ B \\ N \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Nous souhaitons calculer la probabilité de transition sur deux étapes :

$$p_{ij}^{(2)} := \mathbb{P}(X_{n+2} = s_j \mid X_n = s_i) = \mathbb{P}(X_2 = s_j \mid X_0 = s_i),$$

qui sont rassemblées dans la matrice carrée $\mathbf{P}^{(2)}$.

Par exemple, si aujourd'hui il pleut, la probabilité qu'il neige dans deux jours est l'union de trois événements disjoints :

- ▷ *il pleut demain et il neige dans deux jours,*
- ▷ *il fait beau demain et il neige dans deux jours,*
- ▷ *il neige demain et il neige dans deux jours.*

En appliquant la loi des probabilités totales, on obtient :

$$p_{13}^{(2)} = p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} = \sum_{k=1}^3 p_{1k}p_{k3}.$$

De façon générale, pour tous i, j , on a :

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{ik} p_{kj},$$

et donc :

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2.$$

Autrement dit, la matrice de transition sur deux étapes est le carré de la matrice de transition sur une étape.

Cette propriété se généralise facilement aux probabilités de transitions en n étapes.

Théorème 2.3.2. Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène. Alors, pour tous $i, j \in E$ et tout $n \geq 1$,

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = s_j \mid X_0 = s_i) = (\mathbf{P}^n)_{ij}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant connu par définition. Supposons le résultat vérifié pour n et montrons-le pour $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_0 = s_i) &= \sum_{l \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_0 = s_i, X_n = s_l) \mathbb{P}(X_n = s_l \mid X_0 = s_i) \\ &= \sum_{l \in E} p_{lj} (\mathbf{P}^n)_{il} \\ &= (\mathbf{P}^{n+1})_{ij}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.3.3 (Equations de Chapman-Kolmogorov). Si $m, n \geq 0$ et si $i, j \in E$, alors

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &:= \mathbb{P}(X_{n+m} = s_j \mid X_0 = s_i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_n = s_k \mid X_0 = s_i) \mathbb{P}(X_m = s_j \mid X_0 = s_k). \end{aligned}$$

Démonstration. C'est direct puisque par le Théorème 2.3.2 et par définition de la multiplication matricielle, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+m} = s_j \mid X_0 = s_i) &= (\mathbf{P}^{n+m})_{ij} \\ &= (\mathbf{P}^n \mathbf{P}^m)_{ij} \\ &= \sum_{k \in E} (\mathbf{P}^n)_{ik} (\mathbf{P}^m)_{kj} \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_n = s_k \mid X_0 = s_i) \mathbb{P}(X_m = s_j \mid X_0 = s_k) \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité souhaitée. ■

Le résultat suivant donne la distribution des lois marginales de la chaîne de Markov. Il montre en particulier que la distribution des variables $X_0, X_1, X_2, \dots$ est entièrement déterminée par la matrice de transition $\mathbf{P}$ et la distribution initiale $\mathbf{u}$.

Ainsi, toute question portant sur les propriétés d'une chaîne de Markov peut être traduite en termes de ces deux quantités seulement.

Théorème 2.3.4. *Soit $X \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$. Pour tout $j \in E$ et tout $n \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X_n = s_j) = (\mathbf{u} \mathbf{P}^n)_j.$$

Démonstration. En utilisant la loi des probabilités totales et le Théorème 2.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = s_j) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_n = s_j \mid X_0 = s_i) \mathbb{P}(X_0 = s_i) \\ &= \sum_{i \in E} (\mathbf{P}^n)_{ij} u_i \\ &= (\mathbf{u} \mathbf{P}^n)_j. \end{aligned}$$

■

2.4 Temps d'atteinte, probabilités d'atteinte

Étant donnée une chaîne de Markov $X \sim CM(\mathbf{u}, \mathbf{P})$, on cherche naturellement à répondre à plusieurs questions fondamentales. Quelle est la probabilité que le processus atteigne un état donné? Quelle est la probabilité qu'il se termine dans un ensemble d'états donné? En moyenne, combien de temps faudra-t-il pour atteindre un tel ensemble? Combien de fois, en moyenne, le processus visitera-t-il chacun des états? Plus généralement, on s'intéresse à ces questions pour tout sous-ensemble A de l'ensemble des états.

Définition 2.4.1. *Soit $A \subseteq S$ un sous-ensemble d'états. Le temps de premier passage dans A est le temps d'arrêt défini par*

$$H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Par convention, lorsque $X_n \notin A$ pour tout $n \geq 0$, on pose $H_A = +\infty$.

Remarque 2.4.2. *On peut également définir le temps de premier retour dans A par*

$$T_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

Conditionnellement à $\{X_0 \notin A\}$, les variables aléatoires T_A et H_A sont bien sûr égales.

Définition 2.4.3. Soit $A \subseteq S$ un sous-ensemble d'états.

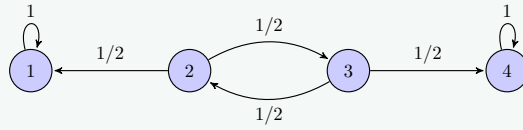
▷ Le vecteur h^A des probabilités d'atteinte est défini par

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(H_A < +\infty) = \mathbb{P}(\text{atteindre } A \mid X_0 = s_i).$$

▷ Le temps moyen pris par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour atteindre A est donné par

$$k_i^A = \mathbb{E}_i[H_A] = \mathbb{E}[\text{temps pour atteindre } A \mid X_0 = s_i].$$

Exemple 2.4.4. Considérons la chaîne de Markov de graphe



Prenons $A = \{4\}$ et étudions $h_i^{\{4\}} = \mathbb{P}_i(\text{atteindre } 4)$. Il est clair que $h_1^{\{4\}} = 0$, $h_4^{\{4\}} = 1$. De plus, en utilisant la propriété de Markov,

$$h_2^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_1^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_3^{\{4\}} \quad \text{et} \quad h_3^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_2^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_4^{\{4\}}.$$

D'où

$$h_2^{\{4\}} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad h_3^{\{4\}} = \frac{2}{3}.$$

De manière générale, on a le résultat suivant.

Théorème 2.4.5 (Probabilités d'atteinte). Le vecteur de probabilités d'atteinte $h^A = (h_i^A)$ est la solution minimale positive ou nulle du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{pour } s_i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in E} p_{ij} h_j^A & \text{pour } s_i \notin A, \end{cases} \quad (2.5)$$

où minimal signifie que si x est une autre solution avec $x_i \geq 0$ pour tout i , alors $x_i \geq h_i^A$ pour tout i .

Démonstration. Montrons que le vecteur $h^A = (h_i^A)$ est bien une solution du système (2.5). Si

$s_i \in A$, on a évidemment $h_i^A = 1$. Si $s_i \notin A$, alors

$$\begin{aligned}
 h_i^A &= \mathbb{P}(H_A < +\infty \mid X_0 = s_i) \\
 &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(H_A < +\infty \mid X_1 = s_j, X_0 = s_i) \mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) \\
 &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(H_A < +\infty \mid X_1 = s_j) \mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) \\
 &= \sum_{j \in E} h_j^A p_{ij}.
 \end{aligned}$$

La minimalité de la solution est admise. ■

Exemple 2.4.6 (Exemple 2.4.4, suite). *Pour $A = \{4\}$, le système d'équations linéaires devient*

$$h_4^{\{4\}} = 1; \quad h_2^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_1^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_3^{\{4\}}; \quad h_3^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_2^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_4^{\{4\}}$$

Puisque $h_1^{\{4\}} = 0$ (solution minimale), on retrouve la même chose que précédemment. Remarquons que pour $A = \{1, 4\}$, on trouve évidemment que la probabilité de finir dans les états 1 ou 4 est $h_1^A = h_2^A = h_3^A = h_4^A = 1$.

Intéressons-nous à présent au temps moyen pris par la chaîne pour atteindre un sous-ensemble d'états $A \subseteq S$. On s'intéresse donc au vecteur $k^A = (k_i^A)$ où on rappelle que

$$k_i^A = \mathbb{E}_i[H_A] = \mathbb{E}[\text{temps pour atteindre } A \mid X_0 = s_i].$$

On va présenter un résultat semblable au Théorème 2.4.5.

Exemple 2.4.7 (Exemple 2.4.4, suite). *Remarquons que le temps moyen pour atteindre l'état 4 en partant des états 1, 2 ou 3 est infini car la probabilité de ne jamais atteindre l'état 4 est non-nulle. On va donc cette fois-ci s'intéresser au temps moyen nécessaire pour atteindre $A = \{1, 4\}$ et on va étudier $k_i^A = \mathbb{E}_i[\text{temps pour atteindre } \{1, 4\}]$. Clairement, on a $k_1^A = k_4^A = 0$. De plus, en utilisant la propriété de Markov,*

$$k_2^A = 1 + \frac{1}{2}k_1^A + \frac{1}{2}k_3^A \quad \text{et} \quad k_3^A = 1 + \frac{1}{2}k_2^A + \frac{1}{2}k_4^A.$$

d'où $k_2 = k_3 = 2$.

Théorème 2.4.8 (Temps moyens d'atteinte). *Le vecteur $k^A = (k_i^A)$ des temps moyens*

d'atteinte est la solution minimale positive ou nulle du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{pour } s_i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A & \text{pour } s_i \notin A. \end{cases} \quad (2.6)$$

Démonstration. Montrons que le vecteur k^A satisfait les équations (2.6). Si $s_i \in A$, on a bien sûr que $k_i^A = 0$. Si $s_i \notin A$, alors partant de s_i , on a $H_A \geq 1$ et en utilisant la propriété forte de Markov, on a donc

$$\mathbb{E}_i[H_A | X_1 = s_j] = 1 + \mathbb{E}_j[H_A]$$

pour tout état s_j . Le Théorème de l'espérance totale implique alors

$$\begin{aligned} k_i^A = \mathbb{E}_i[H_A] &= \sum_{j \in E} \mathbb{E}_i[H_A | X_1 = s_j] \mathbb{P}_i(X_1 = s_j) = \sum_{j \in E} (1 + \mathbb{E}_j[H_A]) p_{ij} \\ &= \sum_{j \in E} p_{ij} + \sum_{j \in E} k_j^A p_{ij} \\ &= 1 + \sum_{j \in E} k_j^A p_{ij} \\ &= 1 + \sum_{s_j \notin A} k_j^A p_{ij} \end{aligned}$$

puisque la matrice $\mathbf{P}$ est stochastique et puisque $k_j^A = 0$ si $s_j \in A$. La minimalité de la solution est admise. ■

Dans le chapitre suivant, nous étudierons plus précisément les probabilités *d'absorption* (c'est-à-dire les probabilités d'atteindre un ensemble d'états dont la chaîne ne pourra plus sortir) et les temps moyens *d'absorption*.

2.5 Classification des états d'une chaîne de Markov

Dans cette section, étant donné une chaîne de Markov, nous nous intéressons aux questions fondamentales suivantes :

- ▷ Partant d'un état s_i fixé, combien de fois la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ visite-t-elle un état s_j donné ? En particulier, le nombre de visites est-il fini ou infini ?
- ▷ Quel est l'ensemble des états visités par la chaîne ? Cet ensemble est-il aléatoire ?

Pour aborder ces problèmes, nous commençons par une classification des états en *classes de communication*, définies uniquement à partir des relations d'accessibilité entre états, sans considérer les probabilités de transition. Nous verrons ensuite que tous les états d'une même classe partagent certaines propriétés probabilistes, notamment la distinction entre *états récurrents* et *états transitoires*. Enfin, nous introduirons des techniques de calcul matriciel permettant d'analyser efficacement les propriétés de visite des états.

2.5.1 Classes de communication

Définition 2.5.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov.

▷ Un chemin est une succession d'arêtes consécutives dans le graphe de la chaîne. On note

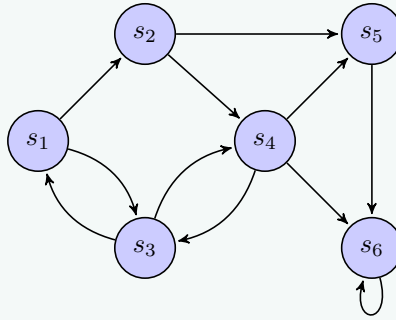
$$s_i \rightsquigarrow s_j$$

s'il existe un chemin

$$s_i \rightarrow s_{i_1} \rightarrow \cdots \rightarrow s_{i_n} \rightarrow s_j.$$

▷ Un circuit est un chemin fermé reliant un état à lui-même. Par convention, chaque état forme un circuit trivial avec lui-même.

Exemple 2.5.2. Dans le graphe ci-dessous, la succession $s_3 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_5 \rightarrow s_6$ est un chemin reliant le sommet s_3 au sommet s_6 . Le chemin $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_4 \rightarrow s_3 \rightarrow s_1$ est un circuit. Le seul chemin partant de s_6 est le circuit trivial s_6 .



Définition 2.5.3. Soient s_i et s_j deux états de l'espace S .

▷ On dit que s_j est accessible depuis s_i si $s_i \rightsquigarrow s_j$.

▷ On dit que s_i et s_j communiquent si chacun est accessible depuis l'autre. On note alors

$$s_i \longleftrightarrow s_j.$$

La relation $\longleftrightarrow$ est une relation d'équivalence, qui partitionne l'espace d'états en classes de communication (ou classes irréductibles) C :

$$s_i, s_j \in C \iff s_i \longleftrightarrow s_j.$$

Lorsque l'espace S possède une seule classe, la chaîne est dite irréductible, c'est-à-dire que tous les états communiquent.

Bien qu'il soit souvent plus facile de déterminer les classes de communication à partir du graphe de transition, on peut également lire la relation $\rightsquigarrow$ directement sur la matrice de transition.

Théorème 2.5.4. *Pour $i \neq j$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- ▷ $s_i \rightsquigarrow s_j$;
- ▷ il existe $n \geq 0$ et $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ avec $i_0 = i$ et $i_n = j$ tels que

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} > 0 ;$$

- ▷ il existe $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du Corollaire 2.2.2 et du Théorème 2.3.2. ■

Définition 2.5.5. *Soit C une classe de communication. On dit que C est :*

- ▷ finale si, pour tout $s_i \in C$ et tout $s_j \in S$, $s_i \rightsquigarrow s_j$ implique $s_j \in C$;
- ▷ de passage si, pour tout $s_i \in C$, il existe $s_j \notin C$ tel que $s_i \rightsquigarrow s_j$.

Il est facile de voir que toute chaîne de Markov finie possède au moins une classe finale. De plus, restreindre la chaîne à une classe finale donne une chaîne irréductible. Par conséquent, de nombreux résultats sur les chaînes de Markov peuvent se formuler directement dans le cadre des chaînes irréductibles, sans perte de généralité, car l'étude d'une chaîne générale se ramènera à l'analyse de chacune de ses classes finales.

Définition 2.5.6. *Un état est absorbant s'il est le seul élément d'une classe finale. Une chaîne est dite absorbante si, pour tout état, il existe un état absorbant accessible depuis cet état.*

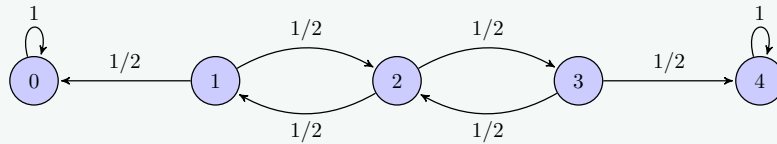
Remarque 2.5.7. *Un état s_i est absorbant si et seulement si $p_{ii} = 1$. Autrement dit, c'est un état qu'on ne peut jamais quitter.*

Exemple 2.5.8. *Reprenons le graphe de l'exemple 2.5.8. On identifie trois classes :*

- ▷ $C_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$,
- ▷ $C_2 = \{s_5\}$,
- ▷ $C_3 = \{s_6\}$.

Les classes C_1 et C_2 sont de passage, tandis que C_3 est finale. L'état s_6 est absorbant, et la chaîne est donc absorbante.

Exemple 2.5.9 (Drunkard's walk). *Un homme se promène le long d'un tronçon de quatre pâtés de maisons sur Park Avenue. S'il se trouve au carrefour 1, 2 ou 3, il choisit de continuer dans la même direction ou de revenir sur ses pas avec une probabilité égale. Il marche jusqu'à atteindre le coin 4 (le bar) ou le coin 0 (sa maison). Une fois arrivé au bar ou à la maison, il y reste.*

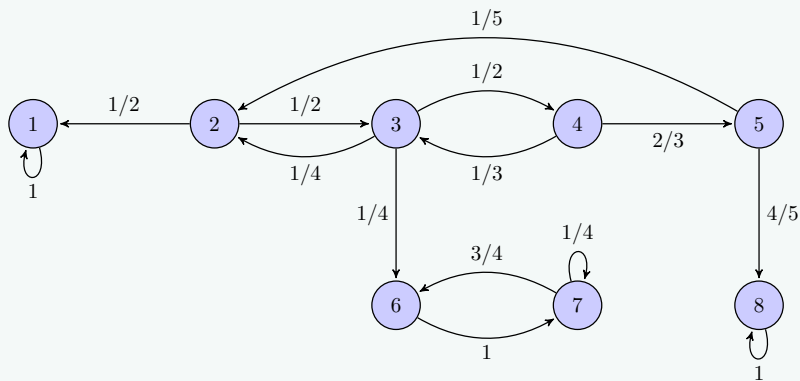


Ce graphe définit trois classes :

- ▷ $C_1 = \{1, 2, 3\}$,
- ▷ $C_2 = \{0\}$,
- ▷ $C_3 = \{4\}$.

La classe C_1 est de passage, tandis que les classes C_2 et C_3 sont finales. Les états 0 et 4 sont absorbants.

Exemple 2.5.10. *Considérons une chaîne dont le graphe de transition est donné ci-dessous :*

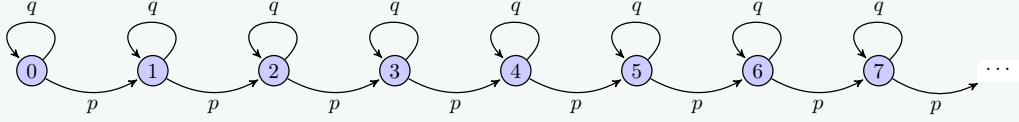


Ce graphe définit quatre classes :

- ▷ $C_1 = \{1\}$,
- ▷ $C_2 = \{2, 3, 4, 5\}$,
- ▷ $C_3 = \{6, 7\}$,
- ▷ $C_4 = \{8\}$.

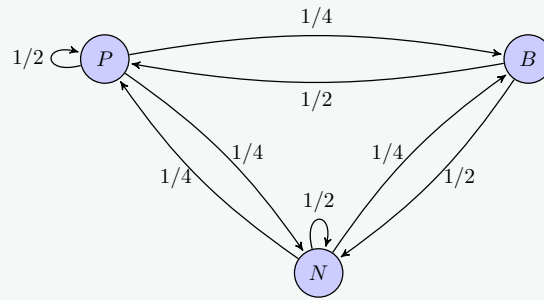
La classe C_2 est de passage, tandis que les classes C_1 , C_3 et C_4 sont finales. Les états 1 et 8 sont absorbants.

Exemple 2.5.11 (Exemple 2.1.9, suite). Reprenons le graphe du processus de comptage



Pour tout $j \geq 0$, $C_j = \{j\}$ est une classe de passage ; ce graphe possède donc une infinité de classes. Aucun état n'est absorbant.

Exemple 2.5.12 (Exemple 2.1.11, suite). Reprenons le graphe donnant la météo



Ce graphe est irréductible : il possède une seule classe $C = \{P, B, N\}$. Aucun état n'est absorbant.

La classification des états implique qu'on peut “casser” une chaîne de Markov en plus petites chaînes, dont les propriétés peuvent être étudiées et utilisées indépendamment. Bien sûr, dans le cas d'un espace d'états fini, on peut ré-ordonner et numéroter les états dans l'ordre qu'on préfère. En général, on ordonne les états de manière à faire apparaître clairement la structure des classes. En particulier, si la chaîne possède une classe finale A , on peut ré-ordonner les états pour avoir une matrice de transition de la forme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_B & | & \mathbf{P}_{B,A} \\ \hline 0 & | & \mathbf{P}_A \end{pmatrix}.$$

De manière générale, s'il y a n_T classes de passage et n_F classes finales, alors on peut ré-ordonner les états pour avoir une matrice de transition de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{P}_{T_1, T_1} & \mathbf{P}_{T_1, T_2} & \cdots & \mathbf{P}_{T_1, T_{n_T}} & \mathbf{P}_{T_1, A_1} & \mathbf{P}_{T_1, A_2} & \cdots & \mathbf{P}_{T_1, A_{n_F}} \\ \mathbf{P}_{T_2, T_1} & \mathbf{P}_{T_2, T_2} & \cdots & \mathbf{P}_{T_2, T_{n_T}} & \mathbf{P}_{T_2, A_1} & \mathbf{P}_{T_2, A_2} & \cdots & \mathbf{P}_{T_2, A_{n_F}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{T_{n_T}, T_1} & \mathbf{P}_{T_{n_T}, T_2} & \cdots & \mathbf{P}_{T_{n_T}, T_{n_T}} & \mathbf{P}_{T_{n_T}, A_1} & \mathbf{P}_{T_{n_T}, A_2} & \cdots & \mathbf{P}_{T_{n_T}, A_{n_F}} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{P}_{A_1, A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{P}_{A_2, A_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}_{A_{n_F}, A_{n_F}} \end{array} \right)$$

On parle de *forme canonique* de la matrice de transition $\mathbf{P}$.

Exemple 2.5.13 (Exemple 2.5.9, suite). Une forme canonique de la matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \end{array}.$$

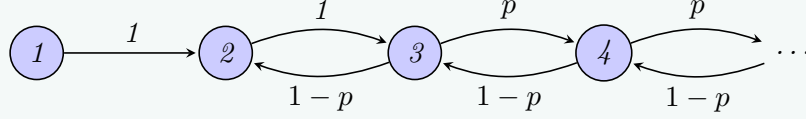
2.5.2 Périodicité

Définition 2.5.14. Soit s_i un état pour lequel il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p_{ii}^{(n)} > 0$. La période de l'état s_i est définie comme le pgcd des entiers $n \geq 1$ pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$. Si la période de s_i est égale à 1, on dit que l'état est apériodique.

Remarque 2.5.15. Un état s_i dans lequel on peut rester avec une probabilité non nulle, c'est-à-dire tel que $p_{ii} > 0$, est automatiquement apériodique.

Remarque 2.5.16. Si un état s_i n'est jamais accessible depuis lui-même (c'est-à-dire qu'une fois quitté, on ne peut jamais y revenir), l'ensemble des entiers n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$ est vide. Par convention, on définit alors la période de s_i comme étant $+\infty$.

Exemple 2.5.17. Considérons le graphe de transition suivant :



Pour tout état $j \geq 2$, les circuits $j \rightsquigarrow j$ de longueur positive sont de longueur paire. Ainsi, tout état $j \geq 2$ est périodique de période 2.

L'état 1 ne se trouve sur aucun circuit de longueur positive. Sa période est donc $+\infty$.

Proposition 2.5.18. *La périodicité est une propriété de classe de communication. Si deux états s_i et s_j communiquent, ils ont la même période. Ainsi, on peut parler de la période d'une classe et de classe apériodique.*

Démonstration. On va montrer que la période de s_j divise celle de s_i . Par symétrie, on aura également que la période de s_i divise celle de s_j , d'où l'égalité. Puisque $s_i \rightsquigarrow s_j$, il existe $m, n \geq 1$ tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$. Si r est tel que $p_{ii}^{(r)} > 0$, on a

$$p_{jj}^{(m+r+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)} > 0$$

et

$$p_{jj}^{(m+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

On en tire que la période de s_j divise les entiers $m + r + n$ et $m + n$, donc elle divise également $(m + r + n) - (m + n) = r$. Ainsi, la période de s_j divise tous les entiers r tels que $p_{ii}^{(r)} > 0$, et donc également leur pgcd. ■

Remarque 2.5.19. *Par une simple application du théorème de Bezout, un état s_i est apériodique si et seulement s'il existe un entier n_i tel que, pour tout $n \geq n_i$, il existe un circuit $s_i \rightsquigarrow s_i$ de longueur n . De plus, si $j \neq i$ est un état accessible depuis s_i , c'est-à-dire $s_i \rightsquigarrow s_j$, alors il existe un chemin de longueur m reliant s_i à s_j ; on obtient ainsi un chemin de longueur $n + m$ de s_i vers s_j pour tout $n \geq n_i$.*

2.5.3 États persistants et états transitoires

Rappelons que, pour tout état s_i d'une chaîne de Markov, la probabilité conditionnelle sachant que $X_0 = s_i$ est notée $\mathbb{P}_i$.

Définition 2.5.20. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}$ et soit $s_i \in S$.*

▷ On dit que l'état s_i est persistant si

$$\mathbb{P}_i(X_n = s_i \text{ pour une infinité de } n) = 1.$$

▷ On dit que l'état s_i est transitoire (ou transient) si

$$\mathbb{P}_i(X_n = s_i \text{ pour une infinité de } n) = 0.$$

Ainsi, un état persistant est un état dans lequel la chaîne reviendra toujours, tandis qu'un état transitoire est un état qu'on finit par quitter définitivement. En particulier, tout état absorbant est persistant.

Pour montrer que tout état est soit persistant, soit transitoire, introduisons les variables aléatoires comptant le nombre de visites d'un état.

Définition 2.5.21. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et $s_j \in S$.

▷ Le nombre de visites de l'état s_j est

$$V_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = s_j\}}.$$

▷ La matrice $\mathbf{R}$ donnant le nombre moyen de visites est définie par

$$R_{ij} = \mathbb{E}_i[V_j].$$

On peut reformuler la définition de persistance et de transience en termes de V_j :

▷ s_j est persistant si et seulement si $\mathbb{P}_j(V_j = +\infty) = 1$.

▷ s_j est transitoire si et seulement si $\mathbb{P}_j(V_j = +\infty) = 0$.

Le théorème suivant relie directement la matrice $\mathbf{R}$ à la matrice de transition $\mathbf{P}$.

Théorème 2.5.22. Pour tous $s_i, s_j \in S$, on a

$$R_{ij} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{P}^n)_{ij}.$$

Démonstration. Par définition¹,

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = s_j\}} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_i[\mathbf{1}_{\{X_n = s_j\}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_i(X_n = s_j) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{P}^n)_{ij}.$$

■

Définition 2.5.23. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et soit $s_j \in S$ un état.

1. L'échange entre espérance et somme étant permis par le théorème de convergence monotone.

▷ On note T_j le temps de premier retour dans s_j défini par

$$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = s_j\}.$$

▷ On définit la matrice $\mathbf{F}$ donnant la probabilité d'atteindre les états par

$$F_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < +\infty).$$

Proposition 2.5.24. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et soit $s_j \in S$ un état. Conditionnellement à $\{X_0 = s_j\}$, la variable aléatoire V_j suit une loi géométrique de paramètre $1 - F_{jj}$. Autrement dit, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}_j(V_j > r) = F_{jj}^r.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur r . Si $r = 0$, le résultat est vérifié. Supposons à présent le résultat vérifié pour r et montrons-le pour $r + 1$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j(V_j > r + 1) &= \mathbb{P}_j(V_j > r + 1 \text{ et } V_j > r) = \mathbb{P}_j(V_j > r + 1 \mid V_j > r) \mathbb{P}_j(V_j > r) \\ &= \mathbb{P}_j(T_j < +\infty) F_{jj}^r \\ &= F_{jj}^{r+1} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété forte de Markov et l'hypothèse de récurrence. ■

Intuitivement, le résultat est clair : partant de s_j , pour que le nombre de visites soit supérieur à r , il faut y retourner au moins r fois. Autrement dit, le temps de retour doit être fini r fois. De même, si l'on souhaite visiter au moins r fois l'état s_j en partant de l'état s_i , il faut d'abord passer de s_i à s_j , puis retourner r fois ou plus en s_j . Cela conduit au résultat suivant.

Corollaire 2.5.25. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et soient $s_i, s_j \in S$ deux états. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_i(V_j > r) = F_{ij} F_{jj}^r.$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(V_j > r) &= \mathbb{P}_i(T_j < +\infty \text{ et } V_j > r) \\ &= \mathbb{P}_i(V_j > r \mid T_j < +\infty) \mathbb{P}_i(T_j < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_i(V_j > r \mid T_j < +\infty) F_{ij}. \end{aligned}$$

Par la propriété forte de Markov, on a

$$\mathbb{P}_i(V_j > r \mid T_j < +\infty) = \mathbb{P}_j(V_j > r),$$

La Proposition 2.5.24 conduit alors à la conclusion. ■

Cette loi nous permet de calculer les matrices $\mathbf{R}$ (le nombre moyen de visites) et $\mathbf{F}$ (les probabilités d'atteinte d'un état).

Proposition 2.5.26 (Liens entre les matrices $\mathbf{R}$ et $\mathbf{F}$). *On a*

$$1. \mathbb{P}_j(V_j = r) = F_{jj}^{r-1}(1 - F_{jj}) \text{ pour tout } r \in \mathbb{N}_0$$

$$2. R_{jj} = \mathbb{E}_j[V_j] = \frac{1}{1 - F_{jj}}$$

$$3. \mathbb{P}_i(V_j = r) = \begin{cases} 1 - F_{ij} & \text{si } r = 0 \\ F_{ij}F_{jj}^{r-1}(1 - F_{jj}) & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$4. R_{ij} = \mathbb{E}_i[V_j] = \frac{F_{ij}}{1 - F_{jj}} = F_{ij}R_{jj}.$$

Démonstration. Les points 1 et 2 découlent directement de la Proposition 2.5.24. Pour le point 3, on utilise le Corollaire 2.5.25 et on remarque que si $r = 0$, on a

$$\mathbb{P}_i(V_j = 0) = 1 - \mathbb{P}_i(V_j > 0) = 1 - F_{ij}$$

et si $r \geq 1$,

$$\mathbb{P}_i(V_j = r) = \mathbb{P}_i(V_j > r - 1) - \mathbb{P}_i(V_j > r) = F_{ij}F_{jj}^{r-1} - F_{ij}F_{jj}^r = F_{ij}F_{jj}^{r-1}(1 - F_{jj}).$$

Pour le dernier point, il vient alors

$$\mathbb{E}_i(V_j) = \mathbb{E}_i(V_j | T_j < +\infty) \mathbb{P}(T_j < +\infty) + \mathbb{E}_i(V_j | T_j = +\infty) \mathbb{P}(T_j = +\infty) = \mathbb{E}_j[V_j] F_{ij} + 0 = R_{jj} F_{ij}.$$

■

Les relations existant entre les probabilités F_{jj} et les nombres moyens de visites R_{jj} permettent de conclure que seuls les deux types d'états que nous avons considérés sont possibles.

Proposition 2.5.27. *On a la dichotomie suivante :*

1. Si $F_{jj} = 1$, alors s_j est persistant et $R_{jj} = +\infty$;
2. Si $F_{jj} < 1$, alors s_j est transitoire et $R_{jj} < +\infty$.

En particulier, tout état est soit persistant, soit transitoire.

Démonstration. 1. Si $F_{jj} = \mathbb{P}_j(T_j < +\infty) = 1$, alors, par la Proposition 2.5.25,

$$\mathbb{P}_j(V_j = +\infty) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_j(V_j > r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F_{jj}^r = 1,$$

ce qui montre que s_j est persistant. De plus,

$$R_{jj} = \mathbb{E}_j[V_j] = +\infty.$$

2. Si $F_{jj} = \mathbb{P}_j(T_j < +\infty) < 1$, alors par la même proposition,

$$R_{jj} = \mathbb{E}_j[V_j] = \sum_{r=0}^{+\infty} \mathbb{P}_j(V_j > r) = \sum_{r=0}^{+\infty} F_{jj}^r = \frac{1}{1 - F_{jj}} < +\infty.$$

En particulier, $\mathbb{P}_j(V_j = +\infty) = 0$, et s_j est transitoire. ■

Les Théorèmes 2.5.22 et 2.5.27 fournissent des définitions équivalentes des états persistants et transitoires.

Définition 2.5.28. *Un état s_j est persistant si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

- ▷ $\mathbb{P}_j(X_n = s_j \text{ pour une infinité de } n) = \mathbb{P}_j(V_j = +\infty) = 1$;
- ▷ Le nombre moyen R_{jj} de visites de l'état s_j partant de s_j est infini ;
- ▷ La probabilité F_{jj} de revenir à l'état s_j est égale à 1 ;
- ▷ La série $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{jj}^{(n)}$ diverge.

Définition 2.5.29. *Un état s_j est transitoire si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

- ▷ $\mathbb{P}_j(X_n = s_j \text{ pour une infinité de } n) = \mathbb{P}_j(V_j = +\infty) = 0$;
- ▷ Le nombre moyen R_{jj} de visites de l'état s_j partant de s_j est fini ;
- ▷ La probabilité F_{jj} de revenir à l'état s_j n'est pas égale à 1 ;
- ▷ La série $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{jj}^{(n)}$ converge.

Ces notions sont des propriétés de classe : tous les états d'une même classe de communication partagent le même type.

Proposition 2.5.30. *Si deux états s_i et s_j communiquent, alors ils sont tous deux persistants ou tous deux transitoires.*

Démonstration. Puisque s_i et s_j communiquent, il existe $m, n \geq 0$ tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$. En partant de s_i , une manière de revenir en s_i en $n + r + m$ pas consiste à aller d'abord en s_j

en n pas, revenir en s_j en r pas, puis retourner en s_i en m pas. On obtient donc

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)}.$$

De même,

$$p_{jj}^{(m+r+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)}.$$

Ainsi, les séries $\sum_r p_{ii}^{(n+r+m)}$ et $\sum_r p_{jj}^{(m+r+n)}$ sont de même nature (l'une converge si et seulement si l'autre converge), ce qui suffit à conclure. ■

On peut donc parler de *classe persistante* et de *classe transitoire*. Le résultat suivant relie ces notions aux classes finales et aux classes de passage.

Proposition 2.5.31.

1. Toute classe de passage est transitoire.
2. Toute classe finale de cardinal fini est persistante.
3. Toute classe persistante est finale.

Démonstration. 1. Soit C une classe de passage. Si $s_j \in C$, alors il existe $s_k \notin C$ tel que $s_j \rightsquigarrow s_k$. On peut donc trouver un $n \geq 1$ minimal tel que $p_{jk}^{(n)} > 0$. En utilisant la propriété forte de Markov, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j(T_j = +\infty) &\geq \mathbb{P}_j(\text{arriver en } s_k \text{ sans passer par } s_j \text{ et ne pas revenir en } s_j) \\ &\geq p_{jk}^{(n)} \mathbb{P}_k(T_j = +\infty) \\ &= p_{jk}^{(n)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

où $\mathbb{P}_k(T_j = +\infty) = 1$ puisque $s_k \not\rightsquigarrow s_j$. Donc $\mathbb{P}_j(T_j < +\infty) < 1$.

2. Supposons que C est une classe finale de cardinal fini. Soit $s_j \in C$. Remarquons qu'il existe nécessairement un état $s_i \in C$ pour lequel

$$\mathbb{P}_j(X_n = s_i \text{ pour une infinité de } n) > 0.$$

En effet, si ce n'était pas le cas, on visiterait chaque état de C un nombre fini de fois. Or comme il y a un nombre fini d'états dans C , on devrait quitter C , ce qui est impossible. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbb{P}_j(X_n = s_i \text{ pour une infinité de } n) \\ &= \mathbb{P}_j(X_{n_0} = s_i \text{ pour un } n_0) \mathbb{P}_i(X_n = s_i \text{ pour une infinité de } n) \end{aligned}$$

puisque pour passer une infinité de fois par s_i en venant de s_j , on doit d'abord passer de s_j en s_i puis revenir une infinité de fois en s_i (on utilise encore la propriété forte de Markov). Donc

$$\mathbb{P}_i(X_n = s_i \text{ pour une infinité de } n) > 0$$

et l'état s_i n'est pas transitoire. Au vu de la dichotomie, il est donc persistant, d'où la conclusion.

3. Soit C une classe persistante. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $s_i \in C$ et $s_j \notin C$ tels que $s_i \rightsquigarrow s_j$. Alors, il existe $n \geq 1$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. De plus, puisque $s_j \not\rightsquigarrow s_i$, on a $p_{ji}^{(m)} = 0$ pour tout $m \geq 1$. On en tire que s_i n'est pas persistant puisqu'avec une probabilité non-nulle, on peut quitter s_i et ne jamais y revenir. D'où une contradiction. ■

Le résultat suivant est immédiat : il permet de détecter rapidement quels états sont persistants et quels états sont transitoires, puisqu'il est facile de déterminer les classes de communication.

Corollaire 2.5.32. *Si $(X_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états fini, alors*

- ▷ les classes de passage sont exactement les classes transitoires,
- ▷ les classes finales sont exactement les classes persistantes.

La forme canonique de la matrice de transition prend alors la forme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_T & | & \mathbf{P}_{T,P} \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{P}_P \end{pmatrix},$$

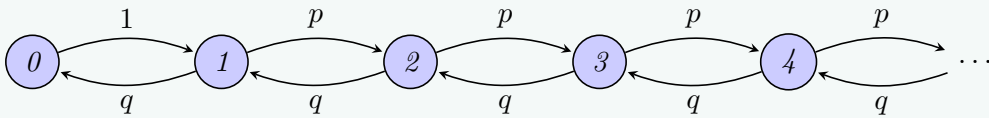
où les indices T indiquent les états transitoires et les indices P indiquent les états persistants.

Remarque 2.5.33. *Dans le cas infini, c'est plus délicat : des classes finales infinies peuvent ne contenir que des états transitoires !*

Exemple 2.5.34. *On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $p_{0,1} = 1$ et*

$$p_{i,i+1} = p \quad \text{et} \quad p_{i,i-1} = q, \quad \forall i \geq 1$$

où $p + q = 1$ et $p > q$.



Cette chaîne est clairement irréductible. De plus, puisque $p > q$, la marche présente une dérive vers la droite : à chaque pas, elle a plus de chances d'augmenter que de diminuer. Intuitivement, le déplacement est donc poussé vers $+\infty$. On peut montrer que dans ce cas,

$$F_{0,0} = \mathbb{P}_0(\text{retour en } 0) = \frac{q}{p} < 1.$$

Remarque 2.5.35. *La chaîne est irréductible, donc elle forme une unique classe de communication, qui est nécessairement finale. Cette classe est infinie, mais ne contient que des états transitoires. Cela illustre le fait que, dans le cas infini, une classe finale n'est pas forcément persistante.*

Si l'espace d'états est infini, alors les états persistants peuvent également faire l'objet d'un comportement étrange. On sait qu'on retourne dans chaque état avec une probabilité 1. Cependant, on peut y retourner avec un temps moyen infini !

Définition 2.5.36. *Soit $s_j \in S$ un état persistant. On dit qu'il est persistant non-nul si*

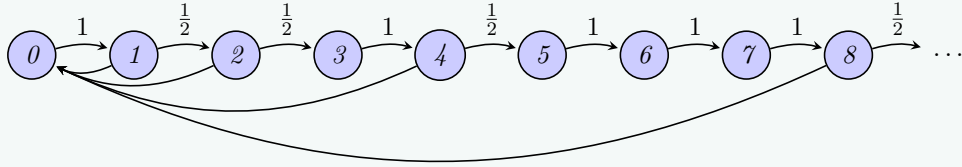
$$\mathbb{E}_j[T_j] < +\infty.$$

Sinon, on dit qu'il est persistant nul.

Exemple 2.5.37 (Paradoxe de Saint-Petersbourg). *Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ avec transitions*

$$p_{k,k+1} = p_k, \quad p_{k,0} = 1 - p_k.$$

Supposons que $p_k = \frac{1}{2}$ pour tout k qui peut s'écrire comme une puissance de 2, et $p_k = 1$ sinon.



À chaque étape, la chaîne progresse vers la droite, sauf lorsqu'elle atteint une puissance de 2, où elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de revenir brutalement en 0. Les retours sont donc certains, mais peuvent survenir après des excursions de plus en plus longues, ce qui rend l'espérance du temps de retour infinie. En effet, on a

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = 1 - \mathbb{P}_0(T_0 = +\infty) = 1 - \prod_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

et donc

$$\mathbb{E}_0[T_0] = \sum_{k=1}^{+\infty} (2^k + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = +\infty.$$

Ainsi, l'état 0 est persistant nul : en partant de 0, on y retourne avec une probabilité 1, mais cela prend en moyenne un temps infini !

Pour résumer les résultats que l'on a obtenu, nous pouvons distinguer trois types d'états et deux types de classes.

Pour les états, on a

- ▷ les états transitoires : on finit par les quitter pour toujours,
- ▷ les états persistants non-nuls : on y retourne une infinité de fois en un temps moyen fini,
- ▷ les états persistants nuls : on y retourne une infinité de fois en un temps moyen infini (seulement possible si l'espace d'états est infini).

Pour les classes, on a

- ▷ les classes finales : on ne les quitte jamais,
- ▷ les classes de passage : on finit par les quitter.

Théorème 2.5.38. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états fini, de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_T & | & \mathbf{P}_{T,P} \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{P}_P \end{pmatrix},$$

où les indices T indiquent les états transitoires et les indices P indiquent les états persistants.

1. La matrice $\mathbf{I} - \mathbf{P}_T$ est inversible et

$$\mathbf{R}_T = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1}.$$

2. Si s_i est un état transitoire et s_j est un état persistant, alors

$$((\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} \mathbf{P}_{T,P})_{ij}$$

est la probabilité que, partant de s_i , le premier état persistant atteint par la chaîne soit s_j .

3. En particulier, si la chaîne ne contient que des états absorbants, on a

$$\mathbf{F}_{T,P} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} \mathbf{P}_{T,P}. \quad (2.7)$$

Démonstration. 1. Vu la forme de la matrice de transition, on sait que

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_T^n & | & * \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{P}_P^n \end{pmatrix}$$

et le Théorème 2.5.22 implique alors que

$$\mathbf{R}_T = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_T^n.$$

De plus, comme les états sont transitoires, on sait que cette série converge. On a

$$\mathbf{R}_T(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_T^n(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_T^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_T^{n+1} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}_T^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_T^{n+1} = \mathbf{I}$$

et de même

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)\mathbf{R}_T = \mathbf{I}.$$

2. Considérons le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in P\}$$

donnant le premier instant auquel la chaîne atteint un état persistant. Si s_i est un état transitoire et s_j est un état persistant, alors pour que s_j soit le premier état persistant atteint, il existe une étape n pour laquelle la chaîne est dans un état transitoire s_l et la chaîne est dans l'état s_j au temps $n + 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_T = s_j \mid X_0 = s_i) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_T = s_j, T = n + 1 \mid X_0 = s_i) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{s_l \in T} \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j, X_n = s_l \mid X_0 = s_i) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{s_l \in T} \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_l, X_0 = s_i) \mathbb{P}(X_n = s_l \mid X_0 = s_i) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{s_l \in T} p_{lj} p_{il}^{(n)} \\ &= \sum_{s_l \in T} \left(p_{lj} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{il}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{s_l \in T} p_{lj} (\mathbf{R}_T)_{il} \\ &= (\mathbf{R}_T \mathbf{P}_{T,P})_{ij} \\ &= ((\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} \mathbf{P}_{T,P})_{ij}. \end{aligned}$$

3. Enfin, remarquons que si la chaîne ne contient que des états persistants absorbants, la probabilité qu'un état persistant s_j soit atteint en premier correspond à la probabilité d'atteinte de cet état. ■

Définition 2.5.39. *La matrice*

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1}$$

est appelée la matrice fondamentale de la chaîne de Markov.

Remarque 2.5.40. *Lorsqu'une chaîne de Markov a atteint une classe finale finie, elle passe une infinité de fois par chaque état de cette classe. Ainsi, la probabilité qu'elle atteigne chaque état d'une même classe finale finie est la même. Afin de faciliter les calculs, on peut donc modifier la chaîne de Markov en identifiant tous les états d'une même classe finale finie en un seul état absorbant et utiliser la formule (2.7).*

Résumons les résultats obtenus.

Théorème 2.5.41 (Calcul de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{F}$). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états fini, de matrice de transition*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_T & | & \mathbf{P}_{T,P} \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{P}_P \end{pmatrix},$$

où les indices T indiquent les états transitoires et les indices P indiquent les états persistants.

1. Calcul de $\mathbf{R}_P$ et $\mathbf{R}_{T,P}$: *Si s_j est persistant, alors*

$$R_{jj} = +\infty \quad \text{et} \quad R_{ij} = F_{ij}R_{jj} = \begin{cases} 0 & \text{si } F_{ij} = 0 \\ +\infty & \text{si } F_{ij} > 0. \end{cases}$$

2. Calcul de $\mathbf{R}_{P,T}$: *Si s_j est transitoire et si s_i est persistant, alors*

$$R_{ij} = 0.$$

3. Calcul de $\mathbf{R}_T$: *Si s_i et s_j sont transitoires, alors*

$$R_{ij} = ((\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1})_{ij}.$$

4. Calcul de $\mathbf{F}_{P,T}$: *Si s_j est transitoire et si s_i est persistant, alors*

$$F_{ij} = 0.$$

5. Calcul de $\mathbf{F}_P$: Si s_i et s_j sont persistants, alors

$$F_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i \not\rightsquigarrow s_j \\ 1 & \text{si } s_i \rightsquigarrow s_j. \end{cases}$$

6. Calcul de $\mathbf{F}_{T,P}$: Si s_i est transitoire et s_j est persistant, et si la chaîne ne contient que des états persistants absorbants, on a

$$F_{ij} = ((\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} \mathbf{P}_{T,P})_{ij}.$$

7. Calcul de $\mathbf{F}_T$: Si s_i et s_j sont transitoires, alors

$$F_{ij} = \frac{R_{ij} - \delta_{ij}}{R_{jj}}$$

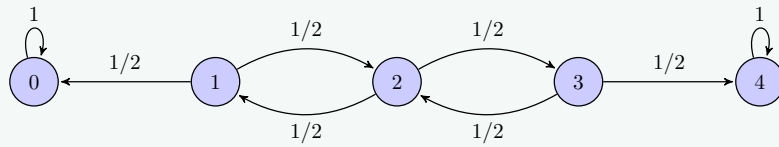
Par conséquent, si on a une chaîne de Markov dont les classes finales ne contiennent que des états absorbants, la matrice $\mathbf{R}$ est donnée par

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} & & & +\infty/0 \\ \hline & +\infty & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & +\infty \end{array} \right)$$

et la matrice $\mathbf{F}$ est donnée par

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{c|ccc} \left(\frac{R_{ij} - \delta_{ij}}{R_{jj}} \right)_{i,j} & & & (\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} \mathbf{P}_{T,P} \\ \hline 0 & & & \mathbf{I} \end{array} \right).$$

Exemple 2.5.42 (Exemple 2.5.9 (Drunkard's walk), suite). Rappelons que le graphe de transition est



Une forme canonique de la matrice de transition est donnée par

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Par conséquent, on a

$$\mathbf{P}_T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{I} - \mathbf{P}_T = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{array} \right).$$

Cette matrice nous dit par exemple qu'en partant de l'état 1

- ▷ le nombre de visites moyen de l'état 1 avant d'être absorbé est 3/2,
- ▷ le nombre de visites moyen de l'état 2 avant d'être absorbé est 1,
- ▷ le nombre de visites moyen de l'état 3 avant d'être absorbé est 1/2.

De plus, on a aussi

$$\mathbf{P}_{T,P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{array} \right)$$

et donc

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} \mathbf{P}_{T,P} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left(\begin{array}{cc} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{array} \right).$$

La première ligne nous dit qu'en partant de l'état 1, on a

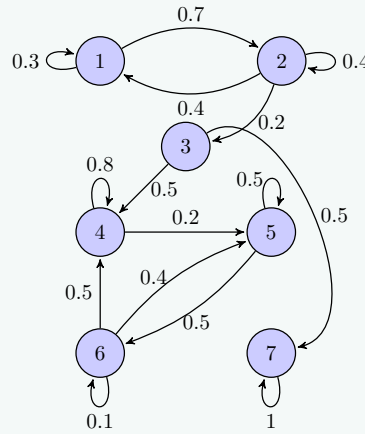
- ▷ une probabilité 3/4 d'être absorbé dans l'état 0,
- ▷ une probabilité 1/4 d'être absorbé dans l'état 4.

Remarquons qu'on trouve bien une probabilité $3/4 + 1/4 = 1$ de finir dans $\{1, 4\}$.

Exemple 2.5.43. Considérons une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le graphe de transition de cette chaîne est donné par



Classifions les classes de communication et les états :

- ▷ Les classes $\{1, 2\}$ et $\{3\}$ sont de passage ; les classes $\{4, 5, 6\}$ et $\{7\}$ sont finales.
- ▷ Les états 1, 2 et 3 sont transitoires, et les états 4, 5, 6 et 7 sont persistants. Les états sont donc déjà bien ordonnés.

La matrice fondamentale de la chaîne est donnée par

$$\mathbf{P}_T = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 30/7 & 5 & 1 \\ 20/7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{R}$ est donc donnée par

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 30/7 & 5 & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 20/7 & 5 & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 0 & 0 & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ \hline 0 & 0 & 0 & +\infty & +\infty & +\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\infty & +\infty & +\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\infty & +\infty & +\infty & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{array} \right)$$

et la matrice $\mathbf{F}$ est

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 23/30 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 4/5 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

3 Comportement asymptotique d'une chaîne de Markov

Étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'objectif de cette section est d'étudier le comportement de celle-ci lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3.1 Distribution invariante

De nombreuses propriétés à long terme sont étroitement liées à la notion de distribution invariante, ou stationnaire, de la chaîne.

Définition 3.1.1.

- ▷ Une distribution est un vecteur-ligne λ dont les entrées sont positives ou nulles et dont la somme des éléments vaut 1.
- ▷ Une distribution est invariante ou stationnaire pour $\mathbf{P}$ si

$$\lambda \mathbf{P} = \lambda.$$

Remarquons que si λ est une distribution invariante pour $\mathbf{P}$ et si $X \sim CM(\lambda, \mathbf{P})$, alors par le Théorème 2.3.4, on sait que la distribution de X_n est donnée par $\lambda \mathbf{P}^n$. Or, comme la distribution λ est invariante, on a

$$\lambda \mathbf{P}^n = \lambda \mathbf{P} \mathbf{P}^{n-1} = \lambda \mathbf{P}^{n-1} = \dots = \lambda.$$

Cela signifie que la probabilité de se trouver dans un état donné reste constante au cours du temps, bien que la chaîne passe constamment d'un état à l'autre. Cela justifie le qualificatif "invariant" ou "stationnaire" : la distribution du processus, lorsqu'il commence aléatoirement selon λ , n'évolue pas au cours du temps.

Remarque 3.1.2 (Idée intuitive de la distribution stationnaire). *On peut se représenter la distribution stationnaire comme suit : imaginez qu'il y a un grand nombre de puces réparties sur les états de la chaîne. À chaque étape, chaque puce saute vers un autre état selon les probabilités de transition de la chaîne. Si l'on commence avec la répartition donnée par une distribution stationnaire, alors la proportion de puces dans chaque état*

reste exactement la même à chaque pas, même si les puces individuelles se déplacent constamment. Autrement dit, la distribution stationnaire correspond à une configuration stable à l'échelle des proportions : les puces sont indistinguables et la répartition globale ne change pas au fil du temps.

Exemple 3.1.3. Considérons une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Si elle existe, la distribution invariante $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ doit satisfaire $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P} = \boldsymbol{\lambda}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_3 & = & \lambda_1 \\ \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 & = & \lambda_2 \\ \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 & = & \lambda_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

On trouve facilement $\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5}\right)$.

Notons que certaines chaînes peuvent admettre plusieurs distributions invariantes, ou aucune. Le résultat suivant montre que si la chaîne admet une “distribution limite”, alors celle-ci est forcément une distribution invariante.

Théorème 3.1.4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}$. Supposons qu'il existe une distribution $\mathbf{w}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Alors $\mathbf{w}$ est l'unique distribution invariante de $\mathbf{P}$. De plus, pour toute distribution initiale $\mathbf{u}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}\mathbf{P}^n = \mathbf{w}.$$

Démonstration. Notons $\mathbf{W}$ la matrice dont les lignes sont toutes données par $\mathbf{w}$. On sait que $\mathbf{W}\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^n \mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{W}$, d'où $\mathbf{W}\mathbf{P} = \mathbf{W}$. En regardant une ligne de cette égalité, il vient $\mathbf{w}\mathbf{P} = \mathbf{w}$ et $\mathbf{w}$ est donc bien une distribution invariante de $\mathbf{P}$.

Supposons à présent que $\mathbf{v}$ est une distribution telle que $\mathbf{v}\mathbf{P} = \mathbf{v}$. On sait que pour tout n , on a

$\mathbf{vP}^n = \mathbf{v}$. Par conséquent,

$$\mathbf{vW} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{vP}^n = \mathbf{v}.$$

Or

$$\mathbf{vW} = \mathbf{v} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \left(\sum_i v_i \right) \mathbf{w} = \mathbf{w}$$

et on en tire que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Enfin, on procède de même pour montrer que si $\mathbf{u}$ est une distribution initiale, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{uP}^n = \mathbf{uW} = \mathbf{w}.$$

■

Notons que l'hypothèse (3.1) se réécrit

$$w_j = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^n \right)_{ij} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = s_j \mid X_0 = s_i)$$

pour tout i . En d'autres termes, $\mathbf{w}$ représente la *distribution limite* de la chaîne de Markov : c'est la distribution qui donne le comportement à long terme de la chaîne. Ainsi, si la distribution de la chaîne se stabilise, cette stabilisation est nécessairement une distribution invariante.

En résumé, si on étudie une chaîne de Markov dont la distribution initiale est donnée par $\mathbf{u}$, alors le vecteur de probabilités $\mathbf{uP}^n$ donne la probabilité d'être dans les différents états après n étapes, et le Théorème 3.1.4 établit le fait que la probabilité d'être dans l'état s_j tend vers w_j . Intéressons-nous à présent au temps moyen de retour dans un état. Dans le cas d'une chaîne irréductible, celui-ci peut être calculé à partir de la distribution invariante.

Théorème 3.1.5. *Considérons une chaîne de Markov qui admet une distribution invariante $\mathbf{w}$. Le temps moyen de retour dans s_j est lié à la distribution invariante via la relation*

$$w_j \mathbb{E}_j[T_j] = 1.$$

En particulier, si $w_j \neq 0$, on a

$$\mathbb{E}_j[T_j] = \frac{1}{w_j}.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{M}$ la matrice qui encode tous les temps moyens d'atteinte

$$m_{ij} = k_i^{(j)} = \mathbb{E}_i[\text{atteindre } s_j]$$

Remarquons que tous les éléments diagonaux de $\mathbf{M}$ sont nuls. Si $i \neq j$, on sait par le Théorème 2.4.8 que

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj} = 1 + \sum_k p_{ik} m_{kj} \quad (3.2)$$

puisque $m_{jj} = 0$. Si $i = j$, il faudra au moins une étape pour revenir. En considérant toutes les premières étapes possibles, alors

$$\mathbb{E}_i[T_i] = \sum_k p_{ik}(m_{ki} + 1) = 1 + \sum_k p_{ik}m_{ki} . \quad (3.3)$$

Soit $\mathbf{C}$ la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1 et $\mathbf{D}$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les temps moyen de retour $\mathbb{E}_i[T_i]$. En utilisant (3.2) et (3.3), on obtient l'équation matricielle

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{M} + \mathbf{C} - \mathbf{D} ,$$

qui se réécrit

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M} = \mathbf{C} - \mathbf{D} . \quad (3.4)$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $\mathbf{w}$ et en utilisant le fait que $\mathbf{w}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{0}$, on a $\mathbf{w}\mathbf{C} - \mathbf{w}\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Cela se réécrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\mathbb{E}_1[T_1] & w_2\mathbb{E}_2[T_2] & \dots & w_n\mathbb{E}_n[T_n] \end{pmatrix} .$$

■

3.2 Chaînes régulières sur un espace d'états fini

Nous allons nous intéresser à la détermination de comportement limite dans les classes finales, ou autrement dit pour les chaînes irréductibles (on peut aller de n'importe quel état vers n'importe quel état). L'existence d'une distribution limite va être assurée lorsque la chaîne possède une propriété un peu plus forte.

Définition 3.2.1. Une chaîne de Markov sur un espace d'états fini est régulière (ou primitive) si elle est irréductible et apériodique.

Par la remarque 2.5.19, une chaîne de Markov sur un espace d'états fini est régulière si et seulement si il existe une puissance de la matrice de transition dont tous les éléments sont strictement positifs. En d'autres mots, on peut aller de n'importe quel état vers n'importe quel autre état en un nombre fixé n de pas, où n est indépendant de l'état de départ.

Exemple 3.2.2. Considérons une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Alors, il est clair que

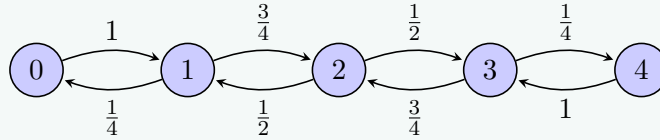
▷ si n est impair, il n'est pas possible d'aller de l'état 0 dans l'état 0 en n étapes

▷ si n est pair, il n'est pas possible d'aller de l'état 0 dans l'état 1 en n étapes et la chaîne n'est donc pas régulière.

Exemple 3.2.3 (Ehrenfest Model). L'exemple suivant est un cas particulier d'un modèle, appelé le modèle d'Ehrenfest^a, qui a été utilisé pour expliquer la diffusion des gaz. Considérons deux urnes qui, au total, contiennent quatre boules. À chaque étape, l'une des quatre boules est choisie au hasard et déplacée de l'urne dans laquelle elle se trouve dans l'autre. Si les états sont les nombres de boules dans la première urne, alors la matrice de transition est donnée par

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Le graphe de transition de cette chaîne est de la forme



Pour cet exemple, si on commence dans l'état 0, après un nombre pair d'étapes, on sera dans un des états 0, 2 ou 4. Après un nombre impair d'étapes, on sera dans un des états 1 ou 3. Cette chaîne n'est donc pas régulière.

^a. P. and T. Ehrenfest, "Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem," *Physikalische Zeitschrift*, vol. 8 (1907), pp. 311-314.

Remarquons que

- ▷ Toute matrice de transition qui ne contient pas de 0 définit une chaîne de Markov régulière.
- ▷ Il existe des chaînes de Markov régulières dont la matrice de transition a des 0. Il suffit de considérer l'exemple 2.1.11 de la météo où $p_{BB} = 0$ mais $\mathbf{P}^2$ n'a pas de 0.
- ▷ Si une chaîne est absorbante, alors elle est non-régulière : par exemple, soit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors toutes les puissances de $\mathbf{P}$ auront un 0 dans le coin inférieur gauche.

Notre objectif étant de regarder le comportement à long terme d'une chaîne de Markov régulière,

regardons ce qu'il se passe tout d'abord sur un exemple.

Exemple 3.2.4 (Exemple 2.1.11, suite).

$$\mathbf{P}^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \textit{Pluie} & \textit{Beau} & \textit{Neige} \\ \textit{Pluie} & \left(\begin{array}{ccc} .500 & .250 & .250 \end{array} \right) \\ \textit{Beau} & \left(\begin{array}{ccc} .500 & .000 & .500 \end{array} \right) \\ \textit{Neige} & \left(\begin{array}{ccc} .250 & .250 & .500 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \textit{Pluie} & \textit{Beau} & \textit{Neige} \\ \textit{Pluie} & \left(\begin{array}{ccc} .438 & .188 & .375 \end{array} \right) \\ \textit{Beau} & \left(\begin{array}{ccc} .375 & .250 & .375 \end{array} \right) \\ \textit{Neige} & \left(\begin{array}{ccc} .375 & .188 & .438 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \textit{Pluie} & \textit{Beau} & \textit{Neige} \\ \textit{Pluie} & \left(\begin{array}{ccc} .406 & .203 & .391 \end{array} \right) \\ \textit{Beau} & \left(\begin{array}{ccc} .406 & .188 & .406 \end{array} \right) \\ \textit{Neige} & \left(\begin{array}{ccc} .391 & .203 & .406 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \textit{Pluie} & \textit{Beau} & \textit{Neige} \\ \textit{Pluie} & \left(\begin{array}{ccc} .402 & .199 & .398 \end{array} \right) \\ \textit{Beau} & \left(\begin{array}{ccc} .398 & .203 & .398 \end{array} \right) \\ \textit{Neige} & \left(\begin{array}{ccc} .398 & .199 & .402 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \textit{Pluie} & \textit{Beau} & \textit{Neige} \\ \textit{Pluie} & \left(\begin{array}{ccc} .400 & .200 & .399 \end{array} \right) \\ \textit{Beau} & \left(\begin{array}{ccc} .400 & .199 & .400 \end{array} \right) \\ \textit{Neige} & \left(\begin{array}{ccc} .399 & .200 & .400 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^6 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \textit{Pluie} & \textit{Beau} & \textit{Neige} \\ \textit{Pluie} & \left(\begin{array}{ccc} .400 & .200 & .400 \end{array} \right) \\ \textit{Beau} & \left(\begin{array}{ccc} .400 & .200 & .400 \end{array} \right) \\ \textit{Neige} & \left(\begin{array}{ccc} .400 & .200 & .400 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

En regardant la table ci-dessous, on apprend deux choses :

- ▷ A partir de $n \geq 5$, les différentes probabilités semblent se “stabiliser” : il n’y a pas de différence significative entre $\mathbf{P}^5$ et $\mathbf{P}^6$.

▷ Après 6 jours, nos prévisions météorologiques sont, avec une précision de trois décimales, indépendantes des conditions météorologiques actuelles.

Ce comportement est typique des chaînes de Markov régulières : pour ce type de chaînes, les prédictions à long terme sont indépendantes de l'état de départ.

Le résultat suivant est une conséquence du Théorème de Perron-Frobenius (toute matrice stochastique admet 1 comme valeur propre dominante).

Théorème 3.2.5 (fondamental pour les chaînes de Markov régulières finies). *Si $\mathbf{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière finie, alors il existe une distribution $\mathbf{w}$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour une chaîne de Markov régulière finie de matrice de transition $\mathbf{P}$, le Théorème 3.1.4 nous indique que l'unique solution de l'équation

$$\mathbf{w}\mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{w}\mathbf{P} = \mathbf{w}.$$

est l'unique

- ▷ distribution limite pour $\mathbf{P}$,
- ▷ distribution invariante pour $\mathbf{P}$,
- ▷ distribution initiale pour laquelle la chaîne est stationnaire.

Remarque 3.2.6. *Si $\mathbf{I}$ est la matrice identité, la distribution limite $\mathbf{w}$ doit satisfaire l'équation matricielle $\mathbf{w}\mathbf{P} = \mathbf{w}\mathbf{I}$, ou de manière équivalente,*

$$\mathbf{w}(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}.$$

Donc, $\mathbf{w}$ est dans l'espace nul à gauche de la matrice $\mathbf{P} - \mathbf{I}$. De plus, on sait que cet espace est de dimension 1. Ceci est facile à programmer dans tout type de logiciel capable de gérer les matrices.

Exemple 3.2.7 (Exemple 2.1.11, suite). *Par les Théorèmes 3.1.4 et 3.2.5, on peut trouver la distribution limite pour le Pays d'Oz en utilisant le fait que*

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

et

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Ces relations mènent aux 4 équations suivantes à 3 inconnues :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 & = 1 \\ (1/2)w_1 + (1/2)w_2 + (1/4)w_3 & = w_1 \\ (1/4)w_1 + (1/4)w_3 & = w_2 \\ (1/4)w_1 + (1/2)w_2 + (1/2)w_3 & = w_3. \end{cases}$$

Le Théorème 3.2.5 garantit que ce système d'équations possède une unique solution. On obtient la solution

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

ce qui confirme ce qui avait été prédit par le calcul de $\mathbf{P}^6$.

Exemple 3.2.8. Reprenons la chaîne de Markov de l'Exemple 2.5.43, de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La distribution invariante de la classe finale $\{4, 5, 6\}$ est donnée par

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{25}{53} & \frac{18}{53} & \frac{10}{53} \end{pmatrix}$$

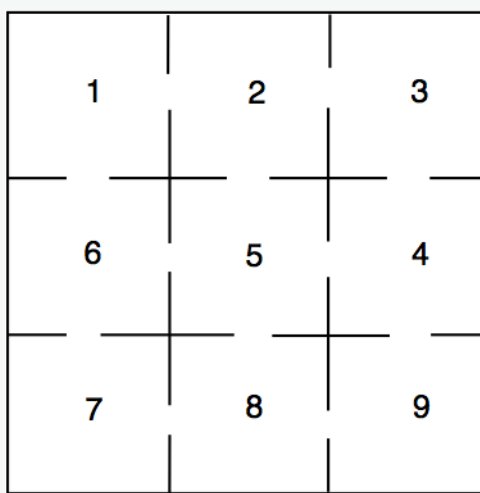
et on en tire que la loi limite de la chaîne est

$$\mathbf{P}^{(\infty)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 25/106 & 9/53 & 5/53 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 25/106 & 9/53 & 5/53 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 25/106 & 9/53 & 5/53 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 25/53 & 18/53 & 10/53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25/53 & 18/53 & 10/53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25/53 & 18/53 & 10/53 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

3.3 Chaînes irréductibles sur un espace d'états fini

Si on enlève l'hypothèse d'apériodicité de la chaîne, on ne peut plus appliquer le Théorème 3.2.5 et obtenir l'interprétation de la distribution invariante comme distribution limite. Nous allons voir que de telles chaînes possèdent néanmoins une distribution invariante et proposer une autre interprétation. Bien sûr, toute chaîne régulière étant irréductible, cette interprétation est également valide pour les chaînes de Markov régulières. Les résultats seront acceptés sans démonstration.

Exemple 3.3.1. *Un rat est posé dans le labyrinthe suivant :*



Le rat se déplace aléatoirement d'un compartiment à l'autre : s'il y a k manières de quitter un compartiment, il choisit chacune de ces issues avec la même probabilité. On peut représenter les déplacements du rat par une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Cette chaîne n'est pas régulière :

- ▷ *en partant d'un état impair, on ne peut aller en une étape que dans les états pairs,*
- ▷ *en partant d'un état pair, on ne peut aller en une étape que dans les états impairs,*

▷ par conséquent, en démarrant d'un état i quelconque, le processus va être alternativement dans des états pairs puis impairs (la période est égale à 2).

D'un autre côté, on voit immédiatement qu'il est possible d'aller de n'importe quel état à n'importe quel autre état (en plusieurs étapes) : la chaîne est donc irréductible.

Théorème 3.3.2 (Existence de distributions invariantes). *Si $\mathbf{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini, alors il existe une unique distribution invariante $\mathbf{w}$ pour $\mathbf{P}$.*

Si $\mathbf{P}$ est irréductible mais pas régulière, alors $\mathbf{w}$ a une interprétation différente que l'interprétation de la limite dans le Théorème 3.2.5 (cette limite peut ne pas exister).

Théorème 3.3.3 (Théorème ergodique). *Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini. Soit*

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \cdots + \mathbf{P}^n}{n+1}.$$

Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{w}$ est l'unique distribution invariante de $\mathbf{P}$.

Pour donner une interprétation au Théorème 3.3.3, considérons une chaîne de Markov irréductible qui commence dans l'état s_i . On pose $Y^{(m)} = 1$ si on est dans l'état s_j après m étapes, et 0 sinon. La proportion de temps passé dans l'état s_j dans les n premières étapes est donnée par

$$Z^{(n)} = \frac{Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \cdots + Y^{(n)}}{n+1}.$$

Remarquons que $Y^{(m)}$ prend la valeur 1 avec probabilité $p_{ij}^{(m)}$ et 0 sinon. Donc $\mathbb{E}[Y^{(m)}] = p_{ij}^{(m)}$, d'où

$$\mathbb{E}[Z^{(n)}] = \frac{\delta_{ij} + p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + \cdots + p_{ij}^{(n)}}{n+1} = (\mathbf{A}_n)_{ij}.$$

Par conséquent, l'élément (i, j) de la matrice $\mathbf{A}_n$ donne la proportion moyenne de temps passé dans l'état s_j dans les n premières étapes si la chaîne commence dans l'état s_i .

Exemple 3.3.4 (Exemple 3.3.1, suite). *Pour trouver le vecteur de probabilité $\mathbf{w}$ pour cette matrice, on doit résoudre 10 équations à 9 inconnues. Cependant, il semble raisonnable*

de penser que le temps passé dans chaque compartiment, à long terme, devrait être proportionnel au nombre d'entrées de chaque compartiment. Essayons donc le vecteur dont la composante numéro j est le nombre d'entrées dans ce compartiment :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que ce vecteur est en effet un vecteur invariant, et que donc l'unique vecteur de probabilité cherché est ce vecteur normalisé pour avoir une somme égale à 1 :

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \right)$$

Exemple 3.3.5 (Exemple 2.1.11, suite). Comme toute chaîne de Markov régulière est également irréductible, le Théorème 3.3.3 s'applique aussi pour les chaînes régulières. Cela nous donne une nouvelle interprétation pour la distribution invariante

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

de l'exemple du Pays d'Oz. Le Théorème 3.3.3 prédit qu'à long terme, il pleuvra 40% du temps dans le pays d'Oz, qu'il fera beau 20% du temps et qu'il neigera 40% du temps.

Illustrons cela via des simulations. Au Pays d'Oz, il y a 525 jours par an et on a simulé la météo sur une année.

N N P B P B N N N N N N B P N B N N P B N P B N N N B N P P P B N N N B P P N N
 N N B P N N B N P P P P P B N N N N N P P P N B N B P P P P N P N P B N B N P P
 B P P B P P B P N N B N P B P B N N P P N P B N N N B P N P P N N B P N B P P B N
 N N N B N N B N P N P P B N N B N N P B N N P P B P P P N P B P P P B N N N B P B
 N P B N B P B P N N P P N N P N N B P N N N B N N N N N B N N N B N B N P P B
 P B P P P P N P P P N N N N B P P N N N N P N P P P B P P P N N N N P P B P P P N
 P N N P P P P N N P B P P P P P N N B B N N P B P N N N B P B N B P P P P B P P
 P B P N B P P B N P P N B P P P P N N N P B P P P B N B N N N N N P P P P N P B P
 N N P P P P N N N P P P B P B P P P N P N P B N

état	Nombre	Proportion
Pluie	217	0.413
Beau	109	0.208
Neige	199	0.379

TABLE 3.1 – Temps au Pays d'Oz sur un an

Les simulations donnent une proportion de temps passé dans chaque état pas trop différente des prédictions à long terme

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

données par le Théorème 3.3.3. Pour obtenir de meilleurs résultats, on doit simuler la chaîne sur une durée plus longue. On l'a fait pour 10 000 jours.

état	Temps	Proportion
Pluie	4010	0.401
Beau	1902	0.190
Neige	4088	0.409

TABLE 3.2 – Temps au Pays d'Oz sur 10 000 jours

On voit que les résultats sont à présent vraiment proches des valeurs théoriques

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini, on sait que les valeurs $\mathbb{E}_i[T_i]$ sont toutes finies. En utilisant le Théorème 3.1.5, on en tire que $w_j \neq 0$. On a donc le résultat suivant.

Corollaire 3.3.6. *Pour une chaîne irréductible sur un espace d'états fini, les composantes de la distribution invariante $\mathbf{w}$ sont strictement positives.*

Le Théorème 3.1.5 donne aussi une autre interprétation de la distribution invariante.

Exemple 3.3.7 (Exemple 3.3.1, suite). *La distribution invariante pour le labyrinthe est*

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \right).$$

Donc, les temps de retour moyens sont donnés par le vecteur

$$\mathbf{r} = (12 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 6 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 12).$$

Exemple 3.3.8 (Exemple 2.1.11, suite). *Reprenons l'exemple du Pays d'Oz. On avait trouvé que la distribution invariante est*

$$\mathbf{w} = \left(\frac{2}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \right).$$

On peut donc en tirer que le nombre moyen de jours entre deux jours pluvieux est $\frac{5}{2}$, entre deux beaux jours est 5 et entre deux jours neigeux est $\frac{5}{2}$.

3.4 Chaînes irréductibles sur un espace d'états infini

Considérons une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états infini. On peut montrer qu'il existe un vecteur-ligne $\mathbf{v}$ dont les éléments sont positifs ou nuls et tel que

$$\mathbf{vP} = \mathbf{v}.$$

Si la somme des éléments de v est finie, c'est-à-dire si

$$S := \sum_{i \in E} v_i < +\infty,$$

alors il suffit de normaliser le vecteur $\mathbf{v}$ par S pour obtenir une distribution invariante. Cependant, cette condition n'est pas toujours vérifiée et il faut ajouter une hypothèse supplémentaire pour assurer l'existence (et l'unicité) d'une telle distribution.

Théorème 3.4.1. *Considérons une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition $\mathbf{P}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *chaque état est persistant non-nul,*
2. *un état s_i est persistant non-nul,*
3. *$\mathbf{P}$ a une distribution invariante $\mathbf{w}$ telle que $w_j > 0$ pour tout j .*

Dans ce cas, la distribution invariante est unique et le temps moyen de premier retour dans s_i est donné par la relation

$$\mathbb{E}_i[T_i] = \frac{1}{w_i} \quad \text{pour tout } i \in E.$$

Si de plus, la chaîne est apériodique, alors $\mathbf{w}$ est également la distribution limite.

L'équivalence entre les deux premiers points indique que le fait d'être persistant non-nul est une propriété de classe. De plus, tous les états sont persistants non-nuls si et seulement si le système

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{w}\mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

admet une solution positive. Si le système possède une solution $\mathbf{w}$ et si la chaîne est apériodique, alors

$$w_j > 0 \forall j, w_i \text{ est unique et } w_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)} \quad \forall i, j.$$

3.5 Matrice fondamentale pour les chaînes irréductibles finies

Dans cette section, nous présentons une technique matricielle pour calculer deux quantités d'intérêt pour les chaînes irréductibles sur un espace d'états fini : le temps moyen de retour

dans un état et le temps moyen pour aller d'un état à un autre.

3.5.1 Temps moyen de premier passage

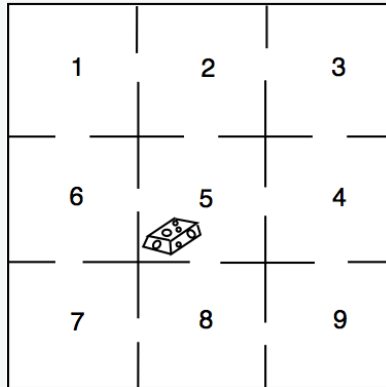
Commençons par montrer que les résultats vus précédemment pour les chaînes possédant un état absorbant permettent de calculer le temps moyen de premier passage dans un état d'une chaîne irréductible. Notons $\mathbf{P}$ la matrice de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et formons une nouvelle chaîne de Markov $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en rendant l'état s_j absorbant : autrement dit, on pose $\tilde{p}_{jj} = 1$ et $\tilde{p}_{ji} = 0$ pour tout $i \neq j$.



Si on commence dans n'importe quel autre état, ce nouveau processus se comportera exactement comme l'ancien, jusqu'à ce que s_j soit atteint. Comme la chaîne de départ était irréductible, il est possible d'atteindre s_j en partant de n'importe quel état. La nouvelle chaîne est une chaîne absorbante dont le seul état absorbant est s_j et on finira donc par l'atteindre. Ainsi, si on démarre la chaîne initiale dans un état s_i avec $i \neq j$, on finira par atteindre l'état s_j . Soit $\tilde{\mathbf{N}}$ la matrice fondamentale de la nouvelle chaîne. On peut utiliser les résultats de la Section 2.5.3 pour déduire deux faits utiles :

- ▷ Les éléments de $\tilde{\mathbf{N}}$ donnent le temps moyen passé par la chaîne $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chaque état avant l'absorption. Pour la chaîne de Markov originale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ces quantités donnent le temps moyen passé dans chaque état avant d'atteindre l'état s_j pour la première fois.
- ▷ La i^e composante du vecteur $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{1}$ donne le temps moyen avant absorption dans la nouvelle chaîne $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en partant de l'état s_i . Pour la chaîne de Markov originale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est le nombre moyen d'étapes pour atteindre l'état s_j pour la première fois en partant de l'état s_i .

Exemple 3.5.1 (Exemple 3.3.1, suite). *On va faire de cette chaîne irréductible une chaîne absorbante en rendant l'état 5 absorbant.*



Par exemple, on peut imaginer que de la nourriture est placée au centre du labyrinthe et une fois que le rat a trouvé la nourriture, il y reste pour en profiter. La forme canonique de la nouvelle matrice de transition est

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ - \\ 5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Si on calcule la matrice fondamentale $\tilde{\mathbf{N}} = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}_T)^{-1}$, on trouve

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Le temps moyen avant absorption partant des différents états est donné par le vecteur $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{1}$, où

$$\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On voit que

- ▷ en partant du compartiment 1, il faudra en moyenne 6 étapes avant que le rat n'atteigne la nourriture.
- ▷ Par symétrie, il est clair qu'on doit trouver la même réponse en partant des états 3, 7 ou 9.

▷ Il est aussi clair qu'il faudra une étape de plus en partant de ces états qu'en partant des états 2, 4, 6 ou 8.

Certains des résultats obtenus via la matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ ne sont pas si évidents : par exemple, le nombre moyen de temps que le rat passe dans un état en partant de celui-ci avant d'atteindre la nourriture est $14/8$.

3.5.2 Matrice fondamentale

Dans cette sous-section, nous introduisons une *matrice fondamentale* pour les chaînes irréductibles. Elle joue un rôle similaire à celui de la matrice fondamentale des chaînes absorbantes. En particulier, nous proposons une méthode de calcul de la matrice $\mathbf{M}$, qui reprend les temps moyens de premier retour et qui est plus simple et directe que celle obtenue en modifiant la chaîne de Markov initiale ou que via le Théorème 2.4.8. En effet, pour obtenir les temps moyens pour chaque état, il faudrait sinon modifier la chaîne autant de fois qu'il y a d'états, ce qui n'est pas très efficace.

Rappelons que $\mathbf{M}$ est la matrice qui encode tous les temps moyens d'atteinte

$$m_{ij} = k_i^{(j)} = \mathbb{E}_i[\text{temps pour atteindre } s_j].$$

Commençons par donner une intuition. Rappelons que la forme de la matrice fondamentale d'une chaîne de Markov absorbante est

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1}.$$

Comme il n'y a pas d'état absorbant, on peut être tenté par essayer $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}$ comme matrice fondamentale. Mais $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ n'est pas inversible ! En effet, puisque $\mathbf{w}\mathbf{P} = \mathbf{w}$, on a $\mathbf{w}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{0}$, et $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ ne peut pas être inversible (sinon $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ce qui est impossible).

Rappelons que si on considère une chaîne de Markov absorbante, alors

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_T)^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_T^2 + \dots$$

qui se comporte comme une série géométrique car intuitivement $\mathbf{P}_T^n \rightarrow \mathbf{0}$. Si $\mathbf{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière, alors $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{W}$ et par analogie, on a donc envie de considérer la série

$$\mathbf{I} + (\mathbf{P} - \mathbf{W}) + (\mathbf{P}^2 - \mathbf{W}) + \dots \quad (3.5)$$

Lemme 3.5.2. Soient $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière finie et $\mathbf{w}$ sa distribution invariante. Si $\mathbf{W}$ est la matrice dont les lignes sont toutes égales à $\mathbf{w}$, alors $\mathbf{P}\mathbf{W} = \mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{P}$ et $\mathbf{W}^n = \mathbf{W}$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. On a $\mathbf{W} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^n$ et donc

$$\mathbf{P}\mathbf{W} = \mathbf{P} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{W}$$

et de même $\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{P}$. De plus,

$$(\mathbf{W}^2)_{ij} = \sum_k W_{ik} W_{kj} = \sum_k w_k w_j = w_j = (\mathbf{W})_{ij}$$

puisque la somme des éléments de $\mathbf{w}$ est égale à 1. Ainsi $\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}$ et en procédant de proche en proche, on trouve $\mathbf{W}^n = \mathbf{W}$ pour tout $n \geq 1$. ■

Comme $\mathbf{P}$ et $\mathbf{W}$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et il vient

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} - \mathbf{W})^n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n \mathbf{P}^{n-i} \mathbf{W}^i \\ &= \mathbf{P}^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_i^n \mathbf{W}^i \\ &= \mathbf{P}^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_i^n \mathbf{W} \\ &= \mathbf{P}^n + \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i C_i^n \right) \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Puisque

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_i^n,$$

on obtient que

$$(\mathbf{P} - \mathbf{W})^n = \mathbf{P}^n + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i C_i^n \right)}_{=-1} \mathbf{W} = \mathbf{P}^n - \mathbf{W},$$

pour tout $n \geq 1$. On peut donc réécrire la série dans (3.5) sous la forme

$$\mathbf{I} + (\mathbf{P} - \mathbf{W}) + (\mathbf{P}^2 - \mathbf{W}) + \dots = \mathbf{I} + (\mathbf{P} - \mathbf{W}) + (\mathbf{P} - \mathbf{W})^2 + \dots$$

Si $\mathbf{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière, alors $\mathbf{P}^n - \mathbf{W} \rightarrow 0$ et on peut montrer que la série (3.5) converge, et sa limite est donnée par l'inverse de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W}$. Si la chaîne est irréductible mais pas régulière, on n'a plus que $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{W}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Néanmoins, la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W}$ va toujours être inversible.

Définition 3.5.3. On appelle

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1}$$

la matrice fondamentale associée à la chaîne irréductible.

Lemme 3.5.4. Soit $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1}$ et soit $\mathbf{1}$ le vecteur-colonne composé de 1. Alors

$$\mathbf{Z}\mathbf{1} = \mathbf{1} , \quad \mathbf{w}\mathbf{Z} = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{W} .$$

Démonstration. On sait que $\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{W}\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Par conséquent, on a

$$\mathbf{1} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})\mathbf{1}$$

et si on multiplie à gauche les deux membres de l'égalité par $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1}$, on obtient

$$\mathbf{Z}\mathbf{1} = \mathbf{1} .$$

De même, puisque $\mathbf{w}\mathbf{P} = \mathbf{w}$ et $\mathbf{w}\mathbf{W} = \mathbf{w}$, on a

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W}) .$$

et en multipliant à droite les deux membres de l'égalité par $\mathbf{Z}$, on obtient

$$\mathbf{w}\mathbf{Z} = \mathbf{w} .$$

Enfin, on a aussi

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})(\mathbf{I} - \mathbf{W}) &= \mathbf{I} - \mathbf{W} - \mathbf{P} + \mathbf{W} + \mathbf{W} - \mathbf{W} \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{P} \end{aligned}$$

et en multipliant à gauche par $\mathbf{Z}$, on trouve

$$\mathbf{I} - \mathbf{W} = \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) .$$

Cela conclut la preuve. ■

Théorème 3.5.5. Soit $\mathbf{Z}$ la matrice fondamentale d'une chaîne irréductible et $\mathbf{w}$ sa distribution invariante. Pour tout $i \neq j$, on a

$$\mathbb{E}_i[T_j] = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{w_j} .$$

Démonstration. On garde les mêmes notations matricielles que dans la preuve du Théorème 3.1.5. Par la relation (3.4), on sait que $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M} = \mathbf{C} - \mathbf{D}$. En multipliant à gauche par $\mathbf{Z}$, on obtient

$$\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M} = \mathbf{Z}\mathbf{C} - \mathbf{Z}\mathbf{D} .$$

Par le Lemme 3.5.5, on sait que $\mathbf{ZC} = \mathbf{C}$ et que $\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{W}$. Il s'ensuit donc que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{M} = \mathbf{C} - \mathbf{ZD}$$

qui peut se réécrire

$$\mathbf{M} = \mathbf{WM} + \mathbf{C} - \mathbf{ZD}.$$

Puisque $m_{jj} = 0$, on a

$$0 = (\mathbf{wM})_j + 1 - z_{jj}r_j$$

et donc $(\mathbf{wM})_j = z_{jj}r_j - 1$. Si $i \neq j$, on obtient

$$m_{ij} = (\mathbf{wM})_j + 1 - z_{ij}r_j = z_{jj}r_j - z_{ij}r_j.$$

■

Exemple 3.5.6. Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition donnant la météo au Pays d'Oz. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9/10 & -1/20 & 3/20 \\ -1/10 & 6/5 & -1/10 \\ 3/20 & -1/20 & 9/10 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1} = \begin{pmatrix} 86/75 & 1/25 & -14/75 \\ 2/25 & 21/25 & 2/25 \\ -14/75 & 1/25 & 86/75 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbf{w} = (2/5 \ 1/5 \ 2/5)$, on a par exemple,

$$\mathbb{E}_1[T_2] = m_{12} = \frac{z_{22} - z_{12}}{w_2} = \frac{21/25 - 1/25}{1/5} = 4,$$

par le Théorème 3.5.5. En effectuant les calculs pour les autres éléments de $\mathbf{M}$, on obtient que les temps moyens de premier passage sont donnés par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10/3 \\ 8/3 & 0 & 8/3 \\ 10/3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.6 Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov

3.6.1 Monte-Carlo

La simulation de Monte-Carlo est une famille d'algorithmes qui repose sur l'utilisation d'échantillons aléatoires répétés afin d'estimer des quantités d'intérêt. Historiquement, la méthode de Monte-Carlo a été développée par John von Neumann et Stanislaw Ulam pendant la Seconde Guerre mondiale, dans le cadre du projet Manhattan. Son nom fait référence aux célèbres casinos de Monaco, en raison du rôle central joué par le hasard dans cette approche, à l'image d'un jeu de roulette. Les méthodes de Monte-Carlo sont largement utilisées pour l'estimation de quantités numériques par simulation de variables aléatoires (mais avec un risque, bien que faible, que la valeur retournée ne soit pas bonne). L'un des principaux atouts de ces méthodes est leur simplicité et leur flexibilité, en particulier lorsqu'elles sont comparées à d'autres méthodes numériques. Elles permettent d'obtenir des approximations fiables, indépendamment de la dimension du problème, contrairement aux approches déterministes qui rencontrent fréquemment des difficultés liées à l'augmentation de la dimension.

L'idée est la suivante. Supposons que l'on cherche à estimer une quantité d'intérêt δ . L'approche Monte-Carlo consiste à exprimer cette quantité sous la forme d'une espérance mathématique

$$\delta = \mathbb{E}[h(X)]$$

où X est un vecteur aléatoire et $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. L'estimateur de Monte-Carlo repose sur la simulation d'un échantillon de vecteurs aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ suivant la loi de X . L'espérance est alors approximée par la moyenne empirique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k).$$

La convergence de cet estimateur vers la valeur exacte δ repose sur la loi des grands nombres. En effet, si $\mathbb{E}[|h(X)|] < \infty$, alors la loi des grands nombres affirme que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \delta.$$

Autrement dit, plus on génère d'échantillons, plus notre estimation devient précise.

Exemple 3.6.1. Prenons un exemple classique souvent utilisé pour illustrer la méthode de Monte-Carlo. Imaginons une zone rectangulaire dont les dimensions sont connues (on en connaît donc l'aire). À l'intérieur de cette zone se trouve un lac dont la superficie est inconnue. Pour déterminer l'aire du lac, on demande à une armée de tirer n boulets de canon de manière aléatoire (et uniforme) sur cette zone. La probabilité p qu'un boulet soit tombé dans le lac est égale à

$$p = \frac{\text{Superficie du lac}}{\text{Superficie du terrain}}.$$

Pour estimer la superficie du lac, il suffit donc d'estimer p . Cette probabilité théorique est estimée par la fréquence empirique

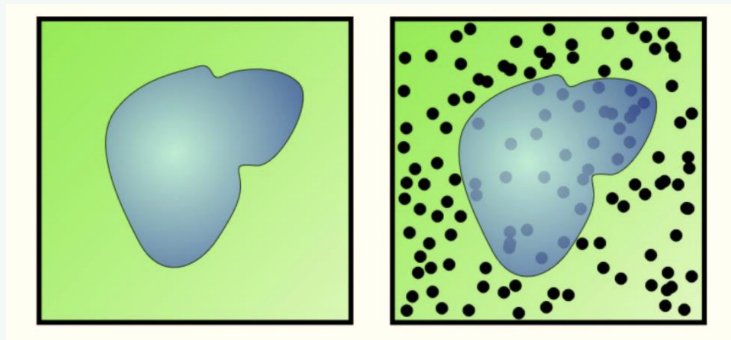
$$p \approx \frac{\text{Nombre de boulets tombés dans le lac}}{\text{Nombre de boulets lancés}}.$$

Cette approximation est justifiée par la loi des grands nombres. En effet, supposons que la variable aléatoire X_n représente le résultat du lancer du $n^{\text{ème}}$ boulet, avec

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le boulet est tombé dans le lac} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $X \sim \text{Bern}(p)$. Ainsi, si on lance n boulets, on a

$$\frac{\text{Nombre de boulets tombés dans le lac}}{\text{Nombre de boulets lancés}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X] = p.$$



Par exemple, si le terrain mesure 6000 m^2 , que l'armée tire 400 boulets et que 150 projectiles sont tombés dans le lac, alors l'estimation de la superficie du lac sera

$$\text{Superficie du lac} = p \times \text{Superficie du terrain} \approx \frac{150}{400} \times 6000 = 2250 \text{ m}^2.$$

La précision de l'estimation s'améliorera à mesure que le nombre de tirs augmente. Il est également important de s'assurer que les tirs sont bien répartis de manière uniforme sur la zone, plutôt que de viser toujours le même endroit.

Exemple 3.6.2. Un second exemple est donné par le calcul numérique d'intégrales. Supposons que l'on souhaite estimer l'intégrale d'une fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\delta = \int_0^1 h(x) dx.$$

Rappelons que l'intégrale peut être vue comme l'aire sous la courbe de la fonction h entre 0 et 1. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

selon $X \sim \text{Unif}([0, 1])$. L'idée est d'utiliser ces variables aléatoires pour approximer l'intégrale par la moyenne des valeurs de la fonction h évaluée en chaque X_i . L'estimation de l'intégrale est alors donnée par

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i).$$

Par la loi des grands nombres, on sait que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[h(X)] = \int_0^1 h(x) dx.$$

Dans cet exemple, l'intérêt d'une méthode probabiliste n'est pas flagrant, puisque nous aurions également pu utiliser la méthode de rectangles (c'est-à-dire les sommes de Riemann) pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale, sans risque d'erreur (il n'y a pas de hasard dans la méthode des rectangles). En revanche, contrairement à la méthode des rectangles, la méthode de Monte-Carlo n'est pas affectée par la régularité de la fonction h . De plus, cette méthode de Monte-Carlo peut être appliquée à des intégrales de dimension quelconque, et pour des problèmes de grande dimension, les méthodes de Monte-Carlo sont souvent beaucoup plus efficaces que des techniques classiques. Pour calculer l'intégrale d'une fonction h sur un ensemble D , il faut alors considérer des vecteurs aléatoires uniformément distribués sur D .

En résumé, l'algorithme de Monte-Carlo pour estimer $\mathbb{E}[h(X)]$ est

- ▷ Générer $x_1, \dots, x_n$ de manière indépendante selon la loi de X
- ▷ Calculer $y_1 = h(x_1), \dots, y_n = h(x_n)$
- ▷ Calculer les estimations ponctuelles

$$\bar{y}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(x_j)$$

(et l'intervalle de confiance).

3.6.2 Génération de nombres aléatoires uniformément distribués

Le coeur d'une procédure Monte-Carlo est donc la simulation de nombres (ou de vecteurs) aléatoires distribués indépendamment selon une loi donnée. Comment obtenir ces nombres ? Les générateurs de nombres aléatoires ont toujours été présents dans l'activité humaine : les dés (inventés il y a plus de 5000 ans !), les lancers de pièces, les jeux de cartes, les roulettes, etc. Il n'est pas difficile d'imaginer des mécanismes physiques qui génèrent des nombres uniformément distribués.

De nos jours, les nombres aléatoires peuvent être produits plus efficacement. Il existe deux méthodes principales pour générer des nombres aléatoires. La première consiste à mesurer un phénomène physique censé être aléatoire, comme le bruit atmosphérique. La deuxième méthode utilise des algorithmes capables de produire de longues suites de nombres apparemment aléatoires, qui sont en réalité entièrement déterminées par une valeur initiale plus courte. La

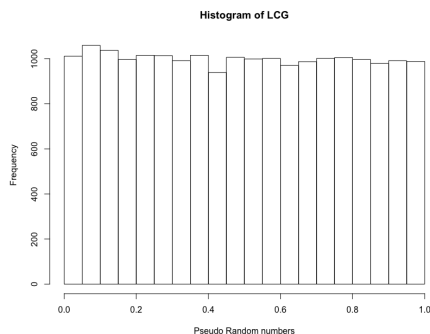


FIGURE 3.1 – Histogramme de LGC avec $m = 10^8 + 1$, $a = 23$, $b = 0$ et $x_0 = 47594118$

plupart des langages de programmation contiennent déjà des générateurs de nombres aléatoires uniformes intégrés (c’est-à-dire pour lesquels $X \sim \text{Unif}([0, 1])$). Par exemple

- ▷ Excel : “RAND()”
- ▷ R : “runif()”
- ▷ Mathematica : “RandomReal[]”
- ▷ Python : “random()”

Ces générateurs ne créent pas de véritables nombres aléatoires ; ils génèrent simplement des nombres que l’on peut utiliser comme s’ils l’étaient. Ces procédures partent d’une condition initiale (appelé graine) et produisent une suite de nombres $u_1, \dots, u_J$ selon un algorithme déterministe. Il n’y a rien de véritablement aléatoire à cela, à part le fait que les suites possèdent des propriétés les rendant statistiquement indiscernables d’une suite de nombres uniformément distribués. Ces algorithmes sont appelés des générateurs de nombres aléatoires. Les méthodes les plus courantes sont basées sur le *générateur congruentiel linéaire* (LCG) inventé par Derrick Lehmer en 1949. L’algorithme de base est étonnamment simple : l’algorithme forme une suite dont chaque terme est construit à partir du précédent, via la formule

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \mod m$$

et

$$u_n = \frac{x_n}{m}.$$

Clairement, les nombres u_n appartiennent tous à l’intervalle $[0, 1]$. Il est néanmoins crucial de bien choisir les paramètres pour assurer un cycle long !

On dispose donc de générateurs de nombres (pseudo) aléatoires uniformément sur $[0, 1]$. A partir de ces nombres, comment générer des nombres ou des vecteurs selon une loi donnée ? La *méthode de la fonction inverse* permet, étant donné un générateur aléatoire uniforme, de simuler suivant la loi d’une variable aléatoire réelle lorsqu’on est capable de calculer l’inverse généralisé de sa fonction de répartition.

Proposition 3.6.3. Soit F une fonction de répartition strictement croissante continue et U une variable aléatoire de loi uniforme $U \sim \text{Unif}([0, 1])$. Alors

$$F^{-1}(U) \sim F$$

c'est-à-dire la variable aléatoire $X = F^{-1}(U)$ admet F comme fonction de répartition.

Démonstration. Si F est strictement croissante et continue alors elle est bijective et donc inversible. On calcule

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x)$$

donc la variable aléatoire $X = F^{-1}(U)$ admet F comme fonction de répartition. ■

Exemple 3.6.4. Pour une loi exponentielle de paramètre λ , la fonction de répartition est

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

pour $x > 0$. L'inverse de cette fonction est

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

avec $u \in]0, 1[$. Ainsi, pour générer une variable exponentielle, on utilise

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

Ce résultat se généralise dans le cas d'une fonction de répartition générale.

Théorème 3.6.5 (Skorokhod). Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction de répartition et

$$F^{-}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$$

son inverse généralisé. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme $U \sim \text{Unif}([0, 1])$, alors

$$F^{-}(U) \sim F.$$

Pour générer des variables aléatoires suivant une loi de fonction de répartition F via la méthode de de la fonction inverse, il suffit donc de

- ▷ Générer un nombre aléatoire U uniformément distribué entre 0 et 1.
- ▷ Calculer X tel que $X = F^{-}(U)$, où F^{-} est la fonction de répartition inverse (généralisée).

Bien que facile à mettre en oeuvre, cette approche ne s'applique néanmoins que lorsque l'inverse de la fonction de répartition est facile à calculer (exponentielle, Weibull, Cauchy...), ce qui n'est pas toujours évident. Un contre-exemple classique à cette méthode est la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$: il n'existe pas de formulation simple de sa fonction de répartition ou de son inverse. Notons aussi que dans le cas multivarié, la méthode ne s'applique que si le vecteur $X = (X_1, \dots, X_d)$ est formé de variables aléatoires indépendantes. Dans ce cas, il suffit de simuler chacune de ces distributions séparément.

3.6.3 Algorithme de Metropolis-Hasting

Il existe d'autres méthodes qui permettent de simuler des nombres ou des vecteurs aléatoires. Nous présentons ici une méthode basée sur les **chaînes de Markov** pour simuler des échantillons d'un **vecteur aléatoire** X de distribution de probabilité p_X . Nous nous contentons de travailler avec des vecteurs aléatoires prenant un nombre fini de valeurs, bien que l'algorithme soit tout à fait général. L'idée de cette méthode est de construire une chaîne de Markov régulière dont la distribution invariante est la distribution souhaitée. Le Théorème 3.2.5 permettra alors d'affirmer que le comportement à long terme de la chaîne est distribué selon p_X . Contrairement à la méthode présentée avant, qui était exacte, les algorithmes de *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) permettent un *échantillonnage approximatif* d'une distribution arbitraire.

Notations. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire dont chaque marginale X_j prend un nombre fini de valeurs. Si chaque composante de X peut prendre au plus ℓ valeurs, le vecteur aléatoire X peut prendre au plus ℓ^d valeurs. Commençons par numéroter ces valeurs. D'un point de vue des chaînes de Markov, chaque valeur que X peut prendre va correspondre à un état. Par la suite, nous utiliserons les indices $i, j, k, \dots$ pour désigner les états et nous poserons

$$w_j = p_X(x_1, x_2, \dots, x_d) \quad \text{si} \quad (x_1, \dots, x_d) \text{ correspond au } j^{\text{ème}} \text{ état.}$$

Ainsi, $\mathbf{w}$ est une distribution ayant $D \leq \ell^d$ composantes.

Le lemme suivant donne la première étape de construction de la chaîne. Il montre, étant donnée une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}$, que si une distribution satisfait la *condition de balance spécifique* relative à $\mathbf{P}$, alors c'est forcément la distribution invariante de $\mathbf{P}$.

Lemme 3.6.6. *Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov. Si $\mathbf{w}$ est une distribution telle que*

$$w_i p_{ij} = w_j p_{ji} \quad \text{pour tous } i, j,$$

alors $\mathbf{w}$ est la distribution invariante de $\mathbf{P}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$(\mathbf{wP})_j = \sum_i w_i p_{ij} = \sum_i w_j p_{ji} = w_j \sum_i p_{ji} = w_j$$

en utilisant l'hypothèse et le fait que $\mathbf{P}$ est stochastique. ■

Il reste à présent à construire une matrice stochastique $\mathbf{P}$ pour laquelle la condition de balance spécifique est satisfaite pour la distribution

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_D).$$

Dans cette section, nous allons présenter un choix spécifique de matrice $\mathbf{P}$ qui correspond à l'algorithme de Metropolis-Hastings.

Comme mentionné ci-dessus, les états de la chaînes de Markov sont donnés par les valeurs possibles que peut prendre X . On commence par considérer **un graphe** G connexe non-orienté sur ces sommets. Soit r le degré maximum des sommets de G .

Les transitions de la chaîne de Markov sont définies comme suit :

- ▷ Depuis l'état i , on sélectionne un voisin j avec une probabilité $\frac{1}{r}$. Étant donné que le degré de i peut être inférieur à r , il existe une probabilité qu'aucun sommet ne soit sélectionné : dans ce cas, la chaîne reste dans l'état i .
- ▷ Si un voisin j est sélectionné et $w_j \geq w_i$, la chaîne va vers j .
- ▷ Si un voisin j est sélectionné et $w_j < w_i$, la chaîne va dans l'état j avec une probabilité $\frac{w_j}{w_i}$, et reste dans l'état i avec une probabilité $1 - \frac{w_j}{w_i}$.

Intuitivement, cela favorise les états “plus probables”, avec des valeurs w_i plus élevées. En pratique, si $w_j < w_i$, pour choisir si la chaîne va dans l'état j ou reste dans l'état i , on génère une loi uniforme U sur $[0, 1]$ et

- ▷ si $U \leq \frac{w_j}{w_i}$, on passe dans l'état j ,
- ▷ si $U > \frac{w_j}{w_i}$, on reste dans l'état i .

puisque

$$\mathbb{P}\left(U \leq \frac{w_j}{w_i}\right) = \frac{w_j}{w_i}.$$

L'algorithme peut être interprété intuitivement de la manière suivante : à chaque itération, on se déplace dans l'espace des états. Ce déplacement peut être accepté ou rejeté, et le taux d'acceptation indique à quel point le nouvel état est probable étant donné l'état actuel et selon la distribution $\mathbf{w}$. Si l'on cherche à se déplacer vers un état j plus probable que l'état actuel i (si $w_j \geq w_i$), le déplacement est toujours accepté. Cependant, si l'on cherche à se déplacer vers un état moins probable que l'état actuel, alors le déplacement peut être rejeté, avec une probabilité d'autant plus grande w_j est petit par rapport à w_i . Par conséquent, la marche tend à visiter les états j correspondant à des probabilités p_j élevées, tout en explorant occasionnellement des états de probabilité plus faible (et garder ainsi une chaîne régulière).

Notons

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si il existe une arête entre } i \text{ et } j \text{ dans le graphe } G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la matrice d'adjacence du graphe G . Ainsi, si $X_n = i$ et si j est voisin de i dans le graphe G ,

alors

$$X_{n+1} = \begin{cases} j & \text{avec probabilité } A_{ij} \frac{1}{r} \min\left(1, \frac{w_j}{w_i}\right) \text{ si } i \neq j \\ i & \text{avec probabilité } 1 - \sum_{j \neq i} A_{ij} \frac{1}{r} \min\left(1, \frac{w_j}{w_i}\right) \end{cases}$$

Remarquons que $A_{ij} = A_{ji}$ puisque le graphe G n'est pas orienté.

Proposition 3.6.7 (Algorithme de Metropolis-Hasting). *Soit $\mathbf{P}$ la matrice définie par*

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{r} \min\left(1, \frac{w_j}{w_i}\right) & \text{si } i \neq j \\ 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Alors, $\mathbf{P}$ est une matrice stochastique dont $\mathbf{w}$ est la distribution invariante.

Démonstration. Il est clair que $\mathbf{P}$ est une matrice stochastique. En outre, si $A_{ij} = A_{ji} = 1$, alors

$$w_i p_{ij} = \frac{w_i}{r} \min\left(1, \frac{w_j}{w_i}\right) = \frac{1}{r} \min(w_i, w_j) = \frac{w_j}{r} \min\left(1, \frac{w_i}{w_j}\right) = w_j p_{ji}.$$

Les autres cas sont immédiats. Par le Lemme 3.6.6, la distribution $\mathbf{w}$ est donc bien la distribution invariante de $\mathbf{P}$. ■

Comme le graphe G est connexe, il est clair que la chaîne de Markov associée à $\mathbf{P}$ est irréductible. De plus, elle est apériodique puisqu'on peut rester dans un état avec une probabilité non-nulle. On a donc une chaîne régulière, dont le comportement à long terme est distribué selon $\mathbf{w}$.

Remarque 3.6.8. *Cet algorithme se repose tout de même sur un choix aléatoire : on suppose que l'on peut choisir de manière uniforme un des sommets voisins de j , et que l'on sait générer une loi uniforme. Tout cela est faisable vu les sous-sections précédentes.*

Remarque 3.6.9. *L'algorithme fonctionne également si nous ne connaissons la fonction de masse p_X de X qu'à un facteur multiplicatif près. Autrement dit, on peut appliquer l'algorithme pour le vecteur*

$$g(x) = \frac{p_X(x)}{C}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{X}$, avec $C > 0$ inconnu, puisque seul le rapport $\frac{w_j}{w_i}$ est utilisé.

4 Processus de Poisson

Les processus ponctuels sont des processus à temps continu (indexés par $[0, +\infty[$) qui permettent de modéliser des phénomènes d'arrivées aléatoires isolés dans le temps : appels téléphoniques reçus par une centrale, arrivées de clients devant un guichet, particules radioactives émises par une substance instable, visites sur une page Internet, ... On va s'intéresser au processus ponctuels le plus simple : le processus de Poisson. Ce processus est un exemple fondamental de processus Markoviens, étudiés dans le chapitre suivant, qui donnent une version continue des chaînes de Markov.

4.1 Processus de comptage

Définition 4.1.1. *Un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage si*

- ▷ $N(0) = 0$,
- ▷ $N(t) \leq N(s)$ pour tous $0 \leq t \leq s$,
- ▷ $N(t) \in \mathbb{N}$ pour tout $t \geq 0$.

On associe à un processus de comptage deux suites de variables aléatoires :

- ▷ les instants d'arrivées $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ tels que $T_j = s$ si la j^e occurrence^a a lieu en l'instant s : on a donc

$$N(t) = j \iff T_j \leq t < T_{j+1},$$

- ▷ les temps inter-arrivées (temps entre deux arrivées successives) $W_i, i \geq 1$, où

$$W_i = T_i - T_{i-1}.$$

a. donc le j^e saut

Bien sûr, on peut reconstruire les instants d'arrivées via les temps entre deux arrivées en utilisant la formule

$$T_k = \sum_{i=1}^k W_i.$$

Un processus de comptage peut donc être défini de trois manières :

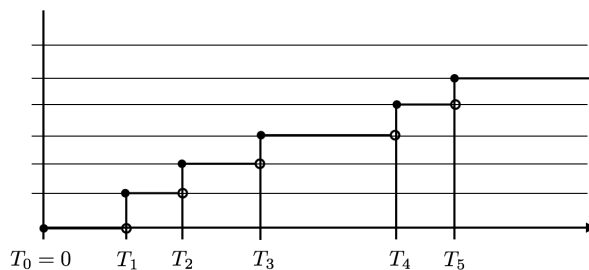


FIGURE 4.1 – Trajectoire d'un processus de comptage et instants d'arrivées

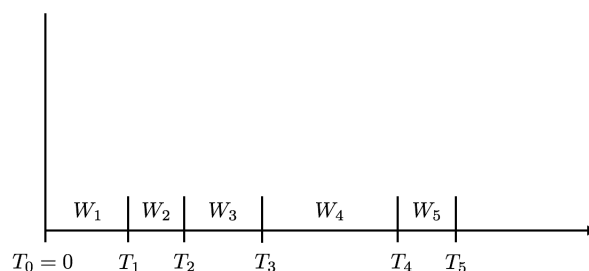


FIGURE 4.2 – Instants d'arrivées et temps inter-arrivées

1. en donnant le processus $\{N(t) : t \geq 0\}$ lui-même,
2. en donnant ses temps d'arrivées T_n ,
3. en donnant les temps inter-arrivées W_n .

Si on se donne la distribution jointe d'un des trois processus, cela détermine entièrement la distribution des deux autres. Naturellement, on a envie d'avoir :

- ▷ les W_i sont i.i.d.,
- ▷ les W_i sont “sans mémoire”,
- ▷ la loi de $N(t) - N(s)$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle de temps $t - s$.

Le processus de Poisson est ce processus de comptage “magique” : ces propriétés spécifient les distributions jointes et les réduit à celles que nous connaissons et qui ont de bonnes propriétés.

4.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est un des processus de comptage les plus classiques ; il est également un des exemples de processus Markoviens les plus simples et fondamentaux.

On s'intéresse ici à des arrivées d'appels à un centre de gestion, à des arrivées de clients dans une file, ... Le processus associé est, la plupart du temps, en attente (“on hold”) ; de temps en temps il y a une *arrivée* qui change l'état du système. On peut caractériser ces processus (i) en termes de la loi du nombre $N(t)$ d'arrivées dans un intervalle de temps donné (qui est de loi de Poisson), (ii) en termes du temps $W_k = T_k - T_{k-1}$ entre deux arrivées successives (qui est de loi

exponentielle) ou (iii) en termes du nombre $N(h)$ d'arrivées dans un petit intervalle de temps. Nous adoptons la troisième approche.

Avant de définir le processus de Poisson, présentons des propriétés classiques sur les accroissements de processus stochastiques.

Définition 4.2.1.

▷ Les accroissements d'un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ sont les variables aléatoires

$$X(t) - X(s), \quad t > s \geq 0.$$

▷ On dit que le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants si pour toute suite finie d'intervalles disjoints $]a_1, b_1[,]a_2, b_2[, \dots,]a_n, b_n[$, les accroissements

$$X(b_1) - X(a_1), X(b_2) - X(a_2), \dots, X(b_n) - X(a_n)$$

sont des variables aléatoires indépendantes.

▷ Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est à accroissements stationnaires si

$$X(t+h) - X(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X(h) - X(0)$$

pour tous $t, h \geq 0$.

Rappelons également les notations usuelles suivantes.

Définition 4.2.2. Soit ψ une fonction telle que $\psi(0) = 0$. On dit qu'une fonction f est $o(\psi)$ en 0 si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{\psi(h)} = 0.$$

Exemple 4.2.3.

- ▷ Toute puissance h^a avec $a > 1$ est $o(h)$.
- ▷ Si f et g sont $o(h)$, alors $f + g$ est $o(h)$.
- ▷ Si f est $o(h)$ et c est une constante, alors cf est $o(h)$.
- ▷ Si f et g sont $o(h)$, alors fg est $o(h^2)$.

Exemple 4.2.4. Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, on a $\mathbb{P}(X \leq t+h \mid X > t) = \mathbb{P}(X \leq h) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$.

Nous pouvons à présent introduire les processus de Poisson.

Définition 4.2.5 (Processus de Poisson). *Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux $\lambda > 0$ s'il a des accroissements indépendants et stationnaires et s'il satisfait aux conditions suivantes :*

1. *La probabilité d'une occurrence dans un petit intervalle de temps est proportionnelle à la longueur de cet intervalle, i.e.*

$$\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h).$$

2. *La probabilité qu'il y ait plus d'une occurrence dans un petit intervalle de temps est négligeable, i.e.*

$$\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h).$$

On écrit que $\{N(t), t \geq 0\}$ est $Pp(\lambda)$.

Remarquons que $\mathbb{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$. De plus, les conditions d'indépendance et de stationnarité signifient que la distribution du nombre d'arrivées dans un intervalle de temps donné ne dépend que de la longueur de cet intervalle.

La propriété suivante lie les processus de Poisson aux chaînes de Markov que nous avons étudiées dans le chapitre précédent.

Théorème 4.2.6 (Propriété de Markov). *Supposons que $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux λ . Pour tout $s \geq 0$, définissons*

$$M(t) = N(s + t) - N(s).$$

Alors $\{M(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux λ , indépendamment de $\{N(r), r \leq s\}$.

Démonstration. Il est clair que $M(0) = N(s) - N(s) = 0$ presque sûrement. De plus, les accroissements de $\{M(t), t \geq 0\}$ sont liés à ceux de $\{N(t), t \geq 0\}$ puisque

$$M(t_2) - M(t_1) = N(s + t_2) - N(s + t_1).$$

On garde donc les mêmes propriétés d'indépendance, de stationnarité et on a

$$\mathbb{P}(M(h) = 1) = \mathbb{P}(N(s + h) - N(s) = 1) = \lambda h + o(h)$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(M(h) \geq 2) = \mathbb{P}(N(s + h) - N(s) \geq 2) = o(h).$$

Ainsi, $\{M(t), t \geq 0\}$ satisfait les conditions de la définition d'un processus de Poisson homogène de taux λ . Enfin, par la propriété d'accroissements indépendants de $N(t)$, $M(t)$ est indépendant de $\{N(r), r \leq s\}$. ■

A nouveau, le temps s peut être remplacé par un temps d'arrêt.

Théorème 4.2.7 (Propriété forte de Markov). *Supposons que $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux λ . Soit T un temps d'arrêt pour $\{N(t), t \geq 0\}$, c'est-à-dire T est une variable aléatoire positive telle que $\{T \leq s\} \in \sigma(N(u), 0 \leq u \leq s)$. Définissons*

$$M(t) = N(T + t) - N(T).$$

Alors, conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $\{M(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux λ , indépendamment de $\{N(r), r \leq T\}$.

Comme nous le verrons, les deux conditions locales suffisent pour déterminer le comportement global. Commençons par prouver que le nombre d'occurrences d'un processus satisfaisant cette définition est distribué suivant une loi de Poisson.

Théorème 4.2.8 (Distribution du nombre d'arrivées). *Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux λ , alors pour tout $s < t$, on a*

$$N(t) - N(s) \sim \text{Poi}((t - s)\lambda).$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

pour tout $t > 0$.

Démonstration. Par stationnarité des accroissements, on sait que $N(t) - N(s) \stackrel{\mathcal{L}}{=} N(t - s)$, il suffit donc de démontrer (4.1). Pour tout $n \geq 0$, considérons la fonction P_n définie par

$$P_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n), \quad t \geq 0.$$

Montrons par récurrence que $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Cas de base : $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

On a

$$\begin{aligned} P_0(t + h) &= \mathbb{P}(N(t + h) = 0) \\ &= \mathbb{P}(N(t + h) - N(t) = 0, N(t) = 0) \\ &= \mathbb{P}(N(t + h) - N(t) = 0 \mid N(t) = 0) \mathbb{P}(N(t) = 0) \\ &= \mathbb{P}(N(t + h) - N(t) = 0) \mathbb{P}(N(t) = 0) \\ &= \mathbb{P}(N(h) = 0) P_0(t), \end{aligned}$$

où le passage de la 3ème à la 4ème ligne se fait par indépendance des accroissements et le passage de la 4ème à la dernière se fait par stationnarité des accroissements. Par conséquent, il

vient

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda h + o(h))$$

et on en déduit que

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

En prenant $h \rightarrow 0$ dans cette dernière équation, on obtient l'EDO

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t).$$

Étant donnée la condition $P_0(0) = 1$, on obtient

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Induction : Supposons que $P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et montrons que $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

En utilisant la loi des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= \mathbb{P}(N(t+h) = n) \\ &= \mathbb{P}(N(t+h) = n \mid N(t) = n) \mathbb{P}(N(t) = n) + \mathbb{P}(N(t+h) = n \mid N(t) = n-1) \mathbb{P}(N(t) = n-1) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbb{P}(N(t+h) = n \mid N(t) = m) \mathbb{P}(N(t) = m) \\ &= \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 0 \mid N(t) = n) \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &\quad + \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1 \mid N(t) = n-1) \mathbb{P}(N(t) = n-1) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = n-m \mid N(t) = m) \mathbb{P}(N(t) = m) \\ &= \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 0) \mathbb{P}(N(t) = n) + \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) \mathbb{P}(N(t) = n-1) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = n-m) \mathbb{P}(N(t) = m) \\ &= \mathbb{P}(N(h) = 0) \mathbb{P}(N(t) = n) + \mathbb{P}(N(h) = 1) \mathbb{P}(N(t) = n-1) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbb{P}(N(h) = n-m) \mathbb{P}(N(t) = m) \end{aligned}$$

en utilisant comme précédemment l'indépendance et la stationnarité des accroissements. Il vient alors

$$P_n(t+h) = (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h)$$

et donc

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

En prenant la limite pour $h \rightarrow 0$, cela nous donne

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \tag{4.2}$$

Par hypothèse de récurrence, il vient

$$P'_n(t) + \lambda P_n(t) = \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

et en multipliant les deux membres de cette équation par $e^{\lambda t}$, l'équation se réécrit

$$e^{\lambda t} P'_n(t) + \lambda e^{\lambda t} P_n(t) = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Notons que $e^{\lambda t} P'_n(t) + \lambda e^{\lambda t} P_n(t) = (e^{\lambda t} P_n(t))'$. L'équation devient donc

$$(e^{\lambda t} P_n(t))' = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

et on en déduit que

$$e^{\lambda t} P_n(t) = \lambda^n \frac{t^n}{n!} + C$$

où C est une constante à déterminer. Puisque $P_n(0) = 0$, on en tire que $C = 0$, d'où la conclusion. ■

Remarque 4.2.9. *Il y a en moyenne λt occurrences dans un intervalle de temps de longueur t . Il y a donc, en moyenne, λ occurrences par unité de temps.*

Dans la preuve, nous avons obtenu le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) \\ P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $P_k(0) = \delta_{k,0}$. Si on définit les matrices infinies

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_0(t) & P_1(t) & P_2(t) & \cdots \\ 0 & P_0(t) & P_1(t) & \cdots \\ 0 & 0 & P_0(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

alors on peut réécrire le système sous la forme matricielle

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. La matrice $\mathbf{Q}$ est appelée le *générateur* du processus. Nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Le résultat précédent permet de donner une définition alternative des processus de Poisson.

Théorème 4.2.10 (Définition alternative). *Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux $\lambda > 0$ si et seulement si*

1. *il a des accroissements indépendants et stationnaires*
2. *pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt .*

Démonstration. La condition est nécessaire par le Théorème 4.2.8. Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de remarquer que

$$\mathbb{P}(N(h) = 1) = e^{-\lambda h} \lambda h = (1 - \lambda h + o(h)) \lambda h = \lambda h + o(h)$$

et $\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h)$ puisque

$$\mathbb{P}(N(h) = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h).$$

■

Une autre façon de caractériser un processus de Poisson est en termes de la distribution des longueurs des intervalles de temps entre deux arrivées, qui doit être exponentielle. Nous allons maintenant voir que notre définition permet également de retrouver cette propriété-là.

Théorème 4.2.11 (Distribution des temps inter-arrivées). *Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, alors les variables de temps inter-arrivées $W_n, n \geq 1$, sont i.i.d. selon la loi exponentielle de paramètre λ .*

Démonstration. Étant donné que les accroissements du processus sont indépendants, on peut montrer (admis) que tout événement se déroulant après l'instant T_n est indépendant de T_k pour tout $k = 1, 2, \dots, n-1$. Ceci permet de prouver l'indépendance mutuelle des W_i . De plus, pour tout $s \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, l'événement $W_n > s$ signifie qu'il n'y a pas d'arrivée entre le temps T_{n-1} et le temps $T_{n-1} + s$. Ainsi, en utilisant la stationnarité des accroissements, on a

$$\mathbb{P}(W_n > s) = \mathbb{P}(N(T_{n-1} + s) - N(T_{n-1}) = 0) = \mathbb{P}(N(s) = 0) = e^{-\lambda s}$$

ce qui correspond bien à une loi exponentielle de paramètre λ .

■

La réciproque de ce résultat est également vérifiée.

Théorème 4.2.12 (Définition alternative bis et construction). *Soit $\{W_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose*

$$T_n = \sum_{j=1}^n W_j$$

et $N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$. Alors $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène

de taux λ .

Démonstration. L'indépendance et la stationnarité des accroissements découle de l'indépendance des variables W_n et du fait que la loi exponentielle est sans mémoire (admis). De plus, on a

$$\mathbb{P}(N(h) = 0) = \mathbb{P}(W_1 > h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$$

et

$$\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = \mathbb{P}(T_2 \leq h) \leq \mathbb{P}(W_1 \leq h \text{ et } W_2 \leq h) = (1 - e^{-\lambda h})^2 = o(h)$$

par indépendance, ce qui suffit. ■

On a donc une méthode pour construire et simuler le processus de Poisson. En effet, puisque

$$T_n = \sum_{i=1}^n W_i = T_{n-1} + W_n,$$

on obtient T_n à partir de T_{n-1} en ajoutant une variable aléatoire $W_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, indépendante des variables précédentes. La loi de $N(t)$ est obtenue via la relation

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}).$$

Remarquons également que $T_n \sim \text{Gamma}(\lambda, n)$.

Le résultat complet s'énonce comme suit.

Théorème 4.2.13 (Définitions équivalentes du processus de Poisson). *Considérons un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$. Notons $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ ses instants d'arrivées et $W_1, W_2, \dots$ ses temps inter-arrivées.*

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

▷ *les accroissements de $\{N(t), t \geq 0\}$ sont indépendants et stationnaires, et*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h), \end{cases}$$

▷ *les accroissements de $\{N(t), t \geq 0\}$ sont indépendants et stationnaires, et pour tout $t > 0$, $N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$,*

▷ *les temps inter-arrivées $W_1, W_2, \dots$ sont i.i.d. selon la loi $\text{Exp}(\lambda)$.*

Si $\{N(t), t \geq 0\}$ satisfait l'une des trois propriétés équivalentes ci-dessus, c'est un processus de Poisson homogène de taux λ .

Nous concluons cette section en démontrant que la somme de deux processus de Poisson est encore un processus de Poisson.

Théorème 4.2.14. Si $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$ sont deux processus de Poisson homogènes indépendants de taux λ et μ respectivement, alors

$$\{N(t) + M(t), t \geq 0\}$$

est un processus

$$Pp(\lambda + \mu).$$

Démonstration. Soit $Z(t) = M(t) + N(t)$. L'indépendance de $M(t)$ et $N(t)$ implique que $Z(t)$ a des accroissements indépendants. Ils sont stationnaires puisque ceux de M et de N le sont. Enfin, lorsque h décroît vers 0,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z(h) = 0) &= \mathbb{P}(N(h) = 0)\mathbb{P}(M(h) = 0) \\ &= (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) \\ &= 1 - (\lambda + \mu)h + o(h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z(h) = 1) &= \mathbb{P}(N(h) = 1)\mathbb{P}(M(h) = 0) + \mathbb{P}(N(h) = 0)\mathbb{P}(M(h) = 1) \\ &= (\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) + (1 - \lambda h + o(h))(\mu h + o(h)) \\ &= (\lambda + \mu)h + o(h). \end{aligned}$$

Alternativement, on remarque que les accroissements de Z sont indépendants et stationnaires puisque ceux de M et N le sont et puisque les processus M et N sont indépendants. De plus, pour tout $t > 0$, on a $Z(t) \sim \text{Poi}((\lambda + \mu)t)$ comme somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes. ■

4.3 Généralisations

4.3.1 Processus de Poisson non-homogène

L'hypothèse des accroissements indépendants est indispensable. On peut par contre relâcher l'hypothèse de stationnarité des accroissements : le processus est alors appelé un *processus de Poisson non-homogène*. Un processus de Poisson non-homogène de fonction de taux $\lambda(t)$ est tel que

$$\mathbb{P}(N(t) = j) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^j}{j!},$$

avec $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$ (nombre moyen d'occurrences entre 0 et t). Ce processus permet de décrire des situations où les occurrences arrivent avec une intensité variable. Par exemple, si on considère les arrivées dans un restaurant, on peut imaginer que le taux d'arrivée sera plus élevé sur le temps de midi et en soirée, et plus faible dans l'après-midi. Bien sûr, si $\lambda(t)$ est constant, on retrouve le processus de Poisson homogène.

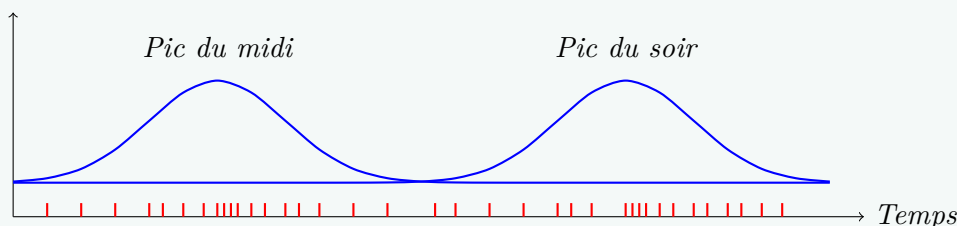
Les accroissements d'un processus de Poisson non-homogène ne sont plus stationnaires. On a le résultat suivant.

Théorème 4.3.1. *Si $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène de taux λ , alors pour tous $s < t$, on a*

$$N(t) - N(s) \sim \text{Poi}(\Lambda(t) - \Lambda(s)).$$

La distribution des temps inter-arrivées n'est plus exponentielle. Néanmoins, ces instants restent indépendants.

Exemple 4.3.2. *Considérons un restaurant ouvert de 11h à 22h. Les arrivées des clients ne se produisent pas à rythme constant : elles sont plus fréquentes pendant les périodes de repas (midi et soir) et moins nombreuses en milieu d'après-midi. On peut modéliser ce phénomène avec un processus de Poisson non-homogène de taux variable $\lambda(t)$, où $\lambda(t)$ représente le taux moyen d'arrivées à l'instant t . La fonction $\lambda(t)$ varie au cours de la journée avec deux pics, un à midi et un le soir, tandis que le nombre d'arrivées est plus faible en milieu d'après-midi. Les clients arrivent de manière aléatoire, mais plus concentrés lors des pics de fréquentation.*



4.3.2 Processus de Poisson composé

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène de taux λ . On considère une suite $Y_1, Y_2, \dots$ de variables aléatoires i.i.d. et indépendantes du processus de Poisson. Le processus $\{S(t), t \geq 0\}$ défini par

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

est appelé un *processus de Poisson composé*. A chaque instant t pour lequel $N(t)$ augmente d'une unité, le processus $S(t)$ augmente d'une quantité aléatoire. Contrairement au processus de Poisson, on peut donc avoir des arrivées multiples (et également non-entières).

Exemple 4.3.3. *Supposons que $\{N(t) : t \geq 0\}$ représente les arrivées des clients dans une station d'essence. On considère la variable aléatoire Y_n qui donne le nombre de litres*

achetés à la pompe par le client n . Alors le processus

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

représente le nombre de litres vendus à la pompe jusqu'à l'instant t .

Certains processus de Poisson composés sont eux-mêmes des processus de Poisson : en utilisant la propriété de Thinning de la loi de Poisson, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.3.4. Si $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux λ et si les variables aléatoires Y_n sont i.i.d. $\text{Bern}(p)$, alors

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

est un processus de Poisson de taux $p\lambda$.

Exemple 4.3.5 (Richesse d'une compagnie d'assurance). Soit une compagnie d'assurance avec :

- ▷ $u > 0$ le capital initial,
- ▷ $c > 0$ le revenu constant (primes collectées par unité de temps),
- ▷ $\{S(t)\}$ le processus de Poisson composé représentant le total des sinistres jusqu'au temps t

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j,$$

avec $N(t)$ le nombre de sinistres (processus de Poisson de taux λ) et Y_j le montant du j^{e} sinistre.

Alors, la richesse de la compagnie à l'instant t est donnée par

$$Z_t = u + ct - S(t).$$

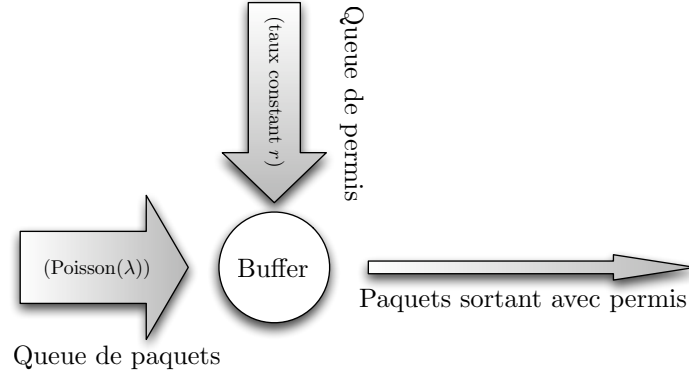
4.4 Application : Leaky bucket

Un “Leaky Bucket” est un mécanisme permettant de gérer un buffer (ou mémoire tampon) afin de contrôler le flux sortant. Ce modèle est utilisé pour régulariser le débit de données dans les réseaux, les systèmes informatiques ou les files d'attente de traitement, en limitant la surcharge du système.

Dans ce modèle, les paquets (données, demandes, calculs, etc.) arrivent dans un buffer suivant un rythme aléatoire. Chaque paquet sort du buffer les uns après les autres à un rythme constant

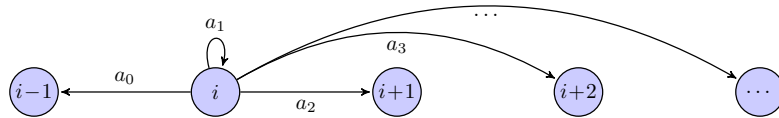
de r paquets par seconde, c'est-à-dire à un taux r . Si un paquet arrive alors que le buffer n'est pas vide, il est mis en attente jusqu'à ce que les paquets précédents soient sortis.

On peut imaginer le *Leaky Bucket* comme un seau percé dans lequel on verse de l'eau de manière irrégulière : l'eau s'écoule à débit constant, limitant ainsi le débit maximum qui peut sortir.



Ce type de schéma est utilisé pour limiter le flux sortant, même lorsqu'il y a une explosion du nombre d'arrivées dans le système.

Fixons $r = 1$. On peut modéliser le nombre de paquets présents dans le buffer via une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui change d'état chaque seconde. L'espace des états de la chaîne est l'ensemble des naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$, où $\{X_n = i\}$ représente l'événement qu'après n secondes il y a i paquets en attente dans le buffer. Notons a_k la probabilité que k paquets arrivent dans le buffer en une seconde. Si à l'instant n , $i \geq 1$ paquets sont en attente dans le système, l'instant d'après il peut y avoir $j \geq i - 1$ paquets en attente selon le nombre de paquets arrivés dans le buffer entre l'instant n et l'instant $n + 1$.



Si à l'instant n , il n'y a pas de paquet en attente dans le système, l'instant d'après il peut y avoir $j \geq 0$ paquets en attente si $j + 1$ paquets sont arrivés dans le buffer. La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Recherchons, si elle existe, la distribution stationnaire de la chaîne : elle peut être déterminée

via le système infini

$$\begin{cases} w_0(a_0 + a_1) + w_1a_0 = w_0 \\ w_0a_2 + w_1a_1 + w_2a_0 = w_1 \\ w_0a_3 + w_1a_2 + w_2a_1 + w_3a_0 = w_2 \\ \vdots \\ w_0a_k + w_1a_{k-1} + \dots + w_{k-1}a_1 + w_ka_0 = w_{k-1} \\ \vdots \end{cases}$$

et la condition $\sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1$ avec $w_j \geq 0$.

Ce système permet d'écrire récursivement $w_1, w_2, \dots$ en fonction de w_0 . En effet, le système précédent peut se réécrire

$$\begin{cases} a_0w_1 = w_0(1 - a_0 - a_1) \\ a_0w_2 = w_1(1 - a_1) - w_0a_2 \\ a_0w_3 = w_2(1 - a_1) - w_1a_2 - w_0a_3 \\ \vdots \\ a_0w_k = w_{k-1}(1 - a_1) - w_{k-2}a_2 - \dots - w_1a_{k-1} - w_0a_k \\ \vdots \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} a_0w_1 = w_0(1 - a_0 - a_1) \\ a_0w_2 = w_1(1 - a_0 - a_1) + w_0(1 - a_0 - a_1 - a_2) \\ a_0w_3 = w_2(1 - a_0 - a_1) + w_1(1 - a_0 - a_1 - a_2) + w_0(1 - a_0 - a_1 - a_2 - a_3) \\ \vdots \end{cases}$$

Cela mène à la relation de récurrence

$$a_0w_k = w_{k-1}b_1 + w_{k-2}b_2 + \dots + w_1b_{k-1} + w_0b_k$$

où

$$b_k = 1 - a_0 - a_1 - \dots - a_k.$$

En sommant ces équations puis en inversant l'ordre de sommation, on obtient

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{k=1}^{+\infty} w_k &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^k w_{k-l} b_l \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} b_l \sum_{k=l}^{+\infty} w_{k-l}, \end{aligned}$$

ce qui donne, étant donné que $\sum_{j=0}^{+\infty} w_j = 1$,

$$a_0(1 - w_0) = \sum_{l=1}^{+\infty} b_l.$$

Soit $N(t)$ le processus de Poisson de taux λ donnant le nombre d'arrivées en t secondes. Par définition

$$b_l = \mathbb{P}(N(1) \geq l + 1).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{+\infty} b_l &= \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N(1) \geq l + 1) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N(1) \geq l + 1) \right) - \mathbb{P}(N(1) \geq 1) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{j=l+1}^{+\infty} \mathbb{P}(N(1) = j) \right) - \mathbb{P}(N(1) \geq 1) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{P}(N(1) = j) \right) - \mathbb{P}(N(1) \geq 1) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(N(1) = j) \right) - \mathbb{P}(N(1) \geq 1) \\ &= \mathbb{E}[N(1)] - \mathbb{P}(N(1) \geq 1) \\ &= \mathbb{E}[N(1)] - (1 - a_0). \end{aligned}$$

On en tire que

$$w_0 = \frac{1 - \mathbb{E}[N(1)]}{a_0} = (1 - \lambda)e^\lambda$$

puisque la probabilité a_k que k paquets arrivent en une seconde est donnée par

$$a_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La chaîne de Markov (X_n) est clairement irréductible et apériodique, et si $\lambda < 1$, le Théorème 3.4.1 s'applique. En particulier, tous les états sont persistants non-nuls.

Remarquons que cela n'a de sens que si $\lambda < 1$, comme on pouvait d'y attendre : si $\lambda > 1$, on a en moyenne plus d'arrivées par unité de temps que de demandes traitées. La file d'attente explose donc et ne se stabilise pas.

5 Processus Markoviens

5.1 Introduction aux processus markoviens

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *markovien* s'il possède la *propriété de Markov*, c'est-à-dire que, conditionnellement à l'état présent, l'évolution future du processus est indépendante du passé. Autrement dit, la connaissance de l'état actuel suffit pour prédire la distribution des états futurs, et l'historique complet antérieur n'apporte aucune information supplémentaire. Le processus de Poisson est un exemple classique de processus markovien. Pour ce processus, la probabilité d'observer un certain nombre d'événements à l'instant $t + s$ dépend uniquement du nombre d'événements observés à l'instant t , et non de l'ensemble des occurrences précédentes :

$$\mathbb{P}(N(t + s) = j \mid N(u), 0 \leq u \leq t) = \mathbb{P}(N(t + s) = j \mid N(t)).$$

Plus généralement, tout processus pour lequel cette propriété s'applique est appelé *processus markovien*.

5.2 Définition et propriétés de base

Considérons un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ *continu à droite*¹ pour lequel l'ensemble des états $S = \{s_j : j \in E\}$ est dénombrable.

Définition 5.2.1. On dit que $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus Markovien si pour tous $t, u \geq 0$ et tout $j \in E$

$$\mathbb{P}(X(t + u) = s_j \mid X(v), 0 \leq v \leq t) = \mathbb{P}(X(t + u) = s_j \mid X(t)).$$

Le processus Markovien est homogène si pour tous $t, u \geq 0$ et tous $i, j \in E$

$$\mathbb{P}(X(t + u) = s_j \mid X(t) = s_i) = \mathbb{P}(X(u) = s_j \mid X(0) = s_i) = P_{ij}(u).$$

L'équivalent de la matrice de transition d'une chaîne de Markov est donnée par la matrice de fonctions

$$\mathbf{P}(t) = (P_{ij}(t))_{i,j}$$

1. C'est-à-dire un processus dont les trajectoires sont continues à droite. Cette propriété permet d'assurer la mesurabilité du processus et de pouvoir définir correctement les probabilités des événements d'intérêt.

qui caractérise entièrement la distribution d'un processus Markovien homogène.

Contrairement aux chaînes de Markov discrètes, où l'on dispose d'un *pas de temps* de référence et d'une matrice de transition P permettant de calculer toutes les probabilités de transitions par puissances successives, les processus continus n'ont pas de pas naturel. On définit donc la matrice de transition pour *tout* instant t , et la continuité à droite impose la condition initiale

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} P_{ij}(s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Néanmoins, nous verrons qu'il est possible de reconstituer l'ensemble des matrices $\mathbf{P}(t)$ à partir de leur comportement *infinitésimal*, c'est-à-dire en connaissant les probabilités de transition sur des intervalles de temps très petits.

Définition 5.2.2. Les temps de séjour sont définis pour tout $t \geq 0$ par

$$W_t = \inf\{h > 0 : X(t+h) \neq X(t)\}.$$

Théorème 5.2.3 (Temps de séjour exponentiels). Soit $\{X(t) : t \geq 0\}$ un processus Markovien homogène. Alors, pour tout $i \in E$, il existe $q_i \geq 0$ tel que

$$\mathbb{P}(W_t > w \mid X(t) = s_i) = e^{-q_i w}.$$

Autrement dit, le temps de séjour dans un état s_i est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre q_i .

Démonstration. Pour tout $i \in E$, on pose

$$f_i(w) = \mathbb{P}(W_t > w \mid X(t) = s_i) = \mathbb{P}(W_0 > w \mid X(0) = s_i)$$

puisque le processus est homogène. Pour tous $v, w \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_i(v+w) &= \mathbb{P}(W_0 > w+v \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(W_0 > v \text{ et } W_v > w \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(W_v > w \mid X(v) = s_i, 0 \leq u \leq v) \mathbb{P}(W_0 > v \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(W_v > w \mid X(v) = s_i) \mathbb{P}(W_0 > v \mid X(0) = s_i) \\ &= f_i(w) f_i(v). \end{aligned}$$

Il est connu² que les seules fonctions continues satisfaisant à $g(v+w) = g(v)g(w)$ pour tous

2. Il suffit de remarquer que

$$g'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(s+h) - g(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(s)g(h) - g(s)g(0)}{h} = g(s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g(s)g'(0)$$

v, w telles que $g(0) = 1$ doivent être de la forme $g(x) = e^{\alpha x}$. En particulier on a donc

$$f_i(v) = e^{\alpha_i v} \mathbf{1}_{\{v \geq 0\}},$$

avec $\alpha_i < 0$ une constante dépendant éventuellement de i . Pour conclure, on pose $q_i = -\alpha_i$. ■

Cette propriété rejoint – heureusement – celle que nous avons obtenue pour les processus de Poisson, dont les temps de séjour dans un état donné sont également distribués de façon exponentielle.

Définition 5.2.4. *Un état $s_i \in S$ est*

▷ *absorbant si $q_i = 0$. Dans ce cas, on a*

$$\mathbb{P}(W_t > u \mid X(t) = s_i) = 1$$

pour tout u , et donc $W_t = +\infty$ p.s.

▷ *instantané si $q_i = +\infty$. Dans ce cas, on a*

$$\mathbb{P}(W_t > u \mid X(t) = s_i) = 0$$

pour tout u , et donc $W_t = 0$ p.s.

▷ *stable si $0 < q_i < +\infty$.*

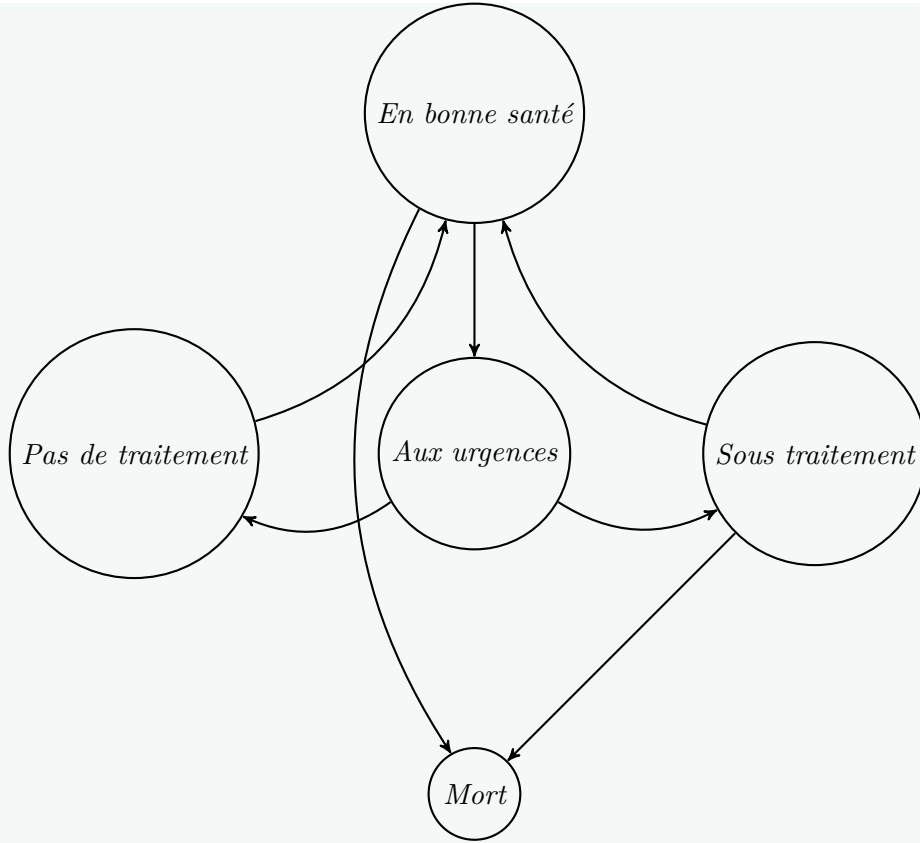
Un processus Markovien ne possédant aucun état instantané est dit conservatif.

Exemple 5.2.5. *Considérons le parcours d'un patient en salle d'urgences à l'hôpital modélisé par un processus markovien à cinq états :*

- ▷ **État 1 – En bonne santé** : le patient est en bonne santé, n'a pas besoin d'aller à l'hôpital.
- ▷ **État 2 – Aux urgences** : le patient arrive à l'hôpital et attend un traitement.
- ▷ **État 3 – Sous traitement** : le patient reçoit un traitement actif. La durée du traitement est finie et aléatoire. Le patient peut ensuite être en bonne santé ou mort.
- ▷ **État 4 – Pas de traitement** : le patient repart immédiatement sans traitement.
- ▷ **État 5 – Mort** : le patient décède.

Le schéma des transitions peut être représenté comme suit :

et de poser $\alpha = g'(0)$.



Dans ce modèle :

- ▷ Les états en bonne santé, aux urgences et sous traitement sont stables, avec des durées finies aléatoires ($0 < q_i < +\infty$).
- ▷ L'état pas de traitement est instantané ($q_4 = +\infty$), le patient repart immédiatement en bonne santé.
- ▷ L'état mort est absorbant ($q_5 = 0$), le patient ne quitte plus cet état.

Dans la suite, nous travaillerons avec des processus Markoviens homogènes conservatifs.

Définition 5.2.6. Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus markovien homogène conservatif. On définit

- ▷ les instants d'arrivées $T_0, T_1, T_2, \dots$ du processus par

$$T_0 = 0, \quad T_1 = W_0, \quad T_{n+1} = W_{T_n} + T_n \quad \forall n \geq 1$$

- ▷ la chaîne des sauts par

$$\hat{X}_n = X(T_n), \quad n \geq 0.$$

On a donc

$$T_n = \inf\{t \geq T_{n-1} : X(t) \neq X(T_{n-1})\}, \quad n \geq 1,$$

et

$$W_{T_n} = T_{n+1} - T_n.$$

Nous allons montrer que la chaîne des sauts $\{\hat{X}_n\}_{n \geq 0}$ définit une chaîne de Markov.

Théorème 5.2.7. *Soit $\{X(t) : t \geq 0\}$ un processus Markovien conservatif homogène. On a*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j, T_{n+1} - T_n > u \mid \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_n = s_i, T_0, \dots, T_n) \\ &= \mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j, T_{n+1} - T_n > u \mid \hat{X}_n = s_i) \\ &= \hat{P}_{ij} e^{-q_i u}, \end{aligned}$$

où la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ est une matrice stochastique telle que

$$\hat{P}_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i \text{ est stable} \\ 1 & \text{si } s_i \text{ est absorbant.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous allons encoder les changements d'état du processus via les probabilités

$$\hat{P}_{ij} := \mathbb{P}(X(T_1) = s_j \mid X(0) = s_i) = \mathbb{P}(\hat{X}_1 = s_j \mid \hat{X}_0 = s_i).$$

Il est clair que la matrice $\hat{\mathbf{P}}$ est une matrice stochastique qui satisfait les conditions du théorème sur la diagonale. Remarquons que, puisque $T_1 = W_0$,

$$\mathbb{P}(T_1 > u \mid X(0) = s_i) = e^{-q_i u}.$$

Si on connaît $\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_n$ et $T_0, \dots, T_n$, alors on connaît entièrement le processus entre 0 et T_n . Ainsi, on a par la propriété de Markov

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j, T_{n+1} - T_n > u \mid \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_n = s_i, T_0, \dots, T_n) \\ &= \mathbb{P}(X(T_{n+1}) = s_j, T_{n+1} - T_n > u \mid X(T_n) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(X(T_1) = s_j, T_1 > u \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(X(T_1) = s_j \mid T_1 > u, X(0) = s_i) \mathbb{P}(T_1 > u \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(X(T_1) = s_j \mid T_1 > u, X(0) = s_i) e^{-q_i u}. \end{aligned}$$

La condition $T_1 > u$ et $X(0) = s_i$ est équivalente à $X(v) = s_i$ pour tout $v \in [0, u]$. De plus, cela

implique que $T_1 = u + W_u$. On obtient donc en utilisant à nouveau la propriété de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(T_1) = s_j \mid T_1 > u, X(0) = s_i) &= \mathbb{P}(X(u + W_u) = s_j \mid X(v) = s_i \forall v \in [0, u]) \\ &= \mathbb{P}(X(W_0) = s_j \mid X(0) = s_i) \\ &= \hat{P}_{ij} \end{aligned}$$

puisque $W_0 = T_1$. Cela conclut la preuve. ■

Les deux résultats suivants s'en suivent.

Corollaire 5.2.8. *La chaîne des sauts $\{\hat{X}_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $\hat{\mathbf{P}}$.*

Démonstration. Par définition, la chaîne des sauts est donnée par $\hat{X}_n = X(T_n)$. Le théorème précédent montre que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j \mid \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_n) = \mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j \mid \hat{X}_n) = \hat{P}_{ij}.$$

Autrement dit, la probabilité de passage à l'état suivant ne dépend que de l'état actuel de la chaîne des sauts, et pas des états antérieurs. Ceci est exactement la définition d'une chaîne de Markov homogène. ■

Corollaire 5.2.9. *Les intervalles de séjour $W_{T_n} = T_{n+1} - T_n$ sont conditionnellement indépendants, étant donnée la chaîne des sauts.*

Démonstration. D'après le théorème principal, pour tout $n \geq 0$ et tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j, W_{T_n} > u \mid \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_n) = \mathbb{P}(\hat{X}_{n+1} = s_j \mid \hat{X}_n) e^{-q_i u},$$

où $\hat{X}_n = s_i$. Cette factorisation montre que la loi de W_{T_n} dépend uniquement de l'état courant $\hat{X}_n$ et est indépendante des sauts passés, à condition de connaître la chaîne des sauts. En particulier, pour tout $n_1 \neq n_2$, on a

$$\mathbb{P}(W_{T_{n_1}} \leq u_1, W_{T_{n_2}} \leq u_2 \mid \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_{\max(n_1, n_2)}) = \mathbb{P}(W_{T_{n_1}} \leq u_1 \mid \hat{X}_{n_1}) \mathbb{P}(W_{T_{n_2}} \leq u_2 \mid \hat{X}_{n_2}),$$

ce qui montre que les intervalles de séjour sont conditionnellement indépendants, connaissant la chaîne des sauts. ■

Définition 5.2.10. On dit qu'un processus Markovien est non-explosif si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$$

presque sûrement.

Autrement dit, le processus ne peut pas effectuer une infinité de sauts en un temps fini. t Un processus est *explosif* si cette limite est finie, c'est-à-dire si une infinité de sauts peut se produire en un temps fini.

Exemple 5.2.11. Considérons un processus markovien à espace d'états $\mathbb{N}$ pour lequel la chaîne des sauts est donnée par

$$p_{n,n+1} = 1, \quad n \geq 0.$$

Il s'agit donc d'un processus de comptage. Supposons que les paramètres q_n des temps de séjour dépendent de n et deviennent de plus en plus grands, par exemple

$$q_n = 2^n.$$

Ainsi, le processus reste en moyenne un temps $1/q_n = 2^{-n}$ dans l'état n . Comme la durée des temps de séjour diminue très rapidement, on peut montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n < \infty.$$

presque sûrement. Le processus effectue donc une infinité de sauts en un temps fini : c'est un processus explosif.

Un processus Markovien non-explosif ne finit donc jamais de changer d'état (il n'y a pas d'état absorbant). Dans ce cas, quel que soit $t \geq 0$, il existe N tel que $T_N \leq t < T_{N+1}$ et on peut définir $X(t) = \hat{X}_N$. Ceci nous donne deux caractérisations équivalentes d'un processus Markovien, à savoir d'une part

$$\{X(t), t \geq 0\}$$

et d'autre part

$$\{\hat{X}_n, T_{n+1} - T_n, n \geq 0\}.$$

Autrement dit, les quantités

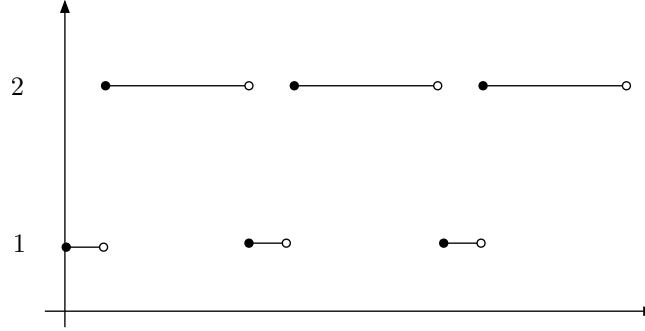
$$\{P_{ij}(t), i, j \in E\}$$

et

$$\{\hat{P}_{ij}(t), i, j \in E\}, \{q_i, i \in E\}$$

donnent deux définitions mathématiquement équivalentes d'un même processus.

Notons qu'à elle seule, la chaîne des sauts $(\hat{X}_n)_n$ associée à un processus Markovien ne permet pas de résumer le comportement du processus. Considérons, à titre d'illustration, la figure suivante.



Dans la configuration illustrée ci-dessus, la chaîne des sauts accordera le même poids aux états 1 et 2, alors qu'en réalité le processus passe beaucoup "moins de temps" dans le premier état que dans le second.

5.3 Equations de Kolmogorov et générateur

L'objectif de cette section est de retrouver l'ensemble des matrices $\mathbf{P}(t)$ à partir de leur comportement infinitésimal, c'est-à-dire en connaissant les probabilités de transition sur des intervalles de temps très petits. Cette approche conduira à la notion *générateur* Q , qui joue pour les processus continus un rôle analogue à la matrice de transition P pour les chaînes discrètes : à partir de Q , on peut retrouver $\mathbf{P}(t)$ pour tout $t \geq 0$.

On suppose avoir un processus non-explosif. Commençons cette section par montrer l'équivalent du Corollaire 2.3.3 dans le cas continu.

Proposition 5.3.1 (Equations de Chapman-Kolmogorov). *Si $t, u \geq 0$ et si $i, j \in E$, alors*

$$P_{ij}(t+u) = \sum_{k \in E} P_{kj}(t) P_{ik}(u).$$

Démonstration. C'est immédiat car

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+u) &= \mathbb{P}(X(t+u) = s_j \mid X(0) = s_i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X(t+u) = s_j \mid X(u) = s_k, X(0) = s_i) \mathbb{P}(X(u) = s_k \mid X(0) = s_i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X(t+u) = s_j \mid X(u) = s_k) \mathbb{P}(X(u) = s_k \mid X(0) = s_i) \\ &= \sum_{k \in E} P_{kj}(t) P_{ik}(u). \end{aligned}$$

■

Ainsi, comme dans le cas du processus de Poisson, si on connaît toutes les probabilités de transitions $P_{ij}(t)$ pour des petites valeurs de t , on peut reconstruire toutes les probabilités

de transition. Cela suggère de s'intéresser aux taux de transition de l'état s_i vers l'état s_j , c'est-à-dire aux dérivées en 0 des $P_{ij}(t)$.

Définition 5.3.2. *La matrice*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}'(t)|_{t=0+}$$

est appelée le générateur du processus de Markov.

Comme $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, on a

$$Q_{ij} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P_{ij}(h)}{h} & \text{si } i \neq j \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P_{ii}(h) - 1}{h} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Notons que pour tout $t > 0$, la matrice $\mathbf{P}(t)$ est stochastique. On obtient directement le résultat suivant.

Proposition 5.3.3. *Le générateur $\mathbf{Q}$ satisfait*

$$\mathbf{Q}\mathbf{1} = \mathbf{0},$$

autrement dit la somme des éléments de chaque ligne de $\mathbf{Q}$ vaut 0.

Démonstration. Pour tout $i \in E$ et tout $t > 0$, on a $\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1$. Il vient

$$\sum_{j \in E} Q_{ij} = \sum_{j \in E} P'_{ij}(t)|_{t=0+} = \left(\sum_{j \in E} P_{ij}(t) \right)' \Big|_{t=0+} = 0,$$

ce qui suffit (où l'échange entre somme et dérivée devrait être justifié lorsque E est infini). ■

En développant les fonctions P_{ij} à l'ordre 1, on obtient $P_{ij}(h) = P_{ij}(0) + hP'_{ij}(0) + o(h)$, d'où

$$\mathbf{P}(h) = \mathbf{I} + h\mathbf{Q} + o(h).$$

On a donc si $i \neq j$

$$\mathbb{P}(X(t+h) = s_j \mid X(t) = s_i) = Q_{ij}h + o(h) \quad (5.1)$$

et

$$\mathbb{P}(X(t+h) = s_i \mid X(t) = s_i) = 1 + Q_{ii}h + o(h). \quad (5.2)$$

Dans le cas du processus de Poisson, on sait que

$$\mathbb{P}(N(t+h) = j \mid N(t) = i) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{si } j = i + 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{si } j = i \\ o(h) & \text{si } j \geq i + 2 \\ 0 & \text{si } j \leq i - 1, \end{cases}$$

ce qui nous donne la matrice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice avait déjà été obtenue via la relation $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$. Ce résultat se généralise dans le cas des processus Markoviens : en particulier, le générateur d'un processus nous offre les équations fondamentales le définissant.

Théorème 5.3.4 (Equations de Kolmogorov). *Les matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ satisfont*

▷ l'équation rétrospective de Kolmogorov

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$

▷ l'équation prospective de Kolmogorov

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}.$$

Démonstration. En utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov, on a

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) &= \sum_{k \in E} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + (P_{ii}(h) - 1)P_{ij}(t), \end{aligned}$$

d'où, en divisant par h et en prenant la limite pour $h \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} P'_{ij}(t) &= \sum_{k \neq i} Q_{ik}P_{kj}(t) + Q_{ii}P_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \in E} Q_{ik}P_{kj}(t) \\ &= (\mathbf{Q}\mathbf{P}(t))_{ij}. \end{aligned}$$

Pour l'autre égalité, on procède de la même manière en remarquant que

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - P_{ij}(t).$$

■

On peut montrer que les équations de Kolmogorov admettent une solution unique si et seulement

si le processus est non-explosif, auquel cas on a

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(t\mathbf{Q})^n}{n!} = \mathbf{I} + t\mathbf{Q} + \frac{t^2}{2}\mathbf{Q}^2 + \frac{t^3}{6}\mathbf{Q}^3 + \dots$$

Nous venons de voir que le générateur d'un processus Markovien permettait de le caractériser entièrement. Nous savons également que le processus Markovien peut être caractérisé à partir de la chaîne des sauts et des temps de séjour. Il semble donc naturel de chercher un lien entre ceux-ci et le générateur : celui-ci est donné par le résultat suivant.

Théorème 5.3.5. *On a*

$$Q_{ij} = \begin{cases} -q_i & \text{si } i = j \\ \hat{P}_{ij}q_i & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

où pour tout $i \in E$, q_i représente le paramètre du temps de séjour dans l'état s_i et $\hat{\mathbf{P}}$ est la matrice de transition de la chaîne des sauts.

Démonstration. Supposons d'abord que $i \neq j$. On sait que

$$\mathbb{P}(X(h) = s_j \mid X(0) = s_i) = Q_{ij}h + o(h).$$

D'autre part, si on passe de l'état s_i dans l'état s_j en un temps h , on peut le faire en une étape ou en plus de deux étapes. Remarquons que la probabilité de faire plus de deux étapes en un temps h en partant de s_i est négligeable car

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 \leq h \mid X(0) = s_i) &\leq \mathbb{P}(W_{T_1} \leq h, W_{T_2} \leq h \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(W_{T_1} \leq h \mid X(0) = s_i) \mathbb{P}(W_{T_2} \leq h \mid X(0) = s_i) \\ &= o(h) \end{aligned}$$

puisque les temps de séjour suivent des lois exponentielles. On en tire que la probabilité de faire au plus une étape un temps h en partant de s_i est donnée par

$$\mathbb{P}(T_2 > h \mid X(0) = s_i) = 1 - o(h).$$

Remarquons également que pour passer de s_i en s_j , il faut au moins faire une étape, i.e. $T_1 < h$. Par conséquent, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X(h) = s_j \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(X(h) = s_j, T_1 < h \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(X(h) = s_j, T_1 < h \mid T_2 > h, X(0) = s_i) \mathbb{P}(T_2 > h \mid X(0) = s_i) \\ &\quad + \mathbb{P}(X(h) = s_j, T_1 < h \mid T_2 \leq h, X(0) = s_i) \mathbb{P}(T_2 \leq h \mid X(0) = s_i) \\ &= \mathbb{P}(X(h) = s_j, T_1 < h \mid T_2 > h, X(0) = s_i) (1 - o(h)) + o(h). \end{aligned}$$

Enfin, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(h) = s_j, T_1 < h \mid T_2 > h, X(0) = s_i) &= \mathbb{P}(\hat{X}_1 = s_j, T_1 < h \mid \hat{X}_0 = s_i) \\ &= \hat{P}_{ij}(1 - e^{-q_i h}) \\ &= \hat{P}_{ij}q_i h + o(h).\end{aligned}$$

Au total, on a donc

$$Q_{ij}h + o(h) = \mathbb{P}(X(h) = s_j \mid X(0) = s_i) = \hat{P}_{ij}q_i h + o(h),$$

d'où $Q_{ij} = \hat{P}_{ij}q_i$. Puisque la somme des éléments d'une ligne de $\mathbf{Q}$ doit être égale à 0 et puisque le matrice $\hat{\mathbf{P}}$ est une matrice stochastique avec des zéros sur la diagonale (pas d'états absorbants car processus non-explosif), on a

$$Q_{ii} = -\sum_{j \neq i} Q_{ij} = -\sum_{j \neq i} \hat{P}_{ij}q_i = -q_i,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Un processus Markovien peut être caractérisé de trois manières :

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{P}(t) & \longleftrightarrow & \hat{\mathbf{P}}, \mathbf{q} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbf{Q} & \end{array}$$

Afin de calculer le générateur d'un processus Markovien, on peut

- ▷ travailler dans l'infinitésimal, c'est-à-dire utiliser les équations (5.1) et (5.2) pour déterminer Q_{ij} et Q_{ii} ,
- ▷ travailler avec la chaîne des sauts et les temps de séjour, c'est-à-dire appliquer le Théorème 5.3.5 pour obtenir $\mathbf{Q}$ en termes de $\hat{\mathbf{P}}$ et q_i .

Exemple 5.3.6. *Un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ compte le nombre d'arrivées d'un processus de taux λ . On peut visualiser une arrivée comme une naissance, où la probabilité d'une naissance dans un petit intervalle de temps est donnée par $\lambda h + o(h)$, et donc λ comme un taux de natalité. Dans certains systèmes, il est plus réaliste de supposer que le taux de natalité dépend du nombre de personnes présentes dans le système, auquel cas la probabilité d'une naissance dans un petit intervalle de temps sera donnée par $\lambda_n h + o(h)$, où n est la taille de la population. Il est également raisonnable de supposer que des morts peuvent survenir et diminuer la population, et ceci peut se faire en choisissant que la probabilité d'une mort dans un petit intervalle de temps est donnée par $\mu_n h + o(h)$. On obtient donc un processus qui peut varier de l'état n à l'état $n + 1$ ou de n à $n - 1$ selon qu'il y a eu une naissance ou une mort. Ce processus est caractérisé par les suites de taux*

de naissances $(\lambda_i)_{i \geq 0}$ et de morts $(\mu_i)_{i \geq 1}$. Le générateur d'un tel processus est donné par

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.3.7. Considérons un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ représentant la taille d'une population dans un système.

- ▷ Un individu peut naître avec un taux qui dépend de la taille actuelle de la population. Plus précisément, si la population est n , la probabilité d'une naissance dans un petit intervalle de temps h est

$$\mathbb{P}(\text{naissance dans } [t, t+h] \mid N(t) = n) = \lambda_n h + o(h),$$

où λ_n est le taux de naissance pour la population n .

- ▷ Un individu peut également mourir avec un taux μ_n dépendant de la population. Ainsi, si la population est $n \geq 1$, la probabilité d'un décès dans un petit intervalle h est

$$\mathbb{P}(\text{décès dans } [t, t+h] \mid N(t) = n) = \mu_n h + o(h).$$

On obtient donc un processus de naissance et de mort qui évolue de la manière suivante

$$n \longrightarrow n+1 \quad \text{avec taux } \lambda_n, \quad n \longrightarrow n-1 \quad \text{avec taux } \mu_n.$$

Le processus est entièrement caractérisé par les suites $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ et $(\mu_n)_{n \geq 1}$. Son générateur est donné par la matrice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

5.4 Classification des états et distribution stationnaire

Une classification similaire à celle exposée dans le chapitre sur les chaînes de Markov est possible pour les processus Markoviens. On commencera par distinguer deux types d'états.

Définition 5.4.1. *Un état s_i est persistant si*

$$\int_0^{+\infty} P_{ii}(t) dt = +\infty.$$

Dans le cas contraire il est transitoire.

Remarquons que si θ_i est le temps total passé dans l'état s_i en partant de cet état, on a

$$\mathbb{E}_i[\theta_i] = \mathbb{E}_i \left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X(t)=s_i\}} dt \right] = \int_0^{+\infty} P_{ii}(t) dt.$$

Il semble naturel de demander qu'un état persistant pour le processus le soit également pour la chaîne des sauts associée à ce dernier. Pour voir que c'est effectivement le cas, on écrit

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X(t)=s_i\}} dt = \sum_{n \geq 0} W_{T_n} \mathbf{1}_{\{\hat{X}_n=s_i\}}$$

et en utilisant le théorème de l'espérance totale,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P_{ii}(t) dt &= \mathbb{E}_i \left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X(t)=s_i\}} dt \right] \\ &= \mathbb{E}_i \left[\sum_{n \geq 0} W_{T_n} \mathbf{1}_{\{\hat{X}_n=s_i\}} \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_i \left[W_{T_n} \mid \hat{X}_n = s_i \right] \mathbb{P}_i(\hat{X}_n = s_i) \\ &= \frac{1}{q_i} \sum_{n \geq 0} \hat{P}_{ii}^n. \end{aligned}$$

Cela montre que l'intégrale est finie ou infinie selon que l'état s_i est persistant ou transitoire dans la chaîne des sauts. Les états persistants et transitoires du processus correspondent donc à ceux de la chaîne des sauts.

On peut même aller plus loin, comme l'illustre le théorème suivant.

Théorème 5.4.2. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $s_i \rightsquigarrow s_j$ c.à.d. $\mathbb{P}(X(t) = s_j \text{ pour un } t > 0 \mid X(0) = s_i) > 0$,
2. $s_i \rightsquigarrow s_j$ dans la chaîne des sauts,
3. il existe $i_1, \dots, i_{n-1} \in S$ avec $i_0 = i$ et $i_n = j$ tels que $Q_{i_0 i_1} Q_{i_1 i_2} \cdots Q_{i_{n-1} i_n} > 0$,
4. $P_{ij}(t) > 0$ pour au moins un $t > 0$,
5. $P_{ij}(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Ainsi les notions de classes de passage, classes finales et d'irréductibilité peuvent être reprises telles quelles à partir des chaînes de Markov discrètes.

Remarque 5.4.3. *La dernière condition montre que la situation est plus simple que dans le cas discret où il ne peut être possible d'atteindre un état qu'après seulement un certain nombre d'étapes.*

Le résultat suivant donne l'existence et l'interprétation des distributions stationnaires dans le cas de processus Markoviens.

Théorème 5.4.4. *Considérons un processus Markovien irréductible.*

▷ *Les états sont persistants non-nuls si et seulement si il existe une distribution $\mathbf{w}$ telle que*

$$\mathbf{wP}(s) = \mathbf{w} \text{ pour tout } s \geq 0$$

ou, de manière équivalente,

$$\mathbf{wQ} = \mathbf{0}.$$

▷ *De plus, pour tous i, j , on a*

$$w_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{ij}(t)$$

et w_j donne également la proportion moyenne de temps passé à long terme par le processus dans l'état s_j .

L'équivalence entre $\mathbf{wP}(s) = \mathbf{w}$ pour tout $s \geq 0$ et $\mathbf{wQ} = \mathbf{0}$ est facile à obtenir dans le cas fini (pour pouvoir échanger dérivée et multiplication) : en effet, si $\mathbf{wP}(s) = \mathbf{w}$, alors en dérivant de part et d'autre, il vient $\mathbf{wQ} = \mathbf{0}$. Réciproquement, si $\mathbf{wQ} = \mathbf{0}$, alors l'équation rétrospective de Kolmogorov permet d'écrire

$$\mathbf{wP}'(t) = \mathbf{wQP}(t) = \mathbf{0}$$

et $\mathbf{wP}(t)$ est constant. Ainsi, $\mathbf{wP}(t) = \mathbf{wP}(0) = \mathbf{w}$.

Exemple 5.4.5. *En 2002, des experts de littérature gothique anglaise de l'université de West-Sussex (UK) ont retrouvé un manuscrit inédit de Louis Stevenson intitulé « Some stranger things : Dr Jekyll, Mr Hyde and Pennywise ». Dans cette version de la célèbre nouvelle, la personnalité du personnage principal de Henry Jekyll subissait une dissociation en trois états distincts : non seulement y avait-il la personnalité polissée du bon docteur Jekyll et celle du monstrueux et malfaisant Mr Hyde, mais également celle grotesque et terrifiante de Pennywise, le clown tueur. Après une analyse quantitative poussée du texte, plusieurs éléments intéressants sont apparus :*

- ▷ *Hyde et Pennywise redeviennent tous deux nécessairement Jekyll, tandis que Jekyll devient Hyde 2 fois sur 3 et Pennywise le reste du temps ;*
- ▷ *le personnage demeure en l'état Jekyll selon une exponentielle de moyenne 1, et en*

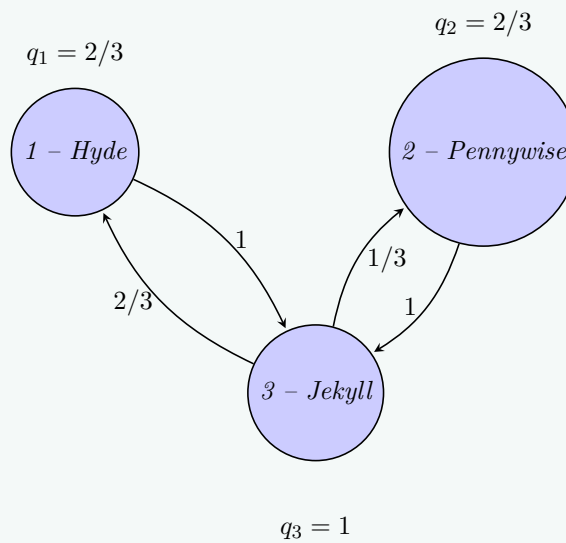
les états Hyde et Pennywise selon des exponentielles de moyenne 3/2.

Ces éléments permettent une étude de l'oeuvre de Stevenson par des outils Markoviens. Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ le processus Markovien décrivant l'état du personnage à l'instant t .

1. Donner le générateur de ce processus Markovien.
2. Calculer sa distribution stationnaire.
3. Supposons que le Dr Jekyll est inoffensif, mais que Mr Hyde commet un crime toutes les 6 heures et Pennywise en commet en moyenne 5 par jour. Combien de crimes le personnage commet-il en moyenne ?

Solution :

1. Le schéma des transitions est le suivant :



Donc la matrice génératrice est

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ la distribution stationnaire. On a

$$\pi \mathbf{Q} = 0, \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

On obtient directement

$$\pi_1 = \pi_3 = 2/5, \quad \pi_2 = 1/5.$$

3. Si Hyde commet un crime toutes les 6 heures (donc 4 par jour) et Pennywise 5 crimes par jour, le nombre moyen de crimes commis par le personnage par jour est

$$\pi_1 \cdot 4 + \pi_2 \cdot 5 + \pi_3 \cdot 0 = \frac{13}{5}.$$

5.5 Chaînes de Markov vs Processus Markoviens

Considérons un processus Markovien irréductible $\{X(t), t \geq 0\}$ de générateur $\mathbf{Q}$. Considérons sa chaîne de sauts $(\hat{X}_n)_{n \geq 1}$ de matrice de transition $\hat{\mathbf{P}}$. Supposons que le processus Markovien possède une distribution stationnaire $\mathbf{w}$. Ce vecteur de probabilités donne la proportion moyenne de *temps* passé (à long terme) par le processus dans chaque état. Supposons que la chaîne des sauts possède une distribution stationnaire $\hat{\mathbf{w}}$. Ce vecteur de probabilités donne la proportion moyenne du *nombre de visites* (à long terme) de la chaîne dans chaque état.

Il faut faire attention à l'interprétation à donner à $\hat{\mathbf{w}}$. Considérons par exemple un processus à deux états de temps de séjour distribués selon des exponentielles de paramètres λ et μ . Alors

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = (\lambda, \mu) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

En résolvant les équations, on obtient

$$\hat{\mathbf{w}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

qui indique simplement que le système passe la moitié du “temps” – en termes du nombre de visites – dans chaque état, alors que

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)$$

prend en compte les temps de séjour et est donc plus informatif! En particulier, si $\lambda \ll \mu$, alors $w_1 \gg w_2$, ce qui semble raisonnable puisque le temps moyen passé dans chaque état durant chaque visite est inversement proportionnel au paramètre de la loi exponentielle correspondante. Néanmoins, existe-t-il un lien entre les deux distributions stationnaires? Les deux vecteurs sont définis via les systèmes linéaires

$$\mathbf{w}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}\mathbf{1} = 1 \tag{5.3}$$

et

$$\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{w}}, \quad \hat{\mathbf{w}}\mathbf{1} = 1. \tag{5.4}$$

En utilisant les relations entre $\hat{\mathbf{P}}$ et $\mathbf{Q}$ données par le Théorème 5.3.5, les premières parties des équations (5.3) et (5.4) peuvent se réécrire

$$w_j q_j = \sum_i w_i q_i \hat{P}_{ij} \quad \text{et} \quad \hat{w}_j = \sum_i \hat{w}_i \hat{P}_{ij}.$$

En utilisant l'unicité de la distribution stationnaire de la chaîne des sauts, on sait que le vecteur $(w_j q_j)_j$ est proportionnel au vecteur $\hat{\mathbf{w}}$, c.à.d. il existe une constante $C > 0$ telle que $w_j q_j = C \hat{w}_j$ pour tout j . Puisque $\mathbf{w}$ est un vecteur de probabilité, il vient

$$1 = \sum_j w_j = C \sum_j \frac{\hat{w}_j}{q_j}$$

et on obtient que

$$C = \frac{1}{\sum_j (\widehat{w}_j / q_j)}.$$

Par conséquent,

$$w_j = \frac{\widehat{w}_j / q_j}{\sum_i (\widehat{w}_i / q_i)}. \quad (5.5)$$

Bien sûr, (5.6) n'a du sens que si $\sum_i (\widehat{w}_i / q_i) < \infty$, ce qui peut être vu comme une condition nécessaire pour l'existence de la distribution stationnaire du processus Markovien.

De même, comme $\widehat{\mathbf{w}}$ est un vecteur de probabilité, on a

$$1 = \sum_j \widehat{w}_j = \frac{1}{C} \sum_j w_j q_j$$

et donc

$$C = \sum_j w_j q_j.$$

On en tire que

$$\widehat{w}_j = \frac{w_j q_j}{\sum_i w_i q_i}. \quad (5.6)$$

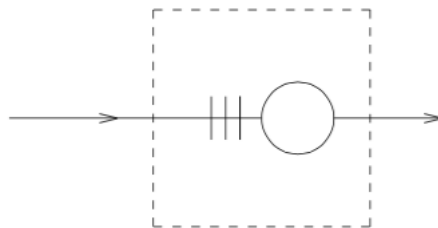
5.6 Files d'attente

La théorie des files d'attente concerne l'analyse mathématique d'un système qui peut essentiellement se résumer à trois étapes : l'arrivée dans une file, l'attente dans cette même file, puis le service qui permet de quitter la file. Le problème est de mettre en place une configuration (vitesse d'exécution, nombre de files, ...) confortable pour le client et réalisable pour le serveur. En effet, le bon sens permet déjà de dériver certains enseignements : pour le client, le plus confortable est de n'avoir pas à attendre ; il sera donc idéal pour lui que le système comporte un nombre infini de serveurs. De même, pour le dispensateur de service, le moins onéreux est probablement de n'avoir qu'un seul serveur ; il faut toutefois que celui-ci soit rapide s'il veut pouvoir gérer un grand nombre de clients.

Ces deux configurations ont des défauts évidents. La théorie des files d'attente permet d'étudier de tels systèmes de façon abstraite, et d'obtenir des mesures objectives de leur performance, tels par exemple le temps moyen d'attente, le nombre moyen de clients présents ou la probabilité que le système se trouve en tel ou tel état.

5.6.1 Définition et notations

Le cadre générale est le suivant. Des clients provenant d'une certaine population entrent dans un système afin d'y recevoir un service. La centrale dispose de un ou plusieurs serveurs, chacun capable de satisfaire la demande d'un client. Si tous les serveurs sont occupés au moment où un client entre dans le système, celui-ci se mettra dans une file d'attente jusqu'à libération d'un serveur.



Une file d'attente est caractérisée entre autres par les quantités et concepts suivants.

- ▷ **Population** : La caractérisation première d'une population se fait en termes de sa taille, qui est soit finie, soit infinie. Une source infinie est plus simple à décrire mathématiquement qu'une source finie, étant donné qu'il n'y aura pas d'influence du nombre de clients présents dans le serveur sur le schéma d'arrivées. Si la population est finie, on peut avoir un problème lorsque, par exemple, la totalité des clients potentiels se trouve déjà dans le système.
- ▷ **Le comportement des clients** : Certains clients sont patients et prêts à attendre très longtemps. D'autres clients sont impatients et partiront soit immédiatement, soit après un certain temps. Parfois les clients qui sont partis reviennent (par exemple lors d'appels sur une centrale téléphonique) ; parfois ils ne reviennent jamais.
- ▷ **Distributions des arrivées** : La capacité d'un système à gérer l'arrivée de clients dépend non seulement du nombre moyen d'arrivées, mais également de la façon dont ceux-ci arrivent. Si les clients arrivent suivant un taux constant, le gestionnaire du système sera plus à même d'offrir un service agréable aux clients que si les clients arrivent *en grappe* (par exemple à la douane). La façon habituelle de caractériser les arrivées est de donner la fonction de distribution des intervalles de temps entre deux arrivées, i.e. de spécifier la fonction de distribution des intervalles de séjours. La fonction de distribution la plus communément utilisée est la distribution exponentielle, qui jouit de propriétés agréables telles, par exemple, la propriété d'oubli. D'autres distributions courantes sont la distribution constante, ou encore l'Erlang- k (somme de k exponentielles) ou l'hyperexponentielle. Le choix de l'un ou de l'autre se fera en fonction de ce que l'on connaît de la population potentielle.
- ▷ **Distribution des services** : De nouveau on spécifiera la durée des services en termes des distributions des intervalles inter-départs, et de nouveau on choisira de préférence une loi sans mémoire telle l'exponentielle. Un autre avantage du choix de la loi exponentielle est le suivant : supposons que le système dispose de m files, et que les durées de service soient i.i.d. exponentielle de taux μ . Le temps avant le prochain départ sera alors distribué comme le minimum de m exponentielles indépendantes de même taux : il sera lui aussi de loi exponentielle, de taux $m\mu$!
Il peut arriver que le temps de service dépende de la longueur de la file. Par exemple le temps de traitement peut augmenter si le système est surchargé.
- ▷ **La discipline de service** : Les clients peuvent être traités un par un ou en lot. Il y a de nombreuses façons de gérer les files ; nous mentionnons

- ▷ FIFO : first in first out ;
- ▷ SIRO : ordre aléatoire ;
- ▷ LIFO : last in first out ;
- ▷ PRI : par priorité (les urgences d'abord, les plus rapides d'abord) ;
- ▷ processor sharing (on peut partager le processing de manière équitable parmi tous les clients dans le système).
- ▷ **La capacité du serveur** : On peut avoir un seul serveur ou un groupe de serveurs à disposition des clients.
- ▷ **La salle d'attente** : Il peut y avoir des limitations sur le nombre de clients dans le système.

Afin de décrire une file d'attente de façon efficace et analytique, nous adoptons la notation introduite par David Kendall en 1951. Cette notation (appelée notation de Kendall) prend la forme

$$A/B/c/K/m/Z$$

avec

- ▷ A la distribution des arrivées,
- ▷ B la distribution du service,
- ▷ c le nombre de serveurs,
- ▷ K la capacité du système,
- ▷ m le nombre d'éléments dans la population,
- ▷ Z la discipline de la file.

Parmi les notations existantes pour les distributions d'arrivées ou de service, notons les suivantes :

GI	temps inter-arrivées indépendants de loi non spécifiée
G	temps de service de loi non spécifiée
H_k	temps inter-arrivées ou de service de loi hyperexponentielle- k
E_k	temps inter-arrivées ou de service de loi Erlang- k
M	temps inter-arrivées ou de service de loi exponentielle
D	temps inter-arrivées ou de service déterministe
U	temps inter-arrivées ou de service de loi uniforme

Remarque 5.6.1. *Lorsqu'un paramètre n'est pas spécifié, cela signifie en général qu'il est infini.*

Exemple 5.6.2. *Le leaky bucket étudié dans le Chapitre 3 correspond à la file d'attente*

$$M/D/1/\infty/\infty/FIFO$$

où M signifie exponentiel et D déterministe.

Exemple 5.6.3. *Considérons la file $M/M/1/K/K$. On a donc une source limitée de K clients, que l'on prendra être des ordinateurs chacun tombant en panne à un rythme exponentiel, i.e. le temps O entre deux pannes suit une loi exponentielle de moyenne $1/\alpha$. Supposons qu'il n'y a qu'un seul réparateur qui lui aussi fonctionne à un rythme exponentiel, i.e. le temps entre deux réparations est distribué de façon exponentielle de moyenne $1/\mu$. Lorsqu'une machine tombe en panne, soit elle entre en réparation soit elle est mise en attente jusqu'à ce que le réparateur puisse s'en occuper. Ce système entrera nécessairement en équilibre, étant donné qu'on ne peut avoir plus de K machines dans la file d'attente. De plus, lorsque n machines sont en panne, le temps avant la prochaine panne est défini par le minimum de $K - n$ distributions exponentielles identiques et est donc exponentiel de paramètre $(K - n)\alpha$.*

5.6.2 Exemple : File d'attente $M/M/1/\infty$

Supposons que les arrivées de clients à un guichet constituent un processus de Poisson de taux λ . Si un client, en arrivant, trouve le guichet libre, son service débute immédiatement ; par contre, s'il trouve le guichet occupé, il attend jusqu'à ce que ce soit son tour d'être servi. Une file d'attente de taille infinie est permise.

Nous supposons que le temps passé à servir un client est indépendant du temps passé à servir les autres clients (c'est-à-dire est indépendant de toutes les autres durées de service) ainsi que du processus d'arrivées des clients. Les durées de service sont distribuées suivant une exponentielle de paramètre μ .

Nous nous intéressons au processus $\{X(t) : t \geq 0\}$, où $X(t)$ est le nombre de clients dans le système (c'est-à-dire en train d'attendre ou en train d'être servis) à l'instant t .

Processus Markovien

Commençons par prouver que $X(t)$ forme un processus Markovien. Supposons que nous ayons observé le processus X jusqu'à l'instant t et que nous connaissions, en particulier, le nombre $X(t)$ de clients dans le système à l'instant t . Le nombre de clients dans le système à l'instant $t + s$ est

$$\begin{aligned} X(t + s) &= X(t) \\ &\quad + \text{le nombre d'arrivées pendant }]t, t + s] \\ &\quad - \text{le nombre de départs pendant }]t, t + s], \end{aligned}$$

i.e.

$$X(t + s) = X(t) + N(t + s) - N(t) - \text{le nombre de départs pendant }]t, t + s].$$

Le processus d'arrivée ayant été choisi Poisson, nous savons que $N(t+s) - N(t)$ est indépendant de tout ce qui précède.

De plus, les durées de service suivent une distribution exponentielle négative, qui jouit de la propriété d'oubli. Par conséquent la durée de service restante pour un client en train d'être servi à l'instant t (s'il y en a) est indépendante du temps depuis lequel ce service a commencé. Et finalement il est clair que les durées de services ayant débuté après l'instant t sont tout à fait indépendantes du passé de l'instant t . Dès lors, le nombre de services achevés durant l'intervalle de temps $]t, t+s]$ (et donc le nombre de départs) ne peut dépendre que de $X(t)$ et du nombre de clients arrivés au cours de $]t, t+s]$.

La variable aléatoire $X(t+s)$ ne dépend donc pas de ce qui s'est passé avant $X(t)$. De plus, il est clair que la loi de $X(t+s)$ sachant $X(t)$ est identique à celle de $X(s)$ sachant $X(0)$.

Chaîne des sauts

Contrairement au cas des processus discrets, il n'est pas possible de donner les matrices $\mathbf{P}(t)$ explicitement au moyen de calculs simples. Il nous faut donc décrire le comportement stochastique de cette file d'attente au moyen d'un outil permettant d'obtenir ces dernières matrices par un calcul (plus ou moins) direct, cet outil n'étant autre que la matrice Q , le générateur du processus.

Commençons par étudier la chaîne des sauts $\{\hat{X}_n, n \geq 0\}$ associée la file d'attente. Nous savons qu'il s'agit d'une chaîne de Markov. De plus, les instants de transition de ce processus correspondent aux instants où la taille de la file d'attente change. Etant donné que les processus d'arrivée et de départ sont continus, la probabilité qu'une arrivée et un départ coïncident est nulle et nous déduisons immédiatement qu'il n'y a que deux situations possibles à un instant de transition donné : soit la file d'attente augmente d'une unité si un client arrive, soit elle diminue d'une unité si un client part.

Distinguons deux cas.

1. Si $\hat{X}_n = 0$, alors le changement suivant ne peut pas être dû à un départ et sera nécessairement dû à une arrivée. On a donc $\hat{X}_{n+1} = 1$ presque sûrement, et

$$\hat{P}_{01} = 1, \quad \hat{P}_{0j} = 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

2. Si $\hat{X}_n = i$ avec $i \geq 1$ alors

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} i+1 & \text{si } A < S \\ i-1 & \text{si } A > S, \end{cases}$$

où nous notons A la durée de l'intervalle de temps entre T_n (l'instant auquel le processus a atteint l'état i) et l'instant de la prochaine arrivée, et S la durée de l'intervalle de temps entre T_n et l'instant du prochain départ. Etant donnée la propriété d'oubli de l'exponentielle, nous savons que

$$A \sim \text{Exp}(\lambda), \quad S \sim \text{Exp}(\mu).$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A < S) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(a < S) \lambda e^{-\lambda a} da \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\mu a} \lambda e^{-\lambda a} da \\
 &= \lambda \left[-\frac{e^{-(\lambda+\mu)a}}{\lambda+\mu} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{P}_{i,i+1} = 1 - \hat{P}_{i,i-1},$$

avec

$$\hat{P}_{i,i+1} = \mathbb{P}(A < S) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Au total, cela nous donne donc

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

avec $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Calcul du générateur

Pour pouvoir calculer le générateur du processus, il nous reste à obtenir les paramètres des durées de séjour en chacun des états. De nouveau nous étudions deux cas séparément, en utilisant les notations A et S introduites ci-dessus.

1. Si $\hat{X}_n = 0$, alors le changement suivant est dû à une arrivée et est distribué selon une loi exponentielle de paramètre λ . On a donc

$$q_0 = \lambda.$$

2. Si $\hat{X}_n = i$ avec $i \geq 1$ alors $T_{n+1} - T_n$ (la durée de l'intervalle de temps entre deux changements d'état du processus) est donnée par

$$T_{n+1} - T_n = \min(A, S).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(A, S) \geq x) &= \mathbb{P}(A \geq x) \mathbb{P}(S \geq x) \\ &= e^{-\lambda x} e^{-\mu x} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)x}\end{aligned}$$

donc

$$\min(A, S) \sim \text{Exp}(\lambda + \mu).$$

On conclut que

$$q_i = \lambda + \mu.$$

La définition du générateur en termes des q_i et $\hat{\mathbf{P}}$ nous permet d'obtenir

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Soulignons qu'il est possible (et en fait peut-être même plus facile) de calculer *d'abord* le générateur et les temps de séjour en étudiant le comportement infinitésimal *et puis* d'en déduire la matrice de transition de la chaîne de saut.

Distribution stationnaire

La distribution stationnaire de $X(t)$ est obtenue via le système infini $\mathbf{w}\mathbf{Q} = 0$ sous la contrainte $\sum_{i=0}^{+\infty} w_i = 1$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\lambda w_0 + \mu w_1 & = 0 \\ \lambda w_0 - (\lambda + \mu) w_1 + \mu w_2 & = 0 \\ \lambda w_1 - (\lambda + \mu) w_2 + \mu w_3 & = 0 \\ \vdots & \end{cases}$$

avec $\sum_{i=0}^{+\infty} w_i = 1$. On en tire par récurrence que

$$w_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n w_0$$

si $n \geq 1$ et

$$w_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots} = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$$

en ajoutant l'hypothèse $\lambda < \mu$. En posant $\rho = \lambda/\mu$, on trouve

$$w_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n \geq 0.$$

Nous pouvons faire deux observations :

- ▷ Il n'y a pas de solution si $\lambda \geq \mu$, ce qui est raisonnable parce que s'il y a plus d'arrivées que ce qui peut être traité par le serveur, alors le nombre de clients va tendre vers $+\infty$ et $w_i = 0$ pour tout $i \geq 0$.
- ▷ De même, $w_0 \approx 1$ et $w_n \approx 0$ pour tout $n \geq 1$ si $\lambda \ll \mu$, ce qui est raisonnable car alors toutes les arrivées sont prises en charge rapidement et il n'y a généralement pas beaucoup de clients dans la file d'attente.

En particulier, le nombre moyen stationnaire de clients dans le système est donné par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n (1 - \rho) \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Ce nombre augmente lorsque ρ tend vers 1.

5.6.3 Loi de Little

Afin de mesurer la performance d'un système de file d'attente, on s'intéresse aux quantités suivantes :

- ▷ le temps moyen passé par un client dans le système,
- ▷ le nombre moyen de clients présents dans le système.

Nous avons vu comment calculer la seconde quantité à l'aide de la distribution stationnaire du processus.

Les mêmes quantités, cette fois pour le séjour d'un client dans la file d'attente (c'est-à-dire avant d'être servi), sont également importantes.

Ces deux grandeurs sont reliées par la *loi de Little*, qui stipule que le nombre moyen de clients dans un système de file d'attente est égal au produit du taux d'arrivée et du temps moyen passé par un client dans le système.

Exemple 5.6.4. Dans une école secondaire (durée moyenne des études 6,5 ans) dans lequel en moyenne 200 élèves entrent en première par an, le nombre moyen d'étudiants présents est donné par $200 \times 6,5 = 1300$.

Théorème 5.6.5 (Loi de Little). Considérons une file d'attente dont le taux d'arrivée des clients par unité de temps est λ . Soient $\bar{L}$ le nombre moyen (à long terme) de clients dans le système et $\bar{W}$ le temps moyen d'attente (à long terme) d'un client dans le système. Si $\bar{L}$ et $\bar{W}$ sont des constantes finies, alors

$$\bar{L} = \lambda \bar{W}.$$

Cette relation est remarquablement simple et générale ! Elle nécessite des hypothèses de stationnarité sur les processus stochastiques sous-jacents, mais il est tout à fait surprenant de voir ce

qui n'est pas nécessaire : nous n'avons pas mentionné le nombre de serveurs, si chaque serveur a sa propre file d'attente ou si une seule file d'attente alimente tous les serveurs, quelles sont les distributions des temps de service, quelle est la distribution des temps d'arrivée, quelle est la discipline de service, etc.

Remarquons que ce théorème ne nous dit pas comment trouver les quantités : il nous dit seulement comment déduire l'une des deux autres.

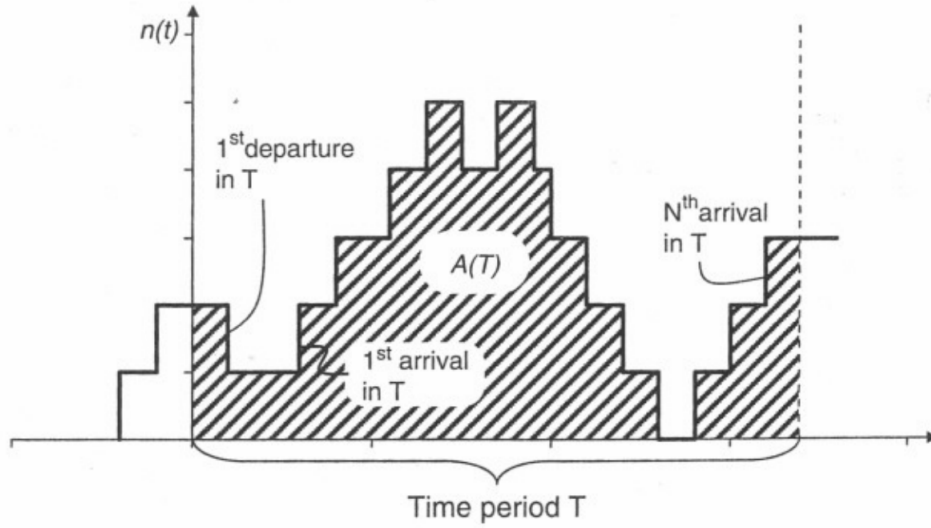


Fig. 5.2 Number of items in a queuing system versus time

L'idée de la preuve est la suivante : on étudie le processus $X(t)$ qui donne le nombre de personnes dans le système au temps t . Pour $T > 0$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} L(T) = \text{nombre moyen de personnes présentes dans le système par unité de temps} \\ W(T) = \text{temps moyen passé dans le système par client} \\ A(T) = \text{aire sous la courbe} \\ N(T) = \text{nombre d'arrivées} \end{array} \right.$$

où toutes ces quantités sont calculées sur l'intervalle de temps $[0, T]$. D'une part, remarquons que

$$L(T) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \frac{A(T)}{T}.$$

D'autre part, on a

$$A(T) = \int_0^T X(t) dt = \text{temps cumulé passé dans le système durant } [0, T]$$

et donc

$$\frac{A(T)}{N(T)} = W(T).$$

Au total, on obtient ainsi

$$\underbrace{L(T)}_{\rightarrow \bar{L}} = \frac{A(T)}{T} = \underbrace{\frac{N(T)}{T}}_{\rightarrow \lambda} \underbrace{W(T)}_{\rightarrow \bar{W}},$$

ce qui mène à la conclusion.

Exemple 5.6.6. *Considérons la file d'attente $M/M/1$ et w sa distribution limite. Le nombre moyen de clients dans le système est donné par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n w_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Par la loi de Little, le temps moyen passé par un client dans le système est donné par

$$\frac{\frac{\lambda}{\mu - \lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

De plus, le temps moyen passé par un client dans la file d'attente (avant d'être servi) est

$$\frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

où $\rho = \lambda/\mu$. Finalement, le nombre moyen de clients dans la file est donné par

$$\frac{\rho \lambda}{\mu - \lambda}$$

en utilisant la loi de Little appliquée au temps moyen passé dans la file.

On peut interpréter les résultats de la file $M/M/1$ de la manière suivante. En moyenne, il y a

$$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

clients dans le système. Lorsqu'un nouveau client arrive, il devra être servi pendant un temps moyen égal à

$$\frac{1}{\mu},$$

qui est la durée moyenne d'un service. Avant d'être servi, il doit attendre la fin du service des clients déjà présents dans la file. En moyenne, il y a

$$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

clients devant lui, et chacun nécessite un temps de service moyen $1/\mu$. Le temps moyen d'attente avant le service est donc

$$\frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1}{\mu}.$$

Par conséquent, le temps moyen total passé par un client dans le système est

$$\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

6 Marches aléatoires et mouvement Brownien

Dans ce dernier chapitre, nous introduisons la notion de marches aléatoires en temps discret, qui sont un cas particulier des chaînes de Markov vues précédemment. Une marche aléatoire discrète est un processus stochastique $\{X_n\}_{n \geq 0}$ défini sur les entiers, où chaque accroissement $X_{n+1} - X_n$ est une variable aléatoire indépendante, souvent centrée et de variance fixée. En faisant tendre l'intervalle de temps entre les étapes vers zéro et en normalisant correctement les déplacements, la marche aléatoire discrète converge, dans un certain sens, vers un processus continu appelé *mouvement brownien*. Le mouvement brownien permet ainsi de modéliser de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou financiers où les fluctuations apparaissent de manière continue.

Une théorie du *mouvement Brownien* a été postulée au début du XX^e siècle par Albert Einstein (1879–1955), d'une part, et par Louis Bachelier (1870–1946), d'autre part, en réponse à deux questions de natures apparemment très éloignées. Einstein cherchait à estimer le nombre d'Avogadro et, ce faisant, à apporter une réponse à une question du botaniste Robert Brown (1773–1858) concernant le mouvement irrégulier et aléatoire d'une particule de pollen en suspension dans l'eau. Bachelier cherchait, quant à lui, à modéliser les fluctuations observées sur les marchés financiers et à proposer un modèle permettant d'évaluer correctement le prix d'options. Les deux constructions se sont révélées équivalentes et ont été confirmées dans leurs disciplines, tant expérimentalement que mathématiquement. Les fondations rigoureuses de la théorie du mouvement Brownien sont dues au mathématicien Norbert Wiener (1894–1964).

Bien que définissable en toute dimension et sur tout espace, nous nous concentrerons dans ce cours sur le mouvement Brownien univarié. Ce processus est à la famille des processus stochastiques ce que la loi normale est à la famille des lois de probabilités : un véritable phare. Une bonne compréhension de son comportement s'est avérée cruciale dans presque toutes les branches des sciences. Il s'agit également d'un objet mathématique d'une beauté peu commune. Sa perfection reflète une loi de la nature plutôt qu'une invention humaine.

6.1 Marches aléatoires et martingales

Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la *marche aléatoire simple* $(X_n)_{n \geq 0}$ par

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

On a alors, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}.$$

Ainsi, la position à l'instant $n + 1$ ne dépend de la position à l'instant n que par l'ajout d'un incrément aléatoire ξ_{n+1} .

Proposition 6.1.1 (Accroissements stationnaires et indépendants). *Pour tous entiers $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$, les accroissements*

$$X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \dots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$$

sont indépendants. De plus, pour tout $n, m \geq 0$,

$$X_{n+m} - X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_m.$$

Démonstration. On a

$$X_{n+m} - X_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k.$$

Les accroissements sur des intervalles disjoints sont donc des sommes de familles disjointes de variables indépendantes, ce qui assure leur indépendance, et leur loi ne dépend que de la longueur de l'intervalle. De plus, comme les variables $(\xi_k)_{k \geq 1}$ sont identiquement distribuées, la somme ne dépend que de m et non de n . ■

Proposition 6.1.2 (Espérance et variance). *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\mathbb{E}[X_n] = 0, \quad \text{Var}[X_n] = n.$$

Démonstration. Puisque les variables aléatoires $(\xi_k)_{k \geq 1}$ sont centrées et indépendantes, on a directement

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_k] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}[X_n] = \sum_{k=1}^n \text{Var}[\xi_k] = n.$$

Proposition 6.1.3 (Chaîne de Markov associée). *La marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ est une*

chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{Z}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On a $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$, avec ξ_{n+1} indépendante du passé. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0, \dots, X_n = i) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j - i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui donne la conclusion. ■

Le résultat suivant montre que la marche aléatoire est une *martingale*. Une martingale peut se voir comme une généralisation du *jeu équitable*, c'est-à-dire d'un pari dont l'espérance de gain est nulle. Un processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est une martingale si, quels que soient les résultats des n premières parties, la fortune moyenne attendue après le jeu numéro $n + 1$ est exactement égale à la fortune actuelle. Autrement dit, connaissant tout l'historique du jeu jusqu'au temps n , le gain futur espéré est nul. On peut donc dire qu'une martingale modélise un jeu parfaitement équitable : le passé n'apporte aucun avantage pour prévoir un gain futur.

Proposition 6.1.4 (Propriété de martingale). *Pour tout $n \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = X_n.$$

Démonstration. On sait que $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$ avec ξ_{n+1} indépendante de $X_1, \dots, X_n$ et d'espérance nulle. Par conséquent,

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_n \mid X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = X_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = X_n.$$

■

On peut maintenant introduire une marche aléatoire avec pas spatial Δx et pas de temps Δt . On pose naturellement

$$X_n^{(\Delta x, \Delta t)} = \sum_{k=1}^n \Delta x \xi_k.$$

On a alors

$$\mathbb{E}[X_n^{(\Delta x, \Delta t)}] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}[X_n^{(\Delta x, \Delta t)}] = \sum_{k=1}^n (\Delta x)^2 \text{Var}[\xi_k] = n(\Delta x)^2.$$

Les sauts de taille $\pm\Delta x$ ont lieu exactement aux instants t de la forme

$$t = n\Delta t$$

Afin que la variance au temps t soit proportionnelle à t comme dans le cas de la marche sur $\mathbb{Z}$, on impose la relation d'échelle

$$(\Delta x)^2 = \Delta t.$$

Le Théorème central limite montre alors que

$$X_n^{(\Delta x, \Delta t)} = \sqrt{\frac{t}{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

si $t = n\Delta t$ (on fait tendre le pas Δt vers 0, et donc n vers l'infini). Combiné à l'indépendance et à la stationnarité des accroissements, ce résultat suggère que la limite continue de la marche aléatoire, après renormalisation, est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, gaussien, de variance linéaire : le *mouvement brownien* $(B_t)_{t \geq 0}$.

Exemple 6.1.5 (Diffusion d'une particule). *Une application classique de la marche aléatoire est la modélisation du mouvement d'une particule subissant des chocs aléatoires, par exemple une molécule dans un fluide. On considère que la particule effectue des déplacements aléatoires de taille fixe à intervalles de temps réguliers. La position de la particule à l'instant $t = n\Delta t$ est alors donnée par $X_n^{(\Delta x, \Delta t)}$.*

6.2 Mouvement Brownien

Le TCL appliqué aux marches aléatoires suggère la définition suivante.

Définition 6.2.1. *Un processus stochastique $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ à valeurs réelles est un mouvement Brownien si*

1. $B(0) = 0$ presque sûrement,
2. les accroissements de B sont indépendants,
3. les accroissements de B sont stationnaires et

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$$

pour tous $t > s \geq 0$,

4. les trajectoires de B sont presque sûrement continues.

Remarque 6.2.2. *Le mouvement Brownien est bien le processus limite obtenu via la construction présentée dans la Section précédente. Plus généralement, soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une*

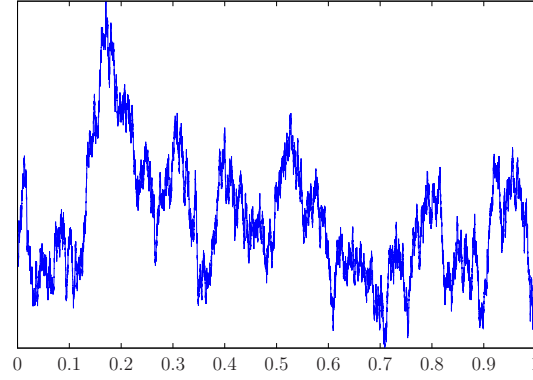


FIGURE 6.1 – Trajectoire d'un mouvement Brownien.

suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance 1. Définissons la marche aléatoire

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

et interpolons en temps continu en posant

$$X(t) = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}.$$

Après normalisation et changement d'échelle, considérons le processus

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}} X_{[nt]+1}.$$

Alors, on a que

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} B$$

où B est un mouvement Brownien.

Le mouvement Brownien fait partie d'une classe fondamentale de processus stochastiques : les processus gaussiens. Ces processus jouent un rôle central en probabilités.

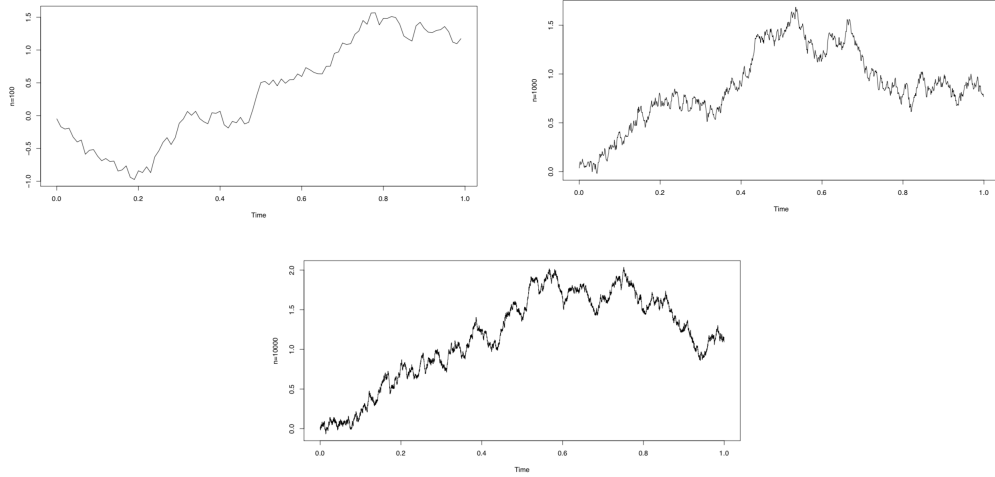
Définition 6.2.3. *Un processus stochastique $X = \{X(t) : t \in I\}$ est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes. Autrement dit, pour tous $p \in \mathbb{N}_0$, tous $t_1, \dots, t_p \in I$, le vecteur*

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$$

est gaussien.

Cela signifie que pour tous $p \in \mathbb{N}_0$, tous $t_1, \dots, t_p \in I$ et tous $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire

$$a_1 X(t_1) + \dots + a_p X(t_p)$$

FIGURE 6.2 – Trajectoires de Z_n sur $[0, 1]$ pour $n = 100$, $n = 1000$ et $n = 10000$.

suit une loi normale.

Il est bien connu qu'un vecteur gaussien est entièrement caractérisé par son vecteur des espérances et sa matrice de covariance. Ainsi, la loi d'un processus gaussien est complètement déterminée par sa *fonction de moyenne*

$$m(t) = \mathbb{E}[X(t)], \quad t \in \mathbb{R}$$

et par son *opérateur de covariance*

$$K(t, s) = \text{Cov}(X(t), X(s)), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Proposition 6.2.4. *Soit B un mouvement Brownien.*

1. *Pour tout $t \geq 0$, $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$.*
2. *Le processus B est gaussien et sa fonction de covariance est donnée par*

$$K(t, s) = \min(t, s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Démonstration. Le premier point est immédiat puisque $B(t)$ est égal en loi à $B(t) - B(0)$. De plus, B est gaussien car si $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $t_1, \dots, t_n \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i B(t_i) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^i (B(t_j) - B(t_{j-1})) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n a_i \right) (B(t_j) - B(t_{j-1})) \end{aligned}$$

où on a posé $t_0 = 0$, qui est une somme de gaussiennes indépendantes, donc suit bien une loi

normale. Enfin, puisque B est centré, on a $K(t, s) = \mathbb{E}[B(t)B(s)]$. Si $t > s$, on en tire que

$$\begin{aligned} K(t, s) = \mathbb{E}[B(t)B(s)] &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s) + B(s))B(s)] \\ &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + \mathbb{E}[B(s)^2] \\ &= 0 + s = \min(t, s) \end{aligned}$$

où on a utilisé l'indépendance des accroissements, le premier point et le fait que $B(0) = 0$ presque sûrement. ■

Proposition 6.2.5. *Si $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ est un processus gaussien centré d'opérateur de covariance $K(t, s) = \min(t, s)$ pour tous $t, s \geq 0$, alors ses accroissements sont indépendants et satisfont*

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall t > s \geq 0.$$

En particulier, si les trajectoires de B sont presque sûrement continues, c'est un mouvement Brownien.

Démonstration. Comme B est un processus gaussien, par la Proposition ??, ses accroissements seront indépendants si et seulement si ils sont non-corrélés. Si $t > s \geq u > v \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B(t) - B(s), B(u) - B(v)) &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s))(B(u) - B(v))] \\ &= \mathbb{E}[B(t)B(u)] - \mathbb{E}[B(t)B(v)] - \mathbb{E}[B(s)B(u)] + \mathbb{E}[B(s)B(v)] \\ &= u - v - u + v = 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'indépendance des accroissements. De plus, pour tous $t > s \geq 0$, la variable aléatoire $B(t) - B(s)$ suit une loi normale centrée de variance

$$\begin{aligned} \text{Var}[B(t) - B(s)] &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s))^2] \\ &= \mathbb{E}[B(t)^2] + \mathbb{E}[B(s)^2] - 2\mathbb{E}[B(t)B(s)] \\ &= \text{Cov}(B(t), B(t)) + \text{Cov}(B(s), B(s)) - 2\text{Cov}(B(t), B(s)) \\ &= t + s - 2\min(t, s) = t - s, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. ■

On peut montrer que les trajectoires du mouvement brownien sont des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point. Leur irrégularité extrême est caractéristique des objets fractals : quel que soit le niveau de zoom considéré, la trajectoire conserve une structure chaotique et fortement oscillante. Cette propriété se reflète dans les invariances fondamentales du mouvement brownien données dans le résultat suivant.

Proposition 6.2.6. *Le mouvement Brownien a les propriétés suivantes :*

1. *Symétrie : Le processus $\{-B(t) : t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien.*
2. *Auto-similarité : Pour tout $c > 0$, le processus $\{B(ct)/\sqrt{c} : t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien.*
3. *Inversion du temps : Le processus $\{X(t) : t \geq 0\}$ défini par*

$$X(t) = \begin{cases} tB\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est un mouvement Brownien.

Démonstration. Dans tous les cas, il est clair que le processus considéré est un processus gaussien centré.

1. Les trajectoires de $\{-B(t) : t \geq 0\}$ sont presque sûrement continues puisque celles de B le sont. De plus, on a

$$\text{Cov}(-B(t), -B(s)) = \text{Cov}(B(t), B(s)) = \min(t, s),$$

ce qui suffit.

2. A nouveau, les trajectoires du processus $\{B(ct)/\sqrt{c} : t \geq 0\}$ sont presque sûrement continues. C'est un mouvement brownien car on a de plus

$$\text{Cov}\left(\frac{B(ct)}{\sqrt{c}}, \frac{B(cs)}{\sqrt{c}}\right) = \frac{1}{c} \text{Cov}(B(ct), B(cs)) = \frac{1}{c} \min(ct, cs) = \min(t, s).$$

3. Remarquons que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(t), X(s)) &= \mathbb{E}\left[tB\left(\frac{1}{t}\right), sB\left(\frac{1}{s}\right)\right] = ts\mathbb{E}\left[B\left(\frac{1}{t}\right), B\left(\frac{1}{s}\right)\right] = \begin{cases} \frac{ts}{t} & \text{si } t > s \\ \frac{ts}{s} & \text{si } t \leq s \end{cases} \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

En particulier, les lois fini-dimensionnelles de X sur $]0, +\infty[$ coïncident avec celles du mouvement Brownien. Sur $]0, +\infty[$, on a également la continuité presque sûre des trajectoires de X . On peut également montrer la continuité des trajectoires en 0.

4. Comme les trajectoires du processus $\{B(t_0 + t) - B(t_0) : t \geq 0\}$ sont presque sûrement continues, il suffit d'étudier sa fonction de covariance. On a

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(B(t_0 + t) - B(t_0), B(t_0 + s) - B(t_0)) \\ &= \text{Cov}(B(t_0 + t), B(t_0 + s)) - \text{Cov}(B(t_0 + t), B(t_0)) - \text{Cov}(B(t_0), B(t_0 + s)) + \text{Cov}(B(t_0), B(t_0)) \\ &= \min(t_0 + t, t_0 + s) - t_0 - t_0 + t_0 \\ &= \min(t, s) \end{aligned}$$

et le processus est donc un mouvement brownien. Pour obtenir l'indépendance, remarquons que pour tous $n, m \geq 1$, $t_1 < \dots < t_n$ et $s_1 < \dots < s_m \leq t_0$, les vecteurs

$$(B(t_0 + t_1) - B(t_0), \dots, B(t_0 + t_n) - B(t_0 + t_{n-1})) \quad \text{et} \quad (B(s_1) - B(0), \dots, B(s_m) - B(s_{m-1}))$$

sont indépendants. On en tire directement l'indépendance des vecteurs

$$(B(t_0 + t_1) - B(t_0), \dots, B(t_0 + t_n) - B(t_0)) \quad \text{et} \quad (B(s_1), \dots, B(s_m)),$$

ce qui suffit. ■

La propriété de Markov est une caractéristique fondamentale des processus markoviens : l'évolution future du processus ne dépend du passé qu'à travers son état présent. Le mouvement brownien constitue l'exemple continu canonique d'un tel processus à espace d'états continus.

Théorème 6.2.7 (Propriété de Markov faible). *Pour tout instant $t_0 > 0$, le processus*

$$\{B(t_0 + t) - B(t_0) : t \geq 0\}$$

est un mouvement brownien indépendant du passé $\{B(s) : s \leq t_0\}$.

Autrement dit, connaissant toute l'évolution du mouvement Brownien jusqu'au temps t_0 , les accroissements futurs se comportent comme un nouveau mouvement Brownien indépendant, partant de 0. L'évolution future ne dépend donc du passé qu'à travers la valeur présente $B(t_0)$, ce qui est précisément l'idée markovienne.

Théorème 6.2.8 (Propriété de Markov forte). *Soit T un temps d'arrêt, c'est-à-dire un instant aléatoire qui dépend uniquement du passé du mouvement brownien. Si $\mathbb{P}[T < +\infty] = 1$, alors le processus*

$$\{B(T + t) - B(T) : t \geq 0\}$$

est un mouvement Brownien indépendant du passé jusqu'au temps T .

Comme dans le cas des marches aléatoires en temps discret, le mouvement Brownien est une *martingale* : la meilleure prédiction moyenne de sa valeur future est donnée par sa valeur présente.

Théorème 6.2.9. *Le mouvement Brownien B est une martingale, c'est-à-dire que pour tous $t > s \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[B(t) \mid B(u), u \leq s] = B(s).$$

Démonstration. Pour tous $t > s \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[B(t) \mid B(u), u \leq s] = \mathbb{E}[B(t) - B(s) \mid B(u), u \leq s] + B(s).$$

Or, par la propriété de Markov faible, l'accroissement $B(t) - B(s)$ est indépendant du passé et d'espérance nulle. On obtient donc

$$\mathbb{E}[B(t) \mid B(u), u \leq s] = B(s).$$

■

Proposition 6.2.10. *Le processus $\{B^2(t) - t : t \geq 0\}$ est une martingale par rapport au mouvement Brownien, c'est-à-dire que pour tous $t > s \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[B^2(t) - t \mid B(u), u \leq s] = B^2(s) - s.$$

Démonstration. Pour tous $t > s \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B^2(t) - t \mid B(u), u \leq s] &= \mathbb{E}[B^2(s) + (B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) - t \mid B(u), u \leq s] \\ &= B^2(s) + \mathbb{E}[(B(t) - B(s))^2] + 2B(s) \mathbb{E}[B(t) - B(s)] - t \\ &= B^2(s) + (t - s) + 0 - t \\ &= B^2(s) - s. \end{aligned}$$

■

Les martingales possèdent de très bonnes propriétés vis-à-vis des temps d'arrêt et permettent d'obtenir de nombreuses informations quantitatives sur les trajectoires des processus stochastiques. Dans le cadre du mouvement brownien, elles constituent un outil fondamental pour l'étude des temps d'atteinte. L'objectif de cette fin de section est de décrire quelques propriétés remarquables de la loi des temps d'atteinte et d'en déduire des informations sur le comportement à long terme du mouvement Brownien.

Théorème 6.2.11. *Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit le temps d'atteinte du niveau a par*

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B(t) = a\}.$$

▷ *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le mouvement brownien atteint presque sûrement le niveau a , c'est-à-dire*

$$\mathbb{P}(T_a < +\infty) = 1.$$

▷ *Le temps moyen nécessaire pour atteindre le niveau a est infini*

$$\mathbb{E}[T_a] = +\infty.$$

▷ Pour $a < 0 < b$, les probabilités d'atteindre a avant b sont données par

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}.$$

▷ Le temps moyen pour atteindre l'un des deux niveaux $a < 0 < b$ vérifie

$$\mathbb{E}[T_a \wedge T_b] = -ab.$$

Ces résultats permettent également de décrire le comportement asymptotique du mouvement brownien. On peut montrer que, presque sûrement,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} B(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} B(t) = -\infty,$$

et que chaque niveau réel est visité une infinité de fois.

Cependant, cette divergence est sous-linéaire : presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{t} = 0.$$

Enfin, la croissance asymptotique du mouvement brownien est caractérisée par la *loi du logarithme itéré*, qui affirme que presque sûrement,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1.$$

Bibliographie

- [1] Grinstead, C.M. and Snell, J.L. (1997) *Introduction to Probability* Second Revised Edition, American Mathematical Society.
- [2] Latouche, Guy (2008-2009) *Modèles Stochastiques des Systèmes Informatiques*, Notes de cours Info-F-406, Université Libre de Bruxelles.
- [3] Norris, J. R. (1998) *Markov Chains*, Number 2, Cambridge University Press.
- [4] Ross, S.M. (1997) *Introduction to Probability Models*, Sixth Edition, Academic Press.
- [5] Williams, D. (1991) *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.