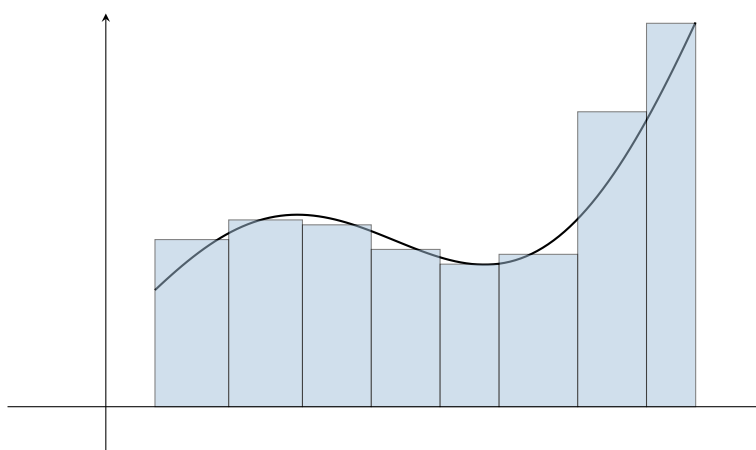


Analyse I, Partie 2



Céline ESSER

Cours destiné aux étudiants de première année du bachelier en Sciences Physiques
Année académique 2025–2026

Table des matières

1	Primitivation	1
1.1	Définition	1
1.2	Techniques pour le calcul de primitives	3
1.3	Quelques situations communes	8
2	Équations différentielles	11
2.1	Introduction	11
2.2	Équations différentielles d'ordre 1	13
2.2.1	Équations différentielles à second membre séparé (EDSMS)	14
2.2.2	Équations différentielles linéaire d'ordre 1, et à second membre linéaire (EDSML)	15
2.3	Équations différentielles linéaires à coefficients constants	20
2.3.1	Équations différentielles linéaires et structure des solutions	21
2.3.2	Solution générale de l'équation homogène	23
2.3.3	Recherche d'une solution de l'équation non-homogène	34
2.4	Équations différentielles d'Euler	42
3	L'intégrale de Riemann	44
3.1	Définition	44
3.2	Propriétés	50
3.3	Théorème fondamental de l'analyse	54
3.4	Techniques de calcul	57
3.5	Intégrales impropres	61
3.6	Critères d'intégrabilité	70
3.7	Séries réelles	79
3.8	Intégrales paramétriques	81
4	Intégrales multiples	86
4.1	Intégrales doubles	86
4.1.1	Fonctions continues sur des rectangles	86
4.1.2	Fonctions continues sur des ensembles compacts et théorème de Fubini	91
4.1.3	Calcul d'aires de domaines	95
4.1.4	Fonctions continues sur des ensembles non-bornés ou ouverts	97
4.1.5	Changement de variables et coordonnées polaires	101

4.2	Intégrales triples	110
4.2.1	Définition et théorème de Fubini	110
4.2.2	Changement de variables, coordonnées cylindriques et sphériques	114
4.3	Intégrales multiples	119
5	Analyse Vectorielle	122
5.1	Fonctions vectorielles et opérateurs différentiels classiques	122
5.2	Intégrales curvilignes	131
5.2.1	Rappels sur les courbes	131
5.2.2	Intégrale sur une courbe d'une fonction scalaire	137
5.2.3	Intégrale curviligne d'une fonction vectorielle	139
5.2.4	Formule de Green dans le plan	142
5.3	Intégrales de surface	146
5.3.1	Couvertures et surfaces dans $\mathbb{R}^3$	146
5.3.2	Intégrales de surface	149
	Références	153

Avant propos

Ces notes de cours ont été principalement rédigées durant l’année académique 2023–2024 et sont destinées aux étudiants du cours d’Analyse I, Partie 2, dispensé dans le bloc 1 du cursus en Sciences Physiques. L’objectif principal de ce cours est de fournir une base solide en calcul différentiel et intégral. Il s’agit de la continuité du cours d’Analyse I, Partie 1.

Dans le Chapitre 1, nous introduisons la primitivation, une opération fondamentale qui constitue l’inverse de la dérivation. Alors que la dérivation permet de mesurer le taux de variation d’une fonction, la primitivation permet de reconstruire cette fonction à partir de sa pente. Ce concept clé joue un rôle central dans de nombreux domaines du calcul différentiel et intégral. Ce chapitre explore les différentes méthodes de calcul des primitives.

Le Chapitre 2 introduit les équations différentielles, des outils incontournables pour modéliser et comprendre une grande variété de phénomènes naturels. Ces équations établissent une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. Ce chapitre se concentre sur les techniques de résolution de certaines équations différentielles.

Dans le Chapitre 3, nous présentons la notion d’intégrale, en suivant l’approche classique de Riemann. L’intégrale de Riemann permet de définir de manière rigoureuse des notions intuitives telles que le calcul de l’aire sous une courbe. Bien que cette approche présente des limites, elle constitue une base essentielle pour comprendre les fondements du calcul intégral.

Le Chapitre 4 explore les intégrales multiples, qui étendent le concept d’intégration aux fonctions de plusieurs variables. Ces outils permettent de calculer des volumes sous des surfaces ou des “volumes généralisés” dans des dimensions supérieures. Ce chapitre met en évidence la richesse et la diversité des domaines d’intégration, tels que les rectangles, disques ou sphères.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous introduisons les concepts fondamentaux de l’analyse vectorielle, une branche essentielle pour étudier les champs scalaires et vectoriels qui varient dans l’espace et le temps. Ce chapitre présente des outils analytiques tels que le gradient, la divergence et le rotationnel, ainsi que des résultats théoriques majeurs comme le théorème de Stokes. Ces notions trouvent des applications directes dans l’étude des champs électriques, magnétiques ou gravitationnels.

Ces notes de cours ont été rédigées sur la base de nombreux échanges avec Laura Remacle et Savinien Kreczman, qui m’ont également aidé à élaborer les listes d’exercices correspondantes. Je les remercie chaleureusement pour leur aide précieuse. Je tiens également à remercier les étudiants de première année en Sciences Physiques de l’année académique 2023–2024, qui ont signalé de nombreuses coquilles dans la première version des notes. Finalement, je remercie Patrick Esser pour ses relectures attentives et ses nombreux conseils.

1 Primitivation

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'opération de primitivation. La primitivation est l'opération inverse de la dérivation, raison pour laquelle elle est parfois désignée sous le terme d'*antidérivée* (venant de l'anglais). En d'autres termes, là où la dérivation nous donne la pente ou le taux de variation d'une fonction à un point donné, la primitivation nous permet de revenir en arrière et de reconstruire la fonction elle-même à partir de cette information.

Ce concept clé joue un rôle fondamental dans le domaine du calcul différentiel et intégral. Dans ce chapitre, nous allons explorer diverses techniques et méthodes qui nous permettent de calculer les primitives de fonctions. Cela sera notamment utile plus tard pour résoudre des équations différentielles et calculer des aires sous des courbes. Notons que nous nous situons dans l'espace des réels, car dans le cas des complexes, le processus est similaire en décomposant une fonction en ses parties réelle et imaginaire, vu la linéarité de la dérivée.

1.1 Définition

Supposons avoir un objet qui se déplace sur une ligne droite. On note $x(t)$ sa position (en m) au temps t et $v(t)$ sa vitesse au temps t (en m/s). Supposons qu'on connaît $v(t)$ pour tout $t \geq 0$ ainsi que la position initiale $x(0) = x_0$ de l'objet et qu'on souhaite déterminer sa position à tout instant t . Comme la vitesse est la dérivée de la position, on se retrouve donc à résoudre

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) & \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On cherche donc à effectuer l'opération "inverse" de la dérivation. La condition initiale nous assurera que la solution est unique car on sait que si $f' = g'$, alors $f = g + c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Une primitive de f sur $]a, b[$ est une fonction F dérivable sur $]a, b[$ telle que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in]a, b[.$$

Si f admet une primitive sur $]a, b[$, on dit que f est primitivable sur $]a, b[$.

Bien sûr, si F est une primitive sur $]a, b[$ d'une fonction f appartenant à $C^n(]a, b[)$, alors F

appartient à $C^{n+1}(]a, b[)$.

Remarque 1.1.2. Il existe des fonctions qui ne sont pas primitives. C'est le cas par exemple de la fonction $f = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}$ sur $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde qu'il existe F tel que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, on a $F'(x) = 1$ pour tout $x > 0$ et $F'(x) = 0$ pour tout $x < 0$. On en tire donc que

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & \text{pour tout } x > 0 \\ c_2 & \text{pour tout } x < 0 \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est également continue et donc la continuité en 0 implique que $c_1 = c_2 = F(0)$. Or, cette fonction n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0.$$

Nous verrons cependant dans le chapitre 3 que toute fonction continue possède une primitive ; il s'agira d'une conséquence du Théorème fondamental de l'analyse. Notons que la continuité est une condition suffisante pour admettre une primitive mais pas nécessaire : toute fonction qui est la dérivée d'une fonction dérivable mais non continûment dérivable est un exemple.

Si une fonction est primitive, elle n'admet pas une unique primitive.

Proposition 1.1.3. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction primitive.

1. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur $]a, b[$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_1 = F_2 + c$.
2. Si F est une primitive de f sur $]a, b[$, alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est également une primitive de f sur $]a, b[$.

Démonstration. 1. Notons $F = F_1 - F_2$. Alors F est une fonction dérivable sur $]a, b[$ telle que $F' = f - f = 0$. Il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F = c$ sur $]a, b[$, ce qui suffit.

2. C'est immédiat puisque la dérivée d'une constante est nulle. □

Ainsi, toute fonction primitive admet une infinité de primitives. On peut cependant obtenir l'unicité si on impose à la primitive de prendre une valeur fixée en un point donné.

Corollaire 1.1.4. Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction primitive, $x_0 \in]a, b[$ et $c_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur $]a, b[$ telle que $F(x_0) = c_0$.

Démonstration. Soit F une primitive quelconque de f sur $]a, b[$. Alors, pour toute constante c , on sait que $F + c$ est également une primitive de f qui prend la valeur $F(x_0) + c$ en x_0 . Il suffit donc de choisir $c = c_0 - F(x_0)$. L'unicité est évidente puisque toute primitive de f est de la forme $F + c$. □

Notation 1.1.5. Si la fonction f est primitivable sur $]a, b[$, la notation

$$\int f(x) dx$$

désigne une quelconque primitive de f sur $]a, b[$. On utilisera aussi la notation $F_1 \simeq F_2$ si F_1 et F_2 sont deux fonctions définies sur le même intervalle $]a, b[$ pour lesquelles il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F_1 = F_2 + c$ sur $]a, b[$. Par conséquent, si F est une primitive de f sur $]a, b[$, on a

$$F \simeq \int f(x) dx.$$

Le résultat (admis) suivant donne le comportement aux bords du domaine d'une primitive d'une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Proposition 1.1.6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors toute primitive de f sur $]a, b[$ admet des limites finies en a^+ et en b^- .

On peut donc étendre toute primitive F de f en une fonction continue sur $[a, b]$ en posant

$$F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad \text{et} \quad F(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x).$$

1.2 Techniques pour le calcul de primitives

Les règles que nous présentons découlent directement des propriétés des dérivées. La première est immédiate au vu de la définition.

Proposition 1.2.1. Si F est dérivable sur $]a, b[$, alors F' est primitivable sur $]a, b[$ et

$$\int F'(x) dx \simeq F(x).$$

sur $]a, b[$.

Il s'agit de primitives immédiates.

Exemples 1.2.2.

▷ On a

$$\int x^m dx \simeq \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

sur $\mathbb{R}$, si $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$.

▷ De manière générale, on a

$$\int x^r dx \simeq \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

sur $]0, +\infty[$, si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$.

▷ On a

$$\int \sin(x) dx \simeq -\cos(x) \quad \text{et} \quad \int \cos(x) dx \simeq \sin(x)$$

sur $\mathbb{R}$.

▷ On a

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx \simeq \tan(x) \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx \simeq \cotan(x)$$

sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $]0, \pi[$ respectivement.

▷ On a

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq \arcsin(x) \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx \simeq \arctan(x)$$

sur $] -1, 1[$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

▷ On a

$$\int \frac{1}{x} dx \simeq \ln(x) \quad \text{et} \quad \int \exp(x) dx \simeq \exp(x)$$

sur $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

Le résultat suivant permet de gérer des primitives de combinaisons linéaires.

Proposition 1.2.3. Si f et g sont primitives sur $]a, b[$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ est primitive sur $]a, b[$ et

$$\int \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx \simeq \alpha_1 \int f(x) dx + \alpha_2 \int g(x) dx.$$

Démonstration. C'est clair puisque la dérivée de la fonction $\alpha_1 \int f(x) dx + \alpha_2 \int g(x) dx$ est la fonction $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ sur $]a, b[$. $\square$

Exemple 1.2.4. On a

$$\int 2x - 3x^2 + \sin(x) dx \simeq 2 \int x dx - 3 \int x^2 dx + \int \sin(x) dx \simeq x^2 - x^3 - \cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$.

Présentons à présent la règle de primitivation par parties. Elle provient de la règle de dérivation des produits

$$(fg)' = f'g + fg'$$

et s'énonce comme suit.

Proposition 1.2.5 (Primitivation par parties). Si f et g sont deux fonctions dérivables

sur $]a, b[$ et si fg' est primitivable sur $]a, b[$, alors $f'g$ est primitivable sur $]a, b[$ et

$$\int f'(x)g(x) dx \simeq f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

sur $]a, b[$.

Démonstration. C'est direct car la fonction $f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$ est dérivable sur $]a, b[$ de dérivée $f'g$. $\square$

Exemples 1.2.6.

- ▷ Pour calculer $\int x \sin(x) dx$, on considère les fonctions $g(x) = x$ et $f(x) = -\cos(x)$ et on obtient

$$\int x \sin(x) dx \simeq -x \cos(x) + \int 1 \cos(x) dx \simeq -x \cos(x) + \sin(x)$$

sur $\mathbb{R}$, puisque $f'(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = 1$.

- ▷ On doit parfois appliquer plusieurs fois la règle de primitivation par parties. Par exemple,

$$\int x^2 \cos(x) dx \simeq x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx \simeq x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) dx$$

et on calcule la nouvelle primitive en effectuant une primitivation par parties comme dans l'exemple précédent. On trouve donc

$$\int x^2 \cos(x) dx \simeq x^2 \sin(x) - 2(-x \cos(x) + \sin(x)) = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)$$

sur $\mathbb{R}$.

- ▷ Il est parfois utile de faire apparaître artificiellement une primitivation par parties. C'est le cas lorsque l'on veut déterminer $\int \ln(x) dx$. On considère les fonctions $g(x) = \ln(x)$ et $f(x) = x$ et on obtient

$$\int \ln(x) dx \simeq \int 1 \cdot \ln(x) dx \simeq x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \simeq x \ln(x) - x$$

sur $]0, +\infty[$.

La technique que nous présentons à présent permet de calculer la primitive d'une fonction qui s'écrit sous la forme $(f \circ g)g'$. Rappelons le Chain Rule qui stipule que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

L'opération inverse est donc donnée par le résultat suivant.

Proposition 1.2.7 (Primitivation par substitution). *Soient $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur les intervalles ouverts I et J respectivement telles que $g(I) \subseteq J$. Si f est primitivable sur J et si g est dérivable sur I , alors la fonction $(f \circ g)g'$ est primitivable sur I et*

$$\int f(g(x))g'(x) dx \simeq F(g(x))$$

sur I , où F est une primitive de f .

Démonstration. Si on dérive la fonction $x \mapsto F(g(x))$, le Chain Rule donne directement que $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. $\square$

On note souvent le résultat précédent sous la forme

$$\int f(g(x))g'(x) dx \simeq \int f(y) dy|_{y=g(x)}.$$

Pour appliquer ce résultat, il faut donc avoir à calculer la primitive d'une fonction composée multipliée par la dérivée de la fonction “à l'intérieur”.

Exemples 1.2.8.

▷ On a

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx \simeq \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2}(1+x^2)' dx \simeq \frac{1}{2} \int \sqrt{y} dy|_{y=1+x^2} \simeq \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

avec $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1+x^2$.

▷ On a

$$\int \cos(x) \sin^3(x) dx \simeq \int y^3 dy|_{y=\sin(x)} \simeq \frac{\sin^4(x)}{4}$$

avec $I = J = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sin(x)$.

▷ On a

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \simeq 2 \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx \simeq 2 \int \sin(y) dy|_{y=\sqrt{x}} \simeq -2 \cos(y)|_{y=\sqrt{x}} = -2 \cos \sqrt{x}$$

avec $I =]0, +\infty[$, $J = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

▷ On a

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx \simeq \int \frac{1}{y} dy|_{y=\ln(x)} \simeq \ln(y)|_{y=\ln(x)} = \ln(\ln(x))$$

avec $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x)$.

Nous présentons à présent une technique qui permet de “faire apparaître” une composition, dont la preuve provient de la formule de la dérivée d'une fonction inverse

$$(\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$$

si φ est bijective et dérivable avec $\varphi'(\varphi^{-1}(y)) \neq 0$.

Proposition 1.2.9 (Primitivation par changement de variable). *Soit $\varphi : I \rightarrow J$ une bijection entre deux intervalles ouverts I et J qui est dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas sur I . Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $(f \circ \varphi)\varphi'$ est primitivable sur I , alors f est primitivable sur J et*

$$\int f(x)dx \simeq \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

sur J .

Démonstration. On vérifie que la dérivée de la fonction

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \simeq \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \circ \varphi^{-1}(x)$$

est donnée par $G \circ \varphi^{-1}(\varphi^{-1})'$ par le Chain Rule, avec $G = (f \circ \varphi)\varphi'$. Or, on a

$$G \circ \varphi^{-1}(x)(\varphi^{-1})'(x) = f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = f(x)$$

en utilisant la règle de dérivation de la fonction inverse. □

Définition 1.2.10. Une fonction bijective $\varphi : I \rightarrow J$ entre deux intervalles I et J de classe $C^1(I)$ dont la dérivée ne s'annule pas sur I est appelée un *changement de variable (CVR)*.

Afin d'appliquer cette méthode, il faut donc écrire $f(x)$ sous la forme $f(\varphi(t))$ où φ est un changement de variable et calculer la primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, avant de l'évaluer en $t = \varphi^{-1}(x)$.

Remarque 1.2.11. La formule du changement de variable explique ce qui se passe lorsqu'on change la variable dans l'intégrale par une autre variable t qui est liée à x par la "formule" $x = \varphi(t)$, de sorte que $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$. Bien souvent, on écrit le changement de variables par le calcul symbolique

$$“x = \varphi(t)” \implies “dx = \varphi'(t)dt”.$$

Attention, les quantités “ dx ” et “ dt ” apparaissant ici n'existent pas en tant que nombres réels et n'ont a priori pas de sens^a.

^a. Il existe une théorie des formes différentielles qui permet de donner un sens à ces expressions.

Exemples 1.2.12.

▷ Calculons la primitive de $f(x) = x^2\sqrt{1-x}$ sur $] -\infty, 1[$. On souhaite poser $t = 1 - x$,

c'est-à-dire $x = 1 - t$. Cela revient à considérer le changement de variable

$$\varphi(t) = 1 - t$$

entre les ensembles $]0, +\infty[$ et $] - \infty, 1[$. On a

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = (1 - t)^2\sqrt{t}(-1) = (-t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$$

et donc

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{1-x} \, dx &\simeq \int (-t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) \, dt|_{t=1-x} \simeq \left(-\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)|_{t=1-x} \\ &\simeq -\frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

▷ *Calculons la primitive de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $] - 1, 1[$. On considère le changement de variable*

$$\varphi(t) = \cos(t)$$

entre les ensembles $]0, \pi[$ et $] - 1, 1[$. On a

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = -\sqrt{1-\cos(t)^2}\sin(t) = -\sin^2(t) = \frac{\cos(2t) - 1}{2}$$

et donc

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \simeq \int \frac{\cos(2t) - 1}{2} \, dt|_{t=\arccos(x)} \simeq \left(\frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right)|_{t=\arccos(x)}.$$

Puisque $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = 2\sqrt{1-\cos^2(t)}\cos(t)$, on obtient finalement que

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \simeq \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)\right).$$

Terminons cette section en rappelant que la primitivation est l'opération inverse de la dérivation. Par conséquent, vous pouvez toujours vérifier que vos calculs de primitivation sont exacts en dérivant le résultat obtenu !

1.3 Quelques situations communes

En général, il n'y a pas de règle systématique et absolue de primitivation, mais certains "motifs" reviennent régulièrement. Nous en passons certains en revue dans cette section.

Primitivation d'une exponentielle-polynôme : Si $f(x) = e^{cx}P(x)$ où c est une constante et P est un polynôme de degré n , on effectue des intégrations par parties successives pour diminuer le degré du polynôme et se ramener ainsi au cas d'une exponentielle.

Exemple 1.3.1. On a

$$\int x^2 e^{-x} dx \simeq -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \simeq -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \simeq -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}.$$

On procède de façon analogue avec les fonctions de la forme $\cos(cx)P(x)$, $\sin(cx)P(x)$, $\cosh(cx)P(x)$ ou $\sinh(cx)P(x)$.

Primitivation d'une fonction définie à partir de la fonction e^x : On pose $x = e^t$, c'est-à-dire on considère le changement de variable $\varphi(t) = \ln(t)$ de sorte que $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

Exemple 1.3.2. Cherchons une primitive de

$$\frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

On a

$$\int \frac{1}{\cosh(x)} dx \simeq \int \frac{2t}{t^2 + 1} \frac{1}{t} dt|_{t=e^x} \simeq \int \frac{2}{t^2 + 1} dt|_{t=e^x} \simeq 2 \arctan(t)|_{t=e^x} = 2 \arctan(e^x).$$

Primitivation de polynômes en cosinus et sinus : La première étape consiste à linéariser, c'est-à-dire transformer les produits en sommes, en utilisant les formules d'addition et de multiplication des sinus et cosinus. On peut parfois faire apparaître des dérivées exactes et utiliser la substitution. C'est le cas de fonctions de la forme $\sin^{2k+1}(x) \cos^m(x)$, en utilisant le fait que $\sin^{2k+1}(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x))^k$, ou de la forme $\sin^m(x) \cos^{2k+1}(x)$.

Primitivation de fractions rationnelles : On réduit la fraction rationnelle en fractions propres¹, ensuite on primitive chacun des termes. Pour cela, on utilise les formules

$$\int \frac{1}{x-a} dx \simeq \ln|x-a| \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{(x-a)^k} dx \simeq \frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

De plus, pour gérer les autres termes, on note tout d'abord que

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{ax+\frac{a}{2}p}{x^2+px+q} + \frac{-\frac{a}{2}p+b}{x^2+px+q}.$$

On primitive chacun des termes par substitution, le premier menant au logarithme et le second à l'arc tangente en recomposant le carré $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + c$. Enfin, on a aussi

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k} = \frac{ax+\frac{a}{2}p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{-\frac{a}{2}p+b}{(x^2+px+q)^k}.$$

Le premier terme se calcule par substitution, le second en procédant à des intégrations par parties pour se ramener au cas $k=1$.

1. Vous étudierez cette technique dans le cours d'Algèbre.

Primitivation de fractions rationnelles en cosinus et sinus : Bien souvent, il est utile d'essayer de poser " $x = \cos(t)$ " ce qui revient à regarder $\varphi(t) = \arccos(t)$, " $x = \sin(t)$ " ou " $x = \tan(t)$ ". Si cela ne fonctionne pas, on peut essayer " $x = \tan(t/2)$ ", formule qui permet de se ramener à la primitivation de fractions rationnelles mais qui mène en général à des calculs plus compliqués.

Primitivation de fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$: On commence par écrire

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - d$$

avec $d = \frac{b^2}{4a} - c$, et on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{|d|}} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$. En fonction de la fraction rationnelle obtenue, on effectue le changement de variable $t = \operatorname{arccosh}(u)$, $t = \arccos(u)$ ou $t = \operatorname{arcsinh}(u)$.

2 Équations différentielles

2.1 Introduction

Les équations différentielles sont des outils mathématiques de première importance dans l'étude des phénomènes physiques. Elles nous aident à comprendre et à modéliser le comportement des systèmes dynamiques, tels que les mouvements, les évolutions temporelles de grandeurs physiques, les processus de diffusion et bien d'autres. En physique, on rencontre souvent des situations où les grandeurs étudiées évoluent en fonction du temps, de l'espace ou d'autres variables. Les équations différentielles nous permettent de décrire ces changements en établissant des relations entre les quantités en jeu, leurs taux de variation, etc. De manière générale, lorsque l'évolution cherchée est représentée par une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$, le phénomène à décrire fait souvent intervenir non seulement f , mais aussi ses dérivées jusqu'à un certain ordre p . Une *équation différentielle* est une relation liant la fonction inconnue f et ses dérivées. Résoudre l'équation consiste à trouver une fonction f et un intervalle ouvert I tels que f soit p fois dérivable sur I et vérifie la relation demandée sur I . La fonction f est alors appelée *solution* de l'équation différentielle sur I .

Par exemple, l'équation différentielle du mouvement harmonique simple du ressort est l'une des équations différentielles les plus fondamentales en physique. Elle décrit le mouvement d'une masse attachée à l'extrémité d'un ressort idéal, sans frottement ni amortissement. Nous renvoyons au cours de physique pour une explication détaillée et une modélisation de ce mouvement. L'équation qui régit ce mouvement est donnée par

$$mD^2x(t) + kx(t) = 0.$$

Dans cette équation :

- ▷ m représente la masse de l'objet en mouvement,
- ▷ k est la constante de raideur du ressort,
- ▷ $x(t)$ est la fonction qui représente le déplacement de l'objet par rapport à sa position d'équilibre à un instant t ,
- ▷ $D^2x(t)$ représente la dérivée seconde par rapport au temps de la fonction $x(t)$, qui correspond à l'accélération de l'objet.

Nous verrons que la solution générale de cette équation est de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la fréquence angulaire du mouvement et où A et B sont des constantes déterminées par les *conditions initiales* du problème. Ce type de mouvement est caractérisé par une oscillation sinusoïdale d'objet autour de sa position d'équilibre. La période de cette oscillation est donnée par $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dans ce cours, nous étudierons des équations différentielles ordinaires, par opposition aux équations aux dérivées partielles. Les premières concernent des fonctions inconnues d'une seule variable ainsi que leurs dérivées, tandis que les secondes impliquent des fonctions inconnues de plusieurs variables et leurs dérivées partielles.

L'*ordre* d'une équation différentielle est le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation. Par exemple, une équation différentielle ordinaire du premier ordre ne fait intervenir que la fonction inconnue f et sa dérivée première Df , ainsi que leur variable x . De manière plus générale, une équation différentielle d'ordre n implique une fonction inconnue f apparaissant avec une ou plusieurs de ses dérivées $Df, D^2f, \dots, D^n f$ jusqu'à l'ordre n .

Terminons cette introduction en introduisant la notion d'opérateur différentiel.

Définition 2.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Un opérateur différentiel d'ordre n sur un intervalle $]a, b[$ est une application définie sur $C^n(]a, b[)$ qui à toute fonction $f \in C^n(]a, b[)$ associe une fonction faisant intervenir une ou plusieurs des fonctions $f, Df, \dots, D^n f$.

Exemple 2.1.2.

▷ L'opérateur D est simplement celui qui associe à une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ la fonction

$$x \mapsto Df(x) = f'(x).$$

▷ L'opérateur $D^2 + 2xD$ est celui qui associe à une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ la fonction

$$x \mapsto D^2f(x) + 2xDf(x) = f''(x) + 2xf'(x).$$

▷ L'opérateur $3D^5 - \sin(x)id$ est celui qui associe à une fonction $f \in C^5(\mathbb{R})$ la fonction

$$x \mapsto D^5f(x) - \sin(x)f(x) = f^{(5)}(x) - \sin(x)f(x).$$

▷ L'opérateur $(D - 3)^2$ est celui qui associe à une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ la fonction

$$x \mapsto (D - 3)^2f(x) = (D - 3)(Df(x) - 3f(x)) = D^2f(x) - 6Df(x) + 9f(x).$$

▷ L'opérateur $(D^2 \cdot)^2$ est celui qui associe à une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ la fonction

$$x \mapsto (f''(x))^2.$$

Les quatre premiers opérateurs présentés dans l'exemple ci-dessus ont une particularité : la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent linéairement.

Définition 2.1.3. Un opérateur différentiel est linéaire d'ordre n s'il s'écrit sous la forme

$$a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)id$$

où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des fonctions données (appelées coefficients). On dit qu'il est à coefficients constants si les fonctions $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des constantes.

Cet opérateur est dit linéaire car chaque terme de la fonction f à laquelle l'opérateur est appliqué et de ses dérivées est linéairement combiné avec les coefficients, et il n'y a pas de produits entre différentes puissances de f ou de ses dérivées.

Étant donné un opérateur différentiel $\mathcal{D}$ sur $]a, b[$ et une fonction g définie sur $]a, b[$, on va chercher dans ce chapitre à résoudre l'équation différentielle

$$\mathcal{D}(f) = g.$$

Si $\mathcal{D}$ est un opérateur différentiel d'ordre n , on dit que l'équation différentielle $\mathcal{D}(f) = g$ est d'ordre n .

2.2 Équations différentielles d'ordre 1

Dans cette section, nous présentons quelques techniques qui permettent de traiter les équations différentielles ne faisant apparaître que la dérivée première d'une fonction et la fonction elle-même. Les équations différentielles d'ordre 1 les plus basiques ont déjà été étudiées dans le Chapitre 1. Il s'agit des équations différentielles directes pouvant s'écrire sous la forme

$$Df(x) = g(x)$$

où g est une fonction primitivable sur $]a, b[$. On considère donc ici le plus simple opérateur différentiel qui est donné par l'opérateur de dérivation. Dans ce cas, la *solution générale* de l'équation différentielle est donnée par

$$f(x) = \int g(x)dx + C \quad \text{avec } x \in]a, b[$$

pour n'importe quelle constante C . On sait qu'on peut fixer la valeur de C en imposant une *condition initiale*

$$f(x_0) = C_0$$

pour un certain $x_0 \in]a, b[$ fixé et une constante C_0 fixée.

Exemple 2.2.1. Sous l'effet de la pesanteur, la vitesse $v(t)$ d'un objet en chute libre évolue au fil du temps selon l'équation différentielle $Dv(t) = g$ où g représente la fonction constante

égale à l'accélération due à la pesanteur. En primitivant, il vient

$$v(t) = gt + C$$

où C est une constante. Si la vitesse initiale de l'objet est v_0 , alors la constante est donnée par $v(0) = v_0 = C$ et la solution est donc donnée par

$$v(t) = v_0 + gt.$$

2.2.1 Équations différentielles à second membre séparé (EDSMS)

Définition 2.2.2. Une équation différentielle à second membre séparé est une équation différentielle qui s'écrit sous la forme

$$Df(x) = F(x)G(f(x)),$$

où f est la fonction inconnue.

S'il existe y_0 tel que $G(y_0) = 0$, alors la fonction constante $f(x) = y_0$ est une solution. Sinon, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{Df(x)}{G(f(x))} = F(x).$$

Remarquons que si g est une primitive de la fonction $\frac{1}{G}$, alors on a

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x) = \frac{Df(x)}{G(f(x))}.$$

Par primitivation, on doit donc résoudre

$$g \circ f(x) \simeq \int F(x)dx,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{1}{G(y)} dy|_{y=f(x)} = \int F(x)dx + C.$$

Exemple 2.2.3. Considérons l'équation différentielle sur $]0, 1[$ donnée par

$$Df(x) = 2xf(x)^2.$$

Une première solution triviale est donnée par la fonction constante égale à zéro. Pour trouver les autres solutions, considérons l'équation

$$\int \frac{1}{y^2} dy|_{y=f(x)} = \int 2x dx + C$$

qui se réécrit

$$-\frac{1}{f(x)} = x^2 + C.$$

Si on impose la condition initiale $f(0) = 1$, on trouve $C = -1$ et donc

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Exemple 2.2.4. L'équation différentielle

$$v(x)Dv(x) = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}$$

donne la relation que vérifie la vitesse v d'un engin spatial en fonction de sa distance par rapport à la Terre, où R est le rayon de la Terre et g est l'accélération due à la pesanteur terrestre. On peut réécrire cette équation sous la forme

$$Dv(x) = -\frac{1}{v(x)} \frac{gR^2}{(R+x)^2}$$

et on doit donc résoudre

$$\int y dy|_{y=v(x)} = -\int \frac{gR^2}{(R+x)^2} dx + C.$$

On obtient

$$v(x)^2 = \frac{2gR^2}{R+x} + C.$$

Si la vitesse de l'engin est de 12km/s à la surface de la Terre, on a $v(0) = 12$ et donc

$$12^2 = 2gR + C,$$

ce qui donne $C = 144 - 2gR$. On en tire que

$$v(x) = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+x} + 144 - 2gR} = \sqrt{144 - \frac{2gRx}{R+x}}.$$

2.2.2 Équations différentielles linéaire d'ordre 1, et à second membre linéaire (EDSML)

Dans cette section, nous nous intéressons aux équations différentielles linéaires du premier ordre. Ces équations sont de la forme

$$a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = g(x)$$

où a_0 , a_1 et g sont des fonctions définies sur un intervalle I et la fonction f est l'inconnue du problème.

Définition 2.2.5. *Étant donnée une équation différentielle linéaire du premier ordre*

$$a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = g(x)$$

où a_0 , a_1 et g sont des fonctions définies sur un intervalle I , l'équation homogène associée est l'équation différentielle

$$a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = 0.$$

Remarque 2.2.6. *Si f_1 et f_2 sont des solutions de l'équation homogène et si α, β sont des constantes, alors la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est également une solution de l'équation homogène puisque*

$$\begin{aligned} & a_1(x)D(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) + a_0(x)(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) \\ &= \alpha(a_1(x)Df_1(x) + a_0(x)f_1(x)) + \beta(a_1(x)Df_2(x) + a_0(x)f_2(x)) \\ &= \alpha 0 + \beta 0 = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène forme donc un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions dérivables.

Proposition 2.2.7. *Considérons une équation différentielle linéaire du premier ordre*

$$a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = g(x) \tag{2.1}$$

où a_0 , a_1 et g sont des fonctions définies sur un intervalle I .

- ▷ *Si f_0 et f_1 sont deux solutions de l'équation différentielle (2.1), alors $f_0 - f_1$ est une solution de l'équation homogène associée.*
- ▷ *Si f_0 est une solution de l'équation différentielle (2.1) et si f_h est une solution de l'équation homogène associée, alors la fonction $f_0 + f_h$ est une solution de l'équation différentielle (2.1).*

Démonstration. Supposons que f_0 et f_1 sont deux solutions de l'équation différentielle (2.1). Alors, on a

$$\begin{aligned} & a_1(x)D(f_0(x) - f_1(x)) + a_0(x)(f_0(x) - f_1(x)) \\ &= a_1(x)Df_0(x) + a_0(x)f_0(x) - (a_1(x)Df_1(x) + a_0(x)f_1(x)) \\ &= g(x) - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Pour la seconde partie, supposons que f_0 est une solution de l'équation différentielle (2.1). Si f_h

est une solution de l'équation homogène associée, on a

$$\begin{aligned} & a_1(x)D(f_0(x) + f_h(x)) + a_0(x)(f_0(x) + f_h(x)) \\ &= a_1(x)Df_0(x) + a_0(x)f_0(x) + a_1(x)Df_h(x) + a_0(x)f_h(x) \\ &= g(x) + 0 = g(x) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

On en tire que si f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (2.1), toute autre solution f s'écrit sous la forme

$$f = f_0 + f_h$$

pour une solution f_h de l'équation homogène. Autrement dit, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2.8. *Si f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (2.1), alors l'ensemble des solutions de (2.1) est donné par*

$$\{f_0 + f_h : f_h \text{ est une solution de l'équation homogène associée}\}.$$

Il suffit donc de connaître **une** solution de l'équation non-homogène et **toutes** les solutions de l'équation homogène pour décrire toutes les solutions de l'équation non-homogène. Par conséquent, dans la pratique, pour déterminer les solutions générales d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1,

1. on cherche la solution générale de l'équation différentielle homogène,
2. on cherche une solution particulière de l'équation différentielle non-homogène,
3. la solution la plus générale est donnée par la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

On va supposer dès à présent que a_1 **ne s'annule pas** sur I . Alors, l'équation différentielle

$$a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = g(x)$$

se réécrit

$$Df(x) + A(x)f(x) = B(x)$$

avec $A(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ et $B(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. On parle d'équation différentielle linéaire à second membre linéaire puisqu'on peut encore écrire $Df(x) = -A(x)f(x) + B(x)$. Intéressons-nous donc à présent à la solution de l'équation différentielle homogène

$$Df(x) + A(x)f(x) = 0.$$

Proposition 2.2.9. *La solution la plus générale de l'équation différentielle homogène*

$$Df(x) + A(x)f(x) = 0$$

est donnée par

$$f(x) = Ce^{-\int A(x)dx}$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante^a.

^a. On prend $C \in \mathbb{R}$ si on travaille avec des fonctions à valeurs réelles.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier des EDSMS avec

$$F(x) = -A(x) \quad \text{et} \quad G(x) = x$$

et il faut donc résoudre

$$\int \frac{1}{y} dy|_{y=f(x)} = - \int A(x) dx + C_0.$$

On en tire que

$$\ln |f(x)| = - \int A(x) dx + C_0$$

et donc

$$|f(x)| = e^{-\int A(x) dx} e^{C_0}.$$

En particulier, $f(x) \neq 0$ et par continuité, f est donc de signe constant. Il s'ensuit que

$$f(x) = Ce^{-\int A(x) dx}$$

pour une constante $C \in \mathbb{C}$. □

Exemple 2.2.10. *Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène*

$$2xDf(x) + f(x) = 0$$

sur $]0, +\infty[$. Pour en trouver la solution générale, on calcule

$$\int -\frac{1}{2x} dx \simeq -\frac{1}{2} \ln(x)$$

et donc la solution est donnée par

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2} \ln(x)} = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Exemple 2.2.11. *Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène*

$$2Df(t) + tf(t) = 0$$

sur $\mathbb{R}$. On peut réécrire cette équation sous la forme

$$Df(t) + \frac{t}{2}f(t) = 0,$$

de sorte que la solution la plus générale est donnée par

$$f(t) = Ce^{-\int \frac{t}{2} dt} = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

où C est une constante.

Le challenge est à présent de trouver une solution particulière de l'équation non-homogène. Si f est une solution de cette équation, on a

$$Df(x) + A(x)f(x) = B(x).$$

En multipliant cette égalité par $e^{\int A(x)dx}$, il vient

$$e^{\int A(x)dx} Df(x) + e^{\int A(x)dx} A(x)f(x) = e^{\int A(x)dx} B(x).$$

On remarque alors que le membre de gauche se réécrit

$$e^{\int A(x)dx} Df(x) + e^{\int A(x)dx} A(x)f(x) = D\left(e^{\int A(x)dx} f(x)\right)$$

et on a donc

$$e^{\int A(x)dx} f(x) \simeq \int e^{\int A(x)dx} B(x) dx.$$

Cela justifie l'analyse de la proposition suivante.

Proposition 2.2.12. *Une solution de l'équation non-homogène de l'équation différentielle*

$$Df(x) + A(x)f(x) = B(x)$$

est donnée par

$$f(x) = e^{-\int A(x)dx} \int e^{\int A(x)dx} B(x) dx.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} Df(x) &= D\left(e^{-\int A(x)dx} \int e^{\int A(x)dx} B(x) dx\right) \\ &= -A(x)e^{-\int A(x)dx} \int e^{\int A(x)dx} B(x) dx + e^{-\int A(x)dx} e^{\int A(x)dx} B(x) \\ &= -A(x)f(x) + B(x), \end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Exemple 2.2.13. *Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1*

$$2xDf(x) + f(x) = x^2$$

sur $]0, +\infty[$. Cherchons une solution particulière. On a

$$A(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{x}{2}.$$

Puisque

$$e^{\int \frac{1}{2x} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln(x)} = \sqrt{x},$$

il s'ensuit qu'une solution particulière est donnée par

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int \sqrt{x} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{x^2}{5}.$$

Comme la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$f_h(x) = \frac{C}{\sqrt{x}},$$

on en tire que la solution générale de l'équation non-homogène est

$$f(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

On peut déterminer C grâce aux conditions initiales, c'est-à-dire en imposant la valeur de f en un point $x_0 > 0$.

Les résultats précédents permettent de donner la forme de toutes les solutions d'une équation différentielle à second membre linéaire.

Théorème 2.2.14. *La solution la plus générale de l'équation différentielle*

$$Df(x) + A(x)f(x) = B(x)$$

est donnée par

$$f(x) = e^{-\int A(x)dx} \left(C + \int e^{\int A(x)dx} B(x)dx \right)$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante.

2.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

2.3.1 Équations différentielles linéaires et structure des solutions

L'objectif de cette section est de généraliser les résultats de la sous-section précédente au cas des équations d'ordre supérieur.

Définition 2.3.1. *Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n*

$$a_n(x)D^n f(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1}f(x) + \dots + a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = g(x)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ et g sont des fonctions définies sur un intervalle I , l'équation homogène associée est l'équation différentielle

$$a_n(x)D^n f(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1}f(x) + \dots + a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = 0.$$

Remarque 2.3.2. *À nouveau, si f_1 et f_2 sont des solutions de l'équation homogène et si α, β sont des constantes, alors la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est également une solution de l'équation homogène. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de $C^n(I)$.*

Proposition 2.3.3. *Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n*

$$a_n(x)D^n f(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1}f(x) + \dots + a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x) = g(x) \quad (2.2)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ et g sont des fonctions définies sur un intervalle I .

- ▷ *Si f_0 et f_1 sont deux solutions de l'équation différentielle (2.2), alors $f_0 - f_1$ est une solution de l'équation homogène associée.*
- ▷ *Si f_0 est une solution de l'équation différentielle (2.2) et si f_h est une solution de l'équation homogène associée, alors la fonction $f_0 + f_h$ est une solution de l'équation différentielle (2.2).*

On en tire que si f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (2.2), alors l'ensemble des solutions de (2.2) est donné par

$$\{f_0 + f_h : f_h \text{ est une solution de l'équation homogène associée} \}.$$

Démonstration. Supposons pour commencer que f_0 et f_1 sont deux solutions de l'équation différentielle (2.2). Alors, on a

$$\begin{aligned}
& a_n(x)D^n(f_0(x) - f_1(x)) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(f_0(x) - f_1(x)) + \dots + a_0(x)(f_0(x) - f_1(x)) \\
&= a_n(x)D^n f_0(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1} f_0(x) + \dots + a_0(x)f_0(x) \\
&\quad - (a_n(x)D^n f_1(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1} f_1(x) + \dots + a_0(x)f_1(x)) \\
&= g(x) - g(x) = 0.
\end{aligned}$$

Supposons à présent que f_0 est une solution de l'équation différentielle (2.2) et que f_h est une solution de l'équation homogène associée. On écrit directement

$$\begin{aligned}
& a_n(x)D^n(f_0(x) + f_h(x)) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(f_0(x) + f_h(x)) + \dots + a_0(x)(f_0(x) + f_h(x)) \\
&= a_n(x)D^n f_0(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1} f_0(x) + \dots \\
&\quad + a_0(x)f_0(x) + a_n(x)D^n f_h(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1} f_h(x) + \dots + a_0(x)f_h(x) \\
&= g(x) + 0 = g(x),
\end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Ainsi, pour trouver toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n ,

1. on cherche la solution générale de l'équation différentielle homogène,
2. on cherche une solution particulière de l'équation différentielle non-homogène,
3. la solution la plus générale est donnée par la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Nous allons donc chercher des techniques pour déterminer dans un premier temps, toutes les solutions de l'équation homogène. Ensuite, nous présenterons des méthodes qui permettent de trouver, selon la forme de la fonction g , une solution particulière. Nous allons nous contenter de traiter le cas où les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des **constantes**. On parle d'*équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants* (EDLCC). On s'intéresse donc à des équations différentielles du type

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \dots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = g(x)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont des constantes et g est une fonction définie sur un intervalle I . On peut bien sûr supposer que $a_n \neq 0$, sinon on se ramène à une équation d'ordre inférieur.

Exemple 2.3.4. Reprenons pour commencer le cas où $n = 1$ (cas particulier des EDSML avec une fonction A constante). On doit donc résoudre une équation du type

$$aDf(x) + bf(x) = g(x)$$

avec $a \neq 0$. L'équation homogène se réécrit

$$Df_h(x) = -\frac{b}{a}f_h(x)$$

et donc la solution la plus générale de l'équation homogène est de la forme

$$f_h(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}.$$

De plus, une solution particulière f_p de l'équation non-homogène est donnée par

$$f_p(x) = e^{-\frac{b}{a}x} \int e^{\frac{b}{a}x} \frac{g(x)}{a} dx.$$

On en tire que toute solution f de l'équation non-homogène s'écrit sous la forme

$$f(x) = e^{-\frac{b}{a}x} \left(C + \int e^{\frac{b}{a}x} \frac{g(x)}{a} dx \right).$$

2.3.2 Solution générale de l'équation homogène

Intéressons-nous à présent aux équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Exemple 2.3.5. Le prototype de ces équations est donné par

$$D^2f(x) = 0.$$

En posant $g(x) = Df(x)$, on a $Dg(x) = 0$ et donc $g(x) = C_1$, pour une constante C_1 . Il reste à présent à étudier $Df(x) = g(x)$, ce qui nous donne $f(x) = C_1x + C_2$ pour une constante C_2 . On voit donc que la solution dépend de deux constantes, et que celles-ci peuvent être déterminées en imposant la valeur de f et de Df en un point.

En général, on travaille avec une équation du type

$$aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$$

avec $a \neq 0$. On associe à cette équation différentielle linéaire son *polynôme caractéristique*, défini par

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soient z_1 et z_2 les racines de ce polynôme. Rappelons qu'elles peuvent se calculer en considérant le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

▷ Si $\Delta > 0$, alors P possède deux racines réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

▷ si $\Delta = 0$, alors P possède une racine réelle de multiplicité 2

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a};$$

▷ si $\Delta < 0$, alors P possède deux racines complexes

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Théorème 2.3.6. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

La solution la plus générale de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

$$aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$$

est donnée par

▷ si $\Delta = 0$,

$$f(x) = (C_1x + C_2)e^{-\frac{b}{2a}x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$;

▷ si $\Delta \neq 0$ et si z_1, z_2 sont les deux racines du polynôme caractéristique,

$$f(x) = C_1e^{z_1x} + C_2e^{z_2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où $\Delta = 0$. Considérons les fonctions u_1 et u_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $u_1(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ et $u_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$, et montrons que u_1 et u_2 sont des solutions de l'équation différentielle linéaire. Il en sera donc de même pour toute fonction de la forme $f(x) = (C_1x + C_2)e^{-\frac{b}{2a}x}$. On a

$$Du_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

et donc

$$\begin{aligned} & aD^2u_1(x) + bDu_1(x) + cu_1(x) \\ = & a \left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} \right) + b \left(e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} \right) + cxe^{-\frac{b}{2a}x} \\ = & \left(-\frac{b^2}{4a} + c \right) xe^{-\frac{b}{2a}x} \\ = & 0 \end{aligned}$$

puisque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ce qui montre que u_1 est une solution. De même, on a

$$\begin{aligned} aD^2u_2(x) + bDu_2(x) + cu_2(x) &= a\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}x} - b\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} + ce^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc u_2 est une solution.

Montrons à présent que toute solution f s'écrit nécessairement sous la forme $f = C_1u_1 + C_2u_2$.

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que

$$aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0.$$

Posons $F(x) = e^{\frac{b}{2a}x}f(x)$. On a

$$DF(x) = \frac{b}{2a}e^{\frac{b}{2a}x}f(x) + e^{\frac{b}{2a}x}Df(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} D^2F(x) &= \frac{b^2}{4a^2}e^{\frac{b}{2a}x}f(x) + \frac{b}{2a}e^{\frac{b}{2a}x}Df(x) + \frac{b}{2a}e^{\frac{b}{2a}x}Df(x) + e^{\frac{b}{2a}x}D^2f(x) \\ &= \left(\frac{b^2}{4a^2}f(x) + \frac{b}{a}Df(x) + D^2f(x)\right)e^{\frac{b}{2a}x} \\ &= \left(cf(x) + bDf(x) + aD^2f(x)\right)\frac{e^{\frac{b}{2a}x}}{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $b^2 = 4ac$ et puisque f est solution de l'équation différentielle. On en tire qu'il existe une constante C_1 telle que

$$DF(x) = C_1.$$

Par primitivation, il s'ensuit qu'il existe une constante C_2 telle que

$$F(x) = C_1x + C_2.$$

Par définition de F , on obtient finalement que

$$f(x) = F(x)e^{-\frac{b}{2a}x} = (C_1x + C_2)e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Passons à la preuve de la seconde partie et supposons donc que $\Delta \neq 0$. Considérons les fonctions u_1 et u_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $u_1(x) = e^{z_1x}$ et $u_2(x) = e^{z_2x}$, et montrons que u_1 et u_2 sont des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène. On a

$$aD^2u_1(x) + bDu_1(x) + cu_1(x) = az_1^2e^{z_1x} + bz_1e^{z_1x} + ce^{z_1x} = (az_1^2 + bz_1 + c)e^{z_1x} = 0$$

puisque z_1 est une racine du polynôme caractéristique. On procède de même pour u_2 . Ainsi, toute

fonction de la forme $C_1u_1 + C_2u_2$ est bien une solution de l'équation différentielle. Montrons maintenant que toute solution f s'écrit nécessairement sous la forme $f = C_1u_1 + C_2u_2$. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que

$$aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{z_1 - z_2} (-Df(x) - z_2f(x) + Df(x) + z_1f(x)) \\ &= \frac{1}{z_1 - z_2} (Df(x) - z_2f(x)) - \frac{1}{z_1 - z_2} (Df(x) - z_1f(x)). \end{aligned}$$

Posons

$$F_1(x) = Df(x) - z_1f(x) \quad \text{et} \quad F_2(x) = Df(x) - z_2f(x).$$

Rappelons que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \frac{c}{a}$, de sorte que

$$0 = aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = a(D^2f(x) - (z_1 + z_2)Df(x) + z_1z_2f(x)).$$

On en tire que

$$DF_1(x) = D^2f(x) - z_1Df(x) = z_2Df(x) - z_1z_2f(x) = z_2F_1(x)$$

et donc F_1 satisfait l'équation différentielle linéaire homogène $DF_1(x) = z_2F_1(x)$ d'ordre 1. Par conséquent, on sait qu'il existe une constante c_1 telle que

$$F_1(x) = c_1e^{z_2x}.$$

On montre de même que $DF_2(x) = z_1F_2(x)$ et donc qu'il existe une constante c_2 telle que $F_2(x) = c_2e^{z_1x}$. Au total,

$$f(x) = \frac{1}{z_1 - z_2} F_2(x) - \frac{1}{z_1 - z_2} F_1(x) = C_1e^{z_1x} + C_2e^{z_2x}$$

avec $C_1 = \frac{c_2}{z_1 - z_2}$ et $C_2 = \frac{-c_1}{z_1 - z_2}$. □

Remarque 2.3.7. *Toute solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2 est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Exemple 2.3.8. *Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$P(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1),$$

qui admet pour racines -2 et 1 . Par conséquent, f est une solution de l'équation différentielle si et seulement si il existe des constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ telles que

$$f(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.3.9. Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$D^2 f(x) - 4Df(x) + 4f(x) = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2,$$

qui admet 2 comme racine double. Ainsi, une fonction f est une solution de l'équation différentielle si et seulement si il existe des constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ telles que

$$f(x) = (C_1 x + C_2) e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas $\Delta < 0$, si les coefficients a, b, c , sont réels, les racines z_1 et z_2 sont conjuguées. Dans ce cas, on peut réécrire la solution générale réelle de l'équation homogène sous la forme suivante.

Proposition 2.3.10. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $\Delta < 0$, alors une fonction réelle f est solution de l'équation différentielle

$$aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$$

si et seulement si elle est de la forme

$$f(x) = \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x\right) \right) e^{-\frac{b}{2a}x}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Démonstration. Par le Théorème 2.3.6, on sait que toute solution f est de la forme

$$f(x) = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x} = C_1 e^{\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}x} + C_2 e^{\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}x} = \left(C_1 e^{i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x} + C_2 e^{-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x} \right) e^{-\frac{b}{2a}x}$$

pour des constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Il suffit à présent de remarquer que

$$C_1 e^{i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} x} + C_2 e^{-i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} x} = (C_1 + C_2) \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} x\right) + i(C_1 - C_2) \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} x\right).$$

Il suffit donc de poser $c_1 = C_1 + C_2$ et $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Si f est une solution réelle, on doit avoir $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Remarque 2.3.11. Dans la formule précédente, le réel $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ est égal à la valeur absolue de la partie imaginaire des racines du polynôme caractéristique, alors que $-\frac{b}{2a}$ est leur partie réelle (commune).

Exemple 2.3.12. Reprenons l'exemple de la modélisation du mouvement harmonique

$$mD^2 f(t) + k f(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé est $P(x) = mx^2 + k$, qui admet pour racines $i\omega$ et $-i\omega$, avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Toute solution réelle de cette équation différentielle est donc de la forme

$$f(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

comme annoncé en début de chapitre.

Exemple 2.3.13. L'équation différentielle donnant l'évolution de l'oscillateur harmonique amorti peut être écrite sous la forme

$$D^2 f(t) + \frac{\gamma}{m} Df(t) + \frac{k}{m} f(t) = 0.$$

avec γ la constante d'amortissement. Supposons que $\gamma^2 < 4\omega^2 m^2$, avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (amortissement faible). Le polynôme caractéristique associé est $P(x) = x^2 + \frac{\gamma}{m}x + \frac{k}{m}$, qui admet pour racines les nombres complexes

$$z_1 = -\frac{\gamma}{2m} + i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\gamma}{2m} - i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$

Toute solution réelle de cette équation différentielle est donc de la forme

$$f(t) = \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} t\right) \right) e^{-\frac{\gamma}{2m} t}.$$

Le mouvement est donc oscillatoire avec un amortissement au cours du temps.

Le Théorème 2.3.6 fournit la forme générale des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. En particulier, si z_j est une racine du polynôme caractéristique

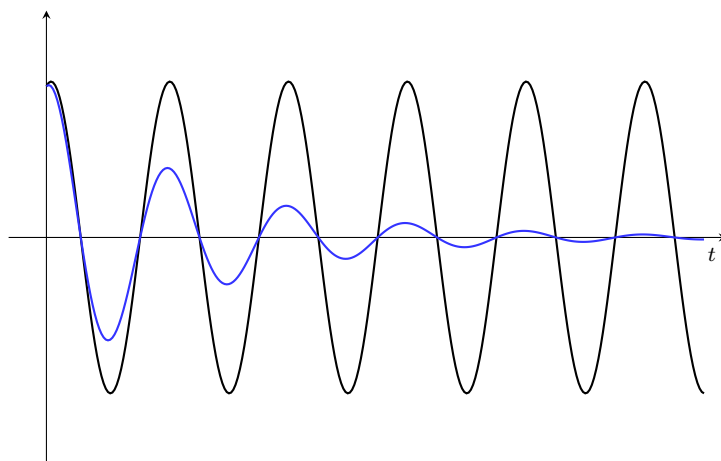


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de l'évolution au cours du temps d'un mouvement harmonique (en noir) et d'un mouvement harmonique amorti (en bleu).

associé de multiplicité d_j , on a obtenu que la fonction

$$f(x) = x^l e^{z_j x}$$

avec $l < d_j$ est une solution de l'équation différentielle homogène. Les solutions de cette forme sont appelées les *solutions fondamentales* de l'équation différentielle homogène. Remarquons que quelque soit la valeur de Δ , nous avons deux solutions fondamentales, et toute solution s'écrit comme une combinaison linéaire de ces fonctions. Contrairement à l'ordre 1 où ces solutions dépendaient d'une constante, on voit donc ici apparaître deux constantes. L'unicité de la solution va être garantie à condition d'imposer des conditions initiales sur f et sur sa dérivée.

Proposition 2.3.14. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $d_0, d_1 \in \mathbb{C}$ des constantes. Il existe une unique solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants*

$$aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$$

qui satisfait les conditions initiales

$$f(x_0) = d_0 \quad \text{et} \quad Df(x_0) = d_1.$$

Démonstration. Notons u_1, u_2 les deux solutions fondamentales de l'équation différentielle linéaire homogène. Nous savons grâce au Théorème 2.3.6 que toute solution f de l'équation différentielle linéaire homogène s'écrit sous la forme $f = C_1 u_1 + C_2 u_2$. Il faut donc trouver des constantes C_1, C_2 telles que

$$\begin{cases} f(x_0) = C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) = d_0 \\ Df(x_0) = C_1 Du_1(x_0) + C_2 Du_2(x_0) = d_1. \end{cases}$$

On doit donc résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues. Pour montrer que ce système a

une unique solution, il faut que la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) \\ Du_1(x_0) & Du_2(x_0) \end{pmatrix}$$

soit inversible, donc que

$$u_1(x_0)Du_2(x_0) \neq u_2(x_0)Du_1(x_0).$$

Il y a deux cas à traiter. Commençons par regarder le cas où le polynôme caractéristique admet une unique racine z_0 . On a alors

$$u_1(x) = e^{z_0 x} \quad \text{et} \quad u_2(x) = x e^{z_0 x}.$$

Dans ce cas, on vérifie directement que

$$u_1(x_0)Du_2(x_0) = u_2(x_0)Du_1(x_0) \iff e^{z_0 x_0}(e^{z_0 x_0} + z_0 x_0 e^{z_0 x_0}) = x_0 z_0 e^{2z_0 x_0} \iff e^{2z_0 x_0} = 0,$$

ce qui est impossible. Si le polynôme caractéristique admet deux racines $z_1 \neq z_2$, on a

$$u_1(x) = e^{z_1 x} \quad \text{et} \quad u_2(x) = e^{z_2 x}$$

et

$$u_1(x_0)Du_2(x_0) = u_2(x_0)Du_1(x_0) \iff z_1 = z_2,$$

ce qui est à nouveau impossible. Cela conclut la preuve. $\square$

Le résultat présenté ci-dessous (sans preuve) généralise les cas $n = 1, 2$ aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre $n \geq 3$. Le principe reste le même.

Théorème 2.3.15 (Solution générale de l'équation homogène). *La solution la plus générale de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants*

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = 0$$

est donnée par

$$f(x) = \sum_{j=1}^m P_{d_j-1}(x) e^{z_j x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$\triangleright z_1, \dots, z_m$ sont les racines distinctes du polynôme caractéristique

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$\triangleright$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, d_j est la multiplicité de z_j comme racine du polynôme caractéristique,

$\triangleright$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, P_{d_j-1} est un polynôme quelconque à coefficients complexes

de degré inférieur ou égal à $d_j - 1$.

Remarque 2.3.16 (Idée de la preuve du théorème 2.3.15). *La démonstration repose sur une réduction progressive à des cas simples, traités par récurrence.*

1. Cas fondamental : $D^n f = 0$.

Le polynôme caractéristique associé est $P(x) = x^n$, dont 0 est une racine de multiplicité n . On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que toute solution de

$$D^n f(x) = 0$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Pour $n = 1$, l'équation $Df = 0$ implique que f est constante, donc un polynôme de degré 0. Supposons le résultat vrai à l'ordre $n - 1$. Si $D^n f = D(D^{n-1}f) = 0$, alors $D^{n-1}f$ est constante. Il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$D^{n-1}f(x) = c.$$

Par hypothèse de récurrence, la solution homogène associée est

$$f_h(x) = P_{n-2}(x),$$

où P_{n-2} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$. Une solution particulière est donnée par

$$f_p(x) = \frac{c}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

La solution générale s'écrit donc

$$f(x) = P_{n-2}(x) + \frac{c}{(n-1)!} x^{n-1} = P_{n-1}(x),$$

où P_{n-1} est un polynôme de degré au plus $n - 1$.

2. Cas d'une racine répétée : $(D - \alpha)^m f = 0$.

Nous procédons par récurrence sur $m \geq 1$. Pour $m = 1$, $(D - \alpha)f = 0$ admet pour solution générale

$$f(x) = Ce^{\alpha x},$$

correspondant à un polynôme constant.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $m - 1$ et soit f solution de $(D - \alpha)^m f = 0$. Posons

$$g = (D - \alpha)^{m-1} f.$$

Alors $(D - \alpha)g = 0$ et il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = Ce^{\alpha x}$. Autrement dit, f est solution de l'équation non homogène

$$(D - \alpha)^{m-1} f = Ce^{\alpha x}.$$

La solution homogène associée est, par hypothèse de récurrence,

$$f_h(x) = P_{m-2}(x)e^{\alpha x},$$

où P_{m-2} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-2$.

Pour obtenir une solution particulière, on utilise l'identité

$$(D - \alpha)(x^k e^{\alpha x}) = kx^{k-1}e^{\alpha x}, \quad k \geq 1.$$

Un calcul par récurrence montre que

$$(D - \alpha)^{m-1}(x^{m-1}e^{\alpha x}) = (m-1)!e^{\alpha x}.$$

Il s'ensuit que

$$f_p(x) = \frac{C}{(m-1)!}x^{m-1}e^{\alpha x}$$

est une solution particulière. La solution générale de $(D - \alpha)^m f = 0$ s'écrit donc

$$f(x) = (P_{m-2}(x) + \frac{C}{(m-1)!}x^{m-1})e^{\alpha x} = P_{m-1}(x)e^{\alpha x},$$

ce qui conclut la récurrence.

3. Cas général.

Le polynôme caractéristique

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

se factorise

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^m (x - z_j)^{d_j},$$

où $z_1, \dots, z_m$ sont les racines distinctes de P avec multiplicités $d_1, \dots, d_m$.

L'équation différentielle homogène s'écrit alors

$$a_n(D - z_1)^{d_1} \cdots (D - z_m)^{d_m} f = 0.$$

En appliquant successivement le résultat du point précédent à chaque facteur $(D - z_j)^{d_j}$, on obtient que les solutions associées à la racine z_j sont de la forme

$$P_{d_j-1}(x)e^{z_j x},$$

où P_{d_j-1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d_j - 1$.

La solution générale est la somme de ces contributions, ce qui donne la forme annoncée dans le théorème.

Exemple 2.3.17. *Considérons l'équation différentielle donnée par*

$$D^4 f(x) - 5D^3 f(x) + 9D^2 f(x) - 7Df(x) + 2f(x) = 0.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = (x - 1)^3(x - 2),$$

qui admet les racines 1 de multiplicité 3 et 2 de multiplicité 1. La solution générale de l'équation différentielle homogène est donc donnée par

$$f(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4e^{2x}$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes.

Exemple 2.3.18. *Considérons l'équation différentielle donnée par*

$$D^6 f(x) + 2D^5 f(x) - D^4 f(x) - 4D^3 f(x) - D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^4(x - 3)^2,$$

dont les racines sont -1 de multiplicité 4 et 3 de multiplicité 2. La solution générale de l'équation différentielle homogène est donc donnée par

$$f(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{-x} + (C_5 + C_6x)e^{3x}$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ sont des constantes.

En particulier, on a obtenu que chaque fonction

$$f(x) = x^l e^{z_j x}$$

avec $l < d_j$ est une solution de l'équation différentielle homogène. Ces solutions sont appelées les *solutions fondamentales* de l'équation différentielle homogène : toute solution s'obtient comme combinaison linéaire des solutions fondamentales. De plus, on peut montrer que ces solutions sont linéairement indépendantes, et puisque $d_1 + \dots + d_m = n$, on en tire que l'espace vectoriel formé des solutions de l'équation différentielle homogène est de dimension n .

Proposition 2.3.19. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $d_0, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{C}$ des constantes. Il existe une unique*

solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = 0$$

qui satisfait les conditions initiales

$$f(x_0) = d_0, Df(x_0) = d_1, \dots, D^{n-1}f(x_0) = d_{n-1}.$$

Notons $u_1, \dots, u_n$ les solutions fondamentales de l'équation différentielle linéaire homogène. Nous savons grâce au Théorème 2.3.15 que toute solution f de l'équation différentielle linéaire homogène est une combinaison linéaire des fonctions $u_1, \dots, u_n$, c'est-à-dire s'écrit sous la forme $f = C_1 u_1 + \cdots + C_n u_n$. Il faut donc trouver des constantes $C_1, \dots, C_n$ telles que

$$\begin{cases} f(x_0) = \sum_{j=1}^n C_j u_j(x_0) = d_0 \\ Df(x_0) = \sum_{j=1}^n C_j Du_j(x_0) = d_1 \\ \vdots \\ D^{n-1}f(x_0) = \sum_{j=1}^n C_j D^{n-1}u_j(x_0) = d_{n-1}. \end{cases}$$

On doit donc résoudre un système de n équations à n inconnues. Pour montrer que ce système a une unique solution, on peut montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ Du_1(x_0) & Du_2(x_0) & \cdots & Du_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}u_1(x_0) & D^{n-1}u_2(x_0) & \cdots & D^{n-1}u_n(x_0) \end{pmatrix}$$

est inversible (on procède par l'absurde en supposant qu'elle n'est pas de rang maximal et qu'il existe donc une relation linéaire entre ses lignes).

2.3.3 Recherche d'une solution de l'équation non-homogène

Nous savons que l'ensemble des solutions d'une EDLCC est donné par

$$\{f_0 + f_h : f_h \text{ est une solution de l'équation homogène associée} \}$$

où f_0 est une solution particulière de l'équation. Nous avons déjà montré comment déterminer toutes les solutions de l'équation homogène. Trouver une solution particulière de l'équation non-homogène peut être une tâche assez difficile. L'objectif de cette section est de présenter des techniques pour trouver une solution particulière. La première technique, appelée la méthode de variation des constantes, est systématique mais assez longue à mettre en oeuvre. La seconde permet d'obtenir une solution particulière de manière plus efficace, mais ne fonctionne que lorsque le membre de droite de l'équation différentielle est de la forme "exponentielle-polynôme".

Méthode de variation des constantes

Commençons par rappeler que la solution la plus générale de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = 0$$

est donnée par les combinaisons linéaires des *solutions fondamentales*

$$f(x) = x^l e^{z_j x}$$

où z_j est un zéro du polynôme caractéristique de multiplicité d_j et $l < d_j$. Comme tout polynôme de degré n admet exactement n racines si on les compte avec leur multiplicité, on sait qu'on a à notre disposition exactement n solutions fondamentales de l'équation homogène. On va les noter $u_1, \dots, u_n$.

Proposition 2.3.20 (Méthode de variation des constantes). *Soient $u_1, \dots, u_n$ les n solutions fondamentales de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants*

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = 0.$$

L'équation différentielle linéaire non-homogène d'ordre n à coefficients constants

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = g(x)$$

où g est une fonction continue sur un intervalle I , admet une solution particulière de la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x) dx \right) u_j(x)$$

où les fonctions $C_1, \dots, C_n$ sont les solutions du système de n équations

$$\begin{cases} C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) + \cdots + C_n(x)u_n(x) = 0 \\ C_1(x)Du_1(x) + C_2(x)Du_2(x) + \cdots + C_n(x)Du_n(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1(x)D^{n-1}u_1(x) + C_2(x)D^{n-1}u_2(x) + \cdots + C_n(x)D^{n-1}u_n(x) = \frac{g(x)}{a_n}. \end{cases}$$

Démonstration. Pour chaque x fixé, on sait grâce à la Proposition 2.3.19 qu'il existe des constantes $C_1(x), \dots, C_n(x)$ qui satisfont le système de n équations. De plus, la règle de Cramer permet d'affirmer que les solutions $C_1, \dots, C_n$ sont continues puisque $u_1, \dots, u_n$ et g le sont. Supposons donc que $C_1, C_2, \dots, C_n$ est la solution du système de n équations et montrons que la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x) dx \right) u_j(x)$$

est bien une solution de l'équation différentielle non-homogène. On vérifie de suite que

$$\begin{aligned} Df(x) &= \sum_{j=1}^n C_j(x)u_j(x) + \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) Du_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) Du_j(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} D^2f(x) &= \sum_{j=1}^n C_j(x)Du_j(x) + \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^2u_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^2u_j(x). \end{aligned}$$

En continuant de la sorte, on obtient

$$\begin{aligned} D^{n-1}f(x) &= \sum_{j=1}^n C_j(x)D^{n-2}u_j(x) + \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^{n-1}u_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^{n-1}u_j(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= \sum_{j=1}^n C_j(x)D^{n-1}u_j(x) + \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^n u_j(x) \\ &= \frac{g(x)}{a_n} + \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^n u_j(x). \end{aligned}$$

On en tire que

$$\begin{aligned} a_n D^n f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) &= g(x) + \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) D^k u_j(x) \\ &= g(x) + \sum_{j=1}^n \left(\int C_j(x)dx \right) \sum_{k=0}^n a_k D^k u_j(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{k=0}^n a_k D^k u_j(x) = 0$$

pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Exemple 2.3.21. *Considérons l'équation différentielle linéaire*

$$D^2 f(x) - 6Df(x) + 9f(x) = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$$

sur $]0, +\infty[$. Le polynôme caractéristique est donné par

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

qui admet 3 comme racine double. Ainsi, les solutions fondamentales de l'équation homogène associée sont données par

$$u_1(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad u_2(x) = xe^{3x}.$$

Appliquons la méthode de variation des constantes. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) = 0 \\ C_1(x)Du_1(x) + C_2(x)Du_2(x) = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}, \end{cases}$$

ce qui se réécrit

$$\begin{cases} C_1(x)e^{3x} + C_2(x)xe^{3x} = 0 \\ 3C_1(x)e^{3x} + C_2(x)(1+3x)e^{3x} = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}. \end{cases}$$

La première équation donne

$$C_1(x) = -xC_2(x).$$

La deuxième équation permet alors d'obtenir

$$C_2(x) = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3} e^{-3x}$$

d'où

$$C_1(x) = -\frac{9x^2 + 6x + 2}{x^2} e^{-3x}.$$

Une solution particulière de l'équation non-homogène est donc donnée par

$$f(x) = \left(\int C_1(x)dx \right) e^{3x} + \left(\int C_2(x)dx \right) xe^{3x}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int C_1(x)dx &= \int -\frac{9x^2 + 6x + 2}{x^2} e^{-3x} dx \\ &= -\int 9e^{-3x} dx - \int \frac{6}{x} e^{-3x} dx - \int \frac{2}{x^2} e^{-3x} dx \\ &= 3e^{-3x} + \frac{2}{x} e^{-3x} + \int \frac{2}{x^2} e^{-3x} dx - \int \frac{2}{x^2} e^{-3x} dx \simeq 3e^{-3x} + \frac{2}{x} e^{-3x} \end{aligned}$$

en effectuant une intégration par parties. De plus,

$$\begin{aligned}
 \int C_2(x)dx &= \int \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3} e^{-3x} dx \\
 &= \int \frac{9}{x} e^{-3x} dx + \int \frac{6}{x^2} e^{-3x} dx + \int \frac{2}{x^3} e^{-3x} dx \\
 &= -\frac{3}{x} e^{-3x} - \int \frac{3}{x^2} e^{-3x} dx + \int \frac{6}{x^2} e^{-3x} dx + \int \frac{2}{x^3} e^{-3x} dx \\
 &= -\frac{3}{x} e^{-3x} + \int \frac{3}{x^2} e^{-3x} dx + \int \frac{2}{x^3} e^{-3x} dx \\
 &= -\frac{3}{x} e^{-3x} - \frac{1}{x^2} e^{-3x} - \int \frac{2}{x^3} e^{-3x} dx + \int \frac{2}{x^3} e^{-3x} dx \simeq -\frac{3}{x} e^{-3x} - \frac{1}{x^2} e^{-3x}.
 \end{aligned}$$

Au total, une solution particulière est donc donnée par

$$f_p(x) = \left(3e^{-3x} + \frac{2}{x}e^{-3x}\right)e^{3x} + \left(-\frac{3}{x}e^{-3x} - \frac{1}{x^2}e^{-3x}\right)xe^{3x} = 3 + \frac{2}{x} - 3 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

et les solutions générales sont donc données par

$$f(x) = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{1}{x}.$$

Méthode des exponentielles-polynômes

Une solution particulière d'une équation différentielle linéaire non-homogène peut être obtenue de manière plus efficace lorsque le second membre est du type *exponentielle-polynôme*, c'est-à-dire de la forme

$$Q(x)e^{\alpha x}$$

où Q est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.3.22 (Méthode des exponentielles-polynômes). *L'équation différentielle linéaire non-homogène d'ordre n à coefficients constants*

$$a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 Df(x) + a_0 f(x) = Q(x)e^{\alpha x} \quad (2.3)$$

admet une solution particulière de la forme

$$f(x) = x^d \tilde{Q}(x)e^{\alpha x}$$

où d est la multiplicité de α comme zéro du polynôme caractéristique de l'équation différentielle et $\tilde{Q}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal au degré de Q .

Démonstration. Soit f une solution particulière de l'équation différentielle (2.3) (on sait qu'elle existe par la méthode de variation des constantes) et soit $m = \deg Q$. Appliquons l'opérateur $(D - \alpha)^{m+1}$ aux deux membres de l'équation différentielle. Pour le membre de droite, on a

$$(D - \alpha)(Q(x)e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} DQ(x)$$

et donc en itérant

$$(D - \alpha)^{m+1}(Q(x)e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} D^{m+1}Q(x) = 0$$

puisque Q est de degré m . Ainsi, on a

$$(D - \alpha)^{m+1}(a_n D^n f(x) + a_{n-1} D^{n-1} f(x) + \cdots + a_1 D f(x) + a_0 f(x)) = 0$$

et donc f est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n + m + 1$ dont le polynôme caractéristique est donné par

$$(x - \alpha)^{m+1}P(x)$$

où P est le polynôme caractéristique de l'équation (2.3). Par conséquent, si $z_1, \dots, z_k$ sont les racines distinctes de P différentes de α de multiplicité $d_1, \dots, d_k$ et si d est la multiplicité (éventuellement nulle) de α comme racine de P , alors f s'écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^k P_{d_j-1}(x)e^{z_j x} + P_{d+m}(x)e^{\alpha x}$$

où pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, P_{d_j-1} est un polynôme de degré plus petit ou égal à $d_j - 1$ et P_{d+m} est un polynôme de degré plus petit ou égal à $d + m$. Remarquons qu'on peut écrire

$$P_{d+m}(x) = P_{d-1}(x) + x^d P_m(x)$$

où P_{d-1} est un polynôme de degré plus petit ou égal à $d - 1$ et P_m est un polynôme de degré plus petit ou égal à m ¹. Comme

$$f_h(x) = \sum_{j=1}^k P_{d_j-1}(x)e^{z_j x} + P_{d-1}(x)e^{\alpha x}$$

est également solution de l'équation différentielle homogène d'ordre n initiale, on en tire que $f - f_h$ est une solution particulière, d'où la conclusion puisque

$$f(x) - f_h(x) = x^d P_m(x)e^{\alpha x}.$$

□

La méthode des exponentielles-polynômes s'applique en particulier si

- ▷ le second membre de l'équation différentielle linéaire est un polynôme, puisque cela revient à considérer $\alpha = 0$,
- ▷ le second membre de l'équation différentielle linéaire est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, donc en particulier s'il s'agit d'un polynôme en $\cos(mx)$, $\sin(mx)$, $\cosh(mx)$, $\sinh(mx)$..., éventuellement multiplié par une exponentielle.

1. Si $P_{d+m}(x) = \sum_{l=0}^{d+m} \gamma_l x^l$, on pose $P_{d-1}(x) = \sum_{l=0}^{d-1} \gamma_l x^l$ et $P_m(x) = \sum_{l=d}^{d+m} \gamma_l x^{l-d}$.

Exemple 2.3.23. *Considérons l'équation différentielle*

$$D^2 f(x) - f(x) = xe^x.$$

On a $P(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et donc les racines du polynôme caractéristique sont 1 et -1 . La méthode des exponentielles-polynômes permet d'écrire une solution particulière sous la forme

$$f(x) = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x.$$

On calcule $Df(x) = (2ax + b + ax^2 + bx)e^x$ et $D^2 f(x) = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x$. On cherche donc des constantes a et b telles que

$$(ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x - (ax^2 + bx)e^x = xe^x,$$

ce qui se réécrit

$$4ax + 2a + 2b = x.$$

En identifiant les coefficients, il vient

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$$

et cela implique que $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Ainsi, une solution particulière est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

Exemple 2.3.24. *Cherchons les solutions réelles de l'équation différentielle linéaire*

$$D^2 f(x) + f(x) = \cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique est $P(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ qui admet i et $-i$ comme racines de multiplicité 1. La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme

$$C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

On cherche à présent une solution particulière de l'équation non-homogène. Comme l'équation est à coefficients réels, une solution est fournie par la partie réelle d'une solution de l'équation

$$D^2 f(x) + f(x) = e^{ix}.$$

Comme i est un zéro du polynôme caractéristique P , on cherche une solution sous la forme

$$f(x) = axe^{ix}.$$

On a

$$Df(x) = (a + iax)e^{ix}$$

et $D^2f(x) = (2ia - ax)e^{ix}$. On a donc $D^2f(x) + f(x) = e^{ix}$ si et seulement si

$$(2ia - ax)e^{ix} + axe^{ix} = e^{ix},$$

c'est-à-dire

$$a = -\frac{i}{2}.$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Re\left(-\frac{i}{2}xe^{ix}\right) = \frac{x}{2}\sin(x).$$

Une méthode alternative pour résoudre cette équation différentielle est de la réécrire sous la forme

$$D^2f(x) + f(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Alors, une solution particulière est donnée par $f_1 + f_2$, où f_1 est une solution particulière de l'équation

$$D^2f(x) + f(x) = \frac{e^{ix}}{2}$$

et f_2 est une solution particulière de l'équation

$$D^2f(x) + f(x) = \frac{e^{-ix}}{2}.$$

Pour f_1 , on cherche une solution du type

$$f_1(x) = Cxe^{ix}.$$

On a $Df_1(x) = (C + iCx)e^{ix}$ et $D^2f_1(x) = (2iC - Cx)e^{ix}$. On doit donc résoudre

$$(2iC - Cx)e^{ix} + Cxe^{ix} = \frac{e^{ix}}{2},$$

ce qui donne directement $C = \frac{1}{4i}$. Pour f_2 , on cherche une solution du type

$$f_2(x) = C'xe^{-ix}.$$

On a $Df_2(x) = (C' - iC'x)e^{-ix}$ et $D^2f_2(x) = (-2iC' - C'x)e^{-ix}$. On doit donc résoudre

$$(-2iC' - C'x)e^{-ix} + C'xe^{-ix} = \frac{e^{-ix}}{2},$$

d'où $C' = -\frac{1}{4i}$. Ainsi,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{4i} = \frac{x}{2}\sin(x).$$

2.4 Équations différentielles d'Euler

Dans cette section, nous allons nous intéresser à des équations différentielles d'ordre 2 particulières, à savoir celles de la forme

$$ax^2 D^2 f(x) + bx Df(x) + cf(x) = g(x)$$

où a , b et c sont des constantes, et g est une fonction continue sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$. La méthode de résolution consiste à se ramener à une EDLCC d'ordre 2 en effectuant un *changement de variables*.

Proposition 2.4.1. *La solution la plus générale de l'équation d'Euler*

$$ax^2 D^2 f(x) + bx Df(x) + cf(x) = g(x)$$

s'écrit $f(x) = F(\ln(x))$, où F est la solution la plus générale de l'équation linéaire à coefficients constants

$$aD^2 F(y) + (b - a)DF(y) + cF(y) = G(y)$$

avec $G(y) = g(e^y)$ pour tout $y \in]\alpha', \beta'[,$ avec $\alpha' = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \ln(x)$ et $\beta' = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \ln(x)$.

Démonstration. Tout d'abord, supposons que f est une solution de l'équation d'Euler et posons

$$F(y) = f(e^y)$$

pour tout $y \in]\alpha', \beta'[,$ On calcule directement que

$$DF(y) = e^y (Df)(e^y) \quad \text{et} \quad D^2 F(y) = e^{2y} (D^2 f)(e^y) + e^y (Df)(e^y).$$

On en tire que

$$\begin{aligned} aD^2 F(y) + (b - a)DF(y) + cF(y) &= ae^{2y} (D^2 f)(e^y) + ae^y (Df)(e^y) + (b - a)e^y (Df)(e^y) + cf(e^y) \\ &= ax^2 D^2 f(x) + bx Df(x) + cf(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

si $x = e^y$. Par conséquent, la fonction F ainsi définie satisfait l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2

$$aD^2 F(y) + (b - a)DF(y) + cF(y) = G(y)$$

avec $G(y) = g(e^y)$. Réciproquement, si F est une solution de cette équation, alors la fonction f définie par $f(x) = F(\ln(x))$ est telle que

$$Df(x) = \frac{1}{x} DF(\ln(x)) \quad \text{et} \quad D^2 f(x) = \frac{(D^2 F)(\ln(x)) - DF(\ln(x))}{x^2}.$$

On calcule directement que

$$\begin{aligned} ax^2 D^2 f(x) + bx Df(x) + cf(x) &= a(D^2 F)(\ln(x)) - aDF(\ln(x)) + bDF(\ln(x)) + cF(\ln(x)) \\ &= aD^2 F(y) + (b - a)DF(y) + cF(y) \\ &= G(y) \end{aligned}$$

si $y = \ln(x)$. Cela suffit. □

Exemple 2.4.2. *Considérons l'équation d'Euler*

$$x^2 D^2 f(x) - 3x Df(x) + 4f(x) = x^3.$$

Pour la résoudre, on doit commencer par résoudre l'EDLCC

$$D^2 F(y) - 4DF(y) + 4F(y) = e^{3y}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

qui admet 2 comme racine double. Par la méthode de l'exponentielle-polynôme, on sait qu'une solution particulière peut être obtenue sous la forme

$$F_p(y) = Ce^{3y}$$

et on vérifie facilement que $C = 1$ convient. Au total, on sait que la solution la plus générale de l'EDLCC est donnée par

$$F(y) = (C_1 y + C_2)e^{2y} + e^{3y}$$

et on en tire que la solution la plus générale de l'équation d'Euler est

$$f(x) = F(\ln(x)) = (C_1 \ln(x) + C_2)x^2 + x^3.$$

3 L'intégrale de Riemann

Dans ce chapitre, nous présentons un outil très important de l'analyse : le calcul intégral. L'approche présentée repose sur la vision de Riemann. Il est toutefois important de noter que l'approche de Riemann présente certaines limites. Il existe une théorie plus avancée et abstraite du calcul intégral développée par Lebesgue. Cette théorie généralise l'intégrale de Riemann en permettant de traiter des fonctions plus générales. Bien qu'elle soit puissante et largement utilisée, cette théorie repose sur des concepts plus théoriques que nous n'aborderons pas ici.

3.1 Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ et bornée sur $[a, b]$ (par exemple, une fonction continue sur $[a, b]$). L'introduction de l'intégrale est motivée par le désir de calculer l'aire sous le graphe de f . Pour estimer cette aire, la première étape consiste à découper la région située sous le graphe en morceaux rectangulaires. Cette découpe nous permet de transformer un problème complexe en un calcul simple, chaque rectangle étant facile à traiter individuellement. On commence donc par diviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles plus petits en introduisant des points intermédiaires

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Ensuite, pour chaque sous-intervalle $[x_{j-1}, x_j]$, on construit un rectangle dont la base correspond au sous-intervalle et dont la hauteur est déterminée par la valeur de la fonction f en un certain point

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$$

de ce sous-intervalle. Cette hauteur $f(\xi_j)$ peut être prise au point gauche du sous-intervalle, au point droit, ou encore à un point quelconque à l'intérieur du sous-intervalle, selon la méthode d'approximation choisie. L'aire de chaque rectangle (avec leur signe car $f(\xi_j)$ peut être négatif) ainsi construit est donnée par $f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ et on approche donc l'aire sous le graphe de f par

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Si f prend des valeurs positives et négatives, la somme est calculée en sommant positivement les aires correspondant aux rectangles “au-dessus” de l'axe des x et négativement les aires des rectangles “en-dessous”.

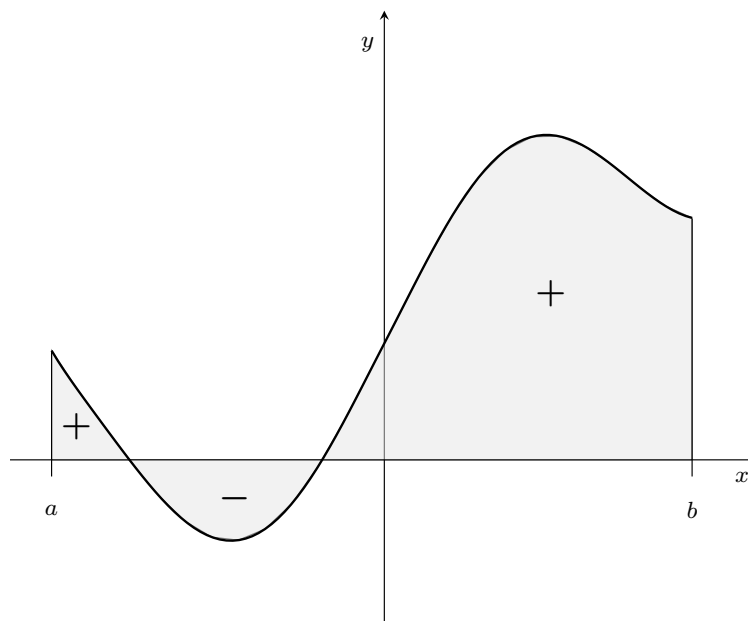


FIGURE 3.1 – L'aire signée sous la courbe.

Définition 3.1.1. Un découpage à la Riemann, noté $\mathcal{P}$, est la donnée d'un naturel $n \in \mathbb{N}_0$, de points $x_0, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, d'un point $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. La largeur du découpage est définie par

$$|\mathcal{P}| = \max \{x_j - x_{j-1} : j \in \{1, \dots, n\}\}$$

et on pose

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Bien sûr, la somme des aires des rectangles donnée par $S(\mathcal{P}, f)$ dépend du choix des points x_j et ξ_j . Cette approche par rectangles est une première étape pour estimer l'aire sous le graphe de f , mais elle n'est qu'une approximation grossière. Intuitivement, cette approximation de l'aire sous le graphe peut être améliorée en prenant en compte un plus grand nombre de rectangles et en prenant des rectangles de plus en plus fins, c'est-à-dire en prenant des découpages de largeur qui tend vers 0. L'idée sous-jacente est de faire en sorte que ces rectangles "collent" aussi étroitement que possible au graphe de la fonction. Lorsque la somme des aires des rectangles converge vers une valeur réelle, nous disons que cette limite est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. Cette introduction de l'intégrale permet donc de passer d'une estimation grossière de l'aire sous la courbe d'une fonction à une mesure précise.

Définition 3.1.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$. On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si pour toute suite $(\mathcal{P}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de découpages à la Riemann telle

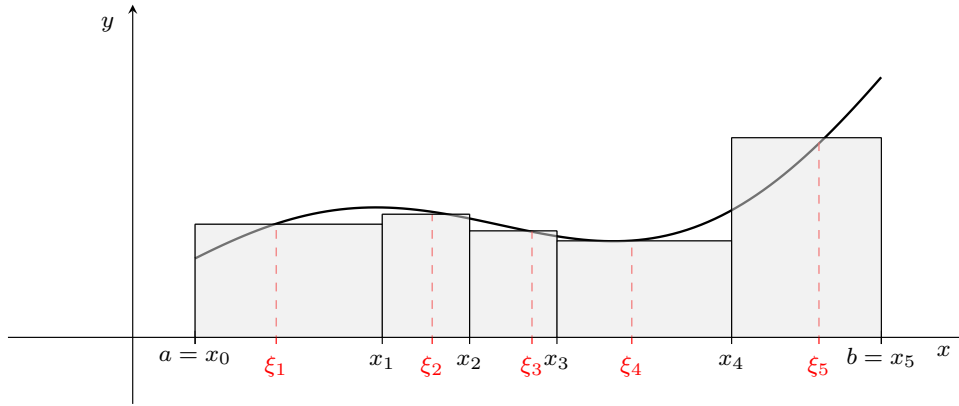


FIGURE 3.2 – Un découpage à la Riemann avec $n = 5$. La somme des aires des rectangles donne une approximation de l'aire sous la courbe.

que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\mathcal{P}_m| = 0,$$

la suite $(S(\mathcal{P}_m, f))_m$ converge vers une limite finie. Dans ce cas, toutes ces limites sont les mêmes. L'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est la valeur commune des limites. On la note

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration. Montrons que si toutes les suites $(S(\mathcal{P}_m, f))_m$ convergent, alors leur limite est commune. Soient $(\mathcal{P}_m^1)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{P}_m^2)_{m \in \mathbb{N}}$ deux suites de découpages à la Riemann. On définit une troisième suite en posant

$$\mathcal{P}_{2k}^3 = \mathcal{P}_k^1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{2k+1}^3 = \mathcal{P}_k^2.$$

Par hypothèse, la suite $(S(\mathcal{P}_m^3, f))_m$ converge vers une limite finie. Comme $(S(\mathcal{P}_m^1, f))_m$ et $(S(\mathcal{P}_m^2, f))_m$ en sont deux sous-suites, elles convergent vers la même limite. $\square$

Dans la suite, on parlera de fonction *intégrable* et de l'*intégrale* de la fonction, sans préciser qu'il s'agit de l'intégration au sens de Riemann.

Remarque 3.1.3. La définition de l'intégrale de Riemann peut être appliquée de manière indépendante à la recherche de l'aire délimitée par le graphe de f . En effet, si une grandeur peut être exprimée sous la forme de la limite d'une somme du type de celle de la Définition 3.1.1, alors cette grandeur peut être représentée par une intégrale. Vous utiliserez cette approche lorsque vous décomposerez un matériau en un grand nombre d'éléments de petite taille. Lorsque la taille des éléments tend vers zéro, ils deviennent "infinitésimaux", et la somme se transforme en une intégrale.

Remarque 3.1.4.

▷ Si f est à valeurs réelles, alors l'intégrale de f est un nombre réel. Si f est à valeurs

complexes, on peut définir son intégrale en posant

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \Re f(x) dx + i \int_a^b \Im f(x) dx$$

à condition que $\Re f$ et $\Im f$ soient intégrables. Les propriétés des intégrales des fonctions à valeurs complexes se déduisent aisément des propriétés des intégrales des fonctions à valeurs réelles. On travaillera donc exclusivement avec des fonctions à valeurs réelles.

- ▷ La variable x apparaissant dans le symbole de l'intégrale est muette, appelée la variable d'intégration. On a donc

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(\heartsuit) d\heartsuit.$$

- ▷ La notation de l'intégrale fait penser à celle des primitives. Cela n'est pas un hasard et cela sera justifié lorsque l'on introduira le théorème fondamental de l'analyse.

- ▷ On pose

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

et si $a > b$,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Afin d'illustrer la méthode développée, calculons une intégrale sur un premier exemple fondamental.

Exemple 3.1.5. Si $f = c$ est une fonction constante sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Notons que ce résultat est ce à quoi on s'attend puisque la surface sous le graphe de f correspond ici à un rectangle. Soit $\mathcal{P}$ un découpage à la Riemann de $[a, b]$, donné par le naturel $n \in \mathbb{N}_0$, les points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = c \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = c(b - a).$$

Il existe de nombreuses fonctions intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$: c'est le cas notamment de toutes les fonctions continues sur $[a, b]$. Le résultat sera admis¹.

Proposition 3.1.6. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

1. La preuve est basée sur l'utilisation de l'intégrale de Darboux introduite ci-après.

2. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ ^a, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

3. Si f est monotone sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

a. c'est-à-dire si f admet un nombre fini de discontinuités sur $[a, b]$ et si elle admet des limites finies à gauche et à droite en chacun de ses points.

Exemple 3.1.7. La fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = x$ est continue et donc intégrable sur $[a, b]$. Pour calculer son intégrale, il faut considérer une suite $(\mathcal{P}_n)_n$ de découpages à la Riemann dont la longueur tend vers 0. Soit $\mathcal{P}_n$ le découpage à la Riemann défini en posant

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n} \quad \text{pour tout } j \in \{0, \dots, n\},$$

ce qui correspond à découper l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$, et on pose $\xi_j = x_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors, on a $|\mathcal{P}_n| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. De plus,

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}_n, f) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \left(a + j \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{j=1}^n j \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &\rightarrow a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_a^b x \, dx = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Notons que cela correspond bien à l'aire d'un trapèze de hauteur $b-a$ et de bases a et b si $0 < a < b$. Si $0 = a < b$, on trouve que l'aire est $\frac{b^2}{2}$, ce qui correspond bien à l'aire du triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit sont tous les deux de longueur b .

Il existe également des fonctions qui ne sont pas intégrables. En voici un exemple.

Exemple 3.1.8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ un découpage quelconque de $[0, 1]$. On définit un premier découpage à la Riemann $\mathcal{P}^1$ en prenant $\xi_j^1 \in [x_{j-1}, x_j] \cap \mathbb{Q}$ et un second découpage à la

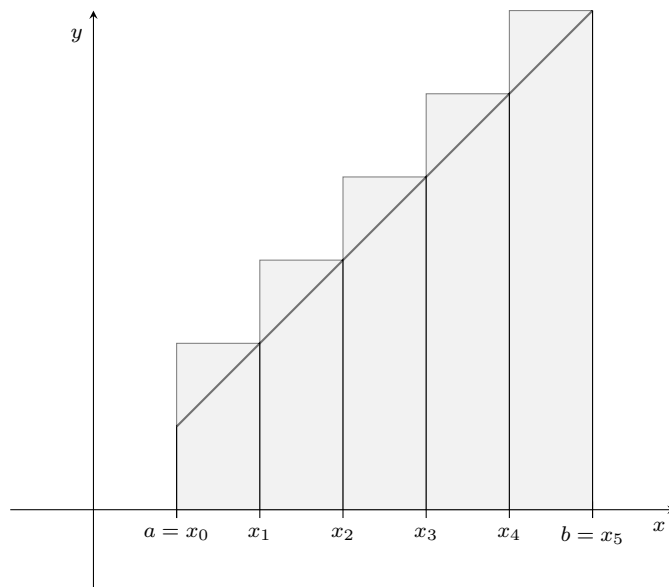


FIGURE 3.3 – Le découpage à la Riemann $\mathcal{P}_n$ donné dans l'Exemple 3.1.7 avec $n = 5$.

Riemann $\mathcal{P}^2$ en choisissant $\xi_j^2 \in [x_{j-1}, x_j] \setminus \mathbb{Q}$. Alors, on a

$$S(\mathcal{P}^1, f) = \sum_{j=1}^n \underbrace{f(\xi_j^1)}_{=1} (x_j - x_{j-1}) = 1$$

et

$$S(\mathcal{P}^2, f) = \sum_{j=1}^n \underbrace{f(\xi_j^2)}_{=0} (x_j - x_{j-1}) = 0.$$

Comme cela est vrai quel que soit le découpage de $[0, 1]$, on en tire que f n'est pas Riemann-intégrable.

Remarque 3.1.9. Si f est une fonction bornée, on peut aussi prendre comme hauteur

$$M_j = \sup \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

qui correspond à la hauteur du rectangle de base $[x_{j-1}, x_j]$ le moins haut qu'on peut placer au dessus du graphe de f , ou encore

$$m_j = \inf \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

qui correspond à la hauteur du rectangle de base $[x_{j-1}, x_j]$ le plus haut qu'on peut placer en dessous du graphe de f . On définit alors les intégrales inférieure et supérieure de f en posant

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\sigma} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j (x_j - x_{j-1}) \right\}$$

et

$$\overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf_{\sigma} \left\{ \sum_{j=1}^n M_j (x_j - x_{j-1}) \right\}$$

où les bornes sont prises sur tous les découpages

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

avec $n \in \mathbb{N}_0$ non fixé. Ce sont donc les meilleures approximations de l'aire sous le graphe de f par des rectangles moins hauts ou plus hauts que le graphe. L'aire approximée par des rectangles en-dessous du graphe est toujours inférieure ou égale à l'aire sous le graphe et l'aire approximée par les rectangles au-dessus du graphe est toujours supérieure ou égale à l'aire sous le graphe. Si à la limite les deux aires coïncident, c'est-à-dire si les intégrales inférieure et supérieure de f coïncident, on dit que f est Darboux-intégrable et on note la valeur commune

$$\int_a^b f(x) dx.$$

L'approche de Darboux est totalement équivalente à celle de Riemann et est préférée en général car elle rend les preuves plus simples.

Évidemment, il est très fastidieux de calculer la valeur d'une intégrale directement à partir de la définition. Heureusement, il existe des méthodes plus efficaces pour déterminer la valeur d'une intégrale sans avoir à recourir systématiquement à cette définition. La technique la plus puissante est l'utilisation du Théorème fondamental de l'analyse, associée aux techniques de calcul de primitives.

3.2 Propriétés

Donnons à présent les propriétés élémentaires des intégrales.

Proposition 3.2.1 (Linéarité). *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors les fonctions αf et $f + g$ sont intégrables sur $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des règles de calcul pour les convergences des suites. □

Proposition 3.2.2 (Comparaison). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particulier, si $g \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la propriété de comparaison des suites. En effet, si $\mathcal{P}$ est un découpage à la Riemann donné par $n \in \mathbb{N}_0$, les points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = S(\mathcal{P}, g).$$

□

Si $c \in \mathbb{R}$, on a montré que $\int_a^b c dx = c(b - a)$. On en tire le résultat suivant.

Corollaire 3.2.3. Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, et si $m, M \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{pour tout } x \in [a, b],$$

alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

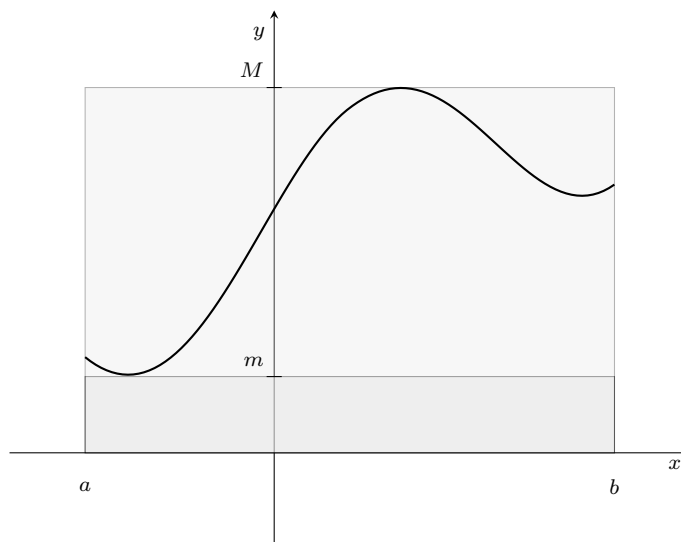


FIGURE 3.4 – L'aire sous la courbe est comprise entre l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.

Le résultat suivant permet de “casser” l'intégrale d'une fonction en plusieurs morceaux. Si on garde en tête le fait que l'intégrale représente l'aire sous la courbe, il est assez intuitif. Il sera donc admis pour ne pas alourdir le texte.

Proposition 3.2.4 (Sous-intervalles). *Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$. Dans ce cas, on a*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

La preuve se base sur le fait qu'on peut écrire $f = f\mathbf{1}_{[a,c]} + f\mathbf{1}_{[c,b]}$.

Proposition 3.2.5. *Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $|f|$ est également intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration. On admet la première partie de la proposition. Pour la seconde partie, il suffit de noter que si $\mathcal{P}$ est un découpage à la Riemann donné par le naturel $n \in \mathbb{N}_0$, les points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|S(\mathcal{P}, f)| = \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) = S(\mathcal{P}, |f|)$$

par l'inégalité triangulaire. Un passage à la limite permet de conclure. $\square$

Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est bornée et on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|(b-a).$$

Remarque 3.2.6. *Il faut être prudent avec l'inégalité*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

qui suppose que $a < b$ et qui est évidemment fausse si $b < a$. Pour éviter ce problème, il est conseillé d'écrire

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

qui est valable même si $b < a$.

Remarque 3.2.7. *La réciproque de la Proposition 3.2.5 est fausse : la fonction $f =$*

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable sur $[0, 1]$ mais $|f| = 1$ l'est. C'est un problème qui peut être levé en considérant l'intégrale plus générale de Lebesgue.

Le résultat suivant joue avec deux limites (puisque'il y a une limite cachée dans la notation de l'intégrale). Nous l'admettons.

Proposition 3.2.8. *Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur tout sous-intervalle $[c, d] \subseteq [a, b]$. De plus, on a*

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(x) dx.$$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On souhaite donner un sens à sa moyenne sur $[a, b]$. On peut découper $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$ en posant

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad j \in \{0, \dots, n\}.$$

Choisissons un point $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour chaque sous-intervalle. La moyenne “discrète” de f sur ces points est alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j).$$

En passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{f(\xi_j)}{n} &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Si f est intégrable sur $[a, b]$, la *moyenne* de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Le résultat suivant montre que si f est continue, alors la moyenne est toujours réalisée par l'image d'un point de $[a, b]$.

Théorème 3.2.9 (de la moyenne). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Démonstration. Puisque f est continue sur $[a, b]$, on sait par le Théorème des bornes atteintes

qu'il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) = \inf_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{[a,b]} f.$$

Le Corollaire 3.2.3 nous donne alors

$$f(c)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(d)(b-a).$$

Si une des deux inégalités est une égalité, on a la conclusion. Sinon, on a

$$f(c) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < f(d)$$

et le TVI nous donne l'existence d'un nombre ξ entre c et d (et donc en particulier $\xi \in]a, b[$) tel que

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

La conclusion s'ensuit. □

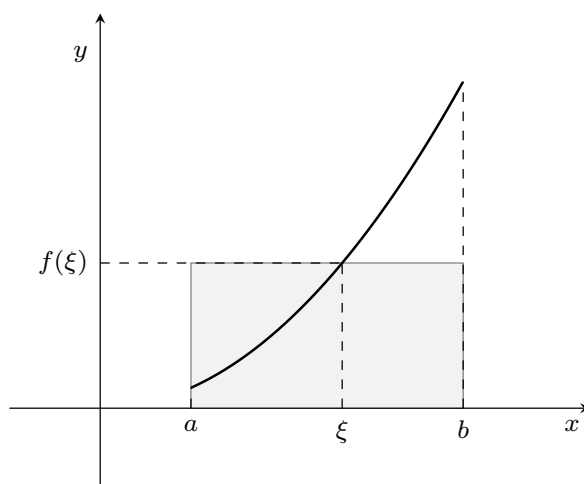


FIGURE 3.5 – L'aire sous la courbe égale à l'aire du rectangle.

3.3 Théorème fondamental de l'analyse

La notion d'intégrale n'aurait pas atteint la place centrale qu'elle occupe aujourd'hui dans les mathématiques et dans ses applications sans le théorème fondamental de l'analyse. Ce théorème établit un lien fondamental entre la dérivation et l'intégration. En substance, il affirme que si vous avez une fonction continue sur un intervalle, alors l'intégrale de cette fonction peut être calculée en trouvant une primitive de cette fonction et en évaluant la différence entre les valeurs de cette primitive aux bornes de l'intervalle. Ce théorème est d'une importance cruciale car il fournit un outil puissant pour calculer des intégrales sans recourir à sa définition.

Théorème 3.3.1 (fondamental de l'analyse). *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on définit la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Alors F est dérivable sur $]a, b[$ et F est une primitive de f sur $]a, b[$ telle que $F(a) = 0$.

Démonstration. Soit $\xi \in]a, b[$. Remarquons que

$$F(x) - F(\xi) = \int_{\xi}^x f(t) dt$$

et le Théorème de la moyenne nous donne l'existence d'un nombre y compris entre ξ et x tel que

$$\frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = f(y).$$

Si $x \rightarrow \xi$, alors on a aussi $y \rightarrow \xi$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow \xi, x \neq \xi} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = f(\xi)$$

par continuité de f . D'où la conclusion. □

Le théorème fondamental de l'analyse fournit directement le résultat suivant qui avait été admis lorsque nous avons étudié la primitivation.

Corollaire 3.3.2. *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ admet une primitive.*

Comme deux primitives ne peuvent différer que par une constante, on sait que toutes les primitives sur $]a, b[$ d'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont de la forme

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Si $x_0 \in [a, b]$ est fixé et si on cherche une primitive F telle que $F(x_0) = C_0$ (on impose une condition pour l'unicité), alors on doit avoir

$$\int_a^{x_0} f(t) dt + c = C_0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad c = C_0 - \int_a^{x_0} f(t) dt.$$

Ainsi, la primitive F recherchée est donnée par la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C_0 - \int_a^{x_0} f(t) dt = C_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse nous fournit également une technique pour calculer des intégrales via le calcul de primitives. Rappelons que toute primitive sur $]a, b[$ peut se prolonger en une fonction continue sur $[a, b]$ par la Proposition 1.1.6.

Théorème 3.3.3 (Variation de primitive). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

pour toute primitive F de f sur $]a, b[$. On note

$$[F]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$G(x) = F(x) - \int_a^x f(t) dt.$$

Par le Théorème fondamental de l'analyse, nous savons que G est dérivable sur $]a, b[$ et que

$$G'(x) = F'(x) - f(x) = 0.$$

Par conséquent, G est une fonction constante sur $[a, b]$ et en particulier, $G(a) = G(b)$. Puisque

$$G(b) = F(b) - \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad G(a) = F(a)$$

on obtient que

$$F(b) - \int_a^b f(t) dt = F(a),$$

ce qui donne la conclusion. □

Exemples 3.3.4.

▷ Nous avons montré que

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

On retrouve le même résultat de manière directe en utilisant le Théorème de variation de primitive puisqu'une primitive de la fonction continue f définie par $f(x) = x$ est donnée par la fonction $F(x) = \frac{x^2}{2}$. De manière générale, on a que

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

si $0 < a < b$.

▷ Calculons l'aire sous un demi-disque de rayon 1. Cela correspond à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Remarquons que la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. Nous avons calculé dans l'Exemple 1.2.12 qu'une primitive de f est

donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x) \right).$$

Par conséquent, le Théorème de variation de primitive nous permet d'écrire

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x) \right) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (-\arccos(1) + \arccos(-1)) = \frac{\pi}{2}.$$

3.4 Techniques de calcul

Le Théorème de variation de primitive nous enseigne que le calcul d'une intégrale peut se faire en utilisant les outils développés pour le calcul des primitives. Cela mène directement aux techniques de calcul présentées dans cette section : l'intégration par partie, l'intégration par substitution et l'intégration par changement de variables.

Proposition 3.4.1 (Intégration par parties). *Si f et g sont deux fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Démonstration. Par la Proposition 1.2.5, on sait que $f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$ est une primitive de $f'g$ sur $]a, b[$. Par le Théorème 3.3.3 de variation de primitive, on trouve que

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \left[\int f(x)g'(x) dx \right]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

□

Exemple 3.4.2. *Calculons l'intégrale*

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$

La fonction à intégrer est continue sur $[1, e]$ et l'intégrale a donc du sens. Posons $f(x) = \frac{x^3}{3}$

et $g(x) = \ln(x)$, de sorte que $f'(x) = x^2$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln(x) dx &= \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \left(\ln(e) \frac{e^3}{3} - \ln(1) \frac{1}{3} \right) - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{9} (2e^3 + 1). \end{aligned}$$

Le Théorème fondamental du calcul intégral fournit une seconde manière d'exprimer le reste du développement de Taylor limité à l'ordre n pour une fonction $n + 1$ fois continûment dérivable.

Théorème 3.4.3 (Développement de Taylor avec reste intégral). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle appartenant à $C^{n+1}(]a, b[)$ et si $x_0 \in]a, b[$, alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors la formule devient

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt,$$

ce qui est vérifié puisque f est une primitive de f' . Supposons la formule vérifiée pour $n - 1$ et montrons-la pour n . Si $f \in C^{n+1}(]a, b[)$, on a aussi $f \in C^n(]a, b[)$ et l'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Intéressons-nous à l'intégrale apparaissant dans le deuxième membre. En effectuant une intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt &= \left[-\frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x -\frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit. □

Exemple 3.4.4. Considérons la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$$

On calcule directement que

$$f'(x) = \frac{-1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}}, \quad f''(x) = \frac{4}{9}(1+x)^{-\frac{7}{3}} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = \frac{-28}{27}(1+x)^{-\frac{10}{3}}.$$

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n = 2$ en $x_0 = 0$ nous donne

$$f(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14}{27} \int_0^x (x-t)^2 (1+t)^{-\frac{10}{3}} dt.$$

Si $x > 0$, alors on vérifie immédiatement que $(x-t)^2(1+t)^{-\frac{10}{3}} \geq 0$ pour tout $t \in [0, x]$. On en tire que

$$f(x) \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$

La propriété de primitivation par substitution nous donne directement la technique suivante d'intégration par substitution.

Proposition 3.4.5 (Intégration par substitution). Soient deux fonctions $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $g([a, b])$ et si g est continûment dérivable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

Exemple 3.4.6. Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Notons que cette intégrale a du sens puisque la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ est continue sur $[0, 1]$. Si on prend $g(x) = x^2 + 1$, on a $g'(x) = 2x$, $g(0) = 1$, $g(1) = 2$ et

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x^2+1} (x^2+1)' dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{y} dy = \frac{1}{3} \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2^{\frac{3}{2}} - 1}{3}.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate et importante de la primitivation par changement de variables.

Proposition 3.4.7 (Intégration par changement de variables). Soit $\varphi : I \rightarrow [a, b]$ un changement de variables entre un intervalle fermé borné I et $[a, b]$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une

fonction continue, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Exemple 3.4.8. Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx.$$

La fonction à intégrer est continue sur $[0, 1]$ et y est donc intégrable. Considérons le changement de variables

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto 1 - t.$$

On a $\varphi'(t) = -1$, $\varphi^{-1}(0) = 1$ et $\varphi^{-1}(1) = 0$. La formule d'intégration par changement de variables donne donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx &= \int_1^0 -(1-t)^2 \sqrt{t} dt = \int_0^1 (1-2t+t^2) t^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \\ &= \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

La propriété suivante est claire graphiquement puisque les surfaces délimitées sous le graphe par a et b d'une part et $a+T$ et $b+T$ d'autre part sont de même aire si f est T -périodique.

Corollaire 3.4.9 (Fonctions périodiques). Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction périodique continue de période T , alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx.$$

Démonstration. En utilisant le changement de variables

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t - T$$

dont la dérivée est égale à la constante 1, on trouve

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(t-T) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$$

puisque $f(t-T) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Les résultats suivants sont évidents graphiquement.

Corollaire 3.4.10 (Fonctions paires et impaires).

1. Si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction paire, alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. Si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Démonstration. 1. On a

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Intéressons-nous à la première intégrale dans le membre de droite. Si on considère le changement de variables $\varphi(t) = -t$, il vient

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-1)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt$$

puisque $f(-t) = f(t)$ pour tout t .

2. On procède de la même manière en utilisant $f(-t) = -f(t)$. □

3.5 Intégrales impropres

La définition de l'intégrale de Riemann ne s'applique qu'aux fonctions bornées sur des intervalles fermés bornés. En particulier, pour pouvoir appliquer les techniques d'intégration, nous sommes partis de l'hypothèse que les fonctions considérées étaient **continues** sur l'intervalle **fermé borné** déterminé par les bornes d'intégration.

Dans cette section, nous considérons des situations où les contraintes liées à la continuité en tout point et au domaine d'intégration peuvent être levées. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in]a, b]$, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[t, b]$ et on peut donc calculer

$$\int_t^b f(x) dx.$$

Définition 3.5.1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si la limite

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

existe et est finie, on dit que f possède une intégrale impropre (ou fléchée) sur $]a, b]$ et on

définit cette intégrale impropre par

$$\int_{\rightarrow a}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

L'intégrale impropre sur $[a, b[$ se définit de la même manière en considérant la limite en b^- . Si f est continue sur $]a, b[$, on coupe l'intervalle en deux morceaux et on définit

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(x) dx = \int_{\rightarrow a}^c f(x) dx + \int_c^{\rightarrow b} f(x) dx$$

pour $c \in]a, b[$, si les deux intégrales impropres existent. Notons que cette définition ne dépend pas du choix du nombre c .

Exemple 3.5.2 (Exemples fondamentaux). On considère les fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies par

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2}$$

pour tout $x > 0$.

▷ On souhaite intégrer les fonctions f_1 , f_2 et f_3 sur l'intervalle $]0, 1]$. Chaque fonction est continue et donc intégrable sur $[t, 1]$ pour $0 < t < 1$. On a

$$\begin{aligned} \int_t^1 \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_t^1 = -\ln(t) \rightarrow +\infty \\ \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= [2\sqrt{x}]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t} \rightarrow 2 \\ \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx &= \left[\frac{-1}{x} \right]_t^1 = -1 + \frac{1}{t} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

lorsque $t \rightarrow 0^+$. Ainsi, seule la fonction f_2 admet une intégrale impropre sur $[0, 1]$.

▷ On souhaite intégrer les fonctions f_1 , f_2 et f_3 sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Chaque fonction est continue et donc intégrable sur $[1, t]$ pour $t > 1$. On a

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_1^t = \ln(t) \rightarrow +\infty \\ \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= [2\sqrt{x}]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \rightarrow +\infty \\ \int_1^t \frac{1}{x^2} dx &= \left[\frac{-1}{x} \right]_1^t = \frac{-1}{t} + 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ainsi, seule la fonction f_3 admet une intégrale impropre sur $[1, +\infty[$.

On peut aussi considérer des fonctions qui ne sont pas définies en un point $c \in [a, b]$ (ou en un nombre fini de points) en considérant l'intégrale impropre sur $[a, c]$ et celle sur $[c, b]$. Si les deux

existent, alors l'intégrale impropre de f sur $[a, b]$ est donnée par la somme

$$\int_a^{\rightarrow c} f(x) dx + \int_{\rightarrow c}^b f(x) dx.$$

Exemple 3.5.3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. On souhaite l'intégrer sur $[-1, 1]$ mais elle n'est pas définie en 0. On calcule

$$\int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^t = \frac{-1}{t} - 1$$

pour tout $-1 < t < 0$ et

$$\int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_t^1 = -1 + \frac{1}{t}$$

pour tout $0 < t < 1$. Ces deux intégrales tendent vers l'infini si t tend vers 0^- et 0^+ respectivement et donc f n'admet pas d'intégrale impropre sur $[-1, 1]$.

L'exemple précédent nous montre que les règles de calcul habituels ne s'appliquent pas pour les intégrales impropres dont on n'a pas vérifié le sens ! En effet, si on écrivait sans réfléchir

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 = -2,$$

cela laisserait sous-entendre que l'intégrale existe bien alors que ce n'est pas le cas ! Notons qu'intuitivement, ce résultat serait aussi surprenant car la fonction que l'on intègre est positive et son intégrale devrait donc être positive !

Nous allons renforcer la définition de l'intégrale impropre pour avoir des critères permettant de vérifier la convergence de l'intégrale sans avoir à la calculer. Comme dans le cas des séries, ces critères seront basés sur la comparaison avec des fonctions de référence et s'appliquent aux fonctions à valeurs positives. Pour avoir une fonction à valeurs positives, nous allons considérer la valeur absolue de la fonction avec laquelle on travaille (comme pour la convergence absolue des séries). Cette approche est justifiée par le fait que l'existence de l'intégrale fléchée de $|f|$ implique l'existence de celle de f comme le montre le résultat suivant (admis).

Proposition 3.5.4. Si l'intégrale impropre de $|f|$ sur $]a, b]$ existe, alors l'intégrale impropre de f sur $]a, b]$ existe.

Nous adoptons donc la définition suivante.

Définition 3.5.5. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si l'intégrale impropre de $|f|$ sur $]a, b]$ existe, on dit que f est intégrable sur $]a, b]$

et on définit son intégrale $]a, b]$ en posant

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\rightarrow a}^b f(x) dx.$$

On dit aussi que f est intégrable en a^+ si $a \in \mathbb{R}$, et intégrable en $-\infty$ si $a = -\infty$.

On étend naturellement les définitions aux cas $[a, b[$ et $]a, b[$ et à la notion d'intégrabilité en b^- et en $+\infty$. On parle également de fonction *absolument intégrable* pour insister sur le fait qu'on travaille avec la valeur absolue. Cette notion est à comparer avec celle de convergence absolue pour les séries.

Remarque 3.5.6. Puisque la fonction $|f|$ est positive, la valeur de

$$t \in]a, b] \mapsto \int_t^b |f(x)| dx$$

augmente si t diminue. Ainsi, elle admet une limite en a^+ qui est soit finie (si f est intégrable), soit égale à $+\infty$.

On a par définition que f est intégrable si et seulement si $|f|$ l'est, ce qui revient à demander que l'intégrale impropre de $|f|$ soit finie. Lorsque la fonction f est de signe constant sur l'intervalle considéré, son intégrabilité est équivalente à l'existence de son intégrale impropre. Cela signifie que l'on peut déterminer si l'intégrale de f existe en évaluant la limite de l'intégrale définie de f lorsque les bornes de l'intervalle se rapprochent de manière appropriée. Il est important de noter que des nuances importantes apparaissent lorsque l'on travaille avec des fonctions de signe non constant. Dans de tels cas, les aires sous le graphe de la fonction f peuvent se “compenser”. Autrement dit, certaines aires peuvent être positives tandis que d'autres sont négatives, ce qui entraîne une annulation partielle ou totale de l'aire totale sous la courbe. Lorsque l'on considère la fonction $|f|$, toutes les aires sous le graphe de f sont positives et l'intégrale de $|f|$ mesure l'aire totale de la région située sous le graphe de f , sans se soucier du signe de f .

Exemple 3.5.7. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, f est continue sur $[0, +\infty[$ et on peut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{|\sin(x)|}{x} dx = +\infty \quad \text{alors que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ mais

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

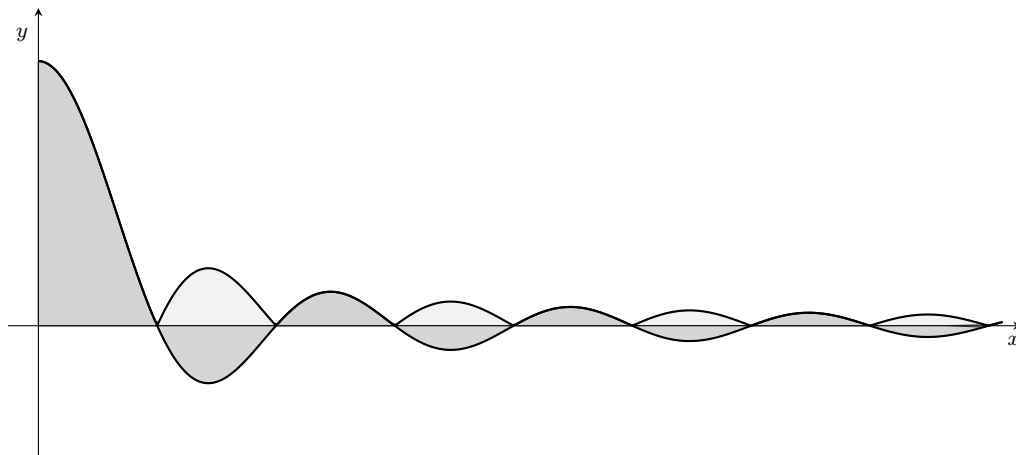


FIGURE 3.6 – Représentation graphique des fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Remarque 3.5.8 (Comparaison séries et intégrales). *Les propriétés de l'intégrabilité sont semblables à celles de la convergence absolue de série. En particulier, la convergence absolue/l'intégrabilité implique la convergence/l'existence de l'intégrale impropre, mais la réciproque est fausse.*

Concept	Intégrale	Série
Convergence simple	$\int_a^\infty f(x) dx$ existe	$\sum_{n=0}^\infty u_n$ converge
Convergence en valeur absolue	$\int_a^\infty f(x) dx < \infty$	$\sum_{n=0}^\infty u_n < \infty$
Nom	f est intégrable	$\sum u_n$ converge absolument
Conséquence	f admet une intégrale impropre	$\sum u_n$ converge
Réciproque	fausse (ex. $f(x) = \sin x/x$)	fausse (ex. $\sum_n (-1)^n/n$)

Les fonctions intégrables jouissent de belles propriétés semblables à celles démontrées pour l'intégrale de Riemann. Nous allons travailler en toute généralité avec des fonctions intégrables sur $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 3.5.9 (Linéarité). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $]a, b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, les fonctions αf et $f + g$ sont intégrables sur $]a, b[$ et on a*

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Proposition 3.5.10 (Sous-intervalles). *Soient f une fonction définie sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$. Alors, f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si f est intégrable sur $]a, c[$ et $]c, b[$. Dans ce cas, on a*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Proposition 3.5.11. *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $]a, b[$ telles que $f \leq g$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Proposition 3.5.12. *Si f est une fonction intégrable sur $]a, b[$, alors*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Les techniques d'intégration présentées dans le cas d'intervalles fermés bornés restent valides dans le cas d'intervalles ouverts quelconques, en y ajoutant les hypothèses nécessaires pour assurer le sens des différentes intégrales.

Théorème 3.5.13 (Variation de primitive). *Si f est une fonction continue et intégrable sur $]a, b[$, alors F admet des limites finies en a^+ et b^- , et on a*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

A nouveau, on note

$$[F]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Démonstration. Soit $[c, d] \subset]a, b[$. On sait que

$$\int_c^d f(t) dt = F(d) - F(c)$$

et on obtient la conclusion en faisant tendre c vers a^+ et d vers b^- . □

Exemple 3.5.14. *Calculons l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

Comme la fonction à intégrer est positive et continue sur $[0, +\infty[$, il suffit de vérifier que

l'intégrale est finie pour obtenir l'intégrabilité. Par variation de primitive, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} + e^0 = 1.$$

Donnons à présent le critère général d'intégration par parties.

Proposition 3.5.15 (Intégration par parties). *Si f et g sont deux fonctions de $C^1(]a, b[)$ telles que $f'g$ et fg' sont intégrables sur $]a, b[$, alors fg admet des limites finies en a^+ et b^- , et on a*

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Démonstration. Puisque fg est une primitive de $f'g + f'g$, le Théorème de variation de primitive donne

$$\int_a^b f(x)g'(x) + f'(x)g(x) dx = [fg]_a^b.$$

La linéarité de l'intégrale permet de conclure. □

Remarque 3.5.16. *Le résultat d'intégration par parties peut s'énoncer de manière plus générale dans le cas des intégrales impropres. Si f et g sont deux fonctions de $C^1(]a, b[)$ et si deux des assertions suivantes sont satisfaites*

- ▷ $f'g$ admet une intégrale sur $]a, b[$,
- ▷ fg' admet une intégrale sur $]a, b[$,
- ▷ fg admet des limites finies en a^+ et b^- ,

alors la troisième assertion est satisfaite et on a

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(x)g'(x) dx.$$

Exemple 3.5.17. *Calculons l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx.$$

Comme la fonction à intégrer est positive et continue sur $[1, +\infty[$, il suffit de vérifier que

l'intégrale est finie pour obtenir l'intégrabilité. On a

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx &= 2 \left(\left[\ln(x) \frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^2} dx \right) \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \frac{-1}{x} - 0 - \left[\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} \right) \\ &= -2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 \right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Comme toutes les intégrales apparaissant dans le calcul sont finies, la fonction est bien intégrable et les égalités sont vérifiées (nous verrons des critères permettant de justifier l'intégrabilité sans avoir à effectuer les calculs).

L'intégration par substitution s'énonce comme suit.

Proposition 3.5.18 (Intégration par substitution). *Soient deux fonctions $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $f : g(]a, b[) \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est intégrable sur l'intervalle ouvert défini par $g(a)$ et $g(b)$ ^a, si $(f \circ g)g'$ est intégrable sur $]a, b[$ et si g est continûment dérivable sur $]a, b[$, alors*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

^a. avec $g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ et $g(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$.

Remarque 3.5.19. *A nouveau, ce résultat peut s'énoncer de manière plus générale dans le cas des intégrales impropres. Si $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $f : g(]a, b[) \rightarrow \mathbb{R}$ et si g est continûment dérivable sur $]a, b[$, alors l'intégrale*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

existe si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

existe. Dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

Exemple 3.5.20. *Calculons l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{(x^2-x+8)^2} dx.$$

Comme la fonction à intégrer est positive et continue sur $[1, +\infty[$, il suffit de vérifier que

l'intégrale est finie pour obtenir l'intégrabilité. On a

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{(x^2-x+8)^2} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2-x+8)^2} (x^2-x+8)' dx \\
 &= \int_8^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \\
 &= \left[\frac{-1}{y} \right]_8^{+\infty} \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-1}{y} + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Le théorème du changement de variables est particulièrement important : en plus de donner une technique de calcul d'intégrale, il donne un critère d'intégrabilité de la fonction f à partir de l'intégrabilité de la fonction $(f \circ \varphi)\varphi'$.

Proposition 3.5.21 (Intégration par changement de variables). *Soit $\varphi : I \rightarrow]a, b[$ un changement de variables entre un intervalle ouvert I et $]a, b[$. Posons*

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{-1}(x).$$

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si $(f \circ \varphi)\varphi'$ est intégrable sur $]\alpha, \beta[$, et dans ce cas

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Exemple 3.5.22. *Montrons que*

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = -4.$$

La fonction à intégrer est continue et de signe constant sur $]0, 1]$. Considérons le changement de variables $\varphi(t) = t^2$ entre les ouverts $]0, 1[$ et $]0, 1[$. Si $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, on a

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\ln(t^2)}{\sqrt{t^2}} 2t = 4 \ln(t).$$

Cette fonction est continue de signe constant sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 4 \ln(t) dt = 4[t \ln(t) - t]_0^1 = -4$$

puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0.$$

3.6 Critères d'intégrabilité

Dans cette section, nous présentons des critères pour tester l'intégrabilité d'une fonction. Ils sont à comparer avec les critères étudiés pour tester la convergence absolue ou non d'une série.

Proposition 3.6.1 (Comparaison). *Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$. Supposons que g est une fonction positive intégrable sur $]a, b[$ telle que*

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in]a, b[.$$

Alors, f est intégrable sur $]a, b[$ et

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration. Si $[c, d] \subset]a, b[$, on a

$$\int_c^d |f(x)| dx \leq \int_c^d g(x) dx$$

par la Proposition 3.2.2. Il s'ensuit que

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^d |f(x)| dx \leq \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^d g(x) dx = \int_a^d g(x) dx < +\infty$$

et f est donc intégrable en a^+ (la limite existe car la valeur de l'intégrale est croissante lorsque $c \rightarrow a^+$). L'intégrabilité en b^- s'obtient de manière identique en faisant tendre d vers b^- . $\square$

Évidemment, ce résultat donne également un critère de non-intégrabilité : si g est une fonction telle que $|f(x)| \leq |g(x)|$ pour tout $x \in]a, b[$ et si f n'est pas intégrable sur $]a, b[$, alors g ne peut être intégrable sur $]a, b[$.

Afin d'énoncer le corollaire très pratique suivant, rappelons que deux fonctions f et g définies sur un intervalle $]a, b[$ sont *équivalentes* lorsque x converge vers a^+ si

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \quad \text{si } x \rightarrow a^+,$$

ce que l'on note $f(x) \sim g(x)$ si $x \rightarrow a^+$. Si g est non-nul au voisinage de a^+ , cela signifie que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On peut montrer que la relation $\sim$ est symétrique, c'est-à-dire

$$f \sim g \quad \text{si et seulement si} \quad g \sim f.$$

Corollaire 3.6.2. *Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*

telles que

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{si } x \rightarrow a^+.$$

Alors, f est intégrable en a^+ si et seulement si g est intégrable en a^+ .

Démonstration. Supposons que g est intégrable en a^+ . Par hypothèse, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - g(x)| \leq |g(x)|$$

pour tout $x \in]a, a + \delta[$. L'inégalité triangulaire inversée permet d'écrire

$$|f(x)| - |g(x)| \leq |g(x)|$$

et donc

$$|f(x)| \leq 2|g(x)|.$$

Comme g est intégrable en a^+ , il en est de même pour $2|g|$, et la Proposition 3.6.1 permet de conclure que f est intégrable en a^+ . On procède de même si f est intégrable en a^+ . $\square$

Le même résultat reste évidemment valide pour l'intégrabilité en b^- .

Corollaire 3.6.3. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{si } x \rightarrow b^-.$$

Alors, f est intégrable en b^- si et seulement si g est intégrable en b^- .

Présentons à présent les exemples fondamentaux de fonctions intégrables. Ils permettront d'énoncer des critères pour tester (par comparaison) l'intégrabilité d'une fonction aux points où elle n'est pas définie ou pas continue, et en $+\infty$ et $-\infty$.

Proposition 3.6.4 (Exemples fondamentaux). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{pour tout } x > 0$$

est

- ▷ intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$
- ▷ intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, remarquons que pour tout $x > 0$, on a $|f(x)| = f(x)$. Il suffit donc de vérifier que les intégrales impropres existent.

Si $\alpha = 1$, on a déjà montré dans l'Exemple 3.5.2 que f n'était intégrable ni en 0, ni à l'infini.

Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_t^1 = \frac{1 - t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

qui converge vers une limite finie lorsque $t \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\alpha < 1$. De même, on a

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^t = \frac{t^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}$$

qui converge vers une limite finie lorsque $t \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. $\square$

En particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est non intégrable aussi bien en 0 qu'en $+\infty$. Attention, les conditions en 0 et en $+\infty$ sont contraires.

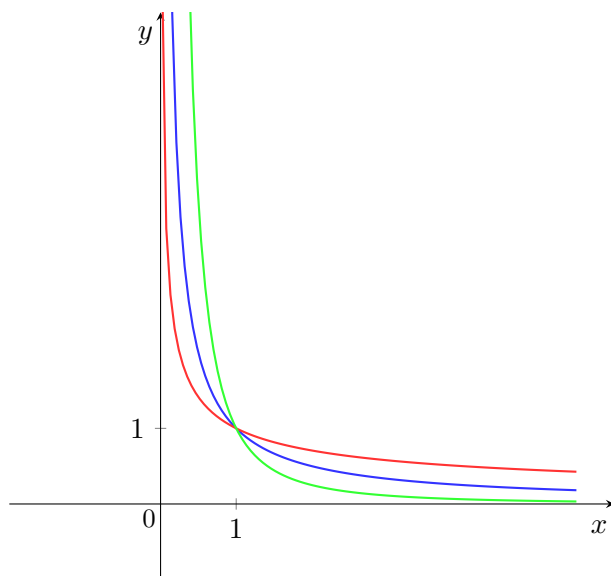


FIGURE 3.7 – Représentation graphique des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ (en bleu), $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ (en vert) et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ (en rouge) sur $]0, +\infty[$.

Exemples 3.6.5. La notion de comparaison asymptotique est en particulier très utile pour étudier l'intégrabilité de fractions rationnelles à l'infini.

▷ La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

est intégrable en $\pm\infty$ puisque $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ si $x \rightarrow \pm\infty$.

▷ La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^4 + 2x + 1}$$

n'est pas intégrable en $\pm\infty$ puisque $f(x) \sim \frac{1}{x}$ si $x \rightarrow \pm\infty$.

Nous allons à présent montrer comment les exemples fondamentaux permettent, par comparaison, d'obtenir des critères d'intégrabilité en un réel ou à l'infini. En effectuant un changement de variables dans la Proposition 3.6.4, on obtient que

▷ la fonction

$$x \in]a, +\infty[\mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

est intégrable

▷ en a^+ si et seulement si $\alpha < 1$

▷ en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$;

▷ la fonction

$$x \in]-\infty, b[\mapsto \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

est intégrable

▷ en b^- si et seulement si $\alpha < 1$

▷ en $-\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 3.6.6 (Critères d'intégrabilité en un réel). *Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Si f admet une limite finie en a^+ , alors f est intégrable en a^+ .*
2. *S'il existe $\theta < 1$ tel que la limite*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^\theta |f(x)|$$

existe et est finie, alors f est intégrable en a^+ .

Démonstration. 1. Comme f admet une limite finie en a^+ , on peut l'étendre en une fonction continue sur $[a, b]$ en posant

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Comme la fonction f ainsi étendue est continue sur $[a, b]$, elle y est intégrable et donc f est intégrable en a^+ .

2. Soit $L = \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^\theta |f(x)|$. Alors, pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| (x-a)^\theta |f(x)| - L \right| < 1 \quad \text{si } x-a < \delta.$$

On en tire que pour tout $x \in]a, a+\delta[$, on a

$$|f(x)| < \frac{L+1}{(x-a)^\theta}.$$

Comme $\theta < 1$, on a majoré la fonction $|f|$ sur $]a, a+\delta[$ par une fonction intégrable en a^+ . Le critère de comparaison permet de conclure. $\square$

On a bien sûr l'équivalent pour l'intégrabilité en b^- .

Théorème 3.6.7 (Critères d'intégrabilité en un réel). *Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.*

1. *Si f admet une limite finie en b^- , alors f est intégrable en b^- .*
2. *S'il existe $\theta < 1$ tel que la limite*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^\theta |f(x)|$$

existe et est finie, alors f est intégrable en b^- .

Pour l'intégrabilité en $-\infty$ et $+\infty$, on va comparer la fonction $|f|$ avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\Theta}$ pour $\Theta > 1$.

Théorème 3.6.8 (Critère d'intégrabilité en $-\infty$). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $] -\infty, b]$. S'il existe $\Theta > 1$ tel que la limite*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\Theta |f(x)|$$

existe et est finie, alors f est intégrable en $-\infty$.

Démonstration. Soit $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\Theta |f(x)|$. Alors, pour $\varepsilon = 1$, il existe $R > 0$ tel que

$$||x|^\Theta |f(x)| - L| < 1 \quad \text{si } x < -R.$$

Par conséquent, sur $] -\infty, -R[$, on a

$$|f(x)| < \frac{L + 1}{|x|^\Theta}.$$

Comme $\Theta > 1$, on a majoré la fonction $|f|$ sur $] -\infty, -R[$ par une fonction intégrable en $-\infty$. Le critère de comparaison permet de conclure. $\square$

On procède de la même manière pour démontrer le critère d'intégrabilité en $+\infty$.

Théorème 3.6.9 (Critère d'intégrabilité en $+\infty$). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$. S'il existe $\Theta > 1$ tel que la limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\Theta |f(x)|$$

existe et est finie, alors f est intégrable en $+\infty$.

Exemple 3.6.10. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$ et

▷ on a l'intégrabilité en 0^+ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} = 0$$

▷ on a l'intégrabilité en $+\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Exemple 3.6.11. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et

▷ on a l'intégrabilité en 0^+ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = 0$$

▷ on a l'intégrabilité en 1 car elle admet une limite finie en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

en utilisant le Théorème de l'Hospital,

▷ on a l'intégrabilité en $+\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

En comparant avec des fonctions non-intégrables, dont notamment la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui n'est ni intégrable en 0, ni intégrable à l'infini, on peut aussi obtenir des critères de non-intégrabilité. Ces critères impliquent que la fonction f n'est pas intégrable, c'est-à-dire que l'intégrale impropre de $|f|$ diverge. Par contre, il se peut que l'intégrale impropre de f existe.

Théorème 3.6.12 (Critères de non-intégrabilité en un réel).

1. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)|f(x)|$$

existe (peut valoir l'infini) et diffère de 0, alors f n'est pas intégrable en a^+ .

2. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)|f(x)|$$

existe (peut valoir l'infini) et diffère de 0, alors f n'est pas intégrable en b^- .

Démonstration. 1. Soit $L = \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)|f(x)| \neq 0$. Supposons d'abord que L est réel. Comme la fonction apparaissant dans la limite est positive, on sait que $L > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $L - \varepsilon > 0$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|(x - a)|f(x)| - L| < \varepsilon \quad \text{si } x - a < \delta.$$

En particulier, on a

$$\frac{L - \varepsilon}{x - a} < |f(x)|$$

sur $]a, a + \delta[$ et on a donc minoré $|f|$ par une fonction qui n'est pas intégrable en a^+ .

Si $L = +\infty$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$|(x - a)|f(x)|| > 1 \quad \text{si } x - a < \delta.$$

On conclut de la même manière.

2. La preuve est identique. □

Exemple 3.6.13. *Posons*

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \in]0, 1].$$

Pour étudier l'intégrabilité, il suffit de regarder le comportement en 0 puisque f est continue sur $]0, 1]$. On a On calcule la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{|\cos x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |\cos x| = 1 \neq 0.$$

D'après le critère de non-intégrabilité, f n'est pas intégrable en 0^+ .

Exemple 3.6.14. *Posons*

$$f(t) = \frac{1}{(1 - t)\sqrt{t}}, \quad t \in]0, 1[.$$

Comme f est continue sur $]0, 1]$, on doit regarder les deux bornes.

- ▷ En 0^+ : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-t} = 1$, donc f est intégrable en 0^+ .
- ▷ En 1^- : $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) |f(t)| = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{t}} = 1 \neq 0$, et on en tire que f n'est pas intégrable en 1^- .

Ainsi, f n'est pas intégrable sur $]0, 1[$.

Rappelons que si une série converge, alors son terme général tend vers 0. Ainsi, une première technique pour montrer qu'une série diverge est de montrer que son terme général ne converge pas vers 0. Nous énonçons ici l'équivalent de ce résultat dans le cas de l'intégrabilité en $\pm\infty$, qui suppose néanmoins que la fonction intégrée admette une limite à l'infini.

Proposition 3.6.15. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$$

existe.

- ▷ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\ell = 0$.
- ▷ Si $\ell \neq 0$, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$.

Démonstration. La première assertion étant la contraposée de la seconde, il suffit de démontrer la seconde. Supposons donc que $\ell > 0$. Alors, il existe $R \geq a$ tel que pour tout $x \geq R$, on a $|f(x)| \geq \frac{\ell}{2} > 0$. On en tire que pour tout $b > R$, on a

$$\int_R^b |f(x)| dx \geq \int_R^b \frac{\ell}{2} dx = (b - R) \frac{\ell}{2}.$$

En prenant la limite pour $b \rightarrow +\infty$, il vient que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_R^b |f(x)| dx = +\infty$$

et la fonction $|f|$ n'admet donc pas d'intégrale impropre en $+\infty$. On en tire que f n'est pas intégrable en $+\infty$. $\square$

Le résultat se réécrit immédiatement pour l'intégrabilité en $-\infty$.

Proposition 3.6.16. Soit $f :]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)|$$

existe.

- ▷ Si f est intégrable en $-\infty$, alors $\ell = 0$.
- ▷ Si $\ell \neq 0$, alors f n'est pas intégrable en $-\infty$.

Cependant, pour assurer que l'aire sous la courbe soit finie, il faut que la fonction converge

“suffisamment vite” vers 0. On va comparer cette vitesse avec celle de la fonction non intégrable à l’infini $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Théorème 3.6.17 (Critères de non-intégrabilité à l’infini).

1. Soit f une fonction continue sur $] -\infty, b]$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x |f(x)|$$

existe (peut valoir l’infini) et diffère de 0, alors f n’est pas intégrable en $-\infty$.

2. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x |f(x)|$$

existe (peut valoir l’infini) et diffère de 0, alors f n’est pas intégrable en $+\infty$.

Démonstration. On procède comme pour la non-intégrabilité en un réel. □

Notons que les Propositions 3.6.15 et 3.6.16 peuvent être vues comme un corollaire du théorème précédent. En effet, si la limite $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$ existe et est non-nulle, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x |f(x)| = +\infty$$

et donc f n’est pas intégrable en $+\infty$. On fait de même pour la non-intégrabilité en $-\infty$.

En résumé, si on se donne une fonction f dont on veut tester l’intégrabilité sur un intervalle ouvert $]a, b[$, on procède comme suit :

1. On commence par regarder où f est continue.
2. En chaque point de discontinuité x_0 , on teste l’intégrabilité en x_0 :
 - ▷ Si f admet une limite finie en x_0 , f est intégrable en x_0 .
 - ▷ Sinon, pour montrer que f est intégrable en x_0 , on utilise les critères en $\theta < 1$ donnés dans les Propositions 3.6.6 et 3.6.7 qui comparent la fonction f avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x-x_0|^\theta}$ au voisinage de x_0 .
 - ▷ Si on veut montrer que f n’est pas intégrable en x_0 , on utilise le critère de non-intégrabilité en un réel donné dans la Proposition 3.6.12 qui compare la fonction f avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-x_0)}$ au voisinage de x_0 .
3. En plus des points de discontinuité, si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, il faut étudier l’intégrabilité de f en $\pm\infty$:
 - ▷ On commence par regarder si la fonction tend bien vers 0 à l’infini.
 - ▷ Pour montrer que f est intégrable en $+\infty$ ou $-\infty$, on utilise les critères en $\Theta > 1$ donnés dans les Propositions 3.6.8 et 3.6.9 qui comparent la fonction f avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\Theta}$ à l’infini.

- ▷ Pour montrer que f n'est pas intégrable en $+\infty$ ou $-\infty$, on utilise le critère de non-intégrabilité à l'infini donné dans la Proposition 3.6.17 qui compare la fonction f avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ à l'infini.

On peut aussi essayer de comparer la fonction étudiée avec des fonctions intégrables ou non-intégrables.

3.7 Séries réelles

Dans cette section, nous montrons que la convergence de certaines séries à termes positifs peut être caractérisée grâce à l'intégrabilité de fonctions.

Proposition 3.7.1. *Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction positive, continue et décroissante. Alors, la série*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} f(j)$$

converge si et seulement si la fonction f est intégrable en $+\infty$.

Démonstration. Posons, pour tout $j \geq 1$,

$$g(x) = f(j), \quad \text{si } x \in [j, j+1[.$$

Supposons d'abord que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} f(j)$ converge. Remarquons que la fonction en escalier g est telle que, pour tout $x \in [j, j+1[$,

$$f(x) \leq g(x) = f(j),$$

puisque f est décroissante. On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_1^n f(x)dx = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} f(x)dx \leq \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} g(x)dx = \sum_{j=1}^{n-1} f(j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} f(j) < +\infty.$$

Ainsi, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx$$

existe et est finie, ce qui montre que f est intégrable en $+\infty$.

Supposons à présent que f est intégrable en $+\infty$. Pour tout $x \in [j-1, j[$ avec $j \geq 2$, on a $f(x) \geq f(j) = g(x)$. Il s'ensuit que

$$\int_{j-1}^j f(x)dx \geq \int_{j-1}^j g(x)dx = f(j).$$

En sommant de $j = 2$ à n , on obtient

$$\sum_{j=2}^n f(j) \leq \sum_{j=2}^n \int_{j-1}^j f(x)dx = \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty.$$

Ainsi, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} f(j)$ converge. □

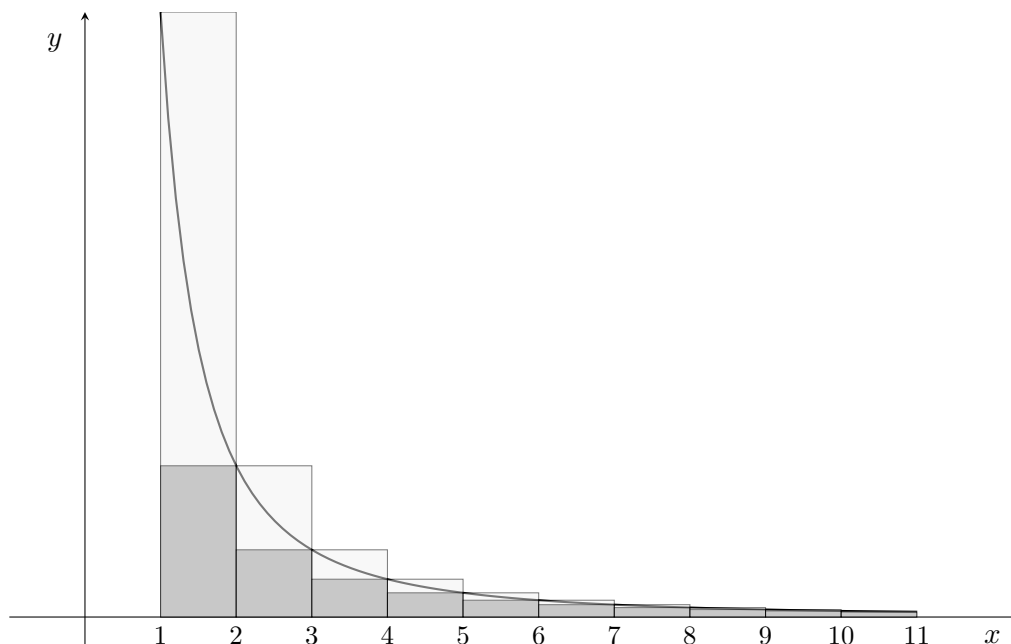


FIGURE 3.8 – L'aire sous la courbe est majorée par la somme des aires des rectangles blancs, et est minorée par la somme des aires des rectangles gris. Il s'agit de l'encadrement de l'aire sous la courbe donnée dans la preuve de la Proposition 3.7.1.

Évidemment, le résultat reste valide si f est une fonction positive, continue et décroissante sur un intervalle du type $[n, +\infty[$, en considérant la série

$$\sum_{j=n}^{+\infty} f(j).$$

Exemple 3.7.2. Ce critère permet de montrer que la série

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j \ln(j)}$$

diverge. En effet, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. De plus, elle n'est pas intégrable en $+\infty$ car elle est positive et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(\ln(x))]_2^n = +\infty.$$

Remarque 3.7.3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. On

retrouve donc les résultats obtenus pour les séries de Riemann : la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha}$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

3.8 Intégrales paramétriques

Dans cette section, on considère une fonction f de **deux** variables définie sur un ensemble produit du type $]a, b[\times]c, d[$. À partir de cette fonction, on peut s'intéresser à la fonction d'**une** seule variable réelle obtenue en posant

$$g(t) = \int_a^b f(x, t) dx,$$

à condition que cette intégrale ait du sens pour tout $t \in]c, d[$. De telles fonctions g qui apparaissent sous forme d'*intégrale paramétrique* jouent un rôle essentiel en analyse, notamment dans l'étude des propriétés des solutions d'équations différentielles ou encore dans la théorie de Fourier.

Dans cette section, nous présentons des résultats permettant d'étudier la régularité de la fonction g à partir de la régularité de la fonction f . Commençons par regarder ce que donne la continuité dans le cas simple où la fonction f est définie sur $[a, b] \times]c, d[$.

Proposition 3.8.1. *Si $f : [a, b] \times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la fonction*

$$g :]c, d[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_a^b f(x, t) dx$$

est continue sur $]c, d[$.

Démonstration. La continuité de la fonction f sur $[a, b] \times]c, d[$ implique directement que pour tout $t \in]c, d[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$. Elle y est donc intégrable et la fonction g est bien définie.

Fixons $t_0 \in]c, d[$ et montrons que g est continue en t_0 . On peut considérer $r > 0$ suffisamment petit pour avoir $[t_0 - r, t_0 + r] \subset]c, d[$. L'ensemble $[a, b] \times [t_0 - r, t_0 + r]$ étant compact et la fonction f étant continue sur cet ensemble, on en tire qu'elle y est uniformément continue par le Théorème de Heine². Ainsi, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $(x, t), (x', t') \in [a, b] \times [t_0 - r, t_0 + r]$ sont tels que $\|(x, t) - (x', t')\| < \eta$, on a

$$|f(x, t) - f(x', t')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

En particulier, si $|t - t_0| < \eta$, on a

$$|g(t) - g(t_0)| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x, t_0)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon.$$

2. Une généralisation à $\mathbb{R}^n$: toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Cela permet de conclure. □

Intéressons-nous à présent à la dérivabilité de la fonction g obtenue comme intégrale paramétrique. Le résultat ci-dessous montre que, sous certaines hypothèses, on peut “dériver sous le signe d’intégration”. Notons que ce résultat est non-trivial car il cache un échange de deux limites (celle de la dérivée et celle de l’intégrale).

Proposition 3.8.2. *Soit $f : [a, b] \times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si*

- ▷ *f est dérivable par rapport à sa seconde coordonnée en tout point $(x, t) \in [a, b] \times]c, d[$,*
- ▷ *la seconde dérivée partielle $D_2 f$ de f est continue sur $[a, b] \times]c, d[$,*

alors la fonction

$$g :]c, d[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_a^b f(x, t) dx$$

est de classe C^1 sur $]c, d[$ et on a

$$\left(\int_a^b f(x, t) dx \right)' = \int_a^b D_2 f(x, t) dx.$$

Démonstration. Soit $t_0 \in]c, d[$ et $r > 0$ suffisamment petit tel que $[t_0 - r, t_0 + r] \subset]c, d[$. Pour tout $t \in]t_0 - r, t_0 + r[$, on a

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \int_a^b \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx$$

et il s’ensuit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b D_2 f(x, t_0) dx \right| &= \left| \int_a^b \left(\frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - D_2 f(x, t_0) \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - D_2 f(x, t_0) \right| dx. \end{aligned}$$

Fixons $x \in [a, b]$. Comme la fonction $f(x, \cdot)$ est dérivable sur l’intervalle formé par t et t_0 , le Théorème des accroissements finis donne l’existence d’un point ξ_x entre t et t_0 tel que

$$\frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} = D_2 f(x, \xi_x).$$

On a donc

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - D_2 f(x, t_0) \right| = |D_2 f(x, \xi_x) - D_2 f(x, t_0)|.$$

Comme la fonction $D_2 f$ est continue sur $[a, b] \times [t_0 - r, t_0 + r]$, le Théorème de Heine implique qu’elle y est uniformément continue. Si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$|D_2 f(x, t) - D_2 f(x', t')| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{si} \quad \|(x, t) - (x', t')\| < \eta.$$

En particulier, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|D_2f(x, t) - D_2f(x, t_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{si} \quad |t - t_0| < \eta.$$

On en tire que

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - D_2f(x, t_0) \right| = |D_2f(x, \xi) - D_2f(x, t_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

si $|t - t_0| < \eta$ (puisque alors $|\xi - t_0| < \eta$), d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b D_2f(x, t_0) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - D_2f(x, t_0) \right| dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

si $|t - t_0| < \eta$, ce qui suffit. □

Si la fonction f est définie sur un produit $]a, b[\times]c, d[$ d'intervalles ouverts, on a le résultat plus général suivant. La preuve de ce résultat sort du cadre du cours, reposant sur des théorèmes permettant “d'échanger les limites et les intégrales” (appelés *Théorèmes limites*).

Théorème 3.8.3 (Dérivation des intégrales paramétriques). *Soit $f :]a, b[\times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si*

- ▷ *pour tout $t \in]c, d[$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]a, b[$,*
- ▷ *pour tout $x \in]a, b[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $]c, d[$,*
- ▷ *pour tout $[c', d'] \subseteq]c, d[$, il existe une fonction G intégrable sur $]a, b[$ telle que*

$$|D_2f(x, t)| \leq G(x) \quad \text{pour tout } x \in]a, b[\text{ et tout } t \in [c', d'],$$

alors la fonction

$$g :]c, d[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_a^b f(x, t) dx$$

est de classe C^1 sur $]c, d[$ et on a

$$D_2 \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b D_2f(x, t) dx.$$

On remarquera que dans l'hypothèse de majoration, la fonction G ne dépend pas du paramètre t qui appartient à l'intervalle fermé borné $[c', d']$ fixé, elle dépend seulement de la variable d'intégration x .

Remarque 3.8.4. L'énoncé précédent peut encore être allégé en demandant uniquement que pour presque tout $x \in]a, b[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $]c, d[$. Il faut une théorie plus générale pour pouvoir exprimer ce que signifie “presque tout” point. Pour l'instant, nous pouvons juste retenir qu'il suffit d'avoir la propriété demandée en tout point de $]c, d[$, sauf éventuellement en un nombre dénombrable de points.

L'utilisation du théorème de dérivation des intégrales paramétriques est particulièrement utile lorsqu'on ne sait pas calculer l'intégrale. Présentons un exemple d'application.

Exemple 3.8.5. Montrons que la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx$$

satisfait l'équation différentielle $2g'(t) + tg(t) = 0$. Posons $f(x, t) = e^{-x^2} \cos(tx)$ pour tous $x, t \in \mathbb{R}$. Remarquons que l'intégrale a du sens car pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, et elle y est intégrable car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} |\cos(tx)| = 0.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \in]0, +\infty[\mapsto e^{-x^2} \cos(tx)$ est continûment dérivable, de dérivée $D_2 f(x, t) = -xe^{-x^2} \sin(tx)$. Enfin, si $[c', d'] \subset \mathbb{R}$, on a

$$|-xe^{-x^2} \sin(tx)| \leq |x|e^{-x^2} \quad \text{pour tous } x \in \mathbb{R}, t \in [c', d']$$

où le majorant est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. Remarquons ici que la même fonction majorante fonctionne quel que soit l'intervalle $[c', d']$ de variation de t considéré. Le Théorème de dérivation des intégrales paramétriques implique donc que g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$g'(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} \sin(tx) dx.$$

En effectuant une intégration par parties, il vient que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left(\left[\frac{e^{-x^2}}{2} \sin(tx) \right]_{x=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} t \cos(tx) dx \right) \\ &= \frac{-t}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx \\ &= \frac{-t}{2} g(t), \end{aligned}$$

d'où $2g'(t) + tg(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous avons vu dans l'Exemple 2.2.11 que cette équation admet pour solution $g(t) = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$ où C est une constante. Ainsi, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

avec

$$C = g(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Nous verrons plus tard que $C = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Terminons cette section en énonçant une généralisation du théorème de dérivation des intégrales paramétriques aux ordres supérieurs et aux fonctions de plusieurs variables. Pour cela, appelons un *multi-indice* de dimension n tout n -uplet de naturels $(k_1, \dots, k_n)$. La *longueur* de $(k_1, \dots, k_n)$ est donnée par $k_1 + \dots + k_n$.

Théorème 3.8.6 (Dérivation des intégrales paramétriques). *Soit $f :]a, b[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si*

- ▷ *pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \Omega$ la fonction $x \mapsto f(x, t_1, \dots, t_n)$ est intégrable sur $]a, b[$,*
- ▷ *pour tout $x \in]a, b[$, la fonction $(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(x, t_1, \dots, t_n)$ est de classe C^p dans Ω ,*
- ▷ *pour tout compact K inclus dans Ω et tout multi-indice $(k_1, \dots, k_n)$ de longueur p , il existe une fonction G intégrable sur $]a, b[$ telle que*

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_n}} f(x, t_1, \dots, t_n) \right| \leq G(x) \quad \text{pour tout } x \in]a, b[\text{ et tout } (t_1, \dots, t_n) \in K,$$

alors la fonction

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t_1, \dots, t_n) \mapsto \int_a^b f(x, t_1, \dots, t_n) dx$$

est de classe C^p sur Ω et on a

$$\frac{\partial^p}{\partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_n}} \left(\int_a^b f(x, t_1, \dots, t_n) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial^p f}{\partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_n}}(x, t_1, \dots, t_n) dx$$

pour tout multi-indice $(j_1, \dots, j_n)$ de longueur plus petite ou égale à p .

4 Intégrales multiples

L'objectif de ce chapitre est d'établir un concept d'intégrale adapté aux fonctions de plusieurs variables réelles. À la place de calculer des aires sous des courbes, la notion d'intégrale double va permettre de calculer des volumes sous une surface. Les intégrales d'ordres supérieur permettent de généraliser la notion de "volume" à des dimensions supérieures. Ce qui se distingue ici par rapport aux fonctions d'une seule variable réelle, c'est la diversité des domaines sur lesquels nous pouvons intégrer. Contrairement à l'intégrale simple, dont le domaine d'intégration est toujours un intervalle ou une union d'intervalles, les intégrales multiples nous permettent d'intégrer des fonctions à deux variables sur des formes variées telles que des rectangles, des disques, des ellipses et bien d'autres. De même, pour les fonctions à trois variables, nous pouvons intégrer sur des formes comme des sphères, des cylindres, des cônes, des ellipsoïdes...

4.1 Intégrales doubles

4.1.1 Fonctions continues sur des rectangles

Considérons une fonction continue f de deux variables définie sur un rectangle

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d].$$

Parallèlement à ce qui a été fait dans le cadre de fonctions d'une seule variable réelle, nous souhaitons calculer le *volume sous le graphe* de f , où on rappelle que le graphe de f est donné par

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Pour estimer ce volume, nous commençons par découper le rectangle $\mathcal{R}$ en n sous-rectangles $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ plus petits. Si n est grand, on peut supposer que f est *approximativement* constant sur chaque sous-rectangle $\mathcal{R}_j$, autrement dit sur $\mathcal{R}_j$, la fonction f est bien approximée par $f(x_j, y_j)$ si $(x_j, y_j) \in \mathcal{R}_j$. Grâce au découpage $\mathcal{P}$ donné par les sous-rectangles $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ et les points $(x_j, y_j) \in \mathcal{R}_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on peut estimer le volume sous le graphe de f par

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \text{Aire}(\mathcal{R}_j)$$

où $\text{Aire}(\mathcal{R}_j)$ désigne l'aire du rectangle $\mathcal{R}_j$. Cette somme est donc la somme des volumes signés des parallélépipèdes de base $\mathcal{R}_j$ et de hauteur $f(x_j, y_j)$ (à la place des aires des rectangles dans le cas de fonctions d'une seule variable réelle). Plus le découpage sera "fin", plus nous pouvons

espérer avoir une bonne approximation du volume sous le graphe de f . Pour cela, on introduit le *diamètre* $|\mathcal{P}|$ du découpage comme étant le maximum des diagonales des rectangles $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$. Si $(\mathcal{P}_n)_n$ est une suite de découpages du rectangle $\mathcal{R}$ telle que la suite des diamètres $(|\mathcal{P}_n|)_n$ tend vers 0, on s'attend à ce que la suite des sommes $(S(\mathcal{P}_n, f))_n$ converge effectivement vers le volume sous le graphe de f .

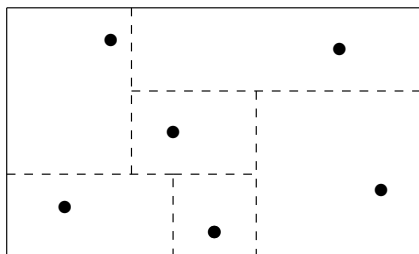


FIGURE 4.1 – Un découpage à la Riemann avec $n = 6$.

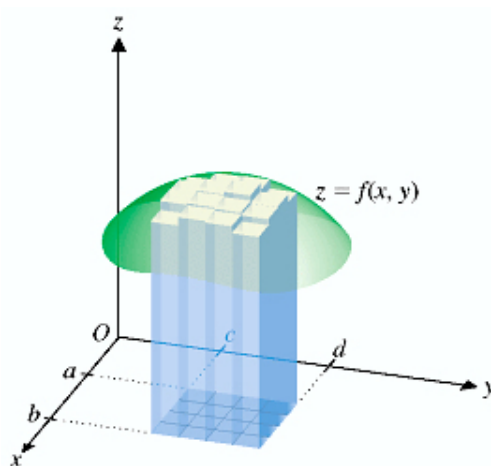


FIGURE 4.2 – Estimation du volume sous le graphe de f via le volume des parallélépipèdes donnés par un découpage à la Riemann

Définition 4.1.1. Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est Riemann-intégrable sur $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ si pour toute suite $(\mathcal{P}_n)_n$ de découpages du rectangle $\mathcal{R}$ telle que la suite des diamètres $(|\mathcal{P}_n|)_n$ tend vers 0, la suite des sommes $(S(\mathcal{P}_n, f))_n$ converge vers une limite finie. Dans ce cas, toutes ces limites sont les mêmes. L'intégrale de Riemann de f sur $\mathcal{R}$ est la valeur commune de ces limites et on la note

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle, toute fonction continue sur un rectangle $\mathcal{R}$ est Riemann-intégrable.

Proposition 4.1.2. *Si $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, alors f est Riemann-intégrable sur $\mathcal{R}$.*

Dans la pratique, on peut calculer l'intégrale double de f comme une succession d'intégrales simples (en traitant d'abord une variable comme constante).

Théorème 4.1.3 (Fubini sur un rectangle). *Soit $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Alors, on a*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Remarquons que $\int_c^d f(x, y) dy$ ne dépend plus de y , mais seulement de x . Cela définit donc une fonction

$$x \in [a, b] \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

que l'on peut intégrer sur $[a, b]$. De même, $\int_a^b f(x, y) dx$ ne dépend plus de x , mais seulement de y . On a donc cette fois-ci une fonction

$$y \in [c, d] \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

que l'on peut intégrer sur $[c, d]$. Le Théorème de Fubini nous dit que ces intégrales successives sont égales. D'un point de vue géométrique, cela signifie que le volume délimité par le graphe de la fonction f peut être interprété comme la somme des aires des surfaces obtenues en coupant ce volume par une succession de plans parallèles aux axes.

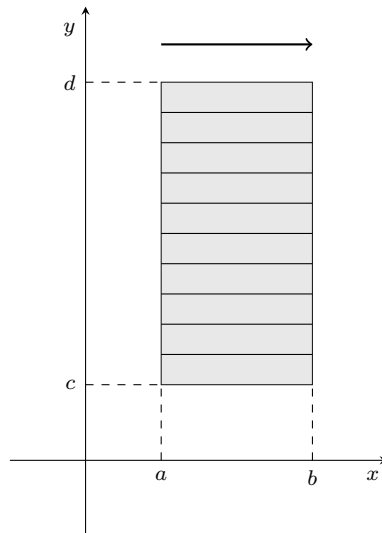
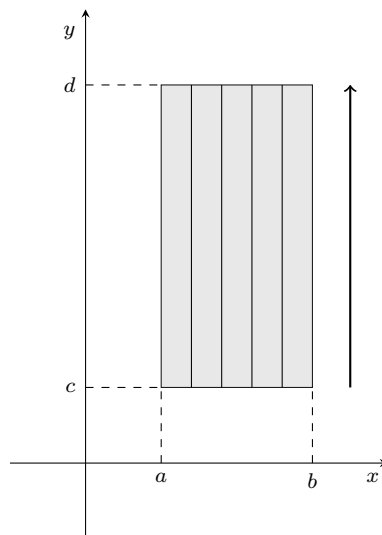
Remarque 4.1.4. *Si $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ est continu, la Proposition 3.8.1 nous permet d'affirmer que l'application*

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

est continue sur $[c, d]$. Ainsi, la seconde intégrale par rapport à y a du sens. On a le même résultat si on fixe d'abord x .

Exemple 4.1.5. *Calculons l'intégrale de la fonction continue*

$$f(x, y) = xy^2$$

FIGURE 4.3 – Calcul de $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$.FIGURE 4.4 – Calcul de $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

sur le rectangle $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2]$. Par le Théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{3} \right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 \frac{8x}{3} - \frac{x}{3} dx \\ &= \int_0^1 \frac{7x}{3} dx \\ &= \left[\frac{7x^2}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy \\ &= \left[\frac{y^3}{6} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

Exemple 4.1.6. Considérons la fonction continue sur $\mathcal{R} = [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{4}, 1]$ définie par

$$f(x, y) = \frac{6}{5}(x + y^2).$$

Par le Théorème de Fubini, on calcule

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{6}{5}(x + y^2) dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{6}{5} \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \right]_{y=\frac{1}{4}}^{y=1} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{9x}{10} + \frac{63}{160} \right) dx \\ &= \left[\frac{9x^2}{20} + \frac{63x}{160} \right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \\ &= \frac{171}{320},\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6}{5}(x + y^2) dx \right) dy = \int_{\frac{1}{4}}^1 \left[\frac{6}{5} \left(\frac{x^2}{2} + y^2 x \right) \right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} dy \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{9}{20} + \frac{3y^2}{5} \right) dy \\ &= \left[\frac{9y}{20} + \frac{y^3}{5} \right]_{y=\frac{1}{4}}^{y=1} \\ &= \frac{171}{320}.\end{aligned}$$

Remarque 4.1.7. Si la fonction qu'on intègre est de la forme $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, alors

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^b f_1(x)f_2(y) dx dy \\ &= \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right).\end{aligned}$$

4.1.2 Fonctions continues sur des ensembles compacts et théorème de Fubini

Considérons à présent une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble compact (c'est-à-dire fermé et borné) D de $\mathbb{R}^2$. On souhaite calculer l'intégrale de f sur D . Comme D est borné, il existe des réels a, b, c, d tels que

$$D \subset [a, b] \times [c, d].$$

On peut alors se ramener à la définition précédente en posant

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dx dy$$

où $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ et

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Même si la fonction g n'est pas continue, elle l'est par morceaux et l'intégrale aura du sens. Ainsi, toute fonction continue sur un compact y est intégrable, et le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d g(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b g(x, y) dx \right) dy.$$

Pour pouvoir calculer efficacement ce type d'intégrale double, il faut pouvoir écrire les intégrales simples :

- ▷ si x est fixé entre a et b , il faut décrire la fonction $y \mapsto g(x, y)$ et comprendre quand cette fonction prend la valeur $f(x, y)$ et quand elle prend la valeur 0. Cela revient à déterminer

$$\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}.$$

- ▷ si y est fixé entre c et d , il faut décrire la fonction $x \mapsto g(x, y)$ et comprendre quand cette fonction prend la valeur $f(x, y)$ et quand elle prend la valeur 0. Cela revient à déterminer

$$\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}.$$

Cela nous donnera alors une généralisation du théorème de Fubini sur un rectangle à un contexte plus large. Nous devons donc considérer un découpage en tranches verticales et horizontales de l'ensemble D . Autrement dit, pour un x fixé, nous voulons faire varier y de manière à ce que (x, y) reste dans D . De même, pour un y fixé, nous voulons faire varier x pour que (x, y) appartienne à D .

Définition 4.1.8. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in D$, on pose

$$V_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$$

et

$$H_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}.$$

L'ensemble V_x est donc l'intersection de D avec la droite verticale d'abscisse x , et l'ensemble H_y est l'intersection de D avec la droite horizontale d'ordonnée y . On a alors

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ et } y \in V_x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] \text{ et } x \in H_y\}.$$

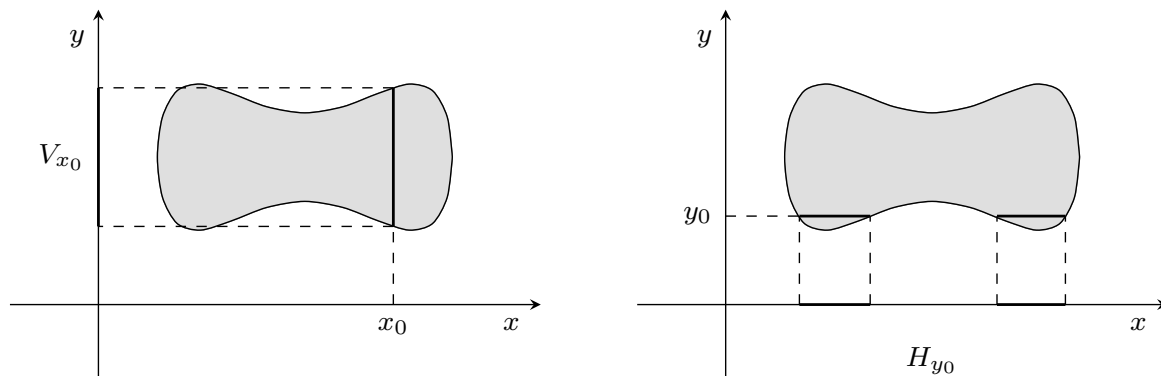


FIGURE 4.5 – Découpage d'un ensemble D en tranches verticales (à gauche) et horizontales (à droite).

Exemple 4.1.9. Considérons le disque D centré en $(0, 0)$ et de rayon 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Clairement, on peut inclure le disque D dans le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

▷ Si x est fixé dans $[-1, 1]$, on a

$$\begin{aligned} V_x &= \{y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\} \\ &= [-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}] \end{aligned}$$

et donc

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}]\}$$

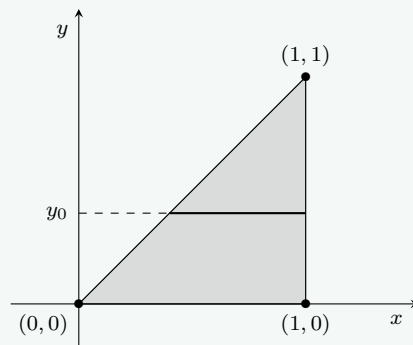
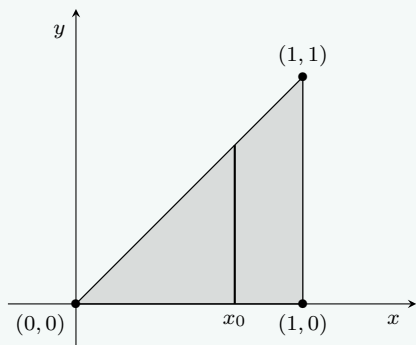
▷ De même, si $y \in [-1, 1]$, on a

$$H_y = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\} = [-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}]$$

et donc

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1] \text{ et } x \in [-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}]\}.$$

Exemple 4.1.10. Considérons le triangle T de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Clairement, ce triangle est inclus dans le carré $[0,1] \times [0,1]$.



▷ Fixons $x \in [0,1]$. On a

$$V_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in T\} = [0, x]$$

et donc

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, x]\}.$$

▷ Si on fixe à présent $y \in [0,1]$, on a

$$H_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in T\} = [y, 1]$$

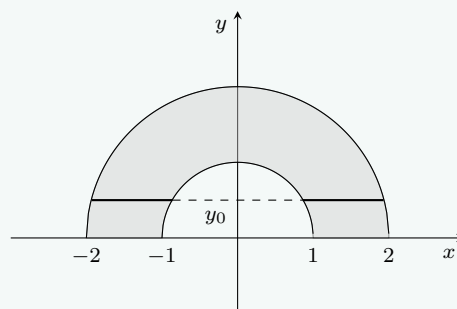
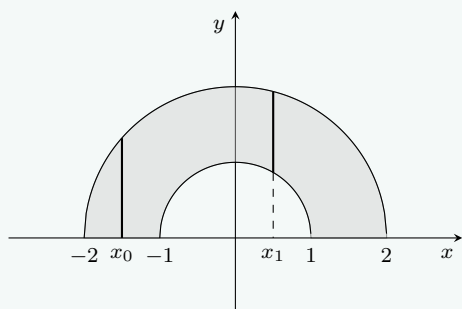
et donc

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1] \text{ et } x \in [y, 1]\}.$$

Cette décomposition d'un ensemble en bandes horizontales et verticales permet de calculer des intégrales doubles comme une simple succession d'intégrales simples. Il se peut également que les bandes horizontales ou verticales ne soient pas des intervalles, mais plutôt des unions d'intervalles.

Exemple 4.1.11. Considérons l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



Pour tout $x \in [-2, 2]$, on a

$$V_x = \begin{cases} [0, \sqrt{4-x^2}] & \text{si } x \in [-2, -1[\cup]1, 2] \\ [\sqrt{1-x^2}, \sqrt{4-x^2}] & \text{si } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

De même, si $y \in [1, 2]$, on a

$$H_y = [-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}].$$

Par contre, si $y \in [0, 1[$, on ne peut pas décrire H_y sous la forme d'un intervalle puisqu'il est formé de "deux morceaux"

$$H_y = [-\sqrt{4-y^2}, -\sqrt{1-y^2}] \cup [\sqrt{1-y^2}, \sqrt{4-y^2}].$$

Dans ce contexte, le Théorème de Fubini prend la forme suivante.

Théorème 4.1.12 (Fubini sur des ensembles compacts). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble compact $D \subset [a, b] \times [c, d]$. Alors, f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{V_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{H_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

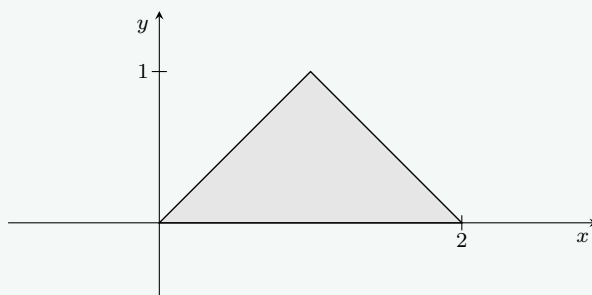
En particulier, on peut échanger l'ordre d'intégration.

Exemple 4.1.13. Calculons l'intégrale de la fonction

$$f(x, y) = y$$

sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}.$$



On remarque que D est en fait le triangle délimité par les droites d'équation $y = 0$, $y = x$ et $y = 2 - x$. Si $y \in [0, 1]$, la tranche verticale H_y est donnée par

$$H_y = [y, 2 - y].$$

Ainsi, le Théorème de Fubini permet de calculer

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} y dx \right) dy = \int_0^1 [yx]_{x=y}^{x=2-y} dy = \int_0^1 y(2-y) - y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Si on souhaite calculer l'intégrale "en fixant d'abord x ", la description des bandes verticales est donnée par deux cas. Si $x \in [0, 1]$, alors y varie entre 0 et x . Si $x \in [1, 2]$, alors y varie entre 0 et $2-x$. On a donc

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x y dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} y dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx + \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_1^2 \frac{(2-x)^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{(2-x)^3}{6} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

comme obtenu précédemment.

Comme signalé précédemment les ensembles V_x et H_y ne sont pas nécessairement des intervalles. Quand il s'agit d'unions finie d'intervalles qui ne se rencontrent pas (sauf éventuellement à leur frontière), il suffit comme nous venons de le faire de sommer les intégrales correspondantes.

Exemple 4.1.14. Reprenons l'ensemble D de l'Exemple 4.1.11. Alors, si fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on a

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{H_y} f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

4.1.3 Calcul d'aires de domaines

Nous avons introduit l'intégrale d'une fonction sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ en souhaitant calculer le volume (signé) délimité sous son graphe. Autrement dit, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive continue sur D , on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{Volume}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}).$$

Dans le cas particulier de la fonction f constante et égale à 1, le graphe de z est le plan $z = 1$. Ainsi, on a

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq 1\},$$

et l'ensemble dont on calcule le volume est donc un cylindre de base D et de hauteur 1. Le volume de ce cylindre est donné par l'aire de D . On a donc le résultat suivant.

Proposition 4.1.15. *Soit D un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$. Alors, l'aire de D est donnée par*

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy.$$

Exemple 4.1.16. *Supposons que nous souhaitons calculer l'aire du triangle T de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ considéré dans l'Exemple 4.1.10. On peut calculer l'aire de ce triangle en intégrant la fonction constante $f(x,y) = 1$ sur T*

$$\text{Aire}(T) = \iint_T 1 \, dx \, dy.$$

En utilisant le Théorème de Fubini, on a

$$\text{Aire}(T) = \int_0^1 \left(\int_0^x 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

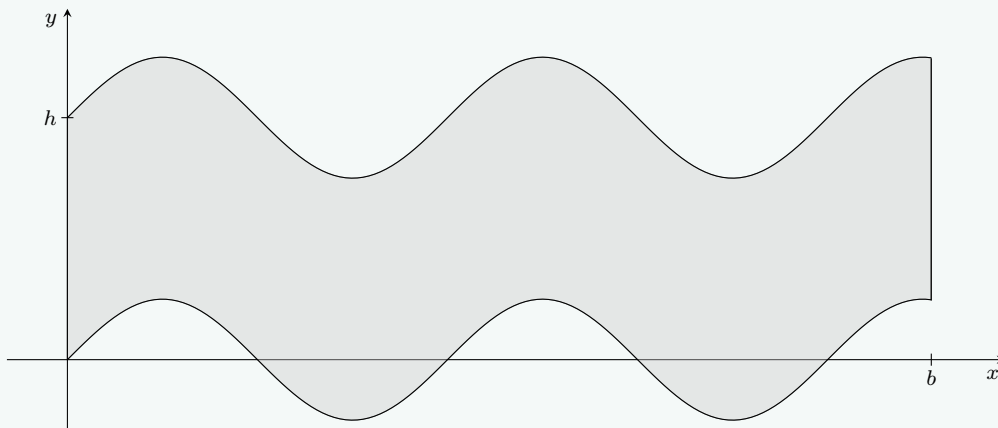
Exemple 4.1.17. *On peut également calculer des aires de domaines plus compliqués. Par exemple, prenons l'ensemble*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq b \text{ et } \sin(x) \leq y \leq \sin(x) + h\}$$

Par définition, on a

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_0^b \left(\int_{\sin(x)}^{\sin(x)+h} 1 \, dy \right) dx = \int_0^b h \, dx = hb.$$

On retrouve donc l'aire du rectangle de côtés h et b .



4.1.4 Fonctions continues sur des ensembles non-bornés ou ouverts

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle, on peut s'intéresser à l'intégrale de fonctions continues sur des sous-ensembles D ouverts ou non-bornés. On suppose donc que

$$D \subset]a, b[\times]c, d[$$

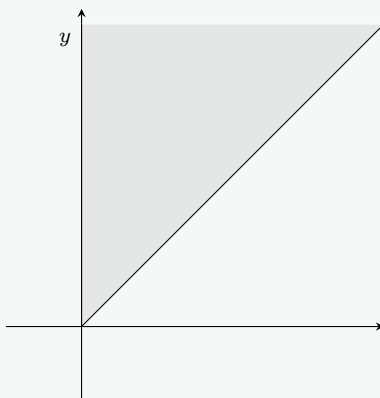
où a, b, c et d peuvent maintenant prendre la valeur $\pm\infty$. On garde les notations V_x et H_y de la section précédente.

Exemple 4.1.18. On a

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ et } x < y\}.$$

Autrement dit, si $x \in [0, +\infty[$, alors

$$V_x =]x, +\infty[.$$



On souhaiterait préserver la propriété pratique de l'intégrale qui permet de permuter l'ordre d'intégration sans altérer la valeur de l'intégrale. C'est une caractéristique très utile en analyse. Cependant, dans ce contexte seul, cette propriété ne suffit pas à garantir des résultats satisfaisants qui permettraient de ramener l'intégrale double à une succession d'intégrales simples. En effet, voici un exemple qui illustre qu'en l'absence de conditions supplémentaires, il n'est pas toujours possible de permuter les intégrales sans modifier leur valeur.

Exemple 4.1.19. Considérons la fonction continue sur $]0, 1[\times]0, 1[$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

et regardons ce que donnent les intégrales successives de f sur $]0, 1[\times]0, 1[$. Premièrement,

calculons l'intégrale en fixant d'abord x . On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx &= \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, calculons l'intégrale en fixant d'abord y . On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{1 + y^2} dy \\ &= -\arctan(1) \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans ce cas, l'ordre d'intégration affecte le résultat de l'intégrale.

Par ailleurs, si on compare avec le cas des fonctions d'une seule variable réelle (notion d'intégrale fléchée et d'intégrabilité), on pourrait naturellement définir l'intégrale d'une fonction positive f sur D en approchant celle-ci par les intégrales sur les compacts inclus dans D . Pour obtenir des critères d'intégrabilité qui permettent d'assurer que cette borne supérieure existe sans avoir à calculer toutes les intégrales sur tous les sous-ensembles compacts K et afin d'avoir des résultats de permutation de l'ordre d'intégration, on fait comme dans le cas des fonctions à une seule variable réelle : on parle d'intégrabilité absolue.

Définition 4.1.20. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^2$.

▷ Si f est positive et si

$$\sup \left\{ \iint_K f(x, y) dx dy : K \text{ compact}, K \subset D \right\} < +\infty,$$

alors on dit que f est intégrable sur D et on pose

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sup \left\{ \iint_K f(x, y) dx dy : K \text{ compact}, K \subset D \right\}.$$

▷ Si f est à valeurs réelles, on dit que f est intégrable sur D si $|f|$ est intégrable sur D .

Le Théorème de Tonelli fournit un critère pratique pour vérifier l'intégrabilité d'une fonction sur un ensemble D .

Théorème 4.1.21 (Tonelli). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$. Si

▷ pour tout $x \in]a, b[$, la fonction

$$y \in V_x \mapsto |f(x, y)|$$

est intégrable sur V_x et

▷ la fonction

$$x \in]a, b[\mapsto \int_{V_x} |f(x, y)| dy$$

est intégrable sur l'intervalle $]a, b[$,

alors f est intégrable sur D .

On a bien sûr l'analogue en fixant d'abord y . Ainsi, pour montrer qu'une fonction de deux variables est intégrable, on vérifie que les hypothèses du Théorème de Tonelli sont satisfaites en se ramenant aux critères d'intégrabilité des fonctions d'une variable réelle. En particulier, on a le corollaire suivant pour les fonctions à variables séparées.

Corollaire 4.1.22. Si f_1 est une fonction d'une variable réelle continue et intégrable sur un intervalle I et si f_2 est une fonction d'une variable réelle continue et intégrable sur un intervalle J , alors la fonction

$$f : I \times J \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f_1(x)f_2(y)$$

est intégrable sur $I \times J$.

On peut aussi utiliser le résultat pratique suivant qui étend le critère de comparaison qui a été vu dans la Proposition 3.6.1 dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle.

Proposition 4.1.23 (Comparaison). Soient f et g deux fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Si g est une fonction positive intégrable sur D telle que

$$|f(x, y)| \leq g(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in D,$$

alors f est intégrable sur D et

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Exemple 4.1.24. Étudions l'intégrabilité de la fonction

$$f(x, y) = e^{-x} \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}$$

sur l'ensemble

$$D = [0, +\infty[\times [0, 1[.$$

On remarque que f est continue sur D et que

$$|f(x, y)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Pour montrer que f est intégrable sur D , il suffit donc de montrer que la fonction positive $(x, y) \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-y^2}}$ est intégrable sur D . Pour cela, on remarque que la fonction $f_1(x) = e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et la fonction $f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$. Le Corollaire 4.1.22 et la Proposition 4.1.23 permettent de conclure.

Le résultat suivant est extrêmement important : il montre que l'hypothèse d'intégrabilité permet de calculer l'intégrale double comme une succession d'intégrales simples.

Théorème 4.1.25 (Fubini général). *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur un ensemble D . Si f est intégrable sur D , alors on peut échanger l'ordre d'intégration, c'est-à-dire*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{V_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{H_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

En particulier, lorsque f est à valeurs positives, le fait de pouvoir intégrer dans un ordre implique l'intégrabilité de la fonction, et donc l'égalité avec l'intégrale calculée dans l'autre ordre.

Exemple 4.1.26. *Considérons la fonction $f(x, y) = e^{-xy}$ sur $D = [0, +\infty[\times [1, 2]$. Comme la fonction f est positive, l'intégrale de f sur D existera si les intégrales successives existent. Puisque la fonction $x \mapsto e^{-xy}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $y \in [1, 2]$ fixé, on calcule d'abord*

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \left[-\frac{1}{y} e^{-xy} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{y}.$$

Puisque la fonction obtenue est continue sur l'intervalle fermé $[1, 2]$, elle y est intégrable. Ainsi, la fonction f est intégrable sur D et on a

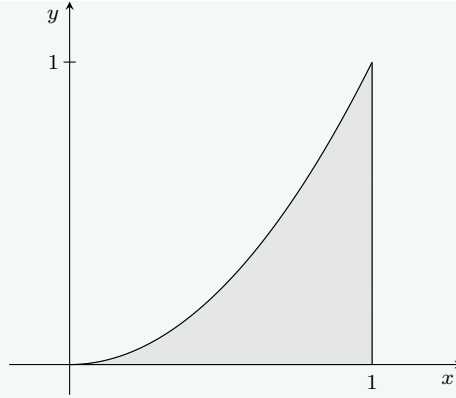
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Exemple 4.1.27. *Considérons la fonction*

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1] \text{ et } 0 < y \leq x^2\}.$$



Comme la fonction f est positive sur D , l'intégrale de f sur D existera si les intégrales successives existent. Pour $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $]0, x^2]$ et admet une limite finie en 0^+ . Elle y est donc intégrable et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \left[\sqrt{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=x^2} = x\sqrt{1+x^2} - x.$$

Cette fonction est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie en 0^+ . Ainsi, elle est intégrable sur $]0, 1]$ et on en tire que f est intégrable sur D . De plus, on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} - x dx = \left[\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}(4\sqrt{2} - 5).$$

Exemple 4.1.28. Considérons la fonction $f(x, y) = e^{-y(1+x^2)}$ sur $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Comme la fonction f est positive sur D , l'intégrale de f sur D existera si les intégrales successives existent. Comme la fonction $y \mapsto e^{-y(1+x^2)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$ fixé, commençons par calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy = \left[-\frac{1}{1+x^2} e^{-y(1+x^2)} \right]_{y=0}^{+\infty} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque la fonction obtenue est intégrable sur $]0, +\infty[$, la fonction f est intégrable sur D et nous avons

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4.1.5 Changement de variables et coordonnées polaires

Pour évaluer une intégrale double, l'approche classique selon le théorème de Fubini implique d'intégrer successivement sur les tranches verticales du domaine, puis d'intégrer le résultat obtenu par rapport à x . Une autre méthode consiste à intégrer d'abord sur les tranches horizontales, puis d'intégrer le résultat par rapport à y . Cependant, cette approche n'est pas toujours la plus efficace. Considérons par exemple l'intégration de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Intégrer sur des tranches verticales ou horizontales n'est

pas pratique. En effet, comme f dépend uniquement de la distance euclidienne du point (x, y) à l'origine, elle est constante le long des cercles centrés en l'origine. Ainsi, calculer l'intégrale de f sur ces cercles est très simple. De plus, il est facile de voir que le domaine D est l'union de ces cercles. Dans ce cas, il est judicieux d'utiliser les *coordonnées polaires* et d'effectuer un *changement de variables*, comme nous le verrons dans cette section.

Bien sûr, pour d'autres problèmes, d'autres choix de coordonnées peuvent être préférables. Ces choix sont souvent liés aux symétries du problème étudié. Parfois, l'expression de la fonction suggère l'utilisation de certaines coordonnées, tandis que la forme du domaine d'intégration encourage l'utilisation d'autres coordonnées. Trouver le bon compromis entre ces facteurs est souvent crucial dans la résolution de ces problèmes.

Cas général

Dans une intégrale simple, un changement de variable implique une transformation φ d'une partie de $\mathbb{R}$ vers une autre partie de $\mathbb{R}$, et la formule de changement de variable utilise la dérivée φ' de cette application. Pour les intégrales doubles, cette transformation sera donnée par une fonction φ d'une partie de $\mathbb{R}^2$ vers une autre partie de $\mathbb{R}^2$. Regardons ce que donne le changement de variables dans un calcul d'intégrale double sur des exemples de base.

Exemple 4.1.29. Soit f une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse à la fonction

$$(u, v) \in \mathcal{R}' \mapsto f(u + u_0, v + v_0)$$

avec $\mathcal{R}' = [a - u_0, b - u_0] \times [c - v_0, d - v_0]$. On a

$$\iint_{\mathcal{R}'} f(u + u_0, v + v_0) du dv = \int_{a-u_0}^{b-u_0} \left(\int_{c-v_0}^{d-v_0} f(u + u_0, v + v_0) dv \right) du.$$

En effectuant le changement de variable $y = v + v_0$ dans l'intégrale “à l'intérieur”, on a

$$\int_{c-v_0}^{d-v_0} f(u + u_0, v + v_0) dv = \int_c^d f(u + u_0, y) dy.$$

Le Théorème de Fubini permet maintenant de permuter l'ordre d'intégration et d'écrire

$$\iint_{\mathcal{R}} f(u + u_0, v + v_0) du dv = \int_{a-u_0}^{b-u_0} \left(\int_c^d f(u + u_0, y) dy \right) du = \int_c^d \left(\int_{a-u_0}^{b-u_0} f(u + u_0, y) du \right) dy.$$

En effectuant le changement de variable $x = u + u_0$ dans l'intégrale “à l'intérieur”, on obtient finalement

$$\iint_{\mathcal{R}'} f(u + u_0, v + v_0) du dv = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy.$$

Tout se passe comme si on avait posé $(x, y) = (u + u_0, v + v_0)$.

Exemple 4.1.30. Considérons une fonction f continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Cette fois-ci, on fixe $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ et on s'intéresse à la fonction

$$(u, v) \in \mathcal{R}' \mapsto f(\lambda_1 u, \lambda_2 v)$$

avec $\mathcal{R}' = [\frac{a}{\lambda_1}, \frac{b}{\lambda_1}] \times [\frac{c}{\lambda_2}, \frac{d}{\lambda_2}]$. Le Théorème de Fubini permet d'écrire l'intégrale de cette fonction sur $\mathcal{R}'$ comme une succession d'intégrales simples

$$\iint_{\mathcal{R}'} f(\lambda_1 u, \lambda_2 v) du dv = \int_{\frac{a}{\lambda_1}}^{\frac{b}{\lambda_1}} \left(\int_{\frac{c}{\lambda_2}}^{\frac{d}{\lambda_2}} f(\lambda_1 u, \lambda_2 v) dv \right) du.$$

On peut à nouveau effectuer le changement de variable $y = \lambda_2 v$ dans l'intégrale simple “à l'intérieur”, ce qui nous permet d'écrire

$$\iint_{\mathcal{R}'} f(\lambda_1 u, \lambda_2 v) du dv = \int_{\frac{a}{\lambda_1}}^{\frac{b}{\lambda_1}} \left(\int_c^d \frac{1}{\lambda_2} f(\lambda_1 u, y) dy \right) du = \int_c^d \frac{1}{\lambda_2} \left(\int_{\frac{a}{\lambda_1}}^{\frac{b}{\lambda_1}} f(\lambda_1 u, y) du \right) dy$$

où on a échangé l'ordre d'intégration grâce au Théorème de Fubini. En effectuant le changement de variable $x = \lambda_1 u$ dans l'intégrale simple “à l'intérieur”, on conclut que

$$\iint_{\mathcal{R}'} f(\lambda_1 u, \lambda_2 v) du dv = \int_c^d \frac{1}{\lambda_2} \left(\int_a^b \frac{1}{\lambda_1} f(x, y) dx \right) dy = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy.$$

Donc

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \lambda_1 \lambda_2 \iint_{\mathcal{R}'} f(\lambda_1 u, \lambda_2 v) du dv.$$

Tout se passe comme si on avait posé $(x, y) = (\lambda_1 u, \lambda_2 v)$ avec un “facteur” $\lambda_1 \lambda_2$. Si on considère la fonction $\varphi(u, v) = (\lambda_1 u, \lambda_2 v)$, le facteur $\lambda_1 \lambda_2$ représente la manière dont la transformation φ modifie l'aire d'un rectangle, c'est-à-dire

$$\text{Aire}(\varphi(D)) = \lambda_1 \lambda_2 \text{Aire}(D).$$

Exemple 4.1.31. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et soient $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ tels que $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$. En supposant qu'elle existe, on souhaite calculer l'intégrale de la fonction

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u + \lambda_1 v, v + \lambda_2 u).$$

Le Théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} f(u + \lambda_1 v, v + \lambda_2 u) du dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u + \lambda_1 v, v + \lambda_2 u) du \right) dv \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, (1 - \lambda_1 \lambda_2)v + \lambda_2 x) dx \right) dv \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, (1 - \lambda_1 \lambda_2)v + \lambda_2 x) dv \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} f(x, y) dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $x = u + \lambda_1 v$ et ensuite $y = (1 - \lambda_1 \lambda_2)v + \lambda_2 x$. Cela se réécrit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = (1 - \lambda_1 \lambda_2) \iint_{\mathbb{R}^2} f(u + \lambda_1 v, v + \lambda_2 u) du dv.$$

Tout se passe comme si on avait posé $(x, y) = (u + \lambda_1 v, v + \lambda_2 u)$ avec un “facteur” $(1 - \lambda_1 \lambda_2)$. À nouveau, si on pose $\varphi(u, v) = (u + \lambda_1 v, v + \lambda_2 u)$, on peut montrer que $(1 - \lambda_1 \lambda_2)$ représente en fait la manière dont φ modifie les aires.

Rappelons que le déterminant permet de mesurer des aires ou des volumes. En deux dimensions, il mesure l’aire du parallélogramme formé par deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le déterminant des dérivées partielles d’une transformation φ en un point va nous indiquer comment φ modifie les aires locales autour de ce point, indiquant si elle les dilate ou les contracte. La formule de changement de variables utilise donc le déterminant des dérivées partielles des composantes de la transformation φ , connue sous le nom de *jacobien*.

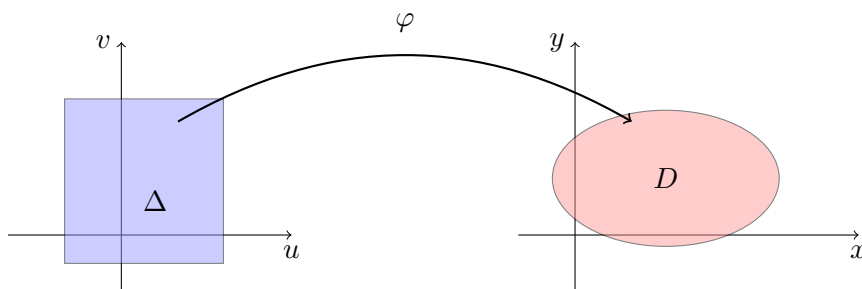
Définition 4.1.32. Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continûment dérivables sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$. Considérons l’application

$$\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)).$$

Le jacobien de φ au point $(u_0, v_0) \in \Delta$ est le déterminant de la matrice des dérivées partielles de φ_1 et φ_2 au point (u_0, v_0) , c’est-à-dire

$$\text{Jac}(\varphi)(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Comme dans les cas des fonctions d’une variable réelle, on va demander à la fonction φ d’être une bijection suffisamment régulière pour obtenir un *changement de variables*.

FIGURE 4.6 – La fonction φ transforme l'ensemble Δ en l'ensemble D .

Définition 4.1.33. Soient Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\varphi : \Delta \rightarrow D : (u, v) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

une application de deux variables définie sur Δ et à valeurs dans D . On dit que φ est un changement de variables si

- ▷ φ est une bijection,
- ▷ les fonctions φ_1 et φ_2 sont continûment dérivables sur Δ ,
- ▷ les fonctions φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont continûment dérivables sur D .

Dans la pratique, les deux dernières conditions sont souvent satisfaites et on cherchera à déterminer les ensembles Δ et D pour avoir une bijection.

Théorème 4.1.34 (Changement de variables). Soient Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\varphi : \Delta \rightarrow D : (u, v) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)).$$

un changement de variables. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D si et seulement si la fonction

$$(f \circ \varphi) |\text{Jac}(\varphi)|$$

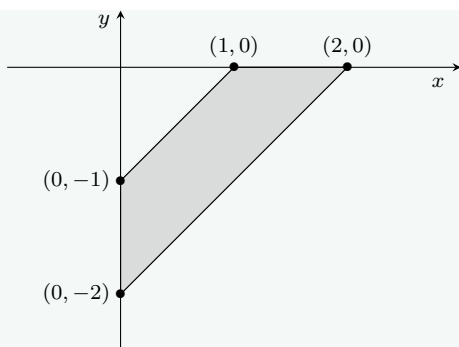
est intégrable sur Δ . Dans ce cas, on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v)) |\text{Jac}(\varphi)(u, v)| du dv.$$

Exemple 4.1.35. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$$

que l'on souhaite intégrer sur le trapèze D de sommets $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ et $(0, -1)$.



Remarquons que ce trapèze est délimité par les axes et les droites $y = x - 1$ et $y = x - 2$. Ainsi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0 \text{ et } x - 2 \leq y \leq x - 1\}.$$

On souhaite avoir $u = x + y$ et $v = x - y$. Cela revient à poser $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$, c'est-à-dire considérer le changement de variables

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right).$$

On a

$$\text{Jac}(\varphi)(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

On remarque alors que si

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u+v}{2} \geq 0, \frac{u-v}{2} \leq 0 \text{ et } \frac{u+v}{2} - 2 \leq \frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} - 1 \right\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -v \leq u \leq v \text{ et } 1 \leq v \leq 2\}, \end{aligned}$$

alors φ envoie Δ sur D . Le Théorème du changement de variables donne alors

$$\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv.$$

On calcule cette dernière intégrale en utilisant le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \right) dv = \frac{1}{2} \int_1^2 [v e^{\frac{u}{v}}]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \int_1^2 v(e - e^{-1}) dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v=1}^{v=2} \\ &= \frac{3}{4} (e - e^{-1}) \end{aligned}$$

et donc

$$\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dx dy = \frac{3}{4} (e - e^{-1}).$$

Exemple 4.1.36 (Aire d'une ellipse). Soient $a, b > 0$. On considère l'ellipse

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Pour déterminer l'aire de cette ellipse, il suffit de calculer

$$\text{Aire}(\mathcal{E}_{a,b}) = \iint_{\mathcal{E}_{a,b}} 1 \, dx \, dy.$$

Posons $(x, y) = (au, bv)$, autrement dit considérons le changement de variables $\varphi(u, v) = (au, bv)$. Alors, φ est un changement de variables entre le disque unité

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et $\mathcal{E}_{a,b}$. Le Théorème du changement de variables implique alors que

$$\text{Aire}(\mathcal{E}_{a,b}) = \iint_{\mathcal{E}_{a,b}} 1 \, dx \, dy = \iint_{\Delta} 1 \cdot |\text{Jac}(\varphi)(u, v)| \, du \, dv = ab \iint_{\Delta} 1 \, du \, dv = ab \, \text{Aire}(\Delta).$$

On redémontrera ci-dessous que $\text{Aire}(\Delta) = \pi$ et donc $\text{Aire}(\mathcal{E}_{a,b}) = ab\pi$.

Coordonnées polaires

Un changement de variables très important est celui donné par les coordonnées polaires. Rappelons que tout point $P = (x, y) \neq (0, 0)$ du plan $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ (on pourrait aussi considérer n'importe quel intervalle semi-ouvert de longueur 2π). Parler des coordonnées polaires d'un point P signifie qu'on choisit de repérer le point P à partir de sa distance r par rapport à l'origine et par l'angle θ formé par la droite joignant l'origine et le point P avec l'axe des x .

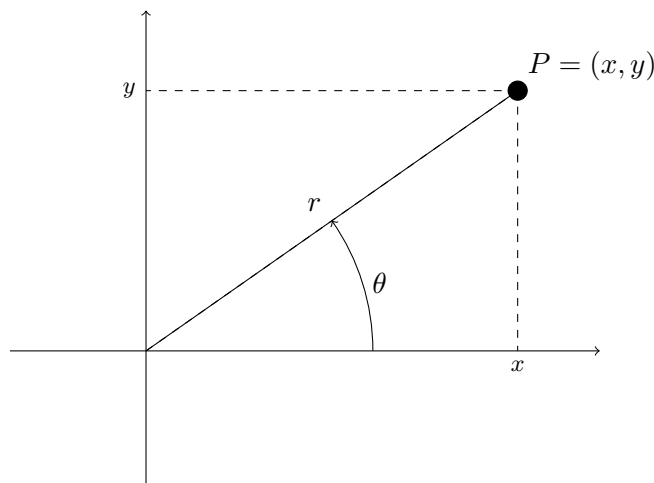
Formellement, le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes forme un changement de variables donné par la fonction

$$\varphi :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

On montre en effet facilement que les applications inverses sont bien de classe C^1 . De plus, on a

$$\text{Jac}(\varphi)(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

Le Théorème d'intégration par changement de variables se réécrit donc, dans le cas des coordonnées polaires, comme suit.

FIGURE 4.7 – Coordonnées polaires de P .

Théorème 4.1.37 (Intégration en coordonnées polaires). *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors, f est intégrable sur D si et seulement si la fonction*

$$(r, \theta) \mapsto r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

est intégrable sur

$$\Delta = \{(r, \theta) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[: (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in D\}.$$

Dans ce cas, on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) dr d\theta.$$

Remarque 4.1.38. *Il se peut que l'origine appartienne à l'ensemble D . Le point $(0, 0)$ est exclu du changement de variables “passage aux coordonnées polaires” car sa représentation n'est pas unique ($r = 0$ mais θ peut prendre n'importe quelle valeur). Cela revient à enlever un point à D , ce qui ne change rien pour le calcul de l'intégrale.*

Ce résultat est particulièrement utile lorsque le domaine d'intégration et/ou la fonction intégrée ont des expressions plus simples en termes de coordonnées polaires qu'en coordonnées cartésiennes. C'est typiquement le cas lorsque

- ▷ le domaine sur lequel on souhaite intégrer est un (morceau de) disque centré à l'origine car il est décrit par la condition $r \leq R$ (avec éventuellement une restriction sur l'ensemble dans lequel varie θ , par exemple $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour décrire le premier quart de cercle),
- ▷ la fonction qu'on intègre dépend uniquement de $x^2 + y^2$.

Exemple 4.1.39. Considérons la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et intégrons-la sur le disque unité $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. En coordonnées polaires, le disque est donné par l'ensemble

$$\{(r, \theta) : r \in [0, 1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\}$$

et la fonction f prend la forme

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} = r.$$

Ainsi, un changement de coordonnées polaires donne

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

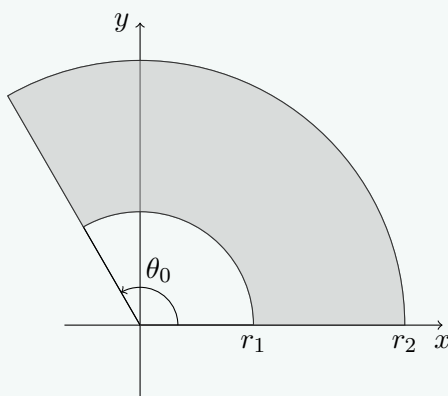
Exemple 4.1.40 (Aire d'un disque). Soit D_R le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$. On a

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}.$$

On a

$$\text{Aire}(D_R) = \iint_D 1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \pi R^2.$$

Exemple 4.1.41 (Aire d'un secteur d'un anneau). Soit A le secteur d'un anneau donné dans le dessin ci-dessous :



On a

$$A = \{(r, \theta) : r_1 \leq r \leq r_2 \text{ et } \theta \in [0, \theta_0]\}.$$

Ainsi,

$$\text{Aire}(A) = \iint_A 1 dx dy = \int_0^{\theta_0} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} d\theta = \theta_0 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}.$$

Exemple 4.1.42 (Intégrale de Gauss). *Montrons que si $a > 0$, alors*

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Notons que cette intégrale a bien du sens puisque la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-ax^2} = 0$. Pour calculer cette intégrale, considérons la fonction de deux variables séparées

$$F(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)} = e^{-ax^2} e^{-ay^2} = f(x)f(y).$$

Par le Théorème de Fubini, on sait que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) dy \right) = I_a^2.$$

Par ailleurs, un changement de coordonnées polaires donne

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-ar^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a} \right]_{r=0}^{+\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a} d\theta = \frac{\pi}{a},$$

d'où le résultat annoncé.

4.2 Intégrales triples

4.2.1 Définition et théorème de Fubini

Comme nous venons de le faire pour les fonctions de deux variables réelles, on peut étendre la notion d'intégrale au cas de fonctions de trois variables réelles, en définissant ainsi des intégrales triples. Si f est une fonction bornée sur un parallélépipède $D = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ de $\mathbb{R}^3$, on peut diviser D en sous-parallélépipèdes $D_1, \dots, D_n$ et évaluer la somme

$$\sum_{j=1}^n f(x_j, y_j, z_j) \text{Vol}(D_j), \quad (4.1)$$

où $\text{Vol}(D_j)$ est le volume du parallélépipède D_j et (x_j, y_j, z_j) est un point choisi dans D_j .

Définition 4.2.1. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur un parallélépipède D de $\mathbb{R}^3$. On dit que f est Riemann-intégrable sur D si pour toute suite de découpages de D en sous-parallélépipèdes dont le diamètre maximal tend vers 0, la suite des sommes (4.1) tend vers une limite finie. Cette limite ne dépend alors pas de la suite de découpages choisie et est appelée l'intégrale triple de f sur D . On la note*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

De même que pour les intégrales doubles, si f est continue sur un parallélépipède D de $\mathbb{R}^3$, alors elle est intégrable sur D . Les méthodes de calcul pour les intégrales triples sont être analogues à celles des intégrales doubles, en utilisant le théorème de Fubini pour se ramener à une succession d'intégrales simples et échanger l'ordre d'intégration.

Théorème 4.2.2 (Théorème de Fubini sur un parallélépipède). *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un parallélépipède $D = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Alors f est intégrable sur D et*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx,$$

et les autres permutations d'ordre d'intégration sont également valides.

Exemple 4.2.3. *Considérons la fonction $f(x, y, z) = 2xz + y + z^2$ que l'on souhaite intégrer sur le parallélépipède $D = [0, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$. L'intégrale triple peut être calculée comme succession d'intégrales simples*

$$\begin{aligned} \iiint_D (2xz + y + z^2) dx dy dz &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^1 (2xz + y + z^2) dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \left[xz^2 + zy + \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} dy dx \\ &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \left(x + y + \frac{1}{3} \right) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{3} \right]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 \left(2x + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \left[x^2 + \frac{2x}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Dans le cas où D est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^3$, on peut l'inclure dans un parallélépipède $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ et on introduit les *projections* pour se ramener à des intégrales d'ordre inférieur. Par exemple, pour x fixé dans $[a, b]$, on peut poser

$$D_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in D\}$$

et obtenir que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Il s'agit donc de la succession d'une intégrale double et d'une intégrale simple. On se ramène ensuite à la succession de trois intégrales simples en utilisant les techniques de la section précédente pour calculer l'intégrale double

$$\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz.$$

On pourrait aussi fixer d'abord $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ et considérer l'ensemble

$$D_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in D\}.$$

Le calcul de l'intégrale triple se ramène alors à la succession d'une intégrale simple et d'une intégrale double

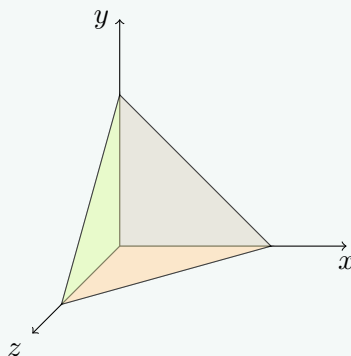
$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_{D_{(x,y)}} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

Le calcul de l'intégrale double “à l'extérieur” s'effectue comme vu dans la section précédente. Un des intérêts des intégrales triples est qu'elles permettent de calculer des volumes de sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$, comme les intégrales doubles permettaient de calculer des aires.

Proposition 4.2.4. *Soit D un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^3$. Alors, le volume de D est donné par*

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Exemple 4.2.5. *Calculons le volume de l'ensemble D délimité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.*



Fixons $x \in [0, 1]$. Alors,

$$D_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } y + z \leq 1 - x\}$$

et le Théorème de Fubini permet d'écrire

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_x} 1 \, dy \, dz \right) dx.$$

On calcule à présent l'intégrale double

$$\begin{aligned} \iint_{D_x} 1 \, dy \, dz &= \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1 \, dz \right) dy = \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \\ &= \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} \\ &= \frac{(1-x)^2}{2}. \end{aligned}$$

Au total, on a donc

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = \left[\frac{-(1-x)^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.$$

Lorsque l'on travaille sur des ensembles D de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas des fermés bornés, il faut prendre des précautions supplémentaires, comme dans le cas des intégrales doubles. L'intégrabilité (absolue) d'une fonction f définie sur D sera assurée par le Théorème de Tonelli, alors que le Théorème de Fubini permettra de se ramener à une succession d'intégrales simple et double.

Théorème 4.2.6 (Tonelli). *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^3$. Supposons que $D \subset]a, b[\times]c, d[\times]p, q[$ et posons*

$$D_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in D\}$$

pour tout $x \in]a, b[$. Si

▷ *pour tout $x \in]a, b[$, la fonction*

$$(y, z) \in D_x \mapsto |f(x, y, z)|$$

est intégrable sur l'ensemble D_x et

▷ *la fonction*

$$x \in]a, b[\mapsto \iint_{D_x} |f(x, y, z)| \, dy \, dz$$

est intégrable sur l'intervalle $]a, b[$,

alors f est intégrable sur D .

On a bien sûr le même résultat si on fixe y ou z , ou si on travaille à (x, y) , (y, z) ou (z, x) fixés.

Théorème 4.2.7 (Fubini général). *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur un sous-ensemble $D \subset]a, b[\times]c, d[\times]p, q[$ de $\mathbb{R}^3$. Alors, on peut échanger l'ordre d'intégration,*

c'est-à-dire

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx$$

et les autres permutations d'ordre d'intégration sont également valides.

4.2.2 Changement de variables, coordonnées cylindriques et sphériques

Le théorème du changement de variables pour les intégrales triples est une généralisation naturelle de celui des intégrales doubles. Considérons une transformation φ qui envoie une région de l'espace $\mathbb{R}^3$, notée Δ , sur une autre région D

$$\varphi : \Delta \rightarrow D : (u, v, w) \mapsto (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)).$$

Définition 4.2.8. Soient Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et

$$\varphi : \Delta \rightarrow D : (u, v, w) \mapsto (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$$

une application de trois variables définie sur Δ et à valeurs dans D . On dit que φ est un changement de variables si

- ▷ φ est une bijection,
- ▷ les fonctions φ_1 , φ_2 et φ_3 sont continûment dérivables sur Δ ,
- ▷ les fonctions φ_1^{-1} , φ_2^{-1} et φ_3^{-1} sont continûment dérivables sur D .

Le jacobien de φ au point $(u_0, v_0, w_0) \in \Delta$ est le déterminant de la matrice des dérivées partielles de φ_1 , φ_2 et φ_3 au point (u_0, v_0, w_0) , c'est-à-dire

$$\text{Jac}(\varphi)(u_0, v_0, w_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas des intégrales simples et doubles, on dispose d'une formule de changement de variables, qui donne également un critère d'intégrabilité.

Théorème 4.2.9 (Changement de variables). Soient Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et

$$\varphi : \Delta \rightarrow D : (u, v, w) \mapsto (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$$

un changement de variables. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D si et seulement

si la fonction

$$(f \circ \varphi)|\text{Jac}(\varphi)|$$

est intégrable sur Δ . Dans ce cas, on a

$$\iiint_D f(x, y) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(\varphi(u, v, w))|\text{Jac}(\varphi)(u, v, w)| du dv dw.$$

Coordonnées Cylindriques

Un point $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On appelle cette représentation les *coordonnées cylindriques* de P .

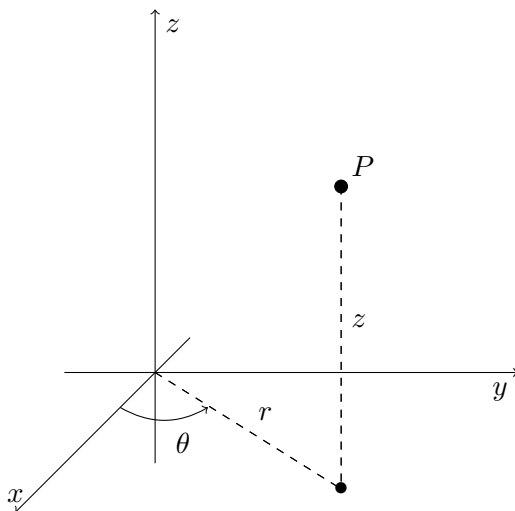


FIGURE 4.8 – Coordonnées cylindriques de P .

Le passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes forme un changement de variables donné par la fonction

$$\varphi :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : (r, \theta, z) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z).$$

Le jacobien de ce changement de variables est donné par

$$\text{Jac}(\varphi)(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

Les coordonnées cylindriques sont utiles pour traiter des problèmes présentant une symétrie axiale. Dans ce contexte, le changement de variables se réécrit comme suit.

Théorème 4.2.10 (Intégration en coordonnées cylindriques). *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors, f est intégrable sur D si et seulement si la fonction*

$$(r, \theta, z) \mapsto r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

est intégrable sur

$$\Delta = \{(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \in D\}.$$

Dans ce cas, on a

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) dr d\theta dz.$$

Exemple 4.2.11 (Volume d'un cône). *Calculons le volume d'un cône C dont la base est un disque de rayon 1 et la hauteur est égale à 1. On sait qu'il suffit pour cela de calculer*

$$\iiint_C 1 dx dy dz.$$

Il est plus facile de décrire le cône en coordonnées cylindriques qu'en coordonnées cartésiennes. En effet, en coordonnées cylindriques, le cône est donné par l'ensemble

$$\{(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1 \text{ et } r \leq 1 - z\}.$$

Ainsi, le Théorème d'intégration en coordonnées cylindriques donne

$$\begin{aligned} \iiint_C 1 dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{2\pi} r d\theta \right) dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} r dr \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1-z} dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \\ &= 2\pi \left[-\frac{(1-z)^3}{6} \right]_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Coordonnées Sphériques

On souhaite représenter un point $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ en utilisant des *coordonnées sphériques*. L'idée est de remplir l'espace par des sphères centrées en $(0, 0, 0)$ et de définir la position d'un point P par trois paramètres :

1. On repère le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. On définit θ comme l'angle formé par l'axe des z et le segment reliant l'origine à P . On se positionne alors sur un cercle de rayon $r \sin \theta$ dans le plan $z = \text{constante}$.
3. On repère la position sur ce cercle à l'aide de l'angle Φ formé avec l'axe x dans le plan $z = \text{constante}$.

Un point $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut aussi s'écrire de manière unique sous la forme

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\Phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\Phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

avec $r > 0$, $\Phi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$. On parle des *coordonnées sphériques* de P .

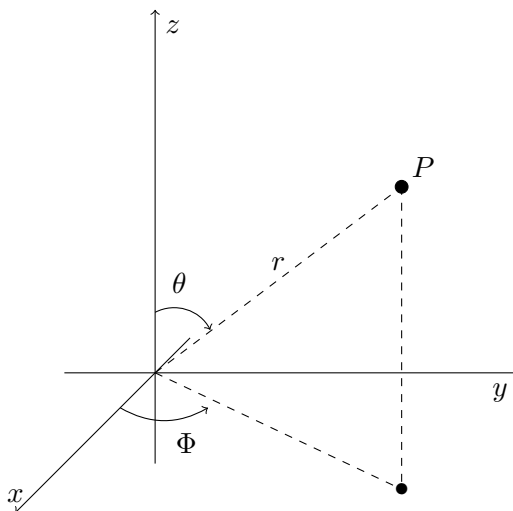


FIGURE 4.9 – Coordonnées sphériques de P .

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes forme un changement de variables donné par la fonction

$$\varphi :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : (r, \Phi, \theta) \mapsto (r \sin(\theta) \cos(\Phi), r \sin(\theta) \sin(\Phi), r \cos(\theta)).$$

Le jacobien de ce changement de variables est donné par

$$\text{Jac}(\varphi)(r, \Phi, \theta) = \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\Phi) & -r \sin(\theta) \sin(\Phi) & r \cos(\theta) \cos(\Phi) \\ \sin(\theta) \sin(\Phi) & r \sin(\theta) \cos(\Phi) & r \cos(\theta) \sin(\Phi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant (par exemple par rapport à la dernière ligne), on trouve

$$\begin{aligned}
 \text{Jac}(\varphi)(r, \Phi, \theta) &= \cos \theta \det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \Phi & r \cos \theta \cos \Phi \\ r \sin \theta \cos \Phi & r \cos \theta \sin \Phi \end{pmatrix} + (-r \sin \theta) \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \Phi & -r \sin \theta \sin \Phi \\ \sin \theta \sin \Phi & r \sin \theta \cos \Phi \end{pmatrix} \\
 &= \cos \theta \left((-r \sin \theta \sin \Phi)(r \cos \theta \sin \Phi) - (r \cos \theta \cos \Phi)(r \sin \theta \cos \Phi) \right) \\
 &\quad + (-r \sin \theta) \left((\sin \theta \cos \Phi)(r \sin \theta \cos \Phi) - (-r \sin \theta \sin \Phi)(\sin \theta \sin \Phi) \right) \\
 &= \cos \theta \left(-r^2 \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi) \right) + (-r \sin \theta) \left(r \sin^2 \theta (\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi) \right) \\
 &= \cos \theta (-r^2 \sin \theta \cos \theta) + (-r \sin \theta)(r \sin^2 \theta) \\
 &= -r^2 \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 \sin^3 \theta \\
 &= -r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= -r^2 \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$|\text{Jac}(\varphi)(r, \Phi, \theta)| = r^2 \sin \theta.$$

Dans ce contexte, le changement de variables se réécrit comme suit.

Théorème 4.2.12 (Intégration en coordonnées sphériques). *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors, f est intégrable sur D si et seulement si la fonction*

$$(r, \Phi, \theta) \mapsto r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\Phi), r \sin(\theta) \sin(\Phi), r \cos(\theta))$$

est intégrable sur

$$\Sigma = \{(r, \Phi, \theta) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] : (r \sin(\theta) \cos(\Phi), r \sin(\theta) \sin(\Phi), r \cos(\theta)) \in D\}.$$

Dans ce cas, on a

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Sigma} r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\Phi), r \sin(\theta) \sin(\Phi), r \cos(\theta)) dr d\Phi d\theta.$$

Les coordonnées sphériques sont particulièrement utiles pour traiter des problèmes présentant une symétrie sphérique.

Exemple 4.2.13 (Volume d'une sphère). *Calculons le volume d'une sphère de rayon R donnée par*

$$D_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

On souhaite donc calculer

$$\iiint_{D_R} 1 dx dy dz.$$

En coordonnées sphériques, la sphère est donnée par l'ensemble

$$\{(r, \Phi, \theta) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] : r \leq R\}.$$

Ainsi, le volume de la sphère est donné par

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi r^2 \sin(\theta) \, d\theta \right) d\Phi \right) dr = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} [-r^2 \cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\Phi \right) dr \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\Phi \right) dr \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 \, dr \\ &= \left[\frac{4\pi r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

4.3 Intégrales multiples

Les résultats présentés en dimension 1, 2 et 3 peuvent s'étendre aux dimensions supérieures. Nous ne ferons qu'aborder cette notion d'intégrale multiple. Si on travaille dans $\mathbb{R}^n$, il faut commencer par étendre la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$, de rectangle de $\mathbb{R}^2$ et de parallélépipède de $\mathbb{R}^3$, ainsi que la notion de longueur, d'aire et de volume respectivement associée.

Un *pavé* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Le *volume* (n -dimensionnel) du pavé D est donné par

$$\text{Vol}_n(D) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Si f est une fonction bornée sur un pavé D de $\mathbb{R}^n$, on peut diviser D en sous-pavés $D_1, \dots, D_m$ et évaluer la somme

$$\sum_{j=1}^m f(x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{n,j}) \text{Vol}_n(D_j), \quad (4.2)$$

où $(x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{n,j})$ est un point fixé dans D_j . On dit que f est *Riemann-intégrable* sur D si pour toute suite de découpages de D en sous-pavés dont le diamètre maximal tend vers 0, la suite des sommes (4.2) tend vers une limite finie. Cette limite ne dépend alors pas de la suite de découpages choisie et est appelée l'*intégrale multiple* de f sur D . On la note

$$\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n.$$

Toute fonction continue sur un pavé D de $\mathbb{R}^n$ y est intégrable. À nouveau, le théorème de Fubini permet de calculer l'intégrale par une succession d'intégrales simples.

Théorème 4.3.1 (Théorème de Fubini sur un pavé). *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un pavé $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Alors,*

$$\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1,$$

et les autres permutations d'ordre d'intégration sont également valides.

Si D est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, on peut l'inclure dans un pavé

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

et on introduit à nouveau des *projections* pour se ramener à des intégrales d'ordre inférieur. Par exemple, à x_1 fixé dans $[a_1, b_1]$, on peut poser

$$D_{x_1} = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

et obtenir que

$$\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{D_{x_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) dx_1.$$

On calcule donc une intégrale d'ordre $n - 1$ suivie d'une intégrale simple. On étudie ensuite de la sorte l'intégrale d'ordre $n - 1$ pour se ramener à des ordres inférieurs. On pourrait également fixer par exemple $(x_1, \dots, x_j)$ avec $1 < j < n$ et considérer

$$D_{(x_1, \dots, x_j)} = \{(x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-j} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}.$$

Le théorème de Fubini permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} & \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \iint_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]} \left(\int_{D_{(x_1, \dots, x_j)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{j+1} \dots dx_n \right) dx_1 \dots dx_j. \end{aligned}$$

On aurait pu considérer n'importe quel autre ordre d'intégration, c'est-à-dire fixer d'autres coordonnées que $x_1, \dots, x_j$, comme par exemple

$$D_{(x_3, x_n)} = \{(x_1, x_2, x_4, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}.$$

On a également l'équivalent du Théorème de Tonelli sur des ensembles non fermés bornés de $\mathbb{R}^n$, qui permet de vérifier si une fonction définie sur D y est intégrable. Si c'est le cas, le Théorème de Fubini nous permet d'intégrer dans n'importe quel ordre.

Enfin, on a aussi la formule du changement de variables. Ici, on considère des bijections d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont de classe C^1 , ainsi que leurs inverses $\varphi_1^{-1}, \dots, \varphi_n^{-1}$. La formule du changement de variables fait intervenir le

jacobien du changement de variables φ , donné par le déterminant de la matrice $n \times n$ formée des dérivées partielles des composantes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de φ .

5 Analyse Vectorielle

Dans ce chapitre, nous proposons une brève introduction à l'analyse vectorielle, un outil incontournable dans l'étude des phénomènes physiques. Elle permet de décrire et de comprendre des grandeurs telles que les champs magnétiques, électriques ou gravitationnels, qui varient dans l'espace et parfois dans le temps. Ces grandeurs sont souvent représentées par des champs vectoriels ou scalaires, que l'on peut manipuler à l'aide d'opérations algébriques (comme les produits scalaires ou vectoriels¹) mais également avec des outils d'analyse, dont les opérateurs différentiels.

Dans ce chapitre, nous explorerons les opérateurs de gradient, de divergence et de rotationnel, ainsi que leurs propriétés fondamentales. Nous aborderons également des résultats clés tels que le théorème de Stokes, qui jouent un rôle essentiel dans le calcul d'intégrales de surface et de courbe.

5.1 Fonctions vectorielles et opérateurs différentiels classiques

Une fonction vectorielle est une fonction qui attribue à chaque point de l'espace $\mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Définition 5.1.1. Une fonction vectorielle est une fonction

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$$

où A est un-sous ensemble de $\mathbb{R}^3$. On peut donc la représenter sous la forme

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

pour tout $(x, y, z) \in A$, où f_1 , f_2 et f_3 sont des fonctions scalaires (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$), appelées les composantes de f . On notera

$$f = (f_1, f_2, f_3).$$

Un exemple fondamental de fonction vectorielle est le gradient ∇g lorsque g est une fonction

1. On rappelle que le produit vectoriel de $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ est donné par

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

scalaire. Rappelons que le gradient de g pointe dans la direction de la plus forte augmentation de g . Nous verrons ci-dessous une condition qui permet d'assurer qu'une fonction vectorielle est le gradient d'une fonction scalaire.

Exemple 5.1.2. À tout instant t fixé, la vitesse de rotation d'un corps de l'espace autour d'un axe donne un exemple de fonction vectorielle. En effet, supposons que le corps tourne autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire constante ω . À chaque point du corps (x, y, z) , la vitesse de rotation peut être représentée par

$$v(x, y, z) = \omega \wedge (x, y, z)$$

où $\wedge$ représente le produit vectoriel. Puisque l'axe de rotation est l'axe des z , on a $\omega = (0, 0, \omega)$ et donc les composantes de $v(x, y, z)$ sont données par

$$(-\omega y, \omega x, 0).$$

Remarque 5.1.3. Une distinction importante réside entre un champ vectoriel (ou scalaire) et une fonction vectorielle (ou scalaire). Un champ vectoriel est une loi physique définie en tout point de l'espace et dépend donc des coordonnées spatiales. En pratique, on peut exprimer un champ vectoriel en termes de fonctions vectorielles définies sur un ensemble de points (x, y, z) , en utilisant les coordonnées des points et/ou les composantes des vecteurs. Il est alors nécessaire d'étudier l'indépendance de ces lois par rapport au système de coordonnées choisi, afin de garantir que les propriétés trouvées ne dépendent que du point et non du choix du système d'axes ou de la base. Ainsi, un champ vectoriel peut être considéré comme une "entité physique", tandis qu'une fonction vectorielle représente le "modèle mathématique" qui exprime cette entité physique. Lorsque la fonction vectorielle ne dépend pas du système de coordonnées choisi, elle est souvent appelée champ vectoriel sans distinction.

À partir d'une fonction scalaire, nous pouvons construire une fonction vectorielle en utilisant le gradient. À partir d'une fonction vectorielle, nous pouvons construire une fonction scalaire grâce à l'opérateur de *divergence*, et une fonction vectorielle grâce à l'opérateur de *rotationnel*.

Définition 5.1.4. Soit $f = (f_1, f_2, f_3)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. La divergence de f est la fonction scalaire définie sur Ω par

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

La divergence est donc un opérateur qui transforme une fonction vectorielle en une fonction scalaire.

Remarque 5.1.5. L'égalité $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$ est une notation et n'est pas le produit scalaire de deux vecteurs. Cependant, vu la définition, on peut faire "comme si" c'était le produit scalaire du "vecteur" $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ et de (f_1, f_2, f_3) .

Exemple 5.1.6. La divergence de la fonction $f(x, y, z) = (3xy, 2xy, -yz^2)$ est donnée par

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = 3y + 2x - 2yz.$$

La divergence d'un champ vectoriel est une mesure de la source du champ dans un espace donné.

Exemple 5.1.7. Imaginons un volume d'air dans une pièce. Lorsque cet air est chauffé, il se dilate dans toutes les directions. Cette expansion génère un champ de vitesse où les vecteurs de vitesse pointent vers l'extérieur à partir de la région chauffée. Par conséquent, la divergence du champ de vitesse dans la région chauffée est positive car l'air se déplace loin du centre de l'expansion. Inversement, lorsque l'air est refroidi, il se contracte dans toutes les directions. Cette contraction donne lieu à un champ de vitesse où les vecteurs de vitesse pointent vers l'intérieur en direction de la région refroidie. Ainsi, la divergence du champ de vitesse dans la région refroidie est négative car l'air se déplace vers le centre de la contraction.

Exemple 5.1.8. En électromagnétisme, dans les équations de Maxwell, la divergence du champ électrique $\mathbf{E}$ est liée à la présence de charges électriques (sources). Les lignes de champ électrique partent de ces charges. Par contre, la divergence du champ magnétique $\mathbf{B}$ est nulle, ce qui signifie qu'il n'y a pas de sources ou de puits magnétiques ponctuels. Les lignes de champ magnétique sont en fait des boucles fermées.

Définition 5.1.9. Soit $f = (f_1, f_2, f_3)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Le rotationnel de f est la fonction vectorielle définie sur Ω par

$$\operatorname{rot} f = \nabla \wedge f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

Le rotationnel est donc un opérateur qui transforme une fonction vectorielle en une fonction vectorielle.

Remarque 5.1.10. A nouveau, l'égalité $\operatorname{rot} f = \nabla \wedge f$ est une notation et n'est pas le produit vectoriel de deux vecteurs. Cependant, vu la définition, on peut faire "comme si" il s'agissait du produit vectoriel du "vecteur" $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ et de (f_1, f_2, f_3) .

Exemple 5.1.11. *Le rotationnel de la fonction $f(x, y, z) = (xy, 3zx, z)$ est donné par*

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = (-3x, 0, 3z - x).$$

Exemple 5.1.12. *L'interprétation du rotationnel peut être facilement comprise dans le cas de l'exemple du champ de vitesse $v(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$ d'un corps rigide autour de l'axe des z . On a*

$$\operatorname{rot} v(x, y, z) = \left(0 - \frac{\partial \omega x}{\partial z}, \frac{\partial(-\omega y)}{\partial z} - 0, \frac{\partial \omega x}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y} \right) = (0, 0, 2\omega).$$

Ainsi, le rotationnel du champ de vitesse d'un corps rigide en rotation a la direction de l'axe de rotation, et sa norme est égale à deux fois la vitesse angulaire de la rotation. Donc, le rotationnel donne une mesure de la vitesse angulaire de rotation au point (x, y, z) .

Comme son nom l'indique, le rotationnel donne une mesure de la “rotation” du champ. La direction d'un vecteur de ce champ donne l'axe de rotation, son intensité la vitesse de rotation autour de cet axe.

Exemple 5.1.13. *La loi de Maxwell*

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j},$$

où μ et $\mathbf{j}$ désignent respectivement la perméabilité magnétique et le vecteur densité de courant (dont la direction indique la direction de l'écoulement des charges et la norme représente l'intensité du courant électrique par unité de surface perpendiculaire à $\mathbf{j}$), indique que le courant électrique tend à provoquer la rotation de $\mathbf{B}$. Autrement dit, les lignes de champ d'induction magnétique s'enroulent autour des lignes de courant électrique.

Présentons à présent des relations importantes entre les opérateurs vectoriels que nous venons d'introduire.

Proposition 5.1.14. *Si $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, alors*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} g) = (0, 0, 0).$$

Démonstration. On sait que

$$\operatorname{grad} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

et donc

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} g) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) = (0, 0, 0)$$

puisque g est de classe C^2 . □

Si f est une fonction vectorielle telle que $\operatorname{rot} f = 0$, on dit que f est *irrotationnelle*. Ainsi, les gradients de fonctions scalaires sont des fonctions vectorielles irrotationnelles.

Proposition 5.1.15. *Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, alors*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

puisque f_1, f_2 et f_3 sont de classe C^2 . □

Si f est une fonction vectorielle telle que $\operatorname{div} f = 0$, on dit que f est *indivergente*. Ainsi, les rotationnels de fonctions vectorielles sont des fonctions vectorielles irrotationnelles.

Nous avons deux relations qui sont toujours vraies. Nous allons nous intéresser à leur réciproque. On voudrait donc essayer de répondre aux deux questions suivantes :

- ▷ Si $\operatorname{rot} f = (0, 0, 0)$ (fonction irrotationnelle), existe-t-il une fonction scalaire g telle que $f = \operatorname{grad} g$?
- ▷ Si $\operatorname{div} f = 0$ (fonction indivergente), existe-t-il une fonction vectorielle g telle que $f = \operatorname{rot} g$?

Nous allons voir que cela dépend de la topologie de l'ouvert sur lequel on travaille.

Exemple 5.1.16. *Posons $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ et considérons la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

On a

$$\operatorname{rot} f = (0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2}) = (0, 0, \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}) = (0, 0, 0).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction scalaire $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{grad} g = f$. Posons alors

$$F(\theta) = g(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons la dérivée de la fonction F par le théorème de dérivation des

fonctions composées. On a

$$\begin{aligned} DF(\theta) &= -\sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) + \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \\ &= -\sin(\theta) \frac{-\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} + \cos(\theta) \frac{\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1 \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On en tire que

$$\int_0^{2\pi} DF(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} DF(\theta) d\theta &= F(2\pi) - F(0) = g(\cos(2\pi), \sin(2\pi), 0) - g(\cos(0), \sin(0), 0) \\ &= g(1, 0, 0) - g(1, 0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela conduit à une absurdité et il n'existe donc pas de fonction scalaire $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\text{grad } g = f$.

Afin d'espérer avoir une réciproque, on voit qu'on ne peut donc pas considérer tous les ouverts.

Définition 5.1.17. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in \Omega$.

▷ On dit que Ω est étoilé par rapport à x_0 si pour tout $x \in \Omega$, le segment joignant x_0 à x est inclus dans Ω , c'est-à-dire pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in \Omega.$$

▷ On dit que Ω est étoilé si Ω est étoilé par rapport à un de ses points.

Proposition 5.1.18. Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de classe C^1 sur Ω et à valeurs réelles. Il existe $g \in C^2(\Omega)$ tel que

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = f_j \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, n\}$$

si et seulement si

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad \text{pour tous } j, k \in \{1, \dots, n\}$$

(on dit que les fonctions $f_1, \dots, f_n$ vérifient les égalités croisées).

Démonstration. S'il existe une fonction g qui convient, alors les égalités croisées se réécrivent

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j},$$

ce qui est bien vérifié puisque g est de classe C^2 .

Supposons donc à présent que les fonctions $f_1, \dots, f_n$ vérifient les égalités croisées et montrons qu'il existe une fonction g de classe C^2 sur Ω telle que $f_j = \frac{\partial g}{\partial x_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $y \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rapport à y . Alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, la fonction

$$\lambda \in]0, 1[\mapsto (x - y) \cdot f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

est bien définie et est de classe C^1 sur $]0, 1[$, où

$$\begin{aligned} (x - y) \cdot f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle (x - y), f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) f_j(\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \dots, \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n) \end{aligned}$$

représente le produit scalaire entre x et $f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$. Posons

$$g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 (x - y) \cdot f(\lambda x + (1 - \lambda)y) d\lambda = \int_0^1 \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) f_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) d\lambda.$$

On utilise l'extension à $\mathbb{R}^n$ du Théorème 3.8.2² pour affirmer que la fonction g est de classe C^1 sur Ω et que

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_j - y_j) f_j(\lambda x + (1 - \lambda)y)) d\lambda$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_j - y_j) f_j(\lambda x + (1 - \lambda)y)) &= \begin{cases} (x_j - y_j) \lambda \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\lambda x + (1 - \lambda)y) & \text{si } k \neq j \\ (x_k - y_k) \lambda \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) & \text{si } j = k \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x_j - y_j) \lambda \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\lambda x + (1 - \lambda)y) & \text{si } k \neq j \\ (x_k - y_k) \lambda \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) & \text{si } j = k \end{cases} \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse des égalités croisées, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left((x_j - y_j) \lambda \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \right) + f_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) d\lambda \\ &= \int_0^1 D_\lambda (\lambda f_k(\lambda x + (1 - \lambda)y)) d\lambda \\ &= \left[\lambda f_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) \right]_{\lambda=0}^{\lambda=1} \\ &= f_k(x), \end{aligned}$$

2. voir le Théorème 3.8.6 pour le cas le plus général, pas nécessaire ici puisqu'on intègre sur un intervalle fermé borné.

ce qui suffit. Comme les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont de classe C^1 sur Ω , on en tire en particulier que g est de classe C^2 sur Ω . $\square$

Corollaire 5.1.19. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe C^1 sur un ouvert étoilé Ω de $\mathbb{R}^3$. Alors $\text{rot } f = (0, 0, 0)$ si et seulement s'il existe une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω telle que*

$$f = \text{grad } g.$$

On dit que f dérive du potentiel scalaire g .

Démonstration. C'est immédiat en utilisant la Proposition précédente car les égalités croisées pour (f_1, f_2, f_3) s'écrivent

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

c'est-à-dire $\text{rot } f = (0, 0, 0)$. La réciproque a été obtenue dans la Proposition 5.1.14. $\square$

Notons que la fonction g n'est pas unique. En effet, toute fonction de la forme $g + C$ pour une constante C convient également.

Exemple 5.1.20. *Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x, y, z) = (y, x + z, y + 2z)$$

dérive d'un potentiel g , et déterminons une telle fonction scalaire g . Pour cela, on remarque qu'un calcul direct donne $\text{rot } f = (0, 0, 0)$ et donc une telle fonction g existe. On doit donc chercher g telle que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \right) = (y, x + z, y + 2z).$$

Premièrement, l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y$$

donne $g(x, y, z) = xy + c(y, z)$ où $c(y, z)$ est une fonction qui ne dépend que de y et z . La deuxième équation devient

$$x + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = x + z$$

c'est-à-dire $\frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = z$. Ainsi, $c(y, z) = yz + C(z)$ où $C(z)$ est une fonction qui ne dépend que de z . Ainsi, $g(x, y, z) = xy + yz + C(z)$. Finalement, la troisième équation permet d'écrire

$$y + \frac{\partial C}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = y + 2z$$

et donc $C(z) = z^2 + c$ pour une constante c . Au total, on a donc trouvé le potentiel

$$g(x, y, z) = xy + yz + z^2 + c.$$

Cherchons à présent à établir une réciproque à la Proposition 5.1.15.

Proposition 5.1.21. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe C^1 sur un ouvert étoilé Ω de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$\operatorname{div} f = 0$$

si et seulement si il existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$f = \operatorname{rot} g.$$

On dit que f dérive du potentiel vecteur g .

Démonstration. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rapport à (x_0, y_0, z_0) . Si $(x, y, z) \in \Omega$, la fonction

$$\lambda \in]0, 1[\mapsto \lambda f(\mathbf{x}_\lambda) \wedge (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

où

$$\mathbf{x}_\lambda = (\lambda x + (1 - \lambda)x_0, \lambda y + (1 - \lambda)y_0, \lambda z + (1 - \lambda)z_0)$$

est bien définie et est de classe C^1 sur $]0, 1[$ puisque

$$\begin{aligned} & \lambda f(\mathbf{x}_\lambda) \wedge (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= \lambda \left(f_2(\mathbf{x}_\lambda)(z - z_0) - f_3(\mathbf{x}_\lambda)(y - y_0), f_3(\mathbf{x}_\lambda)(x - x_0) - f_1(\mathbf{x}_\lambda)(z - z_0), f_1(\mathbf{x}_\lambda)(y - y_0) - f_2(\mathbf{x}_\lambda)(x - x_0) \right). \end{aligned}$$

On pose

$$g(x, y, z) = \int_0^1 \lambda f(\mathbf{x}_\lambda) \wedge (x - x_0, y - y_0, z - z_0) d\lambda$$

et on utilise l'extension à $\mathbb{R}^n$ du Théorème 3.8.2 pour montrer que la fonction g est de classe C^1 sur Ω . De plus, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) \\ &= \int_0^1 \lambda \left(\frac{\partial}{\partial y}(f_1(\mathbf{x}_\lambda)(y - y_0) - f_2(\mathbf{x}_\lambda)(x - x_0)) - \frac{\partial}{\partial z}(f_3(\mathbf{x}_\lambda)(x - x_0) - f_1(\mathbf{x}_\lambda)(z - z_0)) \right) d\lambda \\ &= \int_0^1 \lambda \left(\lambda(y - y_0) \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_\lambda) + f_1(\mathbf{x}_\lambda) - \lambda(x - x_0) \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_\lambda) - \lambda(x - x_0) \frac{\partial f_3}{\partial z}(\mathbf{x}_\lambda) + \lambda(z - z_0) \frac{\partial f_1}{\partial z}(\mathbf{x}_\lambda) + f_1(\mathbf{x}_\lambda) \right) d\lambda. \end{aligned}$$

On utilise à présent le fait que $\operatorname{div} f = 0$ pour écrire

$$-\lambda(x - x_0) \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_\lambda) - \lambda(x - x_0) \frac{\partial f_3}{\partial z}(\mathbf{x}_\lambda) = -\lambda(x - x_0) \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_\lambda) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(\mathbf{x}_\lambda) \right) = \lambda(x - x_0) \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_\lambda)$$

de sorte que

$$\frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = \int_0^1 \lambda \left(\lambda(y - y_0) \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_\lambda) + f_1(\mathbf{x}_\lambda) + \lambda(x - x_0) \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_\lambda) + \lambda(z - z_0) \frac{\partial f_1}{\partial z}(\mathbf{x}_\lambda) + f_1(\mathbf{x}_\lambda) \right) d\lambda.$$

Puisque

$$D_\lambda(\lambda^2 f_1(\mathbf{x}_\lambda)) = 2\lambda f_1(\mathbf{x}_\lambda) + \lambda^2(x - x_0) \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_\lambda) + \lambda^2(y - y_0) \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_\lambda) + \lambda^2(z - z_0) \frac{\partial f_1}{\partial z}(\mathbf{x}_\lambda),$$

on obtient finalement

$$\frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = \int_0^1 D_\lambda(\lambda^2 f_1(\mathbf{x}_\lambda)) d\lambda = [\lambda^2 f_1(\mathbf{x}_\lambda)]_{\lambda=0}^{\lambda=1} = f_1(x, y, z).$$

On prouve de manière similaire que

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y, z) = f_2(x, y, z)$$

et que

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = f_3(x, y, z).$$

La conclusion s'ensuit. □

A nouveau, le potentiel vecteur g n'est pas unique puisque toute fonction de la forme $g + h$ avec $\text{rot } h = 0$ convient. Vu ce qui précède, on a donc $h = \text{grad } H$ pour une certaine fonction H .

Remarque 5.1.22. On peut montrer que le gradient d'un champ scalaire est un champ vectoriel. Autrement dit, cette fonction vectorielle est indépendante de la base orthonormée utilisée pour la calculer. De même, la divergence d'un champ vectoriel est un champ scalaire. Quant au rotationnel, il associe à un point de l'espace, représenté par ses coordonnées, un vecteur dont la longueur et la direction demeurent constantes, indépendamment du système d'axes choisi. Il s'agit donc également d'un champ vectoriel.

5.2 Intégrales curvilignes

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le calcul d'intégrales doubles peut se ramener à l'intégration de fonctions de deux variables le long de segments horizontaux ou verticaux. On va voir qu'il est également possible d'intégrer une fonction de deux variables le long d'une courbe dans le plan.

5.2.1 Rappels sur les courbes

Dans cette section, nous rappelons quelques notions vues au cours de géométrie. Nous nous plaçons néanmoins ici dans le contexte des courbes dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Ce sont donc des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition 5.2.1.

- ▷ Un paramétrage (ou un chemin) est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ où $[a, b]$ est un intervalle.
- ▷ L'image $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ d'un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe de représentation paramétrique γ .
- ▷ Un paramétrage γ est régulier si γ est de classe C^1 sur $]a, b[$ et si

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in]a, b[.$$

On dit qu'une courbe Γ est régulière si elle admet un paramétrage régulier.

Une courbe est donc un ensemble de points décrit à l'aide d'une fonction continue d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.2.2. Un paramétrage du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ est donné par

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Puisque $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$, ce paramétrage est régulier.

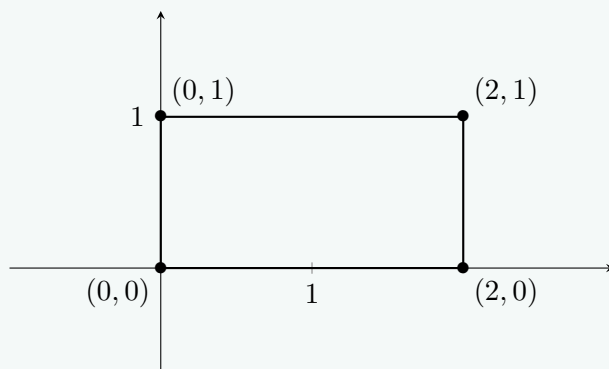
Dans la pratique, on travaille souvent avec des courbes qui sont données par des unions finies de courbes régulières

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([a_k, b_k])$$

pour lesquelles on a

$$\gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_{k+1}) \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Exemple 5.2.3. Le rectangle délimité par les points de coordonnées $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ et $(0, 1)$



est l'union finies des 4 courbes régulières paramétrées par

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, 0), t \in [0, 2], & \gamma_2(t) &= (2, t), t \in [0, 1], \\ \gamma_3(t) &= (2 - t, 1), t \in [0, 2] & \text{et } \gamma_4(t) &= (0, 1 - t), t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Il y a bien sûr plusieurs paramétrages pour une courbe donnée. Il est important de comprendre que, même si une courbe plane admet par définition un paramétrage, elle n'est munie a priori d'aucun paramétrage privilégié : c'est simplement un sous-ensemble de l'espace.

Définition 5.2.4. Deux paramétrages réguliers $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont équivalents s'il existe un changement de variable $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ tel que

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi.$$

En particulier, ils définissent la même courbe régulière Γ .

En particulier, en considérant le changement de variable

$$\varphi(t) = \alpha + \frac{t - a}{b - a}(\beta - \alpha)$$

entre $[a, b]$ et $[\alpha, \beta]$, on peut considérer un paramétrage d'une courbe sur n'importe quel intervalle. Dans le cas d'une courbe Γ qui est donnée par des unions finies de courbes régulières

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([a_k, b_k]),$$

on peut changer les intervalles de définition des paramétrages γ_k pour avoir $b_k = a_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$. En posant

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$$

et

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ \vdots \\ \gamma_n(t) & \text{si } t \in [a_n, b_n], \end{cases}$$

on obtient un paramétrage de Γ de classe C^1 par morceaux. On parlera de *courbe C^1 par morceaux* pour parler de ces courbes.

Définition 5.2.5. La longueur d'un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par

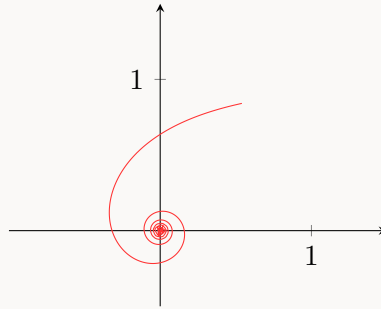
$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \right\}.$$

On dit que la courbe $\Gamma = \gamma([a, b])$ est rectifiable si cette borne supérieure est finie.

Remarque 5.2.6. Même si chaque courbe est bornée dans $\mathbb{R}^3$, il existe des courbes de longueur infinie. C'est le cas par exemple de la courbe paramétrée par

$$\gamma(t) = \left(t \cos\left(\frac{1}{t}\right), t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) \quad \text{pour } t \in]0, 1]$$

et $\gamma(0) = (0, 0)$. Cette courbe est représentée ci-dessous. La longueur de γ peut être calculée grâce à la Proposition 5.2.7 ci-après.



On peut même trouver des paramétrages non-rectifiables dont l'image est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. C'est le cas de la courbe de Peano.

Bien sûr, il faut s'assurer que si deux paramétrages sont équivalents, alors ils ont la même longueur. Cette propriété est donnée dans le résultat suivant. Nous obtenons également un résultat fondamental qui affirme que les paramétrages C^1 par morceaux sont rectifiables, et prouvons une formule pour calculer leur longueur.

Proposition 5.2.7. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage.

- ▷ Si $\tilde{\gamma}$ est équivalent à γ , alors $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.
- ▷ Si γ est C^1 par morceaux, alors γ est rectifiable et on a

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un changement de variable $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ tel que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Comme φ est bijectif et continu, le TVI assure qu'il est strictement monotone³. Supposons que φ est croissant (le résultat se démontre de manière identique si φ est décroissant). Soit $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_m = \beta$ un découpage de $[\alpha, \beta]$. Alors, en choisissant y_k tel que

3. En effet, sinon on aurait $x_1 < x_2 < x_3$ avec par exemple $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ et $\varphi(x_2) > \varphi(x_3)$. En fixant une valeur y entre $\max\{\varphi(x_1), \varphi(x_3)\}$ et $\varphi(x_2)$, le TVI implique donc qu'il existe $\xi_1 \in]x_1, x_2[$ et $\xi_2 \in]x_2, x_3[$ tels que $\varphi(\xi_1) = y = \varphi(\xi_2)$, ce qui est impossible.

$\varphi(y_k) = x_k$, on a $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$. On en tire que

$$\sum_{k=1}^m \|\tilde{\gamma}(x_k) - \tilde{\gamma}(x_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \|\gamma(y_k) - \gamma(y_{k-1})\| \leq L(\gamma).$$

En passant à la borne supérieure sur tous les découpages de $[\alpha, \beta]$, on obtient

$$L(\tilde{\gamma}) \leq L(\gamma).$$

On obtient l'inégalité inverse de manière similaire puisque $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$.

Pour le second point, quitte à découper l'intervalle sur lequel γ est défini, on peut supposer sans perte de généralité que γ est C^1 sur $[a, b]$. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ un découpage de $[a, b]$. En utilisant le Théorème fondamental de l'analyse et la Proposition 3.2.5⁴, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^m \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \left\| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

ce qui implique que

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, fixons $\varepsilon > 0$. Puisque γ' est continu sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, il y est uniformément continu et il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

si $t, s \in [a, b]$ sont tels que $|t - s| < \delta$. Fixons $m > \frac{(b-a)}{\delta}$ et considérons le découpage de $[a, b]$ donné par les points

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{m} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, m\}.$$

En appliquant à nouveau le Théorème fondamental de l'analyse, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \gamma'(t) - \frac{\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right\| &= \left\| \gamma'(t) - \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \gamma'(s) ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \gamma'(t) - \gamma'(s) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

4. Une modification de celle-ci basée également sur l'inégalité triangulaire pour les fonctions vectorielles.

pour tout $t \in [x_{k-1}, x_k]$. On en tire alors que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt &= \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\gamma'(t)\| dt \\
 &\leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left\| \gamma'(t) - \frac{\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right\| dt + \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left\| \frac{\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right\| dt \\
 &\leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} dt + \sum_{k=1}^m \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\| \\
 &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt + L(\gamma) \\
 &= \varepsilon + L(\gamma)
 \end{aligned}$$

et on conclut puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. $\square$

Exemple 5.2.8. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , alors la fonction γ définie pour tout $t \in [a, b]$ par

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

est un paramétrage du graphe de f . On a

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Exemple 5.2.9. Le paramétrage $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ du cercle de centre 0 et de rayon R est de classe C^1 . Puisque $\gamma'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$, on en tire que

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Exemple 5.2.10. Le paramétrage $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 4\pi]$ correspond également au cercle de centre 0 et de rayon R , et

$$L(\gamma) = 4\pi R.$$

Pour éviter le “problème” de l'exemple précédent, nous allons considérer par la suite des paramétrages *simples* et de Jordan.

Définition 5.2.11.

- ▷ Un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est simple s'il est injectif sur $[a, b]$.
- ▷ Une courbe est simple si elle admet un paramétrage simple.

- ▷ Un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de Jordan si γ est simple et si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On parle aussi de paramétrage fermé.
- ▷ Une courbe est de Jordan (ou fermée) si elle admet un paramétrage de Jordan.

Deux paramétrages simples d'une même courbe Γ ont la même longueur, et on peut alors parler de la *longueur* de la courbe Γ .

5.2.2 Intégrale sur une courbe d'une fonction scalaire

Calculer la longueur d'un segment de droite ou d'une ligne brisée est relativement simple. Pour mesurer la longueur d'une courbe plus générale, nous venons d'utiliser une méthode similaire à celle de l'intégration : en subdivisant la courbe en petits segments et en approximant sa longueur par la somme des longueurs de ces segments. En augmentant le nombre de points de subdivision, nous obtenons une meilleure approximation de la longueur de la courbe, convergeant vers une valeur limite indépendante du choix des points.

Supposons à présent avoir une barre avec une certaine densité de masse. Si la barre est homogène, alors la densité de masse est constante et peut s'exprimer en "unité de masse par unité de longueur". Dans ce cas, on calcule la masse totale en multipliant la densité par la longueur de la barre (exprimée dans les mêmes unités). Si la barre n'est pas homogène (par exemple parce que sa composition n'est pas la même partout), cette densité peut dépendre de l'endroit où on se place dans la barre. Cela va être modélisé par une fonction $m : [0, L] \rightarrow [0, +\infty[$ qui donne la densité de masse en fonction de la position dans la barre. L'idée est à nouveau de diviser la barre en petits morceaux sur lesquels la densité de masse peut être approximée par une constante. On peut donc calculer la masse totale de la barre en intégrant

$$\int_0^L m(x) dx.$$

On pourrait imaginer à présent avoir une masse répartie sur une courbe quelconque (par exemple, sur un cercle). À nouveau, si la densité de masse est constante, il est facile de calculer la masse totale de la courbe. Par contre, si la densité de masse varie en fonction de la position, on peut encore subdiviser l'arc de courbe en segments et approximer la masse totale en sommant les masses des segments. En augmentant le nombre de points de subdivision, nous espérons converger vers une valeur limite représentant la masse totale de la courbe.

Ainsi, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage simple, si $\Gamma = \gamma([a, b])$ et si $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction que l'on supposera continue, on considère un découpage $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ de $[a, b]$ et on lui associe la somme

$$\sum_{k=1}^m f(\gamma(x_k)) \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|,$$

où $\|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|$ approche la longueur de la courbe entre $\gamma(x_{k-1})$ et $\gamma(x_k)$. On pourrait également évaluer f en un autre point de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$. En procédant comme dans la Proposition 5.2.7, on considère naturellement la définition suivante.

Définition 5.2.12. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage simple C^1 , $\Gamma = \gamma([a, b])$ et $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de f sur Γ (ou le long de Γ) est définie par

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Remarquons qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. Cette intégrale a donc du sens. Notons aussi que dans le cas d'une fonction f constante égale à 1, on retrouve la longueur de Γ . Enfin, pour que cette définition soit légitime, il faut néanmoins s'assurer qu'elle ne dépend pas du paramétrage simple choisi pour calculer l'intégrale. C'est direct par la formule du changement de variable : si $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est un changement de variable tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(t)) \|\tilde{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(t))) \|\gamma'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| \, dt = \int_a^b f(\gamma(x)) \|\gamma'(x)\| \, dx.$$

Remarque 5.2.13. Évidemment, tout intervalle $[a, b]$ peut être identifié à une courbe simple paramétrée par $\gamma(t) = (t, 0)$ avec $t \in [a, b]$. Autrement dit, on considère $\Gamma = [a, b] \times \{0\}$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable réelle, on peut la transformer en une fonction définie sur Γ en posant $\tilde{f}(x, 0) = f(x)$. On a

$$\int_{\Gamma} \tilde{f} \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Ainsi, l'intégrale le long d'une courbe généralise l'intégrale de Riemann étudiée précédemment.

Exemple 5.2.14. Supposons qu'un tour d'hélice Γ donné par le paramétrage

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

avec $a > 0$ a une densité de masse donnée par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Sa masse totale est alors donnée par

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) + t^2) \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + 1} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + t^2) \sqrt{a^2 + 1} \, dt = \left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3}{3} \right) \sqrt{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

5.2.3 Intégrale curviligne d'une fonction vectorielle

Imaginons maintenant que nous cherchions à déterminer le travail effectué par un champ de force sur un point matériel se déplaçant le long d'une courbe. Lorsque cette courbe est un segment de droite et que la force appliquée au point matériel reste constante, il suffit de calculer le produit scalaire entre cette force et le segment de droite orienté dans le sens du déplacement du point matériel. Si le champ n'est pas uniforme, nous pouvons diviser le segment en une série de sous-segments et approximer le champ de force comme étant constant sur chacun d'eux. En affinant progressivement cette subdivision, nous obtenons une meilleure estimation du travail de la force sur le segment. Ainsi, on obtient le travail en intégrant le produit scalaire entre le champ de force et la direction du segment.

Considérons à présent que la particule se déplace le long d'une courbe plutôt que d'un segment de droite. Dans ce cas, nous approchons la courbe en la subdivisant en segments successifs et en supposant que le champ de force reste constant le long de chacun de ces segments. En sommant tous les travaux ainsi obtenus, nous obtenons une approximation du travail total du champ de force le long de la courbe parcourue par la particule. Si cette somme tend vers une limite indépendante du choix des points de subdivision lorsque nous augmentons leur nombre, nous pouvons alors raisonnablement considérer que cette limite représente le travail total du champ de force sur la courbe.

On est donc amené à considérer les sommes “à la Riemann”

$$\sum_{k=1}^m \langle f(\gamma(x_k)), \gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}) \rangle = \sum_{k=1}^m \langle f(\gamma(x_k)), \int_{x_{k-1}}^{x_k} \gamma'(t) dt \rangle.$$

On arrive à la définition suivante.

Définition 5.2.15. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage simple de classe C^1 . Si

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

est continue avec $\Gamma = \gamma([a, b])$, alors l'intégrale curviligne de f sur γ est définie par

$$\int_{\gamma} \langle f, ds \rangle = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Remarque 5.2.16. Parfois, la notation

$$\int_{\gamma} \langle f, ds \rangle = \int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

est également utilisée.

Notons que cette intégrale a bien du sens puisqu'on intègre une fonction continue sur un intervalle fermé borné. Rappelons que $\gamma'(t)$ donne la direction tangente à la courbe Γ au point $\gamma(t)$. Contrairement aux intégrales de fonctions scalaires sur une courbe, l'intégrale curviligne d'une

fonction vectorielle dépend du paramétrage choisi, via son orientation. Rappelons que deux paramétrages équivalents γ_1 et γ_2 définissent la même orientation si la fonction de changement de variable φ qui permet de passer de l'un à l'autre est strictement croissante, c'est-à-dire

$$\varphi'(t) > 0 \quad \forall t.$$

Dans ce cas, on a

$$\int_a^b \langle f(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle f(\gamma_2(\varphi(t))), \gamma_2'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) dt$$

et l'égalité avec l'intégrale curviligne sur γ_2 découle d'une intégration par changement de variable. Si φ est strictement décroissant, les paramétrages définissent une orientation différente. Dans ce cas, la formule du changement de variable fait apparaître un signe $-$ puisque la fonction φ est de dérivée négative. Rappelons qu'il y a deux orientations possibles pour une courbe. L'intégrale curviligne dépend donc, au signe près, de l'orientation choisie. Si l'orientation de Γ est fixée, on écrira Γ^+ . Il est alors légitime de poser

$$\int_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

pour tout paramétrage simple γ de Γ de même orientation. De plus, si Γ est une courbe de Jordan (donc fermée), on écrit

$$\oint_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle.$$

Exemple 5.2.17. *Considérons une portion hélice Γ^+ de centre 0 et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique. Un paramétrage simple respectant cette orientation est donné par*

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), bt), \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'intégrale curviligne de la fonction f définie par $f(x, y, z) = (x, y, z)$ sur Γ^+ est donnée par

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos(t), \sin(t), bt), (-\sin(t), \cos(t), b) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos(t) \sin(t) + \sin(t) \cos(t) + b^2 t dt = 2b^2 \pi^2. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est fondamental. Il montre que dans le cas où un champ dérive d'un potentiel scalaire, alors son intégrale curviligne sur une courbe ne dépend que des extrémités de celle-ci ! Autrement dit, si A et B sont les extrémités de la courbe, l'intégrale du champ ne dépend pas du chemin choisi pour aller du point A au point B .

Théorème 5.2.18. *Soit Γ une courbe simple orientée d'extrémités A et B . Si $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$*

dérive d'un potentiel scalaire g , alors

$$\int_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle = g(B) - g(A).$$

En particulier, si Γ est une courbe fermée, alors l'intégrale curviligne de f sur Γ est nulle.

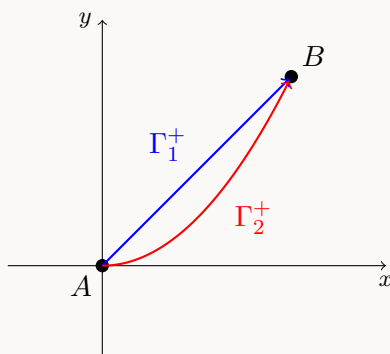
Démonstration. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un paramétrage simple de Γ qui respecte l'orientation. On a en particulier $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. On sait que $\text{grad } g = f$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle &= \int_a^b \langle \text{grad } g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(t)) \gamma'_2(t) + \frac{\partial g}{\partial z}(\gamma(t)) \gamma'_3(t) dt \\ &= \int_a^b D_t(g \circ \gamma)(t) dt \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \\ &= g(B) - g(A) \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées et le théorème fondamental de l'analyse. $\square$

Remarque 5.2.19. Un champ de force est dit conservatif s'il découle d'un potentiel scalaire. Dans ce cas, le travail effectué pour déplacer un point matériel d'un point A à un point B est indépendant du chemin parcouru.

Remarque 5.2.20. Sans l'hypothèse d'existence du potentiel scalaire, le résultat est faux. Considérons par exemple la fonction $f(x, y) = (0, xy)$ et les deux courbes orientées suivantes : Γ_1^+ est le segment de droite joignant le point $A = (0, 0)$ au point $B = (1, 1)$ et Γ_2^+ est la parabole joignant ces deux points.



On a

$$\gamma_1(t) = (t, t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (t, t^2)$$

avec $t \in [0, 1]$. Alors, on a d'une part

$$\int_{\Gamma_1^+} \langle f, ds \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

et d'autre part

$$\int_{\Gamma_2^+} \langle f, ds \rangle = \int_0^1 t^3 2t dt = \frac{2}{5}.$$

Signalons que la réciproque du Théorème 5.2.18 est également vraie. Autrement dit, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle définie sur un ouvert D telle que pour tous points A et B fixés dans D et toute courbe simple orientée Γ d'extrémités A et B , l'intégrale curviligne de f sur Γ ne dépend que des extrémités de Γ ⁵, alors f dérive d'un potentiel scalaire.

5.2.4 Formule de Green dans le plan

La formule de Green est un résultat fondamental en analyse vectorielle qui établit un lien profond entre l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs sur une courbe fermée et une intégrale sur la région délimitée par la courbe.

Théorème 5.2.21 (Formule de Green dans le plan). *Soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le contour Γ^+ est une courbe de Jordan C^1 par morceaux orientée "aire à gauche". Si*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui contient D et où les fonctions f_1 et f_2 sont de classe C^1 dans Ω , alors

$$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \oint_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle.$$

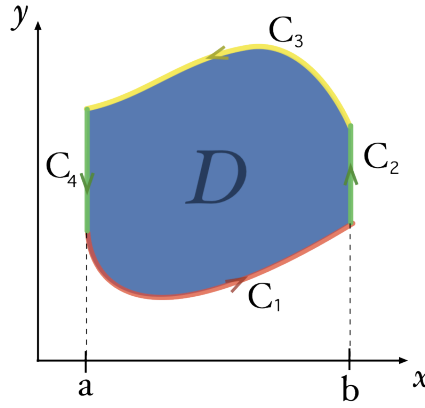
Démonstration. On va démontrer ce résultat dans le cas où D est "parallèle aux axes"⁶. Supposons par exemple que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ et } u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

pour deux fonctions u et v continues sur $[a, b]$.

5. Cela signifie que l'intégrale curviligne de f sur toute courbe fermée de D est nulle.

6. Le cas général se démontre en partitionnant le compact D en ensembles élémentaires.



Le bord de D est paramétré par les quatre paramétrages suivants

$$\gamma_1(t) = (t, u(t)), \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_2(t) = (b, t), \quad t \in [u(b), v(b)]$$

$$\gamma_3(t) = (t, v(t)), \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_4(t) = (a, t), \quad t \in [u(a), v(a)]$$

qui correspondent aux courbes orientées C_1^+ , C_2^+ , C_3^- et C_4^- respectivement (telles que représentées dans la figure). Ainsi, la courbe Γ^+ orientée "aire à gauche" est constituée de la juxtaposition des courbes orientées C_1^+ , C_2^+ , C_3^+ et C_4^+ . Montrons que

$$\iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma^+} \langle (0, f_2), ds \rangle$$

et que

$$\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dx dy = - \oint_{\Gamma^+} \langle (f_1, 0), ds \rangle.$$

Commençons par la première égalité. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} \langle (0, f_2), ds \rangle &= \oint_{C_1^+} \langle (0, f_2), ds \rangle + \oint_{C_2^+} \langle (0, f_2), ds \rangle + \oint_{C_3^+} \langle (0, f_2), ds \rangle + \oint_{C_4^+} \langle (0, f_2), ds \rangle \\ &= \int_a^b f_2(t, u(t)) u'(t) dt + \int_{u(b)}^{v(b)} f_2(b, t) dt - \int_a^b f_2(t, v(t)) v'(t) dt - \int_{v(a)}^{v(b)} f_2(a, t) dt \end{aligned}$$

puisque les paramétrages γ_3 et γ_4 sont dans la mauvaise orientation.

D'autre part, on a par le Théorème de Fubini

$$\iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dy dx.$$

On a une intégrale paramétrique dont les bornes dépendent du paramètre. Posons

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} f_2(\gamma, y) dy.$$

Par le Théorème fondamental de l'analyse, on a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, \beta, \gamma) = -f_2(\gamma, \alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} F(\alpha, \beta, \gamma) = f_2(\gamma, \beta).$$

De plus, le Théorème de dérivation des intégrales paramétriques donne

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma, y) dy.$$

Posons

$$G(x) = F(u(x), v(x), x).$$

La dérivée de G est donnée par

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} F(u(x), v(x), x) u'(x) + \frac{\partial}{\partial \beta} F(u(x), v(x), x) v'(x) + \frac{\partial}{\partial \gamma} F(u(x), v(x), x) \\ &= -f_2(x, u(x)) u'(x) + f_2(x, v(x)) v'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dy \end{aligned}$$

et on en tire que

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b G'(x) + f_2(x, u(x)) u'(x) - f_2(x, v(x)) v'(x) dx \\ &= G(b) - G(a) + \int_a^b f_2(x, u(x)) u'(x) - f_2(x, v(x)) v'(x) dx \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_2(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} f_2(a, y) dy + \int_a^b f_2(x, u(x)) u'(x) dx - \int_a^b f_2(x, v(x)) v'(x) dx \\ &= \oint_{\Gamma^+} \langle (0, f_2), ds \rangle, \end{aligned}$$

ce qui suffit.

Montrons à présent que

$$\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dx dy = - \oint_{\Gamma^+} \langle (f_1, 0), ds \rangle.$$

D'une part, on calcule directement que

$$\oint_{\Gamma^+} \langle (f_1, 0), ds \rangle = \int_a^b f_1(t, u(t)) dt - \int_a^b f_1(t, v(t)) dt.$$

D'autre part, le Théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b f_1(x, v(x)) - f_1(x, u(x)) dx \\ &= - \oint_{\Gamma^+} \langle (f_1, 0), ds \rangle \end{aligned}$$

par variation de primitive, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 5.2.22. Remarquons que, par la Proposition 5.1.18, on a $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si il existe une fonction g telle que f dérive de g , c'est-à-dire $\nabla g = f$. En particulier, la formule de Green redémontre que si f dérive d'un potentiel, alors

$$\oint_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle = 0.$$

Remarque 5.2.23. La formule de Green dans le plan peut être mise en parallèle avec le Théorème fondamental de l'analyse (variation de primitive) qui affirme que l'intégrale de la dérivée d'une fonction f sur un intervalle ne dépend que de la valeur de f aux bornes de cette intervalle. La formule de Green nous montre que l'intégrale d'une "certaine dérivée" d'une fonction f de deux variables sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ne dépend que de la valeur de f sur le bord de celui-ci.

Remarque 5.2.24. Dans le cas de $f_2 = x$ et $f_1 = 0$, la formule de Green devient

$$\iint_D dx dy = \oint_{\Gamma^+} \langle (0, x), ds \rangle$$

et pour $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$, on a

$$\iint_D dx dy = - \oint_{\Gamma^+} \langle (y, 0), ds \rangle.$$

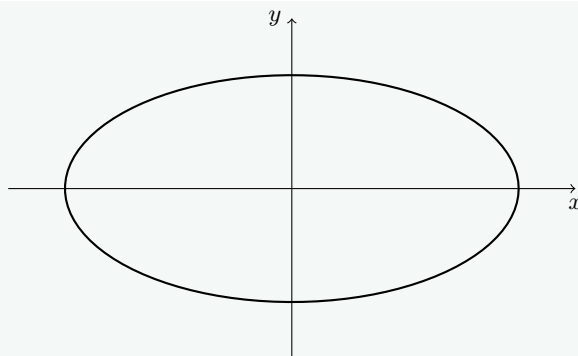
Cela permet d'appliquer la formule de Green au cas du calcul d'aires de surfaces planes.

Exemple 5.2.25 (Aire d'une ellipse). Considérons le domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

dont le bord est l'ellipse Γ^+ paramétrée "aire à gauche" par

$$\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$



Alors, l'aire de D est donnée par

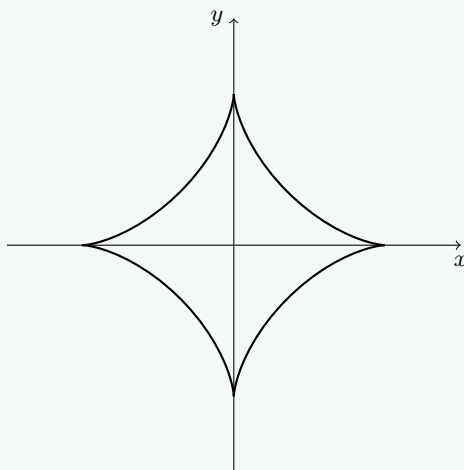
$$\iint_D dx dy = \oint_{\Gamma^+} \langle (0, x), ds \rangle = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Exemple 5.2.26. Considérons une astroïde, dont le bord orienté Γ^+ est paramétré par

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'aire de l'astroïde est donnée par

$$\oint_{\Gamma^+} \langle (0, x), ds \rangle = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt = \frac{3\pi}{8}.$$



5.3 Intégrales de surface

5.3.1 Couvertures et surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Sans entrer trop dans les détails, une surface va être une partie de $\mathbb{R}^3$ décrite par un paramétrage (suffisamment régulier) qui dépend de deux variables. On appelle souvent un tel paramétrage une *couverture*. Dans le cadre de ce cours, nous limiterons notre étude des surfaces à des aspects pratiques. Nous utiliserons les définitions et propriétés suivantes, qui sont rigoureuses du point de

vue mathématique mais ne nécessitent pas une exploration approfondie de la théorie des surfaces. Introduisons également la notion d'*intérieur* d'un ensemble : Si $K \subseteq \mathbb{R}^2$, on note K° le plus grand ouvert inclus dans K . On dit que K° est l'*intérieur* de K .

Définition 5.3.1.

▷ Une couverture dans $\mathbb{R}^3$ une application

$$\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de classe C^1 et injective sur K° , avec $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact d'intérieur non-vide et telle que les vecteurs

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) \right)$$

et

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

sont linéairement indépendants pour tout $(u, v) \in K^\circ$.

▷ Une surface dans $\mathbb{R}^3$ est une partie S de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle il existe une couverture $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $S = \Phi(K)$.

Intuitivement, si l'on fixe v , la fonction $u \mapsto \Phi(u, v)$ décrit une courbe sur la surface. Le vecteur

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) \right)$$

est alors un vecteur tangent à la surface en $\Phi(u, v)$ le long de cette courbe. De même, si l'on fixe u , la fonction $v \mapsto \Phi(u, v)$ décrit une autre courbe sur la surface, et le vecteur

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

est tangent à la surface le long de cette courbe. L'indépendance linéaire de ces deux vecteurs garantit qu'ils ne sont pas colinéaires et définissent ainsi un *plan tangent* à la surface en $\Phi(u, v)$.

Exemple 5.3.2.

▷ La sphère

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

est une surface qui admet pour couverture la fonction

$$\Phi : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (R \cos(u) \cos(v), R \sin(u) \cos(v), R \sin(v)).$$

▷ Le parallélogramme de $\mathbb{R}^3$ de sommet P et de côtés $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est une surface qui admet

pour couverture la fonction

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto P + u\vec{a} + v\vec{b}.$$

▷ *Le cône $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], x = y^2 + z^2\}$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ dont une couverture est donnée par*

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] : (u, v) \mapsto (v^2, v \cos(u), v \sin(u)).$$

Puisque la norme du produit vectoriel entre deux vecteurs donne l'aire du parallélogramme défini par ses deux vecteurs, afin d'approcher l'aire du surface, on approche celui-ci par des parallélogrammes et on calcule ensuite la somme de leurs aires. En affinant ce découpage, on arrive à la définition suivante.

Définition 5.3.3. *L'aire $A(S)$ d'une surface S dans $\mathbb{R}^3$ est définie par*

$$A(S) = \iint_K \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

si $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une couverture de S .

La formule du changement de variables permet de voir que cette définition est licite puisque la valeur de $A(S)$ ne dépend pas de la couverture de S choisie pour la calculer.

Remarque 5.3.4. *Pour tout (u, v) , le vecteur normal*

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$$

est orthogonal au plan tangent à la surface au point $\Phi(u, v)$.

Exemple 5.3.5. *L'aire de la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ est égale à $4\pi R^2$. En effet, puisqu'une couverture de S est donnée par*

$$\Phi : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (R \cos(u) \cos(v), R \sin(u) \cos(v), R \sin(v)),$$

on calcule

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \\ &= (-R \sin(u) \cos(v), R \cos(u) \cos(v), 0) \times (-R \cos(u) \sin(v), -R \sin(u) \sin(v), R \cos(v)) \\ &= (R^2 \cos(u) \cos^2(v), R^2 \sin(u) \cos^2(v), R^2 \cos(v) \sin(v)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\| &= \sqrt{R^4 \cos^2(u) \cos^4(v) + R^4 \sin^2(u) \cos^4(v) + R^4 \cos^2(v) \sin^2(v)} \\ &= R^2 \sqrt{\cos^4(v) + \cos^2(v) \sin^2(v)} \\ &= R^2 \sqrt{\cos^2(v)}.\end{aligned}$$

On en tire que l'aire de S est donnée par

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sqrt{\cos^2(v)} dv du = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(v) dv = 4\pi R^2$$

puisque $\cos(v) \geq 0$ si $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

5.3.2 Intégrales de surface

L'intégrale sur une surface est une généralisation de la formule de l'aire.

Définition 5.3.6. Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$ et soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de f sur S est définie par

$$\int_S f d\sigma = \iint_K f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

où $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une couverture de S .

A nouveau, la formule du changement de variables assure que cette intégrale ne dépend pas de la couverture choisie pour paramétrer S .

On peut également introduire la notion d'intégrale de fonctions à valeurs vectorielles sur des surfaces. On parle du *flux* de f au travers de la surface.

Définition 5.3.7. Soient S une surface dans $\mathbb{R}^3$, $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ une couverture de S et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale superficielle de f est définie par

$$\int_{\Phi} \langle f, d\sigma \rangle = \iint_K \left\langle f(\Phi(u, v)), \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\rangle du dv.$$

Nous savons que le produit vectoriel dans le membre de droite représente un vecteur normal à la surface, déterminé par la paramétrisation. Ainsi, notons ici qu'il y a une différence essentielle entre l'intégrale curviligne et l'intégrale superficielle : pour l'intégrale curviligne, on considère la coordonnée *tangentielle* de f , alors que l'intégrale superficielle est liée à sa coordonnée *orthogonale*. Prenons l'exemple d'un fluide traversant une surface S . Le flux est la quantité de fluide passant à travers S par unité de temps. Si le champ vectoriel $v(x, y, z)$ qui représente la vitesse locale du fluide au point (x, y, z) est tangent à S en tout point, le flux sera nul, car le fluide ne traverse pas la surface, s'écoulant seulement le long de celle-ci. Par contre, lorsque v a une composante normale non nulle, seule cette composante contribue au flux.

L'orientation d'une surface est un sujet compliqué. Les surfaces avec lesquelles nous travaillerons ont la propriété d'être *orientables*. Une surface orientable est définie comme une surface pour laquelle il existe un champ continu de vecteurs normaux unitaires, déterminant ainsi un “côté préféré”. Une orientation sur une surface orientable consiste en un choix spécifique de ce côté, permettant de distinguer une direction privilégiée sur la surface. Sans entrer dans les détails, nous établissons pour les surfaces orientables un résultat similaire à celui des paramétrages de courbes par des chemins simples : lorsqu'on se donne deux couvertures d'une même surface S orientable, il existe toujours un changement de variables entre les deux. Nous classons ensuite les couvertures en deux catégories, en fonction du signe du déterminant jacobien du changement de variables permettant de passer de l'une à l'autre. Orienter la surface consiste alors à choisir l'une des deux catégories. Nous notons S^+ pour indiquer que la surface a été orientée. L'intégrale superficielle dépend à nouveau de l'orientation choisie.

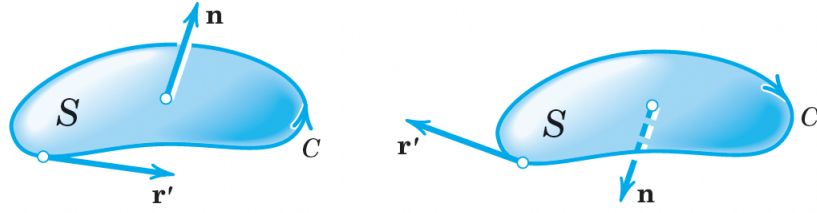
Remarque 5.3.8. *Il existe des surfaces non-orientables. C'est le cas par exemple du célèbre ruban de Möbius construit de la manière suivante : on prend un rectangle $ABCD$ et on “recolle” les côtés AD et BC de sorte que C coïncide avec A et B avec D .*



Le résultat suivant décrit la relation qui existe entre les intégrales de surface et les intégrales curvilignes.

Théorème 5.3.9 (Formule de Stokes). *Soit $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ une couverture d'une surface orientée S^+ . Si le bord Γ^+ de K est une courbe de Jordan C^1 par morceaux orienté de manière à respecter “la règle du tire-bouchon” par rapport à l'orientation de S^+ et si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ tel que $S \subset \Omega$, alors*

$$\iint_{\Phi} \langle \text{rot } f, d\sigma \rangle = \oint_{\Gamma^+} \langle f, ds \rangle.$$



Remarque 5.3.10. La formule de Stokes généralise le théorème de Green dans le plan. En effet, si l'on considère une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0)$$

et que la surface S est un domaine D du plan $z = 0$ avec orientation donnée par la normale $n = (0, 0, 1)$, alors le rotationnel est

$$\operatorname{rot} f = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

et la formule de Stokes devient alors

$$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} (f_1 dx + f_2 dy),$$

ce qui correspond exactement au théorème de Green.

En développant selon les composantes, le membre de gauche de la formule de Stokes se réécrit

$$\begin{aligned} & \iint_K \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} (\Phi(u, v)) - \frac{\partial f_2}{\partial z} (\Phi(u, v)) \right) N_1(u, v) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} (\Phi(u, v)) - \frac{\partial f_3}{\partial x} (\Phi(u, v)) \right) N_2(u, v) \\ & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} (\Phi(u, v)) - \frac{\partial f_1}{\partial y} (\Phi(u, v)) \right) N_3(u, v) du dv \end{aligned}$$

où

$$N(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v).$$

On a donc les égalités

$$\begin{cases} \iint_K \frac{\partial f_1}{\partial z} (\Phi(u, v)) N_2(u, v) - \frac{\partial f_1}{\partial y} (\Phi(u, v)) N_3(u, v) du dv & = \oint_{\Gamma^+} \langle (f_1, 0, 0), ds \rangle \\ \iint_K -\frac{\partial f_2}{\partial z} (\Phi(u, v)) N_1(u, v) + \frac{\partial f_2}{\partial x} (\Phi(u, v)) N_3(u, v) du dv & = \oint_{\Gamma^+} \langle (0, f_2, 0), ds \rangle \\ \iint_K \frac{\partial f_3}{\partial y} (\Phi(u, v)) N_1(u, v) - \frac{\partial f_3}{\partial x} (\Phi(u, v)) N_2(u, v) du dv & = \oint_{\Gamma^+} \langle (0, 0, f_3), ds \rangle \end{cases}$$

Rappelons que la formule de Green dans le plan⁷ transforme des intégrales doubles sur une région du plan en intégrales curvilignes sur les bords de ces régions, et inversement. De manière

7. qui peut être vue comme un cas particulier de la formule de Stokes, bien que nécessaire à sa preuve.

semblable, la formule de Gauss que nous donnons ci-dessous transforme des intégrales triples sur des ensembles bornés de l'espace en des intégrales superficielles sur la surface formée par le bord des ensembles.

Théorème 5.3.11 (Formule de Gauss, Théorème de la divergence). *Si V est un compact de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont la frontière S est composée de l'union finie de surfaces orientables et si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ tel que $V \subset \Omega$, alors*

$$\iiint_V \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{S^+} \langle f, d\sigma \rangle$$

où la surface est orientée avec la normale vers l'extérieur.

Bibliographie

- [1] Amory, C., Bastin, F., Crasborn, J., Dozot, C. et Godefroy, G. (2019) *MATH 1350 cm³ d'exercices corrigés pour la Licence 1*, Dunod.
- [2] Arnaudiès, J.-M. et Fraysse, H. (1991) *Cours de mathématiques Tome 2, Analyse*, Dunod.
- [3] Bartle, R.G. et Sherbert, D.R. (2000) *Introduction to Real Analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons.
- [4] Bonheure, D., Fine, J. et Richard, N. (2014–2015), *Calcul Différentiel et Intégral 1 Partie 1*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques et en sciences physiques, Université Libre de Bruxelles.
- [5] Delhez, E. (2012) *Analyse, Première Partie*, Notes du cours, Université de Liège.
- [6] Kreyszig, E. (2011) *Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition*, John Wiley & Sons, INC.
- [7] Nicolay, S. (2018) *Analyse mathématique, Fonctions définies sur une partie de la droite réelle Cours avec exercices corrigés et exercices d'approfondissement*, Ellipses, Références Sciences.
- [8] Rudin, W. (2006) *Principes d'analyse mathématique, Cours et exercices*, Dunod, Paris.
- [9] Schinazi, R.B. (2012) *From Calculus to Analysis*, Birkhäuser, Springer New York Dordrecht Heidelberg London.
- [10] Schmets, J. (2004–2005), *Analyse I*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques ou en sciences physiques, Université de Liège.
- [11] Tao, T. (2022) *Analysis I*, Fourth Edition, Texts and Readings in Mathematics 37, Springer, Hindustan Book Agency, New Delhi.
- [12] Tao, T. (2022) *Analysis II*, Fourth Edition, Texts and Readings in Mathematics 38, Springer, Hindustan Book Agency, New Delhi.
- [13] Wengenroth, J. (2006–2007), *Analyse*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques et en sciences physiques, Université de Liège.