Analyse I, Partie 1

Céline Esser

Université de Liège, Année académique 2025 – 2026

Table des matières

Avant propos

Ces notes de cours ont été principalement rédigées durant l'année académique 2023–2024 et sont destinées aux étudiants du cours d'Analyse I, Partie 1, dispensé dans le bloc 1 du cursus en Sciences Physiques. L'objectif principal de ce cours est de fournir une base solide en analyse, essentielle pour développer une compréhension rigoureuse des concepts mathématiques fondamentaux qui seront utilisés tout au long des études en Sciences Physiques.

Le premier chapitre introduit la théorie naïve des ensembles, en posant les fondations du langage mathématique et des concepts d'ensemble, d'application, de bijection et d'ensembles dénombrables. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des nombres réels, en détaillant leurs propriétés essentielles comme le principe d'Archimède et les bornes inférieures et supérieures. Ce chapitre pose également les bases des nombres complexes, un outil indispensable en analyse.

Les troisième et quatrième chapitres explorent les suites réelles et complexes. Les concepts de convergence, divergence, et les différentes techniques pour l'étude des limites sont introduits. Le quatrième chapitre se concentre sur des suites particulières, appelées les séries. Des critères de convergence sont introduits, tels que le critère de comparaison, le critère de la racine, et le critère du quotient.

Les chapitres suivants approfondissent l'étude des fonctions, en commençant par les fonctions d'une variable réelle et leurs graphes, les limites, et la continuité. Les notions de dérivabilité et les propriétés des fonctions dérivables sont abordées, en introduisant des outils tels que le théorème de Taylor et la règle de l'Hôpital, qui permettent une analyse fine du comportement local des fonctions.

Enfin, le cours s'étend à l'étude des fonctions de plusieurs variables, en explorant la continuité, la différentiation partielle, et les gradients, ainsi que l'étude des extrema. Les fonctions élémentaires telles que les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, et hyperboliques sont également détaillées, fournissant une vue d'ensemble des fonctions fondamentales en analyse.

Ces notes de cours ont été rédigées sur la base de nombreux échanges avec Laura Remacle et Savinien Kreczman, qui m'ont également aidé à élaborer les listes d'exercices correspondantes. Je les remercie chaleureusement pour leur aide précieuse. Je tiens également à remercier les étudiants de première année en Sciences Physiques de l'année académique 2023–2024, qui ont signalé de nombreuses coquilles dans la première version des notes. Finalement, je remercie Patrick Esser pour ses relectures attentives et ses nombreux conseils.

Chapitre 1

Théorie naïve des ensembles

1.1 Langage mathématique

Le langage mathématique est un outil fondamental qui permet de décrire et d'étudier rigoureusement des concepts abstraits et les relations entre ceux-ci. Il consiste en

- ▷ des objets (ensembles, nombres réels, fonctions, $\sqrt{2}$ ...)
- ▷ des relations entre les objets ($=$, $\leq$, $\subset$, $\in$ ...)
- ▷ des assertions sur les objets et leurs relations qui peuvent être vraies ou fausses.

Exemple 1.1.1 Par exemple, on peut considérer les assertions suivantes :

- ▷ “3 est un nombre premier”,
- ▷ “5 est plus petit que 2”,
- ▷ “je porte un pull rouge”,
- ▷ “il pleut”.

Les *règles formatives* (ou *règles de syntaxe*) permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'anciennes.

Définition 1.1.2 Soient P et Q deux assertions.

- ▷ $\neg P$ ou “ non P ” est une assertion qui est vraie si P est fausse, et qui est fausse si P est vraie.
- ▷ $P \wedge Q$ ou “P et Q ” est une assertion qui est vraie quand P est vraie et Q est vraie (simultanément), et qui est fausse sinon. C'est la conjonction de P et Q.
- ▷ $P \vee Q$ ou “P ou Q ” est une assertion qui est vraie quand au moins une des deux assertions P, Q est vraie, et qui est fausse sinon. C'est la disjonction de P et Q.
- ▷ $P \Rightarrow Q$ ou “P implique Q ” est une assertion qui est toujours vraie sauf si P est vraie et Q est fausse.
- ▷ $P \Leftrightarrow Q$ ou “P et Q sont équivalents” est une assertion qui est vraie si P implique Q et Q implique P.

Notons que le “ou” mathématique n'est pas exclusif : en mathématiques, si on vous dit “tu peux avoir pour dessert une glace ou un morceau de gâteau”, vous pouvez répondre “d'accord, je mangerai les deux”. Signalons aussi que l'implication est le “si ..., alors” du français. Pour bien comprendre la définition de l'implication, on peut se demander quand l'implication "Si on est vendredi, alors je porte un pull rouge" est fausse : cela arrive uniquement si on est vendredi et que je ne porte pas de pull rouge.

Exemple 1.1.3 Soient P l'assertion "il pleut" et Q l'assertion "je porte un pull rouge".

- ▷ $\neg P$ est l'assertion "il ne pleut pas".
- ▷ P et Q est l'assertion "il pleut et je porte un pull rouge".
- ▷ P ou Q est l'assertion "il pleut ou je porte un pull rouge".
- ▷ $P \Rightarrow Q$ est l'assertion "s'il pleut, alors je porte un pull rouge".
- ▷ $P \Leftrightarrow Q$ est l'assertion "il pleut si et seulement si je porte un pull rouge".

A chaque règle formative, on peut associer une *table de vérité* : une assertion composée a des valeurs de vérité qui dépendent des valeurs de vérité des assertions qui la composent. Par convention, on adopte les valeurs 0 pour faux et 1 pour vrai, mais vous pouvez conserver F et V si c'est plus concret pour vous.

Par exemple, la table de vérité de la négation est

P	$\neg P$
0	1
1	0

.

Pour la conjonction et la disjonction, on a

P	Q	P et Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

et

P	Q	P ou Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

.

Pour l'implication et l'équivalence, on obtient

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

et

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Remarquons qu'on a les réecritures suivantes (cela peut se vérifier à nouveau en écrivant les tables de vérité).

Proposition 1.1.4 *Si P et Q sont deux assertions, alors*

1. $\neg(P \vee Q)$ *est vraie si et seulement si l'assertion* $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ *est vraie,*
2. $\neg(P \wedge Q)$ *est vraie si et seulement si l'assertion* $(\neg P) \vee (\neg Q)$ *est vraie.*

Exemple 1.1.5 Soient P l'assertion "il pleut" et Q l'assertion "je porte un pull rouge".

- ▷ La négation de “il pleut ou je porte un pull rouge” est “il ne pleut pas et je ne porte pas un pull rouge”.
- ▷ La négation de “il pleut et je porte un pull rouge” est “il ne pleut pas ou je ne porte pas un pull rouge”.

Terminons cette liste d’opérations logiques en y ajoutant deux *quantificateurs* : le signe $\forall$ qui se dit “pour tout” et le signe $\exists$ qui se dit “il existe”.

Définition 1.1.6 Soit $P(x)$ une assertion qui dépend de certains objets x.

- ▷ $\exists x \,:\, P(x)$ est une assertion qui est vraie s’il existe un objet x tel que l’assertion $P(x)$ est vraie.
- ▷ $\forall x\, P(x)$ est une assertion qui est vraie si pour tout objet x, l’assertion $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.1.7

- ▷ $\exists x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = 2$ signifie qu’il existe un nombre réel dont le carré est égal à 2.
- ▷ $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$ signifie que le carré de tout nombre réel est plus grand ou égal à 0.

On peut bien sûr combiner les quantificateurs. Attention cependant à l’ordre de ceux-ci !

Exemple 1.1.8 L’affirmation

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \,:\, x + y = 0$$

signifie que tout nombre réel a un opposé. C’est une affirmation qui est vraie dans $\mathbb{R}$ puisqu’on peut prendre $y = -x$. Par contre, l’affirmation

$$\exists y \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in \mathbb{R}\ x + y = 0$$

signifie qu’il existe un nombre réel y qui, ajouté à n’importe quel réel, donne toujours 0 ! Un tel nombre n’existe pas et cette affirmation est fausse.

Regardons ce que donne la négation des quantificateurs.

Proposition 1.1.9 *Si P et Q sont deux assertions qui dépendent de x, alors*

1. *$\neg(\exists x \,:\, P(x))$ est vraie si et seulement si l’assertion $\forall x\ \neg P(x)$ est vraie,*
2. *$\neg(\forall x\ P(x))$ est vraie si et seulement si l’assertion $\exists x \,:\, \neg P(x)$ est vraie.*

Exemple 1.1.10

- ▷ La négation de “il existe un cheval de course bon marché” est “tous les chevaux de course coûtent cher”.
- ▷ La négation de “tous les profs de math sont méchants” est “il existe un prof de math qui n’est pas méchant”.

Comme nous l'avons vu, une assertion peut être soit vraie, soit fausse. Un *axiome* est une assertion dont la vérité n'est pas démontrée mais qui est exigée ou évidente. Une *démonstration* (ou *preuve*) d'une assertion est une déduction logique de l'assertion à partir des axiomes. Les assertions dont on a démontré la vérité sont des propositions ou des théorèmes. La démonstration *directe* consiste à démontrer une assertion en partant des hypothèses pour arriver à la conclusion par une suite d'implications logiques. Nous présentons ici d'autres techniques principales de démonstration.

Proposition 1.1.11 *Si P et Q sont deux assertions, alors l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement si l'assertion $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie.*

On dit que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est la *contraposée* de $P \Rightarrow Q$. Par conséquent, démontrer l'assertion $P \Rightarrow Q$ peut se faire en démontrant sa contraposée.

Exemple 1.1.12 Les assertions “si on est vendredi, alors je porte un pull rouge” et “si je ne porte pas de pull rouge, alors on n'est pas vendredi” ont la même signification.

Proposition 1.1.13 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a+b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.*

Démonstration : On procède par contraposition et on suppose que a et b sont rationnels. Alors $a + b$ est également rationnel par définition des rationnels. ■

Proposition 1.1.14 *Si n est un nombre entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.*

Démonstration : Supposons que n est impair. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On calcule alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et on constate que n^2 est impair. ■

Présentons à présent la méthode de démonstration *par l'absurde*. Cette technique est très utilisée. Elle consiste à supposer que ce que l'on souhaite démontrer est faux et à arriver à une absurdité (appelée aussi une contradiction), c'est-à-dire la conjonction d'une assertion et de sa négation.

Proposition 1.1.15 *Il n'existe pas de nombre rationnel q tel que $q^2 = 2$.*

Démonstration : On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q^2 = 2$. On peut écrire $q = \frac{n}{m}$ avec $n, m \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et $m \neq 0$. On a alors

$$2 = q^2 = \frac{n^2}{m^2}$$

et donc $n^2 = 2m^2$. Il s'ensuit que n^2 est un nombre pair. Par la proposition précédente, on obtient que n est un nombre pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Par conséquent, on a $4k^2 = 2m^2$ d'où $2k^2 = m^2$. A nouveau, cela implique que m^2 est pair et donc m également. On a donc obtenu que 2 divise m et n, ce qui est une contradiction puisque m et n sont premiers entre eux. ■

Une dernière technique classique de démonstration est la preuve *par récurrence* ou *par induction*. Cette technique permet de démontrer qu'une propriété dépendant d'un paramètre naturel est vraie pour toute valeur de ce paramètre.

Proposition 1.1.16 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une assertion $P(n)$. Si*

1. *l'assertion $P(0)$ est vraie*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie,*

alors l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On constate que cette méthode se décompose en deux parties. La première est appelée *cas de base* : il s'agit de montrer que $P(0)$ est vraie. La deuxième est appelée *récurrence* ou *induction*. Elle se présente comme une implication "si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie". La première assertion de cette implication "$P(n)$ est vraie" est appelée *hypothèse de récurrence* ou *hypothèse d'induction*. Remarquons qu'on n'est pas obligé de commencer à 0 : si on veut montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, on prend $P(n_0)$ comme cas de base.

Proposition 1.1.17 (Inégalité de Bernoulli) *Si $x \geq -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Démonstration : Soit $P(n)$ l'assertion "$(1+x)^n \geq 1+nx$". Le cas de base $n = 1$ est évidemment vérifié (on a même l'égalité). Prouvons maintenant que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie. Si $P(n)$ est vraie, alors

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}\underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \geq (1+x)(1+nx)$$

par hypothèse de récurrence. Puisque

$$(1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x,$$

on obtient que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$, ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. ■

1.2 Ensembles

Dans cette section, nous introduisons une théorie "naïve" des ensembles. Cela signifie qu'on ne définira pas de manière rigoureuse la notion d'ensemble.

Définition 1.2.1 Un *ensemble* A est une collection d'objets. Un objet x appartenant à A est un *élément* de A. On note $x \in A$.

Les éléments d'un ensemble peuvent être de n'importe quelle nature comme illustré dans les exemples suivants.

Exemple 1.2.2

- ▷ Lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine, i.e.

$$\text{Lundi} \in \{\text{Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi, Samedi, Dimanche}\}.$$

- ▷ Un alphabet est un ensemble de lettres.
- ▷ L'ULiège est un élément de l'ensemble des universités belges.

▷ La fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, est un élément de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Un ensemble peut être donné

▷ de manière explicite, en donnant tous ses éléments comme par exemple $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

▷ de manière explicite, mais sans donner tous les éléments comme par exemple $A = \{1, 2, \ldots, 99\}$,

▷ de manière descriptive, en donnant une propriété caractérisant ses éléments comme par exemple $A = \{n : n$ est un entier pair compris entre 1 et 99$\}$.

Passons maintenant aux relations entre les ensembles.

Définition 1.2.3

▷ **Ensemble vide :** Il existe un ensemble qui ne contient pas d'élément, l'ensemble *vide*, noté $\emptyset$.

▷ **Inclusion :** Si A et B sont deux ensembles, on écrit $B \subset A$ si tout élement de B est aussi un élément de A, autrement dit si

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Dans ce cas, on dit que B est un *sous-ensemble* de A.

▷ **Égalité :** Si A et B sont deux ensembles, on écrit $A = B$ quand $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est-à-dire si A et B ont les mêmes éléments. Dans ce cas, on dit que A et B sont *égaux*.

Exemple 1.2.4

▷ La collection {Lundi, Mardi, Jeudi} est un sous-ensemble de l'ensemble des jours de la semaine.

▷ Les voyelles forment un sous-ensemble de l'ensemble de l'alphabet.

▷ La collection {ULiège} est un sous-ensemble de l'ensemble des universités belges.

▷ Les fonctions dérivables forment un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Signalons qu'on peut aussi nier tous les symboles et écrire $x \notin A$, $B \not\subset A$ et $A \neq B$. Présentons maintenant les constructions classiques d'ensembles à partir d'ensembles donnés.

Définition 1.2.5 Soient A et B deux ensembles.

▷ **Union :** On définit l'union de A et B en posant

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

▷ **Intersection :** On définit l'intersection de A et B en posant

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

▷ **Différence :** On définit l'ensemble A moins B en posant

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

▷ **Complémentaire :** Si A est un sous-ensemble d'un ensemble X, on définit le complémentaire de A dans X en posant

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Attention, la notation A^c ne peut être utilisée que si le contexte est clair, c'est-à-dire si l'ensemble X est implicitement connu.

Les opérations d'union et d'intersection ont les propriétés suivantes. On peut les démontrer en utilisant des tables de vérité sur les assertions $x \in A$, $x \in B$ ... ou en procédant par double inclusion.

Proposition 1.2.6 *Soit X un ensemble et soient A, B, C des sous-ensembles de X.*

▷ ***Commutativité :*** $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.

▷ ***Associativité :*** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *et* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

▷ ***Distributivité :*** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

▷ ***Lois de Morgan :*** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *et* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Démonstration : A titre d'illustration, démontrons la première relation de la distributivité. Commençons par montrer que

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Pour cela, fixons $x \in A \cap (B \cup C)$. Alors, on a $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Considérons deux cas.

▷ Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

▷ Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Montrons à présent que

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. A nouveau, on étudie deux cas.

▷ Si $x \in A \cap B$, alors d'une part on a $x \in A$ et d'autre part, on a $x \in B$ ce qui implique que $x \in B \cup C$. Donc au total, $x \in A \cap (B \cup C)$.

▷ Si $x \in A \cap C$, alors on a $x \in A$ et on a aussi $x \in C$, d'où $x \in B \cup C$. Donc au total, $x \in A \cap (B \cup C)$.

■

Puisque les opérations d'union et d'intersection sont commutatives, on peut définir l'union et l'intersection de plus de 2 ensembles. On donnera facilement un sens aux expressions du type

$$A_1 \cup \cdots \cup A_m \quad \text{et} \quad A_1 \cap \cdots \cap A_m.$$

On écrira aussi ces ensembles

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{m} A_k.$$

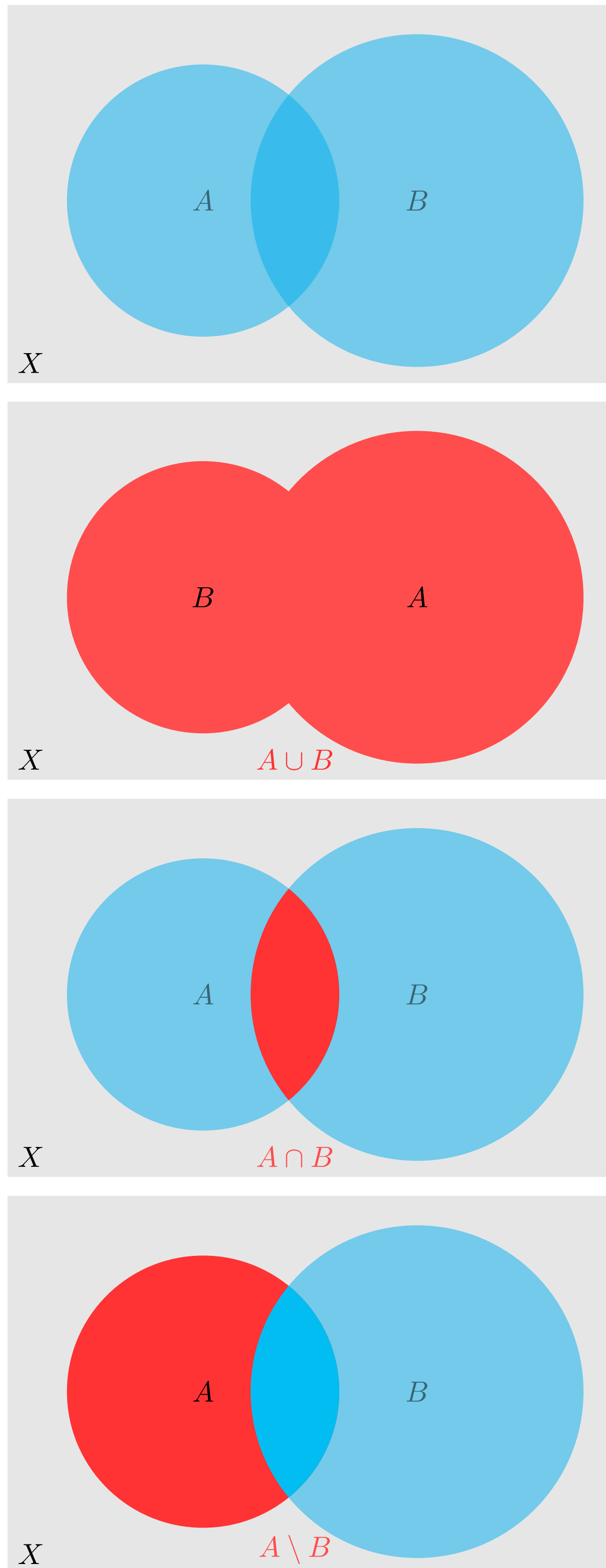


FIGURE 1.1 – Représentation des opérations ensemblistes.

Dans ces expressions, la lettre k est “muette”, ce qui signifie que vous pouvez la remplacer par n’importe quel symbole.

Enfin, nous définissons la notion de produit cartésien d’ensembles.

Définition 1.2.7 Soient A et B deux ensembles. On définit le *produit cartésien* de A et B en posant
$$A \times B = \big\{(a,b) : a \in A \text{ et } b \in B\big\}.$$

Attention à la différence entre $\{a,b\}$ et (a,b). En effet, on a toujours $\{a,b\} = \{b,a\}$ mais on a $(a,b) = (b,a)$ si et seulement si $a = b$! On peut aussi étendre la définition du produit cartésien à un produit de plusieurs ensembles en posant

$$A_1 \times \cdots \times A_m = \prod_{k=1}^{m} A_k = \big\{(a_1, \ldots, a_m) : a_1 \in A_1, \ldots, a_m \in A_m\big\}.$$

1.3 Applications

Dans cette section, nous présentons intuitivement la notion d’application et les principales opérations que l’on peut faire sur les applications.

Définition 1.3.1 Soient A et B deux ensembles. Une *application* f de A dans B est une loi qui à tout élément x de A associe un élément $f(x)$ de B. Dans ce cas, on écrit

$$f : A \to B : x \mapsto f(x).$$

On appelle x la *variable* et $f(x)$ la *valeur de f en x*. On dit que A est l’ensemble *de départ* ou le *domaine de définition* de f, et que f est *définie sur A*. On dit que B est l’ensemble *d’arrivée* de f et que f est *à valeurs* dans B.

Notons que les notions de “loi” et d’“associer” ne sont pas rigoureusement définies mais nous garderons cette approche intuitive.

Exemple 1.3.2 Si les états possibles d’un système physique sont décrits par un ensemble X et que l’état au temps t ne dépend que de t et de l’état initial, on peut décrire ce système par une application
$$f : X \times [0, +\infty[\to X : (x,t) \mapsto f(x,t)$$
de manière à ce que $f(x,t)$ corresponde à l’état du système au temps t sachant qu’il a démarré dans l’état x.

Définition 1.3.3 Deux applications f et g sont *égales* si elles ont le même ensemble de départ A et si
$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$
Dans ce cas, on écrit $f = g$.

Si f et g ne sont pas égales, alors soit elles ne sont pas définies sur le même ensemble, soit il existe $x \in A$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Dans ce cas, on écrit $f \neq g$. Présentons à présent des méthodes pour construire des applications à partir d’autres applications.

Définition 1.3.4 Soit $f : A \to B$ une application définie sur A et soit $A' \subset A$. La *restriction* de f à A' est l'application
$$f|_{A'} : A' \to B : x \mapsto f(x).$$

La définition de la composition d'applications que nous présentons maintenant est intuitive si on se rappelle qu'une application est une "loi" qui à toute valeur de l'ensemble de départ associe une valeur de l'ensemble d'arrivée. On peut donc imaginer appliquer successivement plusieurs lois : partir de x, lui appliquer f pour obtenir $f(x)$ et à cette valeur $f(x)$, appliquer la loi g pour obtenir $g(f(x))$.

Définition 1.3.5 Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. La *composition* de f et g est l'application $g \circ f$ définie par

$$g \circ f : A \to C : x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

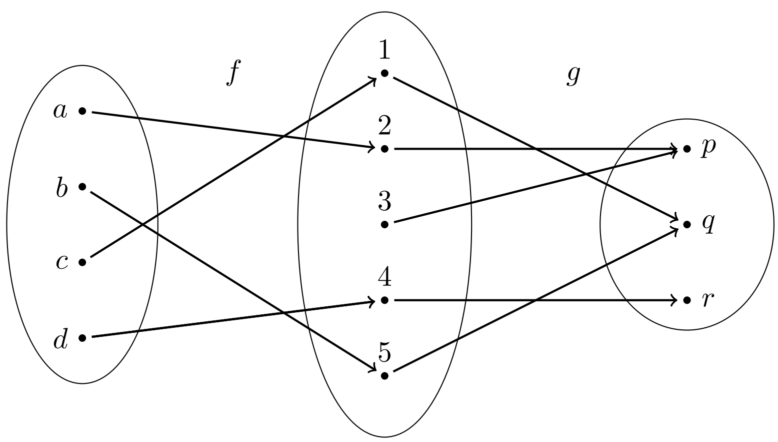


FIGURE 1.2 – Représentation de la composition d'une fonction f et d'une fonction g : on a $g \circ f(a) = p$, $g \circ f(b) = q$, $g \circ f(c) = q$ et $g \circ f(d) = r$.

Nous introduisons à présent une classe particulière d'applications, les *applications bijectives*. Ces applications $f : A \to B$ possèdent une application *réciproque* qui à tout élément y de B associe l'élément x de A dont il provient. Bien sûr, pour que cette définition ait du sens, il faut

1. qu'il *existe* un élément x de A tel que $f(x) = y$,
2. que cet élément soit *unique*.

Ces deux conditions traduisent ce que l'on appelle des applications *surjectives* et *injectives*. L'injectivité traduit l'unicité donnée au point 2 : nous la définissons ci-dessous.

Définition 1.3.6 Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est *injective* (ou une *injection*) si pour tous $x, x' \in A$ tels que $x \neq x'$, on a $f(x) \neq f(x')$.

Cela traduit le fait que deux éléments distincts de l'ensemble de départ prennent des valeurs différentes. On peut reformuler cette condition via sa contraposée en écrivant donc que pour tous $x, x' \in A$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Remarque 1.3.7 Attention, il y a une erreur fréquente avec cette définition qui consiste à renverser le sens de l'implication et à écrire " si $x = x'$, alors $f(x) = f(x')$ ". Cette condition n'apporte évidemment aucune information supplémentaire au fait que f soit une application !

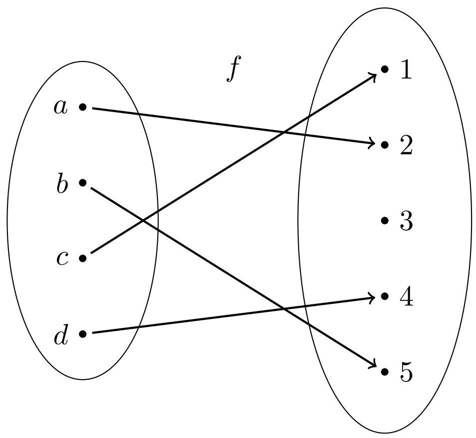


FIGURE 1.3 – La fonction f est une injection entre l'ensemble $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'application g n'est pas une injection entre A et B puisque $g(a) = g(d)$.

Exemple 1.3.8 Supposons disposer de paires de chaussettes de 3 couleurs différentes : des chaussettes blanches, rouges et noires. On change de chaussettes tous les jours selon la règle suivante :

- ▷ le lundi, le mercredi et le vendredi, on met une paire de chaussettes rouges,
- ▷ le mardi et le jeudi, on porte des chaussettes noires,
- ▷ le week-end, on porte des chaussettes blanches.

Cette loi définit une application f dont l'ensemble de départ A est l'ensemble des jours de la semaine, et l'ensemble d'arrivée B est l'ensemble des couleurs {blanc, rouge, noir}. L'application f ainsi définie n'est pas injective car

$$f(\text{lundi}) = f(\text{mercredi}) = \text{ rouge}.$$

Exemple 1.3.9

- ▷ L'application $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective car $f(-2) = f(2) = 4$.
- ▷ L'application $f_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est injective puisque si $x^2 = t^2$ avec $x, t \geq 0$, alors $x = t$.
- ▷ L'application
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$$
n'est pas injective puisque $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3})$.
- ▷ L'application
$$f_4 : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$$
est injective. On peut le voir à partir du cercle trigonométrique.

La surjectivité traduit l'existence donnée au point 1. Voici la définition.

Définition 1.3.10 Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est *surjective* (ou une *surjection*) si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

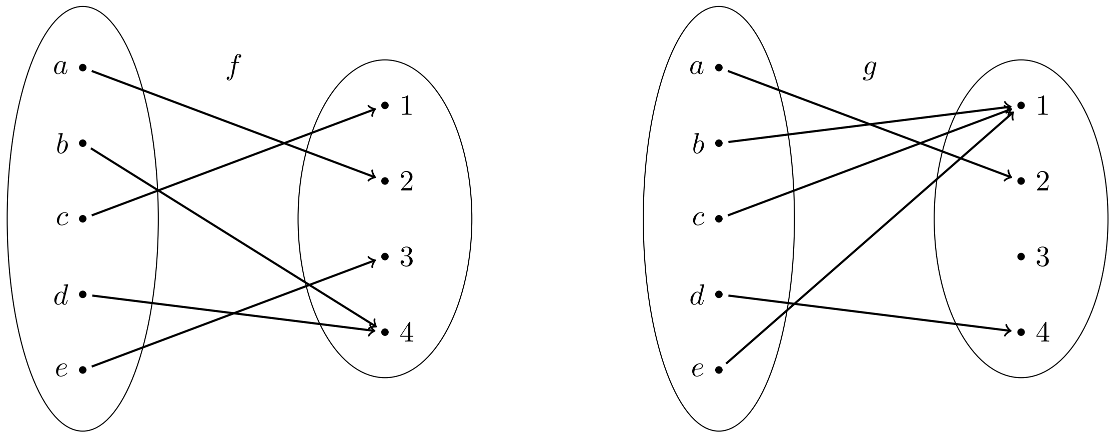


FIGURE 1.4 – La fonction f est une surjection entre l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$. L'application g n'est pas une surjection entre A et B puisque 3 n'est l'image d'aucun point de A.

Exemple 1.3.11 Reprenons l'exemple 1.3.8 des chaussettes. L'application f est surjective car pour toute couleur de l'ensemble B, il existe un jour de la semaine durant lequel on porte des chaussettes de cette couleur.

Définition 1.3.12 Soit $f : A \to B$ une application. L'ensemble *image de A par f* est défini par

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Avec cette définition, on remarque que $f : A \to B$ est surjective si $f(A) = B$.

Exemple 1.3.13

- ▷ L'application $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas surjective car le nombre -1 n'appartient pas à l'image de $\mathbb{R}$ par f_1.
- ▷ L'application $f_2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est surjective puisque tout nombre réel positif admet une racine carrée.
- ▷ L'application
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$$
n'est pas surjective puisque le nombre 2 n'appartient pas à l'image de $\mathbb{R}$ par f_3.
- ▷ L'application
$$f_4 : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$$
est surjective car tout nombre compris entre -1 et 1 peut s'écrire comme le sinus d'un nombre réel.

Définition 1.3.14 Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est *bijective* (ou une *bijection*) si f est injective et surjective. Dans ce cas, l'application *inverse* ou *réciproque* de f est l'application
$$f^{-1} : B \to A$$
qui associe à tout élément $y \in B$ l'unique élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

On a donc
$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$
En particulier,
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

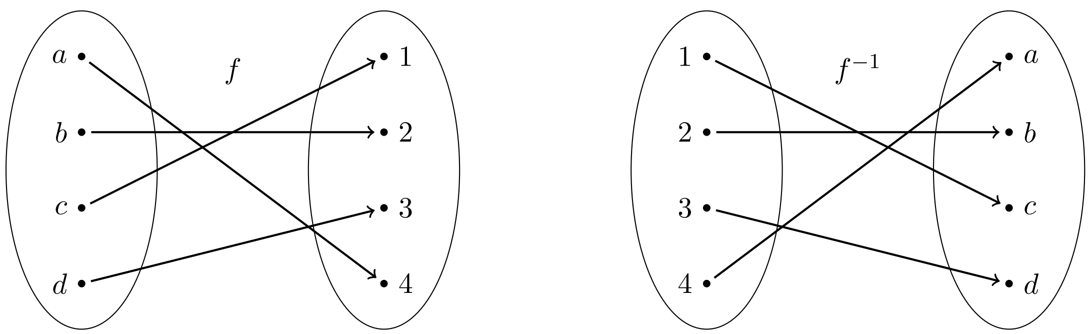


FIGURE 1.5 – Exemple d'une bijection entre l'ensemble $A = \{a, b, c, d\}$ et l'ensemble $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et de son application inverse.

Exemple 1.3.15

▷ L'application
$$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$$
est une bijection. L'application inverse de f est donnée par la racine carrée
$$f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: y \mapsto \sqrt{y}.$$

▷ L'application
$$\sin : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
est bijective. Son application réciproque est l'application
$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

1.4 Ensembles dénombrables

Intuitivement, les ensembles infinis dénombrables sont les "plus petits" ensembles infinis. Avant d'introduire cette notion, concentrons-nous sur les ensembles finis. Supposons que A est un ensemble en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection
$$f : A \to \{1, \ldots, n\}.$$

Alors, il est clair que l'ensemble A possède exactement n éléments. On dit que le *cardinal* de A est égal à n. Si A est un ensemble qui n'est pas de cardinal fini, on dira qu'il est *infini dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Cela traduit le fait qu'on peut *énumérer* les éléments de A.

Définition 1.4.1 Un ensemble A est *dénombrable* s'il est fini ou s'il existe une bijection $f : A \to \mathbb{N}$.

En fait, les deux conditions traduisent le fait qu'il existe une injection $f : A \to \mathbb{N}$.

Exemple 1.4.2 L'ensemble des nombres pairs $2\mathbb{N}$ est dénombrable puisque l'application

$$f : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N} : m \mapsto \frac{m}{2}$$

est une bijection.

Proposition 1.4.3

1. *Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*
2. *Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, c'est-à-dire si J est un ensemble dénombrable et si les ensembles X_j, $j \in J$, sont dénombrables, alors*

$$\bigcup_{j \in J} X_j = \{x : \exists j \in J \text{ tel que } x \in X_j\}$$

est dénombrable.

Exemple 1.4.4

▷ L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable car

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

▷ L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable car

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n$$

avec

$$X_n = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Proposition 1.4.5 *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.*

Il existe une bijection célèbre entre cet ensemble et l'ensemble $\mathbb{N}$, donnée par l'énumération de Cantor. On peut la visualiser sur la figure suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
(0,0) & \rightarrow & (0,1) & & (0,2) & \rightarrow & (0,3) \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(1,0) & & (1,1) & & (1,2) & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
(2,0) & & (2,1) & & & & \\
& \swarrow & & & & & \\
(3,0) & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Il existe aussi des ensembles qui ne sont pas dénombrables. Nous ne rentrerons pas dans les détails de la preuve.

Proposition 1.4.6 *L'ensemble des nombres réels compris entre* 0 *et* 1 *n'est pas dénombrable. En particulier, l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.*

Chapitre 2

Les nombres réels

Dans le chapitre 1, nous avons supposé connus les différents ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Chacun de ces ensembles possède des caractéristiques et des propriétés qui les distinguent les uns des autres. Bien que les définitions précises de ces ensembles dépassent le cadre de ce cours, nous allons passer en revue certaines de leurs propriétés essentielles. Nous nous intéressons en particulier à la relation d'ordre que l'on peut mettre sur $\mathbb{R}$ et aux notions de bornes de sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Les nombres naturels sont les nombres entiers positifs utilisés pour compter. L'ensemble des nombres naturels est noté $\mathbb{N}$ et est donc donné par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

On utilisera donc dans ce cours la convention que 0 est un nombre naturel et on notera

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$$

l'ensemble des nombres naturels non-nuls. Si on additionne deux nombres naturels, la somme est encore un nombre naturel. Néanmoins, la différence entre deux nombres naturels n'est pas nécessairement un nombre naturel. C'est là que les nombres entiers entrent en jeu : en plus de permettre l'addition de deux nombres entiers, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers étend cette propriété à la soustraction, où la différence entre deux nombres entiers est toujours un nombre entier. On a

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Remarquons que le produit de deux nombres entiers est encore un nombre entier, mais si on souhaite considérer la division, il faut agrandir l'ensemble $\mathbb{Z}$. En effet, certains quotients (ou rapports de quantités) ne peuvent pas être représentés par des nombres entiers.

Les nombres rationnels sont des nombres qui peuvent être représentés sous forme de fraction, où le numérateur et le dénominateur sont tous deux des nombres entiers et où le dénominateur est non-nul, c'est-à-dire

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{n}{d} : n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est stable par addition et soustraction, par multiplication et division (à condition que le dénominateur ne soit pas nul).

Cependant, même avec les nombres rationnels, il y a des quantités qui ne peuvent pas être exprimées de manière exacte. En effet, nous avons vu dans la Proposition 1.1.15 qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 2. Ainsi, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut pas être exprimée comme un nombre rationnel. En effet, par le théorème de Pythagore, on sait que la longueur de cette diagonale est $\sqrt{2}$. Ainsi, les nombres rationnels ne suffisent pas à représenter toutes les grandeurs mathématiques et géométriques.

Les nombres réels permettent de "combler les trous" entre les nombres rationnels. La construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels sort du cadre du cours et nous supposerons le lecteur familier avec les nombres réels. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

et les élements de $\mathbb{R}$ qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés les nombres irrationnels.

Rappelons ci-dessous les propriétés des nombres réels [1].

Proposition 2.1.1 *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Propriétés de l'addition* [a] *:*
   - ▷ *Associativité : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $x + (y + z) = (x + y) + z$.*
   - ▷ *Commutativité : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x + y = y + x$.*
   - ▷ *Existence d'un élément neutre : le nombre réel 0 est tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + 0 = x$.*
   - ▷ *Existence d'un inverse : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$. On dit que y est l'opposé de x et on le note $-x$.*
2. *Propriétés de la multiplication* [b] *:*
   - ▷ *Associativité : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $x(yz) = (xy)z$.*
   - ▷ *Commutativité : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $xy = yx$.*
   - ▷ *Existence d'un élément neutre : le nombre réel 1 est tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1x = x$.*
   - ▷ *Existence d'un inverse : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$. On dit que y est l'inverse de x et on le note x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.*
3. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $x(y + z) = xy + xz$.*

a. Cela signifie que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.
b. Cela signifie que $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe commutatif.

Les propriétés énoncées dans la Proposition 2.1.1 signifient que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif ou un champ. Remarquons que 0 n'a pas d'inverse pour la multiplication : on ne peut donc pas diviser par 0 !

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$. On note naturellement $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. On note également $x \geq y$ si $y \leq x$ et $x > y$ si $x \geq y$ et $\neq y$. La relation $\leq$ satisfait les propriétés suivantes.

1. Les propriétés des Propositions 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.10 peuvent être considérées comme des axiomes qui permettent de définir l'ensemble $\mathbb{R}$. Il est en fait possible de donner des axiomes pour construire $\mathbb{N}$, d'en tirer ensuite les constructions successives de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$, en ajoutant des axiomes à chaque étape.

Proposition 2.1.2 *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

- ▷ *Réflexivité : on a $x \leq x$.*
- ▷ *Transitivité : si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors on a $x \leq z$.*
- ▷ *Antisymétrie : si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.*
- ▷ *Ordre total : on peut toujours comparer deux éléments, c'est-à-dire on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$.*
- ▷ *Compatibilité avec l'addition : si $x < y$, alors $x + z < y + z$.*
- ▷ *Compatibilité avec la multiplication : si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$.*

Les propriétés de $\mathbb{R}$ que nous avons énoncées nous permettent d'obtenir le résultat suivant [2].

Proposition 2.1.3 *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

1. *On a $x > 0$ si et seulement si $-x < 0$.*
2. *Si $x > 0$ et $y < z$, alors $xy < xz$.*
3. *Si $x < 0$ et $y < z$, alors $xy > xz$.*
4. *Si $x \neq 0$, alors $x^2 > 0$.*
5. *Si $0 < x < y$, alors $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.*

Démonstration : 1. Si $x > 0$, alors on a $0 = -x + x > -x + 0 = -x$ et donc $-x < 0$. De même, si $-x < 0$, alors $0 = -x + x < 0 + x = x$ et donc $x > 0$.

2. Si $y < z$, alors $z - y > 0$ et donc $x(z - y) > 0$. On en tire que $xz - xy > 0$ et donc $xz = xz - xy + xy > 0 + xy = xy$.

3. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc $-x(z - y) > 0$. On en tire que $-xz + xy > 0$ et donc $xy = xz - xz + xy > xz + 0 = xz$.

4. Si $x > 0$, alors $x^2 = xx > 0$. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc $(-x)^2 > 0$. Or, on sait que $(-x)^2 = (-x)(-x) = xx = x^2$ et on en tire donc que $x^2 > 0$.

5. Puisque $x > 0$, si on avait $\frac{1}{x} \leq 0$, on en tirerait que $1 = x\frac{1}{x} \leq 0$. Donc $\frac{1}{x} > 0$ et de même, on montre que $\frac{1}{y} > 0$. En particulier, on a $\frac{1}{x}\frac{1}{y} > 0$ et donc puisque $x < y$, on en tire que $\frac{1}{y} = x\frac{1}{x}\frac{1}{y} < y\frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$. ∎

Remarquons que les propriétés des Propositions 2.1.1 et 2.1.2 sont également satisfaites par l'ensemble $\mathbb{Q}$ [3]. C'est grâce à la propriété que nous allons présenter ci-dessous que $\mathbb{R}$ se distingue de $\mathbb{Q}$. Pour cela, nous devons d'abord introduire quelques définitions.

Définition 2.1.4 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- ▷ On dit que A est *majoré* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. Un tel nombre M est appelé un *majorant* de A.
- ▷ On dit que A est *minoré* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq m$ pour tout $x \in A$. Un tel nombre m est appelé un *minorant* de A.

2. Ce résultat est valide dans tout corps commutatif totalement ordonné.
3. Autrement dit, $\mathbb{Q}$ est également un corps commutatif totalement ordonné.

Si un ensemble A admet un majorant et un minorant, on dit que A est *borné*.

On adopte les notations usuelles suivantes pour les intervalles de $\mathbb{R}$.

Notation 2.1.5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ ]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \\ ]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \\ ]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ ]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ ]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont les *intervalles* de $\mathbb{R}$. On dit que les intervalles $[a, b], [a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont *fermés*, que les intervalles $]a, b[,]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont *ouverts* et enfin, que les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ sont *semi-ouverts*.

On voit immédiatement que seuls les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme

$$[a, b],]a, b], [a, b[,]a, b[,]-\infty, b] \text{ et }]-\infty, b[$$

sont majorés. Seuls les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme

$$[a, b],]a, b], [a, b[,]a, b[, [a, +\infty[\text{ et }]a, +\infty[$$

sont minorés. Les intervalles

$$[a, b],]a, b], [a, b[\text{ et }]a, b[$$

sont donc les intervalles bornés. Remarquons qu'un majorant ou un minorant de A n'appartient pas nécessairement à A. Par exemple, 1 est un majorant de l'intervalle $]-1, 1[$.

De plus, si M est un majorant de A, alors tout nombre plus grand que M est également un majorant de A. De même, si m est un minorant de A, alors tout nombre plus petit que m est encore un minorant de A. La définition suivante permet de considérer les "meilleurs" majorant et minorant de A.

Définition 2.1.6 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- ▷ Un nombre $S \in \mathbb{R}$ est une *borne supérieure* de A si
  - ▷ S est un majorant de A et
  - ▷ si M est un majorant de A, alors $S \leq M$.

  Dans ce cas, on note $S = \sup A$. Il s'agit donc du plus petit majorant de A.
- ▷ Un nombre $s \in \mathbb{R}$ est une *borne inférieure* de A si
  - ▷ s est un minorant de A et

▷ si m est un minorant de A, alors $s \geq m$.

Dans ce cas, on note $s = \inf A$. Il s'agit donc du plus grand minorant de A.

Si elle existe, la borne supérieure de A est unique : en effet, si S et S' sont des bornes supérieures, alors S' est un majorant de A et S une borne supérieure, et donc $S \leq S'$. De même, S est un majorant de A et S' une borne supérieure, ce qui implique que $S' \leq S$. On peut faire le même raisonnement pour montrer que, si elle existe, la borne inférieure d'un ensemble est unique. Si elles existent, on parle donc de la borne supérieure et de la borne inférieure d'un ensemble.

Remarque 2.1.7 La deuxième condition pour qu'un nombre $S \in \mathbb{R}$ soit la borne supérieure de A peut se réécrire en utilisant sa contraposée : Si $S > M$, alors M n'est pas un majorant de A. De même, la deuxième condition pour qu'un nombre $s \in \mathbb{R}$ soit la borne inférieure de A peut se réécrire : Si $s < m$, alors m n'est pas un minorant de A.

Remarquons également que les bornes supérieures et inférieures d'un ensemble n'appartiennent pas nécessairement à l'ensemble. C'est le cas par exemple d'un intervalle ouvert $]a, b[$ pour lequel la borne supérieure est b et la borne inférieure a.

Définition 2.1.8 Si $\sup A \in A$, on parle du *maximum* de A et on le note $\max A$. Si $\inf A \in A$, on parle du *minimum* de A et on le note $\min A$. On dit aussi que les bornes supérieures et inférieures sont *réalisées* ou *atteintes*.

Exemple 2.1.9 Si A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, alors sa borne supérieure est le plus grand de ses éléments et sa borne inférieure est le plus petit de ses éléments.

Nous pouvons à présent énoncer la dernière propriété qui permet de définir les nombres réels.

Proposition 2.1.10 *Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non-vide et majoré possède une borne supérieure. De même, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non-vide et minoré possède une borne inférieure.*

Afin de conclure cette section sur les nombres réels, signalons que l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas la Proposition 2.1.10 : il existe un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ non-vide et majoré mais qui ne possède pas (dans $\mathbb{Q}$!) de borne supérieure. Nous verrons qu'il suffit de considérer le sous-ensemble A de $\mathbb{Q}$ défini par

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}.$$

On montera que $\sup A = \sqrt{2}$ et on a déjà obtenu que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Remarque 2.1.11 Bien souvent, si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas minoré, on écrira $\inf A = -\infty$. De même, si A n'est pas majoré, on note $\sup A = +\infty$.

2.2 Propriété d'Archimède et existence de racines

Nous avons vu dans la Proposition 1.1.15 qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 2. L'objectif de cette section est de montrer que l'ensemble des réels permet de considérer les racines carrées de tout nombre positif. Commençons par démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.2.1 (Propriété d'Archimède) *Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, alors il existe un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Démonstration : Procédons par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $nx \leq y$. Cela signifie que y est un majorant de l'ensemble

$$A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}.$$

Donc A est un ensemble non-vide et majoré, et la Proposition 2.1.10 implique que A admet une borne supérieure $S = \sup A$. Comme $x > 0$, on a $S - x < S = \sup A$ et donc $S - x$ ne peut pas être un majorant de A. Cela signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S - x < nx$. On en tire que $S < (n+1)x$, ce qui est impossible car S est un majorant de A et $(n+1)x \in A$.

■

Remarquons qu'en prenant $x = 1$, on trouve que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > y$, ce qui est très intuitif mais que nous venons de démontrer proprement à partir des propriétés axiomatiques de $\mathbb{R}$.

Exemple 2.2.2 Ce résultat permet de démontrer que

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = 0.$$

En effet, soit $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Il est clair que A est non-vide et est minoré par 0. Donc par la Proposition 2.1.10, $s = \inf A$ existe. Comme 0 est un minorant de A, on a $s \geq 0$. Si $s > 0$, alors par la propriété d'Archimède avec $x = s$ et $y = 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $ns > 1$. Bien sûr, on a $n \neq 0$ et on en tire que $s > \frac{1}{n}$. Ceci est impossible car $\frac{1}{n} \in A$. Par conséquent, $s = 0$.

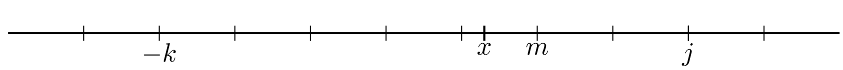
Corollaire 2.2.3 *Pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{n} < y$.*

Démonstration : On vient de démontrer que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = 0$. Donc, si $y > 0$, alors y n'est pas un minorant de $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{n} < y$. ■

En particulier, entre les nombres réels 0 et y, on peut toujours trouver un nombre rationnel. Ce résultat est vrai en toute généralité et la proposition suivante montre qu'entre deux nombres réels, on peut toujours trouver un nombre rationnel.

Proposition 2.2.4 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *Si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*

Démonstration : Comme $x < y$, on sait que $y - x > 0$. Dans un premier temps, supposons que $y - x > 1$. La propriété d'Archimède avec $x' = 1$ et $y' = x$ permet de considérer $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > x$. De même, pour $x' = 1$ et $y' = -x$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > -x$, c'est-à-dire $x > -k$. On peut alors trouver le plus petit entier m de $\{-k, \ldots, j\}$ tel que $m > x$. En particulier, on a $m - 1 \leq x$ et donc $m \leq x + 1 < y$. Puisque $m > x$, on en tire que $x < m < y$.



Passons à présent au cas général. Comme $y - x > 0$, la propriété d'Archimède donne l'existence d'un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(y - x) > 1$. On a donc $ny - nx > 1$ et par le premier point, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $nx < m < ny$. On en tire que $x < \frac{m}{n} < y$. Par conséquent, $q = \frac{m}{n}$ convient. ■

Intéressons-nous à présent à l'existence de la racine carrée de 2. Nous allons en fait montrer que tout nombre réel positif admet une unique racine carrée positive.

Proposition 2.2.5 *Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$.*

Démonstration : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \text{ et } y^2 \leq 2\}$. Alors A est non-vide car $1 \in A$. De plus, le nombre réel 2 majore A : en effet, si $y \in A$ est tel que $y > 2$, alors $y^2 > 4 > 2$, ce qui est impossible. Par la Proposition 2.1.10, on peut considérer le nombre réel $x = \sup A$. Comme x est un majorant de A et $1 \in A$, on sait que $x \geq 1$. Comme x est la borne supérieure de A et 2 est un majorant de A, on a aussi $x \leq 2$. Montrons que $x^2 = 2$. Pour cela, on procède par l'absurde en supposant que $x^2 \neq 2$. Nous allons séparer les cas $x^2 < 2$ et $x^2 > 2$.

Supposons tout d'abord que $x^2 < 2$. On a alors $2 - x^2 > 0$ et donc $\frac{2-x^2}{5} > 0$. En appliquant le Corollaire 2.2.3, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - x^2}{5}.$$

En particulier, on a $x^2 + \frac{5}{n} < 2$. Posons $t = x + \frac{1}{n}$. En utilisant les inégalités $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ et $x \leq 2$, on trouve

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{5}{n} < 2$$

vu le choix de n. Donc $t \in A$ et $t > x$, ce qui mène à une contradiction.

Supposons à présent que $x^2 > 2$. On procède de la même manière en considérant $t = x - \frac{1}{n}$ où n est choisi tel que

$$\frac{x^2 - 2}{4} > \frac{1}{n}.$$

On a alors

$$t^2 = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \geq x^2 - \frac{4}{n} > 2$$

puisque $x \leq 2$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$. Donc $t \notin A$. Comme $t < x = \sup A$, t ne peut pas être un majorant de A, et il existe donc $y \in A$ tel que $t < y$. Cela implique alors[4] que $t^2 < y^2$, et on en tire que $y^2 > 2$. Ceci est impossible puisque $y \in A$. ■

Le nombre réel positif x tel que $x^2 = 2$ est unique. En effet, si $y < x$, alors $y^2 < 2$ et si $y > x$, alors $y^2 > 2$. On le note $\sqrt{2}$ ou encore $2^{\frac{1}{2}}$. La construction que nous venons de faire se généralise au cas des racines carrées de n'importe quel nombre réel strictement positif, et même aux racines $m^{\text{ième}}$. La preuve suit le même genre d'arguments que dans le cas de la racine carrée de 2.

Proposition 2.2.6 *Pour tout nombre réel $r > 0$ et tout nombre naturel $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un unique nombre réel positif x tel que $x^m = r$. Ce nombre x est donné par*

$$\sup \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \text{ et } y^m \leq r\}$$

et est noté $r^{\frac{1}{m}}$ ou $\sqrt[m]{r}$.

Mentionnons le résultat suivant.

4. Puisque $t < y$, on a $t^2 = tt < ty < yy = y^2$.

Corollaire 2.2.7 *Soient x, y deux nombres réels positifs et $m \in \mathbb{N}_0$. Alors*

$$(xy)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{m}} y^{\frac{1}{m}}.$$

Démonstration : Si $a = x^{\frac{1}{m}}$ et $b = y^{\frac{1}{m}}$, on a

$$xy = a^m b^m = (ab)^m.$$

Comme la racine $m^{\text{ième}}$ de ab est unique, on en tire que

$$ab = (xy)^{\frac{1}{m}}.$$

■

2.3 Propriétés des bornes inférieures et supérieures

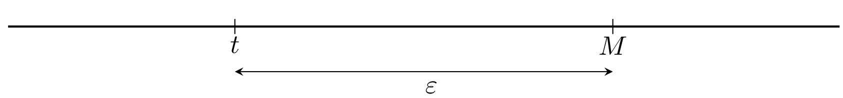
Dans cette section, nous présentons quelques propriétés supplémentaires des bornes supérieures et inférieures.

Proposition 2.3.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

1. *Soit M un majorant de A. Alors M est la borne supérieure de A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$.*
2. *Soit m un minorant de A. Alors m est la borne inférieure de A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x < m + \varepsilon$.*

Démonstration : 1. Supposons que $M = \sup A$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $M - \varepsilon < M$ et donc $M - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant de A. On en tire qu'il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$.

Réciproquement, si $t < M$, alors en posant $\varepsilon = M - t > 0$, il existe $x \in A$ tel que $t = M - \varepsilon < x$. Donc t ne peut pas être un majorant de A. Ainsi, tout majorant de A est plus grand ou égal à M.



2. On procède de la même manière. ■

Corollaire 2.3.2

1. *Si $M \in A$ est un majorant de A, alors M est la borne supérieure de A.*
2. *Si $m \in A$ est un minorant de A, alors m est la borne inférieure de A.*

Démonstration : 1. En effet, si $\varepsilon > 0$, alors $M - \varepsilon < M$. On conclut en utilisant la Proposition 2.3.1.

2. On procède de la même manière. ■

Terminons par une propriété de stabilité des bornes supérieures et inférieures par rapport aux opérations. On va s'intéresser uniquement au cas de l'addition pour illustrer les méthodes.

Proposition 2.3.3

1. *Si A et B sont deux sous-ensembles majorés de $\mathbb{R}$, alors on a*

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

2. *Si A et B sont deux sous-ensembles minorés de $\mathbb{R}$, alors on a*

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

Démonstration : 1. Soient $x \in A$ et $y \in B$. Alors, on a $x \leq \sup A$ et $y \leq \sup B$, et donc

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

Ainsi, $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. On a donc $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$.

Pour montrer l'autre inégalité, fixons $y \in B$. Pour tout $x \in A$, on a $x + y \in A + B$ et donc $x + y \leq \sup(A+B)$. On en tire que

$$x \leq \sup(A+B) - y.$$

Ainsi, $\sup(A+B) - y$ est un majorant de A et donc on a $\sup A \leq \sup(A+B) - y$. On en tire que

$$y \leq \sup(A+B) - \sup A$$

quel que soit $y \in B$, et donc $\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$. Cela mène à la conclusion.

2. On utilise des arguments semblables à ceux du premier point. ■

Notation 2.3.4 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Pour simplifier les notations, on écrit parfois $\sup A = +\infty$ si A n'est pas majoré. De même, on écrit $\inf A = -\infty$ si A n'est pas minoré.

2.4 Valeur absolue

Dans cette section, nous nous intéressons aux propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel. Commençons par rappeler sa définition.

Définition 2.4.1 Si $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue* $|x|$ de x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ donne la distance de x à 0 sur la droite réelle. Remarquons également que

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Rappelons les propriétés de la valeur absolue.

Proposition 2.4.2 *Soient x et y deux nombres réels. On a*

1. $|x| \geq 0$,
2. $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
3. $|xy| = |x|\,|y|$,

4. si $y \neq 0$, alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration : 1. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x > 0$.

2. C'est immédiat par définition.

3. Si $x = 0$ ou $y = 0$, le résultat est direct. Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$ et on obtient donc $|xy| = xy = |x|\,|y|$. Si $x > 0$ et $y < 0$, alors $xy < 0$ et donc $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x|\,|y|$. Enfin, si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$ et donc $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$.

On peut aussi procéder en remarquant simplement que

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x|\,|y|)^2.$$

4. On fait de même en écrivant

$$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2} = \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^2.$$

■

Proposition 2.4.3 *Soient x et y deux nombres réels. Si $y \geq 0$, on a*

1. *$|x| \leq y$ si et seulement si $-y \leq x \leq y$,*
2. *$-|x| \leq x \leq |x|$,*
3. *$|x| \geq y$ si et seulement si $x \geq y$ ou $x \leq -y$.*

Démonstration : 1. Supposons d'abord que $|x| \leq y$. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et donc $x \leq y$. De plus, $-y \leq 0 \leq x$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et donc $-x \leq y$. On en tire que $x \geq -y$. De plus, on a $y \geq 0 > x$.

Supposons à présent que $-y \leq x \leq y$. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \leq y$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x \leq y$.

2. Il suffit d'appliquer le point 1 avec $y = |x|$.

3. Supposons que $|x| \geq y$. Si $x \geq 0$, alors $x = |x| \geq y$. Si $x < 0$, alors $-x = |x| \geq y$ d'où $x \leq -y$.

Réciproquement, on suppose que $x \geq y$ ou $x \leq -y$. Si $x \geq 0$, alors on a nécessairement $x \geq y$ et donc $|x| = x \geq y$. Si $x < 0$, alors on a nécessairement $x \leq -y$. On en tire que $|x| = -x \geq y$. ■

Du point de vue géométrique, le résultat suivant est clair à partir d'un dessin sur la droite réelle.

Proposition 2.4.4 (Inégalité triangulaire) *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration : On a

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 \geq x^2 + 2x\,y + y^2 = (x + y)^2 = |x + y|^2.$$

■

Corollaire 2.4.5 *Soient* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ *avec* $n \in \mathbb{N}_0$. *Alors*

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Démonstration : On procède par récurrence. Le cas de base $n = 1$ est trivial, et pour $n = 2$ c'est l'inégalité triangulaire classique. Supposons que le résultat est vérifié pour n et montrons-le pour $n+1$. Soient donc $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Alors, l'inégalité triangulaire et ensuite l'hypothèse de récurrence permettent d'écrire

$$|x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|,$$

d'où la conclusion. ■

Proposition 2.4.6 (Inégalité triangulaire inversée) *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Démonstration : On utilise l'inégalité triangulaire avec $x - y$ et y pour écrire

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

d'où

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

En inversant les rôles de x et y, on trouve

$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$

Puisque $\big||x| - |y|\big|$ est soit égal à $|x| - |y|$, soit à $|y| - |x|$, on obtient la conclusion. ■

2.5 Les nombres complexes

Nous avons vu que quel que soit le nombre réel $r > 0$, on peut toujours trouver un réel $x > 0$ tel que $x^2 = r$. Autrement dit, tout nombre réel positif admet une racine carrée. Le résultat est faux lorsque l'on s'intéresse aux réels négatifs : ainsi, quelque soit le réel $r < 0$ considéré, il est impossible de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = r$.

Nous avons également vu que l'addition et la multiplication permettaient de munir $\mathbb{R}$ d'une structure de corps commutatif. On peut faire de même pour le plan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. On définit l'addition et la multiplication de deux éléments du plan en posant

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

et

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Avec cette structure, $\mathbb{R}^2$ devient un corps commutatif que l'on note $\mathbb{C}$. Pour ces nouvelles opérations, on vérifie que

- ▷ $(0, 0)$ est l'élément neutre pour l'addition,
- ▷ $(-x, -y)$ est l'opposé de (x, y),

▷ $(1,0)$ est le neutre pour la multiplication,

▷ $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ est l'inverse de (x,y) si $(x,y) \neq (0,0)$.

Remarque 2.5.1 Etant donné un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on note θ l'angle formé par le segment reliant $(0,0)$ à (x,y) et la demi-droite $\{(t,0) : t \geq 0\}$ et on note $|(x,y)|$ la longueur du vecteur d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x,y). De même, pour un deuxième point (u,v) de $\mathbb{R}^2$, on obtient un angle ϕ et une longueur $|(u,v)|$. Alors, en utilisant un peu de trigonométrie, on voit que la multiplication définie par $(x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu)$ correspond au point formant un segment de longueur $|(x,y)|\,|(u,v)|$ avec $(0,0)$ et un angle $\theta+\phi$ avec la demi-droite $\{(t,0) : t \geq 0\}$.

On peut naturellement voir $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en identifiant $x \in \mathbb{R}$ avec le point $(x,0)$ de $\mathbb{C}$. On remarque que $\mathbb{R}$ est alors un sous-corps de $\mathbb{C}$:

$$(x,0) + (u,0) = (x+u,0)$$

et

$$(x,0)(u,0) = (xu,0).$$

Remarquons que l'ensemble des nombres complexes est défini sans aucune référence à la mystérieuse racine de -1. En identifiant -1 avec $(-1,0)$, on voit directement que ce point forme un angle π avec la demi-droite $\{(t,0) : t \geq 0\}$. Si z est le point qui est à distance 1 de l'origine et qui forme un angle $\frac{\pi}{2}$ avec la demi-droite de référence, c'est-à-dire le point $(0,1)$, alors la definition de la multiplication donne que z^2 est à une distance 1 de l'origine et l'angle qu'il forme avec la demi-droite de référence a doublé et vaut donc π. On obtient donc que $z^2 = -1$. Ainsi, le corps $\mathbb{C}$ a une propriété très importante que $\mathbb{R}$ n'a pas : le nombre réel -1 possède une racine carrée.

Notation 2.5.2 On note $i = (0,1)$. Alors, $i^2 = -1$. Nous pouvons à présent écrire tout nombre complexe comme la somme d'un multiple réel de $1 = (1,0)$ et d'un multiple réel de $i = (0,1)$. Ainsi, tout élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme

$$z = x + iy$$

où x et y sont des nombres réels. On dit que x est la *partie réelle* de z et on la note $\Re z$. On dit que y est la *partie imaginaire* de z et on la note $\Im z$.

Si la partie imaginaire de z est nulle, alors z est un nombre réel. Lorsque la partie réelle de z est nulle, z est appelé un nombre imaginaire pur. Il est important de souligner que, malgré l'appellation, il n'y rien d'imaginaire dans les nombres imaginaires.

Remarque 2.5.3 Le corps commutatif $\mathbb{C}$ a gagné une propriété par rapport à $\mathbb{R}$ puisqu'on peut montrer que tout nombre admet une racine carrée. Néanmoins, on perd l'existence d'un ordre total compatible avec l'addition et la multiplication. En effet, si une telle relation $\leq$ existait, on aurait $i^2 = -1 \geq 0$ car le carré d'un nombre est toujours positif ou nul. Or, on a aussi $1 = 1^2 > 0$ et donc -1 et 1 seraient tous les deux positifs, ce qui est impossible.

Définition 2.5.4 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le *module* de z, noté $|z|$, est défini par
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
Il s'agit de la longueur du segment d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x,y).

Notons que si z est réel, son module coïncide avec sa valeur absolue.

Proposition 2.5.5 *Soient z et w deux nombres complexes. On a*

- $\triangleright$ $|z| \geq 0$,
- $\triangleright$ $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$,
- $\triangleright$ $|zw| = |z|\,|w|$,
- $\triangleright$ $|\Re z| \leq |z|$ *et* $|\Im z| \leq |z|$,
- $\triangleright$ $|z + w| \leq |z| + |w|$,
- $\triangleright$ $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$.

Terminons par l'introduction du conjugué d'un nombre complexe.

Définition 2.5.6 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z, noté $\overline{z}$, est défini par
$$\overline{z} = x - iy.$$

Les propriétés de base du conjugué d'un nombre complexe sont rappelées ci-dessous.

Proposition 2.5.7 *Soient z et w deux nombres complexes. On a*

- $\triangleright$ $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$,
- $\triangleright$ $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
- $\triangleright$ $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
- $\triangleright$ $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
- $\triangleright$ $z\overline{z} = |z|^2$,
- $\triangleright$ $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.

Chapitre 3

Suites réelles et complexes

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de suite et explorons la convergence des suites. L'objectif principal est d'analyser comment les suites numériques évoluent au fur et à mesure que l'indice augmente. La notion de convergence exprime l'idée que certaines suites "se rapprochent" d'une certaine valeur à mesure que l'indice devient de plus en plus grand. Il s'agit d'un concept fondamental et un outil de base en analyse.

3.1 Définition

Commençons par introduire la notion de suite. Intuitivement, une suite est une "liste infinie" de nombres réels (ou complexes) $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ qui est indexée par les nombres naturels. Chaque élément de cette suite est un *terme* de la suite et est associé à un *indice* qui correspond à sa position. C'est cette constatation qui permet de définir rigoureusement les suites. A chaque position n, on associe un nombre x_n.

Définition 3.1.1 Une *suite* de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$) est une application définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement $(x_n)_n$, la suite donnée par l'application

$$n \in \mathbb{N} \mapsto x_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre x_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite.

Notons que l'indice n qui apparaît dans la notation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est muet. Cela signifie qu'on peut écrire de manière équivalente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ou encore $(x_\heartsuit)_{\heartsuit\in\mathbb{N}}$.

Exemples 3.1.2

- ▷ Considérons la suite qui à tout naturel associe son carré : il s'agit de la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Ses premiers termes sont $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$
- ▷ Considérons la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ses premiers termes sont $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ Son $n^{\text{ème}}$ terme est égal à 1 si n est pair et à -1 si n est impair.
- ▷ Considérons la suite qui à tout naturel n associe la somme des n premiers naturels : il s'agit de la suite
$$\left(\sum_{j=0}^{n} j\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
dont les premiers termes sont $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$

- ▷ La suite de Fibonacci est la suite définie par les conditions $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et la relation de récurrence $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$. Ses premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Définition 3.1.3 Si q est un nombre complexe, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite géométrique de raison q*.

On passe donc d'un terme d'une suite géométrique au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

Exemples 3.1.4

- ▷ La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ est une suite géométrique de raison 2.
- ▷ La suite $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

On peut aussi définir des suites sur $\mathbb{N}_0$ ou sur $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$. On écrit alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ou $(x_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 3.1.5 Considérons la suite qui à tout naturel non-nul associe son inverse : il s'agit de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ses premiers termes sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

3.2 Convergence

Dans cette section, nous allons nous intéresser au comportement asymptotique des suites. Commençons par présenter quelques cas intuitifs.

- ▷ Considérons la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ses éléments sont positifs et de plus en plus petits. En fait, il se rapprochent de plus en plus de 0, même si aucun terme n'est égal à 0.
- ▷ La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ a des éléments qui sont positifs et de plus en plus grands. Ils peuvent même devenir arbitrairement grands.
- ▷ L'écriture décimale de $\frac{1}{3}$ est $0.33333333\ldots$ et signifie que l'on regarde l'évolution des termes de la suite
$$0.3\,, 0.33\,, 0.333\,, 0.3333\,, \ldots$$
c'est-à-dire la suite $x_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n}$. Les éléments de cette suite se rapprochent de plus en plus de la valeur $\frac{1}{3}$, sans jamais l'atteindre.

Intuitivement, on dira qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si les termes de la suite se rapprochent de a. La définition suivante permet de formaliser cette idée.

Définition 3.2.1 Soit $(x_n)_n$ une suite de nombre réels (ou complexes). On dit que $(x_n)_n$ *converge* vers un nombre $a \in \mathbb{R}$ (ou $a \in \mathbb{C}$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
Dans ce cas, on écrit
$$x_n \to a \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

ou également

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a,$$

et on dit que a est la *limite* de la suite $(x_n)_n$.

Ainsi, une suite $(x_n)_n$ converge vers a si quelque soit le nombre $\varepsilon > 0$ qu'on se donne, aussi petit qu'on le souhaite, on peut trouver un indice N à partir duquel les termes de la suite $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ se trouvent à une distance de a inférieure à ε. Dans le cas réel, les termes $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ sont donc entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on peut approcher a par x_n en commettant une erreur strictement plus petite que ε.

Attention, le nombre N dépend de ε : plus ε est petit, plus N sera grand !

Exemples 3.2.2

- ▷ Fixons $a \in \mathbb{C}$. La suite constante $(a)_n$ égale à a converge trivialement vers a.
- ▷ Confirmons notre intuition en montrant que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0. Pour cela, on utilise le Corollaire 2.2.3 du Principe d'Archimède. Fixons $\varepsilon > 0$, alors on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

  On a donc montré que

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

- ▷ Considérons la suite $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Ses premiers termes sont donnés par $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ La suite semble donc converger vers 1. Nous le montrons en fixant $\varepsilon > 0$. En appliquant à nouveau le Corollaire 2.2.3, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

  Alors, on obtient que

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

  pour tout $n \geq N$. Par conséquent,

$$\frac{n}{n+1} \to 1 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Le résultat suivant complète les résultats présentés dans le chapitre 2 et montre qu'on peut approcher n'importe quel nombre réel par une suite de nombres rationnels.

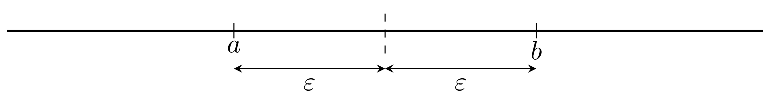
Proposition 3.2.3 *Si $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite $(q_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x.*

Démonstration : Par la Proposition 2.2.4, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe un nombre rationnel q_n tel que
$$x < q_n < x + \frac{1}{n}.$$
Considérons la suite $(q_n)_n$ ainsi obtenue et montrons qu'elle converge vers x. Fixons $\varepsilon > 0$. Le Corollaire 2.2.3 nous donne un nombre $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors, si $n \geq N$, on a
$$|x - q_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$
d'où la conclusion. ■

Présentons à présent les premières propriétés des suites convergentes.

Proposition 3.2.4 *Si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Démonstration : Procédons par l'absurde et supposons que $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers a et b, avec $a \neq b$. Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$. Par définition de la convergence, il existe des nombres naturels N_1 et N_2 tels que
$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_1 \quad \text{et} \quad |x_n - b| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_2.$$
Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient
$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |b - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|$$
pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. On a donc obtenu que $|a - b| < |a - b|$, ce qui est impossible. ■



Proposition 3.2.5 *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers a et b. Si $x_n \leq y_n$ pour tout n, alors $a \leq b$.*

Démonstration : Procédons par l'absurde et supposons que $a > b$. Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b) > 0$. Par définition de la convergence, il existe des nombres naturels N_1 et N_2 tels que
$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_1 \quad \text{et} \quad |y_n - b| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_2.$$
On a alors
$$y_n = y_n - b + b < \varepsilon + b = \frac{1}{2}(a - b) + b = a - \frac{1}{2}(a - b) = a - \varepsilon < a + (x_n - a) = x_n$$
pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

Remarque 3.2.6 Attention, si $x_n \to a$ et $y_n \to b$ et si $x_n < y_n$ pour tout n, on ne peut pas conclure que $a < b$. En effet, il suffit de prendre les suites définies par $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$. Par contre, on peut bien sûr conclure que $a \leq b$.

Définition 3.2.7 On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|x_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est minoré et majoré.

Proposition 3.2.8 *Si une suite converge, alors elle est bornée.*

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Notons a sa limite. Par définition de la convergence, en prenant $\varepsilon = 1$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < 1$ pour tout $n \geq N$. On en tire que pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

en utilisant l'inégalité triangulaire. Donc, la suite $(x_n)_n$ est bornée à partir du $N^{\text{ième}}$ terme. Il ne reste alors plus que les N termes $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ à considérer. Comme ils sont en nombre fini, on peut prendre le plus grand d'entre eux, c'est-à-dire poser

$$B = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$$

et on aura $|x_n| \leq B$ pour tout $n < N$. Au total, si $C = \max\{B, 1 + |a|\}$, on trouve que $|x_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où la conclusion. ■

3.3 Techniques pour la convergence

Démontrer la convergence d'une suite à l'aide de la définition peut s'avérer pénible. Nous présentons ici des techniques qui permettent de démontrer la convergence d'une suite de manière plus directe. Premièrement, montrons que l'addition et le produit sont stables pour la convergence des suites.

Proposition 3.3.1 (Règles de calcul) *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites qui convergent respectivement vers a et b. Alors*

1. *pour tout nombre $c \in \mathbb{C}$, la suite $(c\,x_n)_n$ converge vers $c\,a$,*
2. *la suite $(x_n + y_n)_n$ converge vers $a + b$,*
3. *la suite $(x_n y_n)_n$ converge vers ab,*
4. *si $b \neq 0$, alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $y_n \neq 0$ pour tout $n \geq M$ et la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq M}$ converge vers $\frac{a}{b}$.*

Démonstration : 1. Si $c = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc que $c \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ pour tout $n \geq N$. On en tire que

$$|c\,x_n - c\,a| = |c|\,|x_n - a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N,$$

ce qui montre bien que $c\,x_n \to c\,a$.

2. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \to a$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_1$. De même, puisque $y_n \to b$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$. Alors, si on pose $N = \max\{N_1, N_2\}$, l'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$. La conclusion s'ensuit.

3. Par la Proposition 3.2.8, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que $|x_n| \leq C$ pour tout n. Par conséquent, il vient

$$|x_n y_n - ab| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \leq |x_n|\,|y_n - b| + |x_n - a|\,|b| \leq C|y_n - b| + |b|\,|x_n - a|$$

en utilisant l'inégalité triangulaire. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \to a$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ pour tout $n \geq N_1$ (on prend $|b| + 1$ pour pouvoir considérer le cas où $b = 0$). De même, puisque $y_n \to b$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}$ pour tout $n \geq N_2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$|x_n y_n - ab| \leq C|y_n - b| + |b|\,|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|b|}{2(|b|+1)} < \varepsilon,$$

d'où la conclusion.

4. Pour $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ pour tout $n \geq M$ puisque $y_n \to b$. L'ingalité triangulaire inversée donne alors

$$|y_n| = |y_n - b + b| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

pour tout $n \geq M$. En particulier, on a $y_n \neq 0$ pour tout $n \geq M$.

En utilisant le point 3, il suffit à présent de montrer que la suite $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n \geq M}$ converge vers $\frac{1}{b}$. Remarquons pour cela que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{b y_n}\right| = \frac{|b - y_n|}{|b|\,|y_n|} \leq 2\frac{|b - y_n|}{|b|^2}$$

pour tout $n \geq M$, puisque $|y_n| > \frac{|b|}{2}$. Comme $y_n \to b$, il existe $N \geq M$ tel que

$$|y_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Ainsi, si $n \geq N$, on obtient que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leq 2\frac{|b - y_n|}{|b|^2} < \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

Exemples 3.3.2

▷ Considérons la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$. On sait que $\frac{1}{n} \to 0$ et donc

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0.$$

De même, pour tout $l \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\frac{1}{n^l}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tend vers 0.

▷ Considérons la suite $\left(\frac{n-1}{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $n \neq 0$, on remarque que

$$\frac{n-1}{2n+3} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}.$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$, on obtient que $1 - \frac{1}{n} \to 1$. De même, $2 + \frac{3}{n} \to 2$. Comme le numérateur converge vers 1 et le dénominateur vers 2, on obtient que

$$\frac{n-1}{2n+3} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \to \frac{1}{2}.$$

▷ On peut généraliser le raisonnement précédent pour étudier la convergence de suites du type

$$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par n^k, on obtient

$$\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{a_k + a_{k-1} n^{-1} + \cdots + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1} n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}}.$$

Chaque suite de la forme $(n^{-l})_n$ tend vers 0. Donc, le numérateur tend vers a_k et le dénominateur vers b_k. Au total, on a donc

$$\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \to \frac{a_k}{b_k},$$

à condition que $b_k \neq 0$.

Proposition 3.3.3

1. *Si $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers a, alors la suite $(|x_n|)_n$ converge vers $|a|$.*
2. *Une suite $(x_n)_n$ converge vers 0 si et seulement si la suite $(|x_n|)_n$ converge vers 0.*

Démonstration : 1. Par l'inégalité triangulaire inversée, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a|.$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'indice N qui fonctionne dans la définition de la convergence de $(x_n)_n$ vers a convient également pour $(|x_n|)_n$.

2. C'est immédiat par définition. ■

Proposition 3.3.4 *Une suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{C}$ converge vers a si et seulement si les suites $(\Re x_n)_n$ et $(\Im x_n)_n$ convergent respectivement vers $\Re a$ et $\Im a$.*

Démonstration : Supposons que $(x_n)_n$ de $\mathbb{C}$ converge vers a. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On remarque maintenant que

$$|\Re x_n - \Re a| = |\Re(x_n - a)| \leq |x_n - a| < \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$. Ainsi, on a montré que $\Re x_n \to \Re a$. On procède de la même manière pour la partie imaginaire.

Réciproquement, si les suites $(\Re x_n)_n$ et $(\Im x_n)_n$ convergent respectivement vers $\Re a$ et $\Im a$, alors par les règles de calcul, on a

$$x_n = \Re x_n + i\Im x_n \to \Re a + i\Im a = a \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

■

Remarquons que puisque $\overline{x_n} = \Re x_n - i\Im x_n$, le résultat précédent implique directement que $x_n \to a$ si et seulement si $\overline{x_n} \to \overline{a}$.

Théorème 3.3.5 (du sandwich) *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles qui convergent vers la même limite $a \in \mathbb{R}$. Si $(u_n)_n$ est une suite réelle telle que*

$$x_n \leq u_n \leq y_n$$

pour tout n, alors $(u_n)_n$ converge également vers a.

Démonstration : Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \to a$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. De même, puisque $y_n \to a$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_2$. Si on pose $N = \max\{N_1, N_2\}$, on obtient que

$$-\varepsilon < x_n - a \leq u_n - a \leq y_n - a < \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire $|u_n - a| < \varepsilon$. ■

Le théorème précédent est également appelé théorème de "l'étau" ou théorème des "gendarmes".

Exemple 3.3.6 La suite $\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)_n$ converge vers 0 puisque

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

et puisque $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{-1}{n} \to 0$. Remarquons qu'on n'a pas encore défini rigoureusement la fonction cosinus.

Corollaire 3.3.7 *Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers 0 et soit $(y_n)_n$ une suite bornée. Alors, la suite $(x_n y_n)_n$ converge vers 0.*

Démonstration : Par la Proposition 3.3.3, il suffit de montrer que la suite réelle $(|x_n y_n|)_n$ converge vers 0. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que $|y_n| \leq C$ pour tout n. Par conséquent, on a

$$0 \leq |x_n y_n| \leq C|x_n|.$$

Puisque $x_n \to 0$, on a également que $|x_n| \to 0$ et donc que $C|x_n| \to 0$, et le théorème du sandwich permet de conclure. ■

3.4 Divergence

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*. Rappelons qu'une suite converge s'il existe un nombre a tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon$. Ainsi, montrer qu'une suite diverge est assez fastidieux puisqu'il faut montrer que pour tout a, la suite ne converge pas vers a. Il faut donc a priori tester toutes les nombres réels pour montrer qu'ils ne sont pas des limites de la suite. Néanmoins, en niant certaines propriétés des suites convergentes, on peut obtenir des critères de divergence. La Proposition 3.2.8 donne par exemple directement le critère suivant.

Corollaire 3.4.1 *Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors elle ne converge pas.*

Exemple 3.4.2 Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas puisqu'elles ne sont pas bornées.

Introduisons à présent la notion de sous-suite. Une sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dont les éléments sont sélectionnés parmi les éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en gardant la croissance stricte des indices. Par exemple, on considère la sous-suite $x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots$

Définition 3.4.3 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ est une suite strictement croissante de naturels, la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée une *sous-suite* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention, c'est la suite d'indices qui est strictement croissante ! La suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante.

Exemple 3.4.4 La suite $(n^4)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, il suffit d'aller sélectionner dans la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ les indices qui sont eux-mêmes des carrés.

Remarquons également qu'on a nécessairement $n_k \geq k$. Intuitivement c'est clair, mais on peut aussi le démontrer par récurrence. Clairement, le cas de base est vérifié puisque $n_0 \geq 0$. De plus, si $n_k \geq k$, alors $n_{k+1} > n_k \geq k$ et comme n_{k+1} est naturel, on en tire que $n_{k+1} \geq k + 1$.

Exemple 3.4.5 Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, la sous-suite donnée par $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite constante dont tous les éléments sont égaux à 1, et la sous-suite $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite constante dont tous les éléments sont égaux à -1.

Proposition 3.4.6 *Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Démonstration : Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers a et soit $(x_{n_k})_k$ une sous-suite. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Puisque $n_k \geq k$ pour tout k, on obtient que si $k \geq N$, alors $n_k \geq N$ et il s'ensuit que

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geq N,$$

ce qui suffit. ■

Ce résultat fournit un second critère pratique pour la divergence.

Corollaire 3.4.7 *Si $(x_n)_n$ est suite qui possède deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.*

Exemples 3.4.8

- ▷ La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas puisqu'elle possède les sous-suites constantes $(1)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(-1)_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers 1 et -1 respectivement.
- ▷ Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{(1+(-1)^n)n}{2n+1}.$$

Considérons les sous-suites $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. On a

$$x_{2k} = \frac{4k}{4k+1} \to 1 \quad \text{lorsque } k \to +\infty$$

et

$$x_{2k+1} = 0 \to 0 \quad \text{lorsque } k \to +\infty.$$

Terminons par une manière particulière de diverger qui est très importante : c'est le cas des suites qui tendent vers l'infini.

Définition 3.4.9 Une suite $(x_n)_n$ *tend vers l'infini* si pour tout nombre $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n| > R \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Dans ce cas, on écrit

$$x_n \to \infty \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

ou également

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty.$$

Rappelons qu'une suite qui n'est pas bornée ne peut pas converger : les suites qui tendent vers l'infini sont donc divergentes ! Attention donc au vocabulaire utilisé : le fait de tendre vers l'infini caractérise une manière de diverger.

Exemple 3.4.10 Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.

Remarque 3.4.11 Dans le cas de suites réelles, on peut distinguer les suites qui tendent vers $+\infty$ et celles qui tendent vers $-\infty$: $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$ si pour tout nombre $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n > R \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Elle tend vers $-\infty$ si pour tout nombre $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n < -R \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Proposition 3.4.12 *Toute sous-suite d'une suite qui tend vers l'infini tend également vers l'infini.*

Démonstration : Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers l'infini et soit $(x_{n_k})_k$ une sous-suite. Fixons $R > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n| > R \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Puisque $n_k \geq k$ pour tout k, on obtient que

$$|x_{n_k}| > R \quad \text{pour tout } k \geq N,$$

ce qui donne la conclusion. ■

Proposition 3.4.13

1. *Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes non-nuls converge vers 0, alors la suite $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.*
2. *Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes non-nuls tend vers l'infini, alors la suite $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration : 1. Supposons que $x_n \to 0$. Soit $R > 0$. Alors, pour $\varepsilon = \frac{1}{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| < \frac{1}{R}$ pour tout $n \geq N$. On en tire que

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| > R \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

2. Supposons que $x_n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $R = \frac{1}{\varepsilon}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ pour tout $n \geq N$. On en tire que

$$\frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

■

Remarque 3.4.14 Si l'on considère dans le cas réel le fait de tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, il faut ajouter des hypothèses dans le point 1 sur le signe de la suite $(x_n)_n$ pour obtenir des résultats sur la suite $(\frac{1}{x_m})_{m\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.4.15 (Suite géométrique) Soit $q \in \mathbb{C}$ non-nul. Considérons la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrons que

1. si $|q| < 1$, alors $q^n \to 0$,
2. si $|q| > 1$, alors $q^n \to \infty$,
3. si $|q| = 1$, alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger ou diverger selon les valeurs de q.

Commençons par le cas où $|q| > 1$. On peut alors écrire $|q| = 1 + r$ avec $r = |q| - 1 > 0$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient

$$|q^n| = |q|^n = (1+r)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j r^j \geq C_n^1 r^1 = nr,$$

où on obtient l'inégalité car on a enlevé des termes positifs. Soit $R > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $nr > R$ pour tout $n \geq N$, et donc on a aussi $|q^n| > R$ pour tout $n \geq N$.

Le cas où $|q| < 1$ s'en déduit immédiatement en utilisant la Proposition 3.4.13 car $\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$ avec $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$.

Si $q = 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à 1. Elle converge donc vers 1. Si $q = -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $((-1)^n)_n$ qui ne converge pas.

En général, on peut rien dire sur les sommes et produits de suites dont une des deux au moins tend vers l'infini. Par exemple, si on considère les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par $x_n = n$ et $y_n = -n$, on a $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ et $x_n + y_n = 0$ qui ne tend pas vers l'infini. Si maintenant la suite $(y_n)_n$ est définie par $y_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n y_n = 1$ qui ne tend pas vers l'infini. Sous des hypothèses supplémentaires sur la suite $(y_n)_n$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.4.16 *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites. Supposons que $x_n \to \infty$.*

1. *Si la suite $(y_n)_n$ est bornée, alors $x_n + y_n \to \infty$.*
2. *S'il existe $C > 0$ telle que $|y_n| > C$ pour tout n, alors $x_n y_n \to \infty$.*

Démonstration : 1. Comme la suite $(y_n)_n$ est bornée, il existe une constante $C > 0$ telle que $|y_n| \leq C$ pour tout n. Fixons $R > 0$. Puisque $x_n \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| > R + C$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, l'inégalité triangulaire inversée implique que

$$|x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > R + C - C = R,$$

ce qui donne la conclusion.

2. Soit $R > 0$. Comme $x_n \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| > \frac{R}{C}$ pour tout $n \geq N$. On en tire que pour tout $n \geq N$,

$$|x_n y_n| > \frac{R}{C} C = R,$$

ce qui suffit. ■

Remarquons que dans le second point de la Proposition 3.4.16, on peut supposer que la relation $|y_n| > C$ n'a lieu que pour tout $n \geq N$ pour un certain naturel N. Cela se produit donc si $y_n \to \infty$.

Enfin, on a le critère de comparaison suivant pour les suites qui tendent vers l'infini.

Proposition 3.4.17 *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles.*

1. *Si $x_n \to +\infty$ et $x_n \leq y_n$ pour tout n, alors $y_n \to +\infty$.*
2. *Si $x_n \to -\infty$ et $x_n \geq y_n$ pour tout n, alors $y_n \to -\infty$.*

Démonstration : 1. Fixons $R > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq R$ pour tout $n \geq N$. On en tire directement que $y_n \geq R$ pour tout $n \geq N$.

2. On procède de la même manière. ■

3.5 Calculs de limites particulières

Dans cette section, nous calculons quelques limites qui apparaissent fréquemment. Commençons par la règle de calcul suivant : Notons cependant que nous n'avons pas encore défini rigoureusement a^p lorsque $p \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 3.5.1 *Soit $(x_n)_n$ une suite réelle à termes positifs qui converge vers 0. Si $p > 0$, alors la suite $(x_n^p)_n$ converge également vers 0.*

Démonstration : Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \to 0$, la définition de la convergence pour $\varepsilon' = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ nous donne l'existence d'un naturel N pour lequel $x_n = |x_n| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ dès que $n \geq N$. On en tire que $x_n^p = |x_n^p| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. ■

Proposition 3.5.2 *Les suites suivantes*

1. $\left(\frac{1}{n^p}\right)_n$ *pour* $p > 0$,
2. $(n^p q^n)_n$ *pour* $p \in \mathbb{R}$ *et* $|q| < 1$,
3. $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_n$ *pour* $q \in \mathbb{C}$,
4. $\left(\frac{n^p}{n!}\right)_n$ *pour* $p \in \mathbb{R}$

convergent vers 0.

Démonstration : 1. On sait que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge vers 0. Il suffit donc d'appliquer la Proposition 3.5.1.

2. Pour montrer que la suite $(n^p q^n)_n$ converge vers 0, il suffit de montrer que la suite $(n^p |q|^n)_n$ converge vers 0. On peut donc supposer que $0 \leq q < 1$.

Supposons tout d'abord que $p = 1$. Puisque $0 \leq q < 1$, on a $\frac{1}{q} > 1$ et donc il existe $r > 0$ ($r = \frac{1}{q} - 1$) tel que $\frac{1}{q} = 1 + r$. Par conséquent, on peut écrire $q = \frac{1}{1+r}$. Par la formule du binôme de Newton, pour $n \geq 2$, on a

$$(1+r)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j r^j \geq \frac{n(n-1)}{2} r^2$$

en ne gardant que le terme correspondant à $j = 2$, puisque tous les autres termes de la somme sont positifs. On en tire que

$$0 \leq nq^n = \frac{n}{(1+r)^n} \leq \frac{2}{(n-1)r^2}.$$

En utilisant les règles de calcul, on trouve que $\frac{2}{(n-1)r^2} \to 0$ et on peut conclure que $nq^n \to 0$ en utilisant le théorème du sandwich.

Considérons à présent le cas où $p > 0$. Posons $q' = q^{\frac{1}{p}}$. Par le raisonnement précédent, on sait que $n(q')^n \to 0$. En appliquant la Proposition 3.5.1, on trouve alors que $n^p q^n \to 0$.

Enfin, si $p < 0$, on a $n^p < 1$. On peut donc écrire

$$0 < n^p q^n < q^n$$

et le résultat s'obtient en utilisant le théorème du sandwich.

3. A nouveau, on peut supposer que $q \geq 0$ puisqu'il suffit de montrer que la suite des modules converge vers 0. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > q$. On en tire que

$$\frac{q}{k} < 1 \quad \text{pour tout } k \geq m.$$

Pour tout $n \geq m$, on a

$$\begin{aligned}\frac{q^n}{n!} &= \frac{q}{n}\frac{q}{n-1}\frac{q}{n-2}\cdots\frac{q}{m}\frac{q}{m-1}\cdots\frac{q}{2}\frac{q}{1}\\ &\leq \frac{q}{n}\frac{q}{m-1}\cdots\frac{q}{2}\frac{q}{1}\\ &= \frac{1}{n}\frac{q^m}{(m-1)!}\end{aligned}$$

puisque les facteurs qu'on a enlevés sont tous plus petits que 1. Si on pose $C = \frac{q^m}{(m-1)!}$ qui est une constante indépendante de n, on trouve que

$$0 \leq \frac{q^n}{n!} \leq \frac{C}{n}.$$

On conclut en utilisant le théorème du sandwich.

4. On a

$$\frac{n^p}{n!} = \frac{n^p}{2^n}\frac{2^n}{n!}.$$

Par le point 2, on sait que $\frac{n^p}{2^n} \to 0$. Par le point 3, on sait que $\frac{2^n}{n!} \to 0$. Par conséquent, le produit des deux converge aussi vers 0. ■

La proposition précédente nous permet de calculer de nombreuses limites de quotients en cherchant le "terme dominant", en gardant en tête que "les factorielles l'emportent sur les exponentielles qui l'emportent sur les puissances".

Exemple 3.5.3 Considérons la suite

$$x_n = \frac{n^4 + 3^n}{n^2 + 4^n}.$$

Le "terme dominant" est 4^n. En divisant le numérateur et le dénominateur par ce terme, on obtient

$$\frac{n^4 + 3^n}{n^2 + 4^n} = \frac{\frac{n^4}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{n^2}{4^n} + 1}.$$

Il reste à étudier chacun des termes. On a

$$\frac{n^4}{4^n} = n^4\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$$

puisque $\frac{1}{4} < 1$. De même,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{n^2}{4^n} \to 0.$$

En utilisant les règles de calcul, on obtient que

$$\frac{\frac{n^4}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{n^2}{4^n} + 1} \to \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

Exemple 3.5.4 Considérons la suite
$$x_n = \frac{n! + 3^n}{n^2 + 4n!}.$$
Le "terme dominant" est ici $n!$. On écrit
$$\frac{n! + 3^n}{n^2 + 4n!} = \frac{1 + \frac{3^n}{n!}}{\frac{n^2}{n!} + 4}$$
et on trouve directement que $x_n \to \frac{1}{4}$.

On obtient aussi des résultats pour les suites qui tendent vers l'infini en utilisant la Proposition 3.4.13.

Exemple 3.5.5 Considérons la suite
$$x_n = n! - 2^n.$$
Son "terme dominant" est $n!$ donc intuitivement, la suite devrait tendre vers l'infini. On regarde
$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n! - 2^n} = \frac{\frac{1}{n!}}{1 - \frac{2^n}{n!}}.$$
Puisque $\frac{1}{n!} \to 0$ et $\frac{2^n}{n!} \to 0$, on trouve que $\frac{1}{x_n} \to 0$ et donc $x_n \to \infty$.

Proposition 3.5.6

1. *Si* $p > 0$, *alors* $p^{\frac{1}{n}} \to 1$.
2. *On a* $n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Démonstration : 1. Si $p = 1$, le résultat est évident. Si $p > 1$, on considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = p^{\frac{1}{n}} - 1$. Si on montre que $x_n \to 0$, alors les règles de calcul donneront que $p^{\frac{1}{n}} = x_n + 1 \to 1$. Or, on a
$$p = (x_n + 1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x_n^j \geq n x_n$$
en ne gardant que le terme $j = 1$, et on en tire que
$$0 \leq x_n \leq \frac{p}{n}.$$
On conclut en utilisant le théorème du sandwich.
Si $p < 1$, alors vu ce qui précède, on a $\frac{1}{p^{\frac{1}{n}}} \to 1$. Les règles de calcul impliquent que $p^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1} = 1$.

2. On procède comme dans le point 1 et on considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. A nouveau, il suffit de montrer que cette suite converge vers 0. On a
$$n = (x_n + 1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x_n^j \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$
en ne gardant que le terme $j = 2$. On en tire que
$$0 \leq x_n^2 \leq \frac{2}{n-1},$$
d'où $x_n^2 \to 0$. La Proposition 3.5.1 permet de conclure que $x_n \to 0$. ■

3.6 Suites réelles monotones

Dans cette section, nous étudions un type très important de suites réelles : les suites croissantes et décroissantes.

Définition 3.6.1 Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- ▷ *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout n,
- ▷ *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout n,
- ▷ *monotone* si elle est soit croissante, soit décroissante.

Signalons que lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes, on parle de suites strictement croissantes, strictement décroissantes et strictement monotones.

Définition 3.6.2 Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- ▷ *majorée* s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $x_n \leq C$ pour tout n,
- ▷ *minorée* s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $x_n \geq C$ pour tout n.

Remarquons que si une suite monotone n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. De même, si une suite monotone n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$. Le résultat suivant montre que dans les autres cas, la suite converge. Il n'y a donc pas de cas où la suite diverge sans tendre vers l'infini et on peut donc parler de la limite (en incluant le cas infini) d'une suite monotone.

Théorème 3.6.3 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge vers $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge vers $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Démonstration : 1. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, la borne supérieure de A existe, on la note a. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on sait que $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A et il existe donc un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que $a - \varepsilon < x_N$. Puisque la suite est croissante, on en tire que $a - \varepsilon < x_n$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$$

et donc $|x_n - a| < \varepsilon$. Ceci montre que $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Le cas décroissant se traite de la même manière. ■

Corollaire 3.6.4 *Toute suite monotone et bornée est convergente.*

Exemple 3.6.5 Considérons la suite définie au moyen de la relation de récurrence suivante : on pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les premiers termes de cette suite sont donnés par $2, \frac{8}{3}, \frac{26}{9}, \ldots$ Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3.

- ▷ On procède par récurrence pour montrer que la suite est majorée par 3. On a $x_0 = 2 < 3$ et le cas de base est donc vérifié. De plus, si $x_n < 3$, alors $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 2 < 1 + 2 = 3$.
- ▷ Remarquons que $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 2 \geq x_n$ si et seulement si $x_n + 6 \geq 3x_n$, ce qui se réécrit $3 \geq x_n$. Cette inégalité est vérifiée puisque chaque élément de la suite est plus petit que 3.

Par le théorème précédent, on sait donc que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour trouver la limite, on peut calculer la borne supérieure de l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Une autre technique consiste à considérer la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n = x_{n+1}$. Clairement, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les même propriétés que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et converge donc vers la même limite. On note cette limite a. On a donc

$$x_n \to a \quad \text{et} \quad y_n \to a.$$

Or, $y_n = x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 2$ et vu les règles de calcul, on sait que $y_n \to \frac{a}{3} + 2$. Par unicité de la limite, on obtient que $a = \frac{a}{3} + 2$, ce qui est équivalent à $a = 3$. Ainsi,

$$x_n \to 3 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Nous avons donc obtenu des liens entre les suites convergentes et les suites bornées :

- ▷ Toute suite convergente est bornée.
- ▷ Toute suite bornée et monotone est convergente.

On peut montrer un dernier lien, connu sous le nom de Théorème de Bolzano - Weierstrass. Nous ne démontrerons pas ce résultat.

Théorème 3.6.6 (Bolzano - Weierstrass) *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

3.7 Critère de Cauchy

La définition de la convergence d'une suite mentionne explicitement la limite de la suite. Ainsi, pour démontrer qu'une suite converge, il faut connaître a priori la limite de la suite (ou tester tous les points de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ comme candidats potentiels !). Nous avons déjà présenté des critères qui nous permettent de "deviner" la limite éventuelle d'une suite. Nous avons également étudié le cas des suites monotones et bornées, pour lesquelles la convergence est assurée. Le critère de Cauchy s'applique lorsqu'il est impossible d'avoir une idée a priori sur la limite recherchée : il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite converge sans mentionner la limite de cette suite.

Commençons par définir les suites dites de Cauchy.

Définition 3.7.1 Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels (ou complexes). On dit que $(x_n)_n$ est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{pour tous } n, m \geq N.$$

Ainsi, une suite est de Cauchy si ses termes (pas nécessairement successifs !) deviennent de plus en plus proches.

Exemples 3.7.2

- ▷ La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est de Cauchy. En effet, si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Alors, si $n, m \geq N$, on a

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

▷ La suite $((-1)^n)_n$ n'est pas de Cauchy. En effet, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ est pair, on a
$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |1 - (-1)| = 2.$$
Donc, quel que soit $\varepsilon < 2$, la définition ne peut être satisfaite.

Lemme 3.7.3 *Si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle converge.*

Démonstration : Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. Supposons que la suite $(x_n)_n$ possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge. Soit a la limite de cette sous-suite. Montrons que $x_n \to a$. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } k \geq N_1$$
puisque $x_{n_k} \to a$ lorsque $k \to +\infty$. De plus, comme la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_m - x_p| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tous } m, p \geq N_2.$$
Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $m \geq N$, on a $n_m \geq N$ et donc
$$|x_m - a| = |x_m - x_{n_m} + x_{n_m} - a| \leq |x_m - x_{n_m}| + |x_{n_m} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
ce qui suffit. ■

Théorème 3.7.4 (Critère de Cauchy) *Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration : Supposons tout d'abord que $(x_n)_n$ est une suite convergente. Soit a sa limite. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe un naturel N tel que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$. Alors, pour tous $n, m \geq N$, l'inégalité triangulaire donne
$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
ce qui montre que $(x_n)_n$ est de Cauchy.

Réciproquement, supposons que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et montrons qu'elle converge. Par le Lemme 3.7.3, il suffit de montrer qu'elle possède une sous-suite qui converge. Construisons donc une telle sous-suite. Comme la suite est de Cauchy, on sait qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_m - x_p| < 10^{-0} \quad \text{pour tous } m, p \geq N_0.$$
De même, on sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_m - x_p| < 10^{-1} \quad \text{pour tous } m, p \geq N_1.$$
On peut évidemment supposer que $N_1 > N_0$. On continue de la sorte pour construire la suite $(N_k)_k$: si $N_0, \ldots, N_{k-1}$ ont été construits, on choisit $N_k > N_{k-1}$ tel que
$$|x_m - x_p| < 10^{-k} \quad \text{pour tous } m, p \geq N_k.$$

Montrons que la sous-suite $(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge. Pour cela, on remarque que

$$x_{N_k} = (x_{N_k} - x_{N_{k-1}}) + (x_{N_{k-1}} - x_{N_{k-2}}) + (x_{N_{k-2}} - x_{N_{k-3}}) + \cdots + (x_{N_1} - x_{N_0}) + x_{N_0}.$$

Si x est un nombre réel, on écrit

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad x_- = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $x = x_+ - x_-$. Etudions les suites $(y_k)_k$ et $(u_k)_k$ définies par

$$y_k = (x_{N_k} - x_{N_{k-1}})_+ + (x_{N_{k-1}} - x_{N_{k-2}})_+ + (x_{N_{k-2}} - x_{N_{k-3}})_+ + \cdots + (x_{N_1} - x_{N_0})_+ + (x_{N_0})_+$$

et

$$u_k = (x_{N_k} - x_{N_{k-1}})_- + (x_{N_{k-1}} - x_{N_{k-2}})_- + (x_{N_{k-2}} - x_{N_{k-3}})_- + \cdots + (x_{N_1} - x_{N_0})_- + (x_{N_0})_-$$

qui sont telles que que $y_k - u_k = x_{N_k}$ pour tout k. La suite $(y_k)_k$ est croissante puisqu'à chaque étape, on rajoute un nombre positif ou nul. De plus, elle est majorée car

$$\begin{aligned}
|y_k| &\leq |(x_{N_k} - x_{N_{k-1}})_+| + |(x_{N_{k-1}} - x_{N_{k-2}})_+| + |(x_{N_{k-2}} - x_{N_{k-3}})_+| + \cdots + |(x_{N_1} - x_{N_0})_+| + |(x_{N_0})_+| \\
&\leq |x_{N_k} - x_{N_{k-1}}| + |x_{N_{k-1}} - x_{N_{k-2}}| + |x_{N_{k-2}} - x_{N_{k-3}}| + \cdots + |x_{N_1} - x_{N_0}| + |x_{N_0}| \\
&\leq 10^{-(k-1)} + 10^{-(k-2)} + 10^{-(k-3)} + \cdots + +10^{-0} + |x_{N_0}| \\
&= 1.\underbrace{11\ldots1}_{k-1} + |x_{N_0}| \\
&\leq 2 + |x_{N_0}|.
\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 3.6.3, on sait donc qu'elle converge. De même, la suite $(u_k)_k$ est croissante et majorée par $2 + |x_{N_0}|$, et elle converge donc. Les règles de calcul impliquent alors que la suite $(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. La conclusion s'ensuit. ■

Remarque 3.7.5 On pourrait également démontrer ce théorème en utilisant le Théorème de Bolzano - Weierstrass. Pour cela, on montre d'abord si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors elle est bornée. Par définition, en prenant $\varepsilon = 1$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_m| < 1$ pour tous $n, m \geq N$. On en tire que pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|$$

en utilisant l'inégalité triangulaire. Donc, la suite $(x_n)_n$ est bornée à partir du $N^{\text{ième}}$ terme. Il ne reste alors plus que les N termes $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ à considérer. Comme ils sont en nombre fini, on peut poser

$$C = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$$

et on a $|x_n| \leq C$ pour tout n. Comme $(x_n)_n$ est bornée, elle possède une sous-suite convergente par le Théorème de Bolzano - Weierstrass, ce qui permet de conclure en utilisant à nouveau le Lemme 3.7.3.

Exemple 3.7.6 Supposons que $(x_n)_n$ est une suite telle que $|x_{n+1} - x_n| < q^n$ où $0 < q < 1$. Montrons que $(x_n)_n$ converge en utilisant le critère de Cauchy. Si $m > n$, on a

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &< q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n \\ &= q^n(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + 1) \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire. Or, si pour tout k on pose

$$S_k = q^k + q^{k-1} + \cdots + 1,$$

on a

$$q^{k+1} = S_{k+1} - S_k.$$

D'autre part, on a aussi

$$S_{k+1} = qS_k + 1$$

et donc

$$q^{k+1} = S_{k+1} - S_k = qS_k + 1 - S_k = S_k(q-1) + 1.$$

On en tire que

$$S_k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Dans notre cas, on a donc

$$|x_m - x_n| < q^n S_{m-n-1} = q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq q^n \frac{1}{1 - q}.$$

Puisque $q^n \frac{1}{1-q} \to 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|q^n \frac{1}{1-q}| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et donc $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$.

Chapitre 4

Séries réelles et complexes

Dans ce chapitre, nous étudions des suites qui se présentent sous une forme particulière, appelées séries. Nous développons des outils spécifiques à ces suites particulières.

4.1 Définition

Dans de nombreuses situations, une grandeur est exprimée comme une somme de contributions. Cette somme peut potentiellement être “infinie”.

Exemple 4.1.1 Considérons une balle lâchée à une hauteur de 27m. On suppose qu'à chaque rebond, elle perd 2/3 de son énergie cinétique, si bien qu'après le premier rebond, elle remonte à 9m, après le deuxième à 3m et ainsi de suite. La distance totale parcourue par la balle est donnée par

$$27 + 2\left(9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) = 27 + 2\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{9}{3^j}.$$

D'un point de vue mathématique, une série est simplement une suite obtenue en sommant les élément d'une autre suite.

Définition 4.1.2 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. La *série associée* à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} x_j.$$

On dit que les éléments x_n sont les *termes généraux* de la série et que S_k est la $k^{\text{ème}}$ *somme partielle* de la série. On utilise la notation $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ pour parler de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notons qu'à nouveau, l'indice j qui apparaît dans la notation $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ est muet et qu'on peut donc écrire cette série de manière équivalente sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ ou encore $\sum_{\heartsuit=0}^{+\infty} x_\heartsuit$.

Attention, la notation $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ est formelle : il s'agit d'un abus d'écriture. Elle pourra être considérée comme un nombre lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

Définition 4.1.3 Une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ *converge* si la suite de ses sommes partielle converge.

Dans ce cas, la limite de la suite est appelée *somme de la série* et on note

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n} x_j = \sum_{j=0}^{+\infty} x_j.$$

On dit que la série est *divergente* si elle ne converge pas.

Remarque 4.1.4 Toute série est une suite particulière : toutes les propriétés étudiées dans le Chapitre 3 s'appliquent donc aux séries. Inversément, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une série : on considère pour cela la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_0 = x_0 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_{n+1} - x_n.$$

Alors, on a

$$\sum_{j=0}^{n} y_j = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0 = x_n.$$

Le critère de Cauchy se réécrit de la manière suivante pour les séries.

Proposition 4.1.5 (Critère de Cauchy pour les séries) *Une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\left|\sum_{j=p}^{q} x_j\right| < \varepsilon \quad \textit{pour tous } q \geq p \geq N.$$

Démonstration : Par le critère de Cauchy, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est de Cauchy. Or, par définition, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|S_q - S_p| < \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geq N.$$

On remarque que si $q > p$,

$$S_q - S_p = \sum_{j=p+1}^{q} x_j.$$

Si on pose $N' = N + 1$, on a que pour tous $q \geq p \geq N'$, $p - 1 \geq N$ et donc

$$\left|\sum_{j=p}^{q} x_j\right| < \varepsilon.$$

■

Exemple 4.1.6 (Série harmonique) La *série harmonique* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Pour le prouver, on va montrer qu'elle n'est pas de Cauchy. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

puisque $\frac{1}{j} \geq \frac{1}{2n}$ si $j \leq 2n$ et puisque la somme comporte n termes. Ainsi, la définition ne peut être vérifiée dès que $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Corollaire 4.1.7 *Si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge, alors $x_j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série converge, elle est de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \sum_{j=p}^{q} x_j \right| < \varepsilon \quad \text{pour tous } q \geq p \geq N.$$

En prenant $p = q$, on trouve que

$$|x_p| < \varepsilon \quad \text{pour tout } p \geq N,$$

ce qui suffit. ■

Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une série diverge : si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série ne peut pas être convergente ! Attention, la réciproque de ce résultat est fausse : il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0 ! Pour converger, il faut en fait que ce terme converge "suffisamment vite" vers 0.

Exemple 4.1.8 (Série géométrique) Considérons la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La série associée est appelée la *série géométrique*. Montrons qu'elle converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- ▷ Si $|q| \geq 1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et donc la série géométrique diverge.
- ▷ Si $|q| < 1$, on reprend le raisonnement de l'Exemple 3.7.6 pour montrer que

  $$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

  Cette égalité montre immédiatement que $S_n \to \frac{1}{1-q}$ puisque $q^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 4.1.9 La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ tend vers 0, mais la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Si on regarde la définition de la convergence d'une suite, on se convainc facilement que la convergence est indépendante des premiers termes de la suite : autrement dit, quel que soit $M \in \mathbb{N}$, la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq M}$. Le résultat reste valide lorsque l'on travaille avec les séries, même si les sommes partielles dépendent des premiers termes généraux de la série.

Proposition 4.1.10 *Si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge, alors pour tout $M \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j=M}^{+\infty} x_j$ converge et*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x_j = \sum_{j=0}^{M-1} x_j + \sum_{j=M}^{+\infty} x_j.$$

Réciproquement, s'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que la série $\sum_{j=M}^{+\infty} x_j$ converge, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge.

Démonstration : La suite $(S_n)_{n\geq M}$ donnée par

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} x_j = \sum_{j=0}^{M-1} x_j + \sum_{j=M}^{n} x_j$$

converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{j=M}^{n} x_j\right)_{n\geq M}$ converge par les règles de calcul. ■

Le Théorème 3.6.3 possède également son équivalent en terme de séries.

Proposition 4.1.11 *Si $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ est une série dont tous les termes généraux sont positifs, alors elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée.*

Démonstration : Puisque $x_j \geq 0$ pour tout j, la suite des sommes partielles est croissante. C'est donc une conséquence directe du Théorème 3.6.3. ■

Exemple 4.1.12 Montrons que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ converge. Remarquons que

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

pour tout $j \geq 1$ et donc

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

On en tire que la suite des sommes partielles est bornée, ce qui suffit puisque les termes généraux sont positifs.

Enfin, on peut rééecrire les règles de calcul des suites dans le cas des séries.

Proposition 4.1.13 *Soient $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ deux séries qui convergent. Alors*

1. *pour tout nombre $c \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{j=0}^{+\infty} cx_j$ converge vers $c\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$,*
2. *la série $\sum_{j=0}^{+\infty}(x_j + y_j)$ converge vers $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j + \sum_{j=0}^{+\infty} y_j$.*

Exemple 4.1.14 Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=M}^{+\infty} q^j = q^M \sum_{j=M}^{+\infty} q^{j-M} = q^M \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = \frac{q^M}{1-q}.$$

Exemple 4.1.15 Comme $\frac{1}{10} < 1$, on a

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{9}{10^j} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Les sommes partielles de cette série sont

$$S_1 = \frac{9}{10} = 0.9, \quad S_2 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = 0.99, \quad S_3 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = 0.999, \quad \ldots$$

et on a donc montré que

$$0.99999999\ldots = 1.$$

Attention, le cas de la multiplication est plus compliqué puisque

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_j\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} y_j\right) \neq \sum_{j=0}^{+\infty} x_j y_j.$$

En effet, déjà pour une somme de deux termes, on a en général que $(a+b)(c+d) \neq ac+bd$.

4.2 Critères pratiques de convergence des séries

4.2.1 Critère de comparaison

Proposition 4.2.1 (Critère de comparaison) *Soient* $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ *et* $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ *deux séries telles que*

$$0 \leq x_j \leq y_j \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

1. *Si la série* $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ *converge, alors la série* $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ *converge.*
2. *Si la série* $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ *diverge, alors la série* $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ *diverge.*

Démonstration : 1. Supposons que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ converge. Alors, elle est de Cauchy et pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\sum_{j=p}^{q} y_j\right| < \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geq N.$$

Comme $0 \leq x_j \leq y_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\sum_{j=p}^{q} x_j\right| = \sum_{j=p}^{q} x_j \leq \sum_{j=p}^{q} y_j = \left|\sum_{j=p}^{q} y_j\right| < \varepsilon$$

pour tous $p, q \geq N$. Par le critère de Cauchy, la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge.

2. Supposons que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ diverge. Si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ converge, alors par le premier point, la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge également, ce qui est impossible. ■

Corollaire 4.2.2 *Soient* $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ *et* $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ *deux séries à termes strictement positifs. Si la suite* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite* $a > 0$, *alors soit les deux séries convergent, soit les deux séries divergent.*

Démonstration : Comme $a > 0$, on peut fixer b tel que $0 < b < a$. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b < a - \varepsilon$. Comme $\frac{x_n}{y_n} \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

En particulier, on a $\frac{x_n}{y_n} > a - \varepsilon > b$ et donc $x_n > by_n$ pour tout $n \geq N$. Par les Propositions 4.1.10, 4.1.13 et 4.2.1, on obtient que si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ converge également, et si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ diverge, alors il en est de même pour la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$.

En procédant de la même façon, on montre que si $b > a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < by_n$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ converge, alors il en est de même pour la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$, et si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ diverge, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ diverge. ■

Ainsi, si les termes généraux d'une série sont du "même ordre" que ceux d'une autre série, on peut étudier de manière équivalente les propriétés de convergence de l'une ou de l'autre.

Exemple 4.2.3 La série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ converge. En effet, on sait par l'Exemple 4.1.12 que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ converge. De plus,

$$\frac{\frac{1}{j^2}}{\frac{1}{j(j+1)}} = \frac{j^2 + j}{j^2} = 1 + \frac{1}{j} \to 1$$

et donc le résultat précédent permet d'obtenir la conclusion.

4.2.2 Critères de la racine et du quotient

Nous pouvons également appliquer le critère de comparaison en comparaisant le terme général de la suite qui nous intéresse à celui des séries géométriques. Rappelons que si $q \geq 0$, alors

$$\text{la série } \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \text{ converge si et seulement si } q < 1.$$

Proposition 4.2.4 (Critère de la racine) *Soit $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ une série dont tous les termes généraux sont positifs.*

1. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $q \in]0, 1[$ tels que*

$$(x_j)^{\frac{1}{j}} \leq q$$

pour tout $j \geq N$, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge.

Cela arrive notamment si la suite $((x_j)^{\frac{1}{j}})_j$ converge vers q' avec $q' < 1$.

2. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$(x_j)^{\frac{1}{j}} \geq 1$$

pour tout $j \geq N$, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ diverge.

Cela arrive notamment si la suite $((x_j)^{\frac{1}{j}})_j$ converge vers q avec $q > 1$.

Démonstration : 1. On applique directement le critère de comparaison puisque dans ce cas, on a $x_j \leq q^j$.

Si la suite $((x_j)^{\frac{1}{j}})_j$ converge vers q' avec $q' < 1$, fixons q tel que $q' < q < 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que $q' + \varepsilon < q$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|(x_j)^{\frac{1}{j}} - q'| < \varepsilon \quad \text{pour tout } j \geq N.$$

En particulier, on a $(x_j)^{\frac{1}{j}} < q' + \varepsilon < q$ pour tout $j \geq N$.

2. Si $(x_j)^{\frac{1}{j}} \geq 1$, alors $x_j \geq 1$ et la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Si $((x_j)^{\frac{1}{j}})_j$ converge vers q avec $q > 1$, alors pour $\varepsilon > 0$ tel que $q - \varepsilon > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|(x_j)^{\frac{1}{j}} - q| < \varepsilon \quad \text{pour tout } j \geq N.$$

En particulier, $(x_j)^{\frac{1}{j}} > q - \varepsilon > 1$ si $j \geq N$. ∎

Si on veut appliquer le critère de la racine à une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ à termes positifs, on calcule donc, si elle existe, la limite

$$\lim_{j\to+\infty} (x_j)^{\frac{1}{j}}.$$

- ▷ Si cette limite est strictement inférieure à 1, la série converge.
- ▷ Si cette limite est strictement supérieure à 1, la série diverge.
- ▷ Si cette limite est égale à 1, on ne sait rien dire.

Exemple 4.2.5 La série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ avec $x_j = \left(\frac{2j+1}{3j+4}\right)^j$ converge car

$$(x_j)^{\frac{1}{j}} = \frac{2j+1}{3j+4} \to \frac{2}{3} < 1.$$

Exemple 4.2.6 Considérons la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ avec $x_j = j^\alpha q^j$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q > 0$. Alors

$$(x_j)^{\frac{1}{j}} = (j^{\frac{1}{j}})^\alpha q \to q\,[1].$$

Ainsi,

- ▷ si $q < 1$, la série converge,
- ▷ si $q > 1$, la série diverge,
- ▷ si $q = 1$, on ne sait rien dire.

Le critère du quotient donne une deuxième manière de comparer les termes généraux d'une série avec ceux de la série géométrique.

1. On justifiera proprement le fait que si $x_n \to a$, alors $x_n^\alpha \to a^\alpha$ lorsque l'on étudiera les fonctions.

Proposition 4.2.7 (Critère du quotient ou règle de D'Alembert) *Soit $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ une série dont tous les termes généraux sont strictement positifs.*

1. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $q \in]0,1[$ tels que*

$$\frac{x_{j+1}}{x_j} \leq q$$

pour tout $j \geq N$, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge.
Cela arrive notamment si la suite $(\frac{x_{j+1}}{x_j})_j$ converge vers q' avec $q' < 1$.

2. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\frac{x_{j+1}}{x_j} \geq 1$$

pour tout $j \geq N$, alors la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ diverge.
Cela arrive notamment si la suite $(\frac{x_{j+1}}{x_j})_j$ converge vers q avec $q > 1$.

Démonstration : 1. Pour tout $j \geq N$, on a

$$x_j \leq q x_{j-1} \leq q^2 x_{j-2} \leq \cdots \leq q^{j-N} x_N.$$

En posant $C = q^{-N} x_N$, on a alors $x_j \leq C q^j$ pour tout $j \geq N$. Le critère de comparaison permet de conclure à la convergence de la série.

La deuxième partie se traite comme précédemment en montrant que si $(\frac{x_{j+1}}{x_j})_j$ converge vers q' avec $q' < 1$, alors pour q tel que $q' < q < 1$, on a $\frac{x_{j+1}}{x_j} \leq q$ pour tout j suffisamment grand.

2. Pour tout $j \geq N$, on a

$$x_j \geq x_{j-1} \geq \cdots \geq x_N > 0.$$

Le terme général de la série ne converge donc pas vers 0 et la série diverge donc.

Si $(\frac{x_{j+1}}{x_j})_j$ converge vers $q > 1$, on montre comme précédemment que $\frac{x_{j+1}}{x_j} > 1$ pour tout j suffisamment grand. ■

Si on veut appliquer le critère du quotient à une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ à termes positifs, on calcule donc, si elle existe, la limite

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{x_{j+1}}{x_j}.$$

- ▷ Si cette limite est strictement inférieure à 1, la série converge.
- ▷ Si cette limite est strictement supérieure à 1, la série diverge.
- ▷ Si cette limite est égale à 1, on ne sait rien dire.

Exemple 4.2.8 (Série exponentielle) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la *série exponentielle*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$$

converge. En effet, on a

$$\frac{\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}}{\frac{x^j}{j!}} = \frac{x}{j+1} \to 0.$$

Par définition, on pose

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \quad \text{et} \quad e = \exp(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}.$$

Nous y reviendrons plus tard.

Exemple 4.2.9 Considérons à nouveau la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ avec $x_j = j^\alpha q^j$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q > 0$. Alors

$$\frac{x_{j+1}}{x_j} = \frac{(j+1)^\alpha q^{j+1}}{j^\alpha q^j} = q\frac{(j+1)^\alpha}{j^\alpha} = q\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha \to q.$$

Ainsi,

- ▷ si $q < 1$, la série converge,
- ▷ si $q > 1$, la série diverge,
- ▷ si $q = 1$, on ne sait rien dire.

4.2.3 Séries de Riemann

Nous allons à présent étudier une famille très importante de séries, appelées les *séries de Riemann*. Le critère de comparaison appliqué aux séries de Riemann nous donnera un outil puissant pour tester la convergence de séries.

Définition 4.2.10 La *série de Riemann* d'ordre $\alpha \geq 0$ est la série donnée par $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha}$.

Nous avons déjà étudié le cas où $\alpha = 1$: cela correspond à la série harmonique qui diverge. Le cas $\alpha < 1$ se règlera facilement par comparaison. Remarquons que si $\alpha > 1$, on ne peut rien dire avec les critères du quotient ou de la racine : cela correspond aux exemples 4.2.6 et 4.2.9 avec $q = 1$ et $\alpha' = -\alpha$.

Proposition 4.2.11 *La série de Riemann d'ordre $\alpha \geq 0$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

Démonstration : Si $\alpha \leq 1$, on a $\frac{1}{j^\alpha} \geq \frac{1}{j}$ et le critère de comparaison implique que la série de Riemann d'ordre α diverge puisque la série harmonique diverge.

Si $\alpha > 1$, on va écrire les sommes partielles S_n de la série de Riemann en groupant les termes de la manière suivante : si k est tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right) \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$S_n \leq 1 + \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{j=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{j^\alpha} \right).$$

Remarquons à présent que chaque somme peut être majorée par

$$\sum_{j=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{j^\alpha} \leq \sum_{j=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{(2^p)^\alpha} = 2^p \frac{1}{2^{p\alpha}}$$

car il y a $2^{p+1} - 2^p = 2^p$ termes dans la somme. Ainsi,

$$S_n \leq 1 + \sum_{p=1}^{k} 2^p \frac{1}{2^{p\alpha}} = 1 + \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^p.$$

Comme $\alpha > 1$, on a $\frac{2}{2^\alpha} < 1$ et la série géométrique associée converge donc. Ainsi,

$$S_n \leq 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^p.$$

On en tire que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est bornée et comme ses termes sont positifs, la Proposition 4.1.11 permet de conclure. ■

Nous avons vu que le terme général d'une série convergente converge vers 0, mais qu'il ne s'agit pas d'une condition nécessaire pour assurer la convergence de la série. Le critère de Riemann compare la vitesse de convergence vers 0 du terme général d'une série avec le terme général des séries de Riemann pour donner des conditions de convergence et de divergence. En effet, toute série dont le terme général tend plus vite vers 0 que celui d'une série de Riemann qui converge vaègalement converger, et toute série dont le terme général tend vers 0 moins rapidement que celui de la série harmonique va diverger.

Proposition 4.2.12 (Critère de Riemann) *Soit $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ une série dont tous les termes généraux sont positifs.*

1. *S'il existe $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 1$ tels que*

$$j^\alpha x_j \leq C$$

pour tout $j \geq N$, alors la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ converge.
Cela arrive notamment s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(j^\alpha x_j)_j$ converge.

2. *S'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$j x_j \geq C$$

pour tout $j \geq N$, alors la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ diverge.
Cela arrive notamment si la suite $(jx_j)_j$ converge vers une constante non-nulle ou tend vers l'infini.

Démonstration : 1. Si $j^\alpha x_j \leq C$, alors on a $x_j \leq \frac{C}{j^\alpha}$ et la conclusion provient du critère de comparaison et du fait que la série de Riemann converge si $\alpha > 1$.

Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(j^\alpha x_j)_j$ converge. Notons a sa limite. Soit $\varepsilon = 1$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|j^\alpha x_j - a| < 1$ pour tout $j \geq N$. Donc $j^\alpha x_j < a + 1$, ce qui suffit.

2. Si $jx_j \geq C$, alors on a $x_j \geq \frac{C}{j}$ et la conclusion s'obtient directement à nouveau grâce au critère de comparaison et de la divergence de la série harmonique.

Si $(jx_j)_j$ converge vers une constante a non-nulle, alors on montre que si $0 < b < a$, il existe N tel que $jx_j \geq b$ pour tout $j \geq N$. Si $(jx_j)_j$ tend vers l'infini, alors pour $R = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $jx_j > 1$ si $j \geq N$.

■

En résumé, si on souhaite appliquer le critère de Riemann à une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ à termes positifs, on étudie deux possibilités :

- ▷ S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(j^\alpha x_j)_j$ converge, alors la série converge.
- ▷ Si la suite $(jx_j)_j$ converge vers une constante non-nulle ou tend vers l'infini, alors la série diverge.

Exemple 4.2.13 Pour tous $a, b > 0$, la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{aj+b}$ diverge puisque

$$\frac{j}{aj+b} \to \frac{1}{a} \neq 0.$$

4.3 Séries alternées

Si une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge, alors la suite $(x_j)_j$ converge vers 0. Nous avons vu que le contraire est faux en général puisque la série harmonique diverge. Dans le cas des séries dites *alternées*, on peut néanmoins obtenir un test très pratique.

Définition 4.3.1 Une série *alternée* est une série réelle qu'on peut écrire sous la forme

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j r_j \quad \text{avec } r_j \geq 0 \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Proposition 4.3.2 (Critère des séries alternées) *Si $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors la série alternée*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j r_j \quad \textit{converge}$$

si et seulement si

$$r_j \to 0 \quad \textit{lorsque } j \to +\infty.$$

Démonstration : Si la série converge, alors son terme général converge vers 0. Comme la convergence vers 0 est équivalente à la convergence des valeurs absolues vers 0, on obtient directement que la suite $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Supposons à présent que la suite $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la $n^{\text{ème}}$ somme partielle

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j r_j.$$

Remarquons que

$$S_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1} r_{n+1} + (-1)^{n+2} r_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1}(r_{n+1} - r_{n+2}).$$

Par hypothèse, on sait que $r_{n+1} - r_{n+2} \geq 0$. On a donc $S_{n+2} \geq S_n$ si n est impair et $S_{n+2} \leq S_n$ si n est pair.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(r_n)_n$ converge vers 0, on peut trouver un naturel N pair (s'il est impair, il suffit de prendre $N+1$) tel que $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N$. Alors, on a

$$S_N \geq S_{N+2} \geq S_{N+4} \geq \cdots \geq S_{N+2k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus,

$$S_{N+2k+1} = S_{N+2k} + (-1)^{N+2k+1} r_{N+2k+1} = S_{N+2k} - r_{N+2k+1} \leq S_{N+2k} \leq S_N.$$

Ainsi, pour tout nombre $n \geq N$, on a

$$S_n \leq S_N.$$

D'autre part, on a également

$$S_{N+1} \leq S_{N+3} \leq \cdots \leq S_{N+2k+1}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus,

$$S_{N+2k} = S_{N+2k+1} - (-1)^{N+2k+1} r_{N+2k+1} = S_{N+2k+1} + r_{N+2k+1} \geq S_{N+2k+1} \geq S_{N+1}.$$

Ainsi, pour tout nombre $n \geq N$, on a

$$S_n \geq S_{N+1} = S_N + (-1)^{N+1} r_{N+1} = S_N - r_{N+1}.$$

Au total, on a donc obtenu que pour tout $n \geq N$,

$$S_N - r_{N+1} \leq S_n \leq S_N$$

et on en tire que

$$|S_n - S_N| \leq r_{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, si $p, q \geq N$, on a

$$|S_p - S_q| \leq |S_p - S_N| + |S_N - S_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy. Par conséquent, elle converge. ■

Exemple 4.3.3 (Série harmonique alternée) La série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j}$$

converge puisque la suite $\left(\frac{1}{j}\right)_j$ est décroissante et converge vers 0.

4.4 Convergence absolue

Nous avons étudié des techniques pour démontrer qu'une série à termes positifs converge. En toute généralité, on peut toujours se ramener à une telle série en considérant la série des modules des termes généraux. Nous montrons dans cette section que si cette nouvelle série converge, alors la série de départ converge également (la réciproque étant fausse).

Définition 4.4.1 Une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge *absolument* si la série des modules

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |x_j|$$

converge.

Proposition 4.4.2 *Si une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ converge absolument, alors elle converge. Dans ce cas, on a*

$$\left|\sum_{j=0}^{+\infty} x_j\right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |x_j|.$$

Démonstration : Comme la série $\sum_{j=0}^{+\infty} |x_j|$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j=p}^{q} |x_j| = \left|\sum_{j=p}^{q} |x_j|\right| < \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geq N.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve que

$$\left|\sum_{j=p}^{q} x_j\right| \leq \sum_{j=p}^{q} |x_j| < \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geq N$$

et la série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ vérifie donc le critère de Cauchy, donc converge.
Pour la deuxième partie, en appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire, on sait que

$$\left|\sum_{j=0}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |x_j|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la conclusion est alors une conséquence de la Proposition 3.2.5. ■

La réciproque de ce résultat est fausse : la série alternée $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j}$ converge alors que la série harmonique $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}$ diverge.

Définition 4.4.3 Une série $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

4.5 Récapitulatif des techniques pour l'étude de la convergence de séries

Considérons une série (réelle ou complexe)

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$$

dont on souhaite étudier la convergence.

1. On commence par étudier la convergence absolue de la série, autrement dit la convergence de la série

   $$\sum_{j=0}^{+\infty} |x_j|.$$

   Comme il s'agit d'une série à termes positifs, on peut appliquer les critères de la racine, du quotient et de Riemann :

   ▷ Critère de la racine :

   $$\text{si} \quad |x_j|^{\frac{1}{j}} \to q < 1 \text{ alors la série converge absolument}$$

   et

   $$\text{si} \quad |x_j|^{\frac{1}{j}} \to q > 1 \text{ alors la série diverge car } x_j \nrightarrow 0.$$

   ▷ Critère du quotient :

   $$\text{si} \quad \frac{|x_{j+1}|}{|x_j|} \to q < 1 \text{ alors la série converge absolument}$$

   et

   $$\text{si} \quad \frac{|x_{j+1}|}{|x_j|} \to q > 1 \text{ alors la série diverge car } x_j \nrightarrow 0.$$

   ▷ Critère de Riemann :

   $$\text{s'il existe } \alpha > 1 \text{ tel que} \quad j^\alpha |x_j| \to C \geq 0 \text{ alors la série converge absolument}$$

   et

   $$\text{si} \quad j|x_j| \to C > 0 \text{ ou si } j|x_j| \to +\infty \text{ alors la série ne converge pas absolument.}$$

   Si la série converge absolument, alors elle converge.

2. Si la série n'est pas absolument convergente ou si les critères précédents ne permettent pas de conclure, on applique si possible le critère des séries alternées.

Exemple 4.5.1 Considérons la série de terme général donné par

$$x_j = \frac{(a-2)^j}{2^j a^j \sqrt{2j+1}} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}_0$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On peut supposer que $a \neq 2$ car alors la série est évidemment absolument convergente. On regarde tout d'abord la série de terme général

$$|x_j| = \frac{|a-2|^j}{2^j|a|^j\sqrt{2j+1}} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}_0.$$

Vu la forme de la suite, nous allons utiliser le critère du quotient. On a

$$\frac{|x_{j+1}|}{|x_j|} = \frac{|a-2|}{2|a|}\frac{\sqrt{2j+1}}{\sqrt{2j+3}} \to \frac{|a-2|}{2|a|}.$$

De plus, on calcule que

$$\frac{|a-2|}{2|a|} < 1 \text{ si et seulement si } 3a^2 + 4a - 4 > 0$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$a < -2 \quad \text{ou} \quad a > \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

- ▷ si $a < -2$ ou $a > \frac{2}{3}$, la série est absolument convergente.
- ▷ si $a \in]-2, \frac{2}{3}[$, alors la série diverge car $x_j \nrightarrow 0$.
- ▷ si $a = -2$, la série se réécrit

  $$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2j+1}}.$$

  On utilise le critère de Riemann pour montrer que la série diverge puisque

  $$j\frac{1}{\sqrt{2j+1}} \to +\infty.$$

- ▷ Si $a = \frac{2}{3}$, la série se réecrit

  $$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}.$$

  Il s'agit d'une série alternée. Puisque la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\right)_j$ décroit vers 0, on en tire que la série est convergente.

4.6 Multiplication de séries

La multiplication des séries est plus compliquée que leur addition. Remarquons que

$$\begin{aligned}(x_0+x_1)(y_0+y_1) &= x_0y_0 + x_0y_1 + x_1y_0 + x_0y_0 \\ &= \underbrace{x_0y_0}_{\text{somme des indices }=0} + \underbrace{(x_0y_1 + x_1y_0)}_{\text{somme des indices }=1} + \underbrace{x_1y_1}_{\text{somme des indices }=2}\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(x_0+x_1+x_2)(y_0+y_1+y_2) &= x_0y_0+x_0y_1+x_0y_2+x_1y_0+x_1y_1+x_1y_2+x_2y_0+x_2y_1+x_2y_2\\
&= \underbrace{x_0y_0}_{\text{somme des indices }=0} + \underbrace{(x_0y_1+x_1y_0)}_{\text{somme des indices }=1} + \underbrace{(x_0y_2+x_1y_1+x_2y_0)}_{\text{somme des indices }=2}\\
&\quad + \underbrace{(x_1y_2+x_2y_1)}_{\text{somme des indices }=3} + \underbrace{x_2y_2}_{\text{somme des indices }=4}.
\end{aligned}
$$

De manière générale, on montre que

$$\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right) = \sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k}$$

si bien que pour étudier la convergence du produit, on se ramène à étudier la série de terme général $u_j = \sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k}$. Nous admettrons le résultat suivant.

Théorème 4.6.1 (Mertens) *Soient $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ deux séries qui convergent. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose*

$$u_j = x_0y_j + x_1y_{j-1} + \cdots + x_jy_0 = \sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k}.$$

Si au moins une des deux séries converge absolument, alors la série de terme général $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_j = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_j\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} y_j\right).$$

La série $\sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ est appelée le produit de Cauchy *des séries $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$.*

Remarque 4.6.2 Si les deux séries sont seulement semi-convergentes, le résultat est faux. Considérons par exemple les séries $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ avec

$$x_j = y_j = \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}}.$$

Ces deux séries sont égales et convergent par le critère des séries alternées. Cependant, on a

$$u_j = \sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k} = \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{j-k}}{\sqrt{j-k+1}} = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(j-k+1)}}$$

et donc

$$|u_j| = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(j-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{\sqrt{(j+1)(j+1)}} = 1.$$

Le terme général de la série $\sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ ne converge donc pas vers 0 et la série est donc divergente.

Chapitre 5

Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre introductif, nous nous plongeons dans l'étude des fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ou sur une partie de cet ensemble, et qui prennent des valeurs réelles ou complexes. Les fonctions sont des outils mathématiques omniprésents dès lors qu'il s'agit de relier une grandeur à une autre variable. Pour illustrer cette idée, prenons l'exemple d'une voiture roulant à une vitesse constante de 100km/h. Nous pouvons aisément exprimer la distance parcourue par cette voiture depuis le moment initial, qui est généralement fixé à 0, en fonction du temps. En d'autres termes, à tout temps $t \geq 0$, nous pouvons *associer* un nombre réel noté $f(t)$ qui va donner la distance parcourue au temps t.

Notre objectif principal au sein de ce chapitre est de présenter les premières caractéristiques et propriétés fondamentales des fonctions, tout en abordant la notion cruciale de limite dans le contexte des fonctions. C'est une étape essentielle pour comprendre en profondeur le comportement et les propriétés des fonctions que nous étudierons par la suite.

5.1 Fonctions et graphes

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. Autrement dit, une fonction f définie sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est une loi qui associe à tout $x \in A$ un nombre $f(x) \in \mathbb{R}$ ou $f(x) \in \mathbb{C}$.

Définition 5.1.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une *fonction* définie sur A est une application définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note

$$f : A \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x).$$

On appelle x la *variable* et $f(x)$ la *valeur de f en x*. On dit que A est le *domaine de définition* de f et on le note $\mathrm{dom}(f)$.

Les fonctions ne prennent pas nécessairement toutes les valeurs complexes : par exemple, la fonction valeur absolue

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto |x|$$

est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, et même dans $[0, +\infty[$. Rappelons que si $f : A \to \mathbb{C}$, alors l'ensemble $f(A)$ défini par

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

est appelé l'ensemble *image* de A par f. C'est l'ensemble des valeurs prises par f sur A.

Définition 5.1.2 Soit $f : A \to \mathbb{C}$. On dit que f est

- $\triangleright$ une *fonction réelle* si $f(A) \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire si $f(x)$ est un nombre réel pour tout $x \in A$
- $\triangleright$ une *fonction positive* $f(A) \subset [0, +\infty[$, c'est-à-dire si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in A$
- $\triangleright$ une *fonction négative* $f(A) \subset]-\infty, 0]$, c'est-à-dire si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in A$.

Si $B \subset \mathbb{C}$ est tel que $f(A) \subset B$, on note

$$f : A \to B$$

pour préciser que f prend ses valeurs dans B.

Notons qu'on parlera simplement de "la fonction f" lorsque le contexte est clair.

Exemples 5.1.3

- $\triangleright$ La fonction valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ est une fonction positive. On aurait pu aussi considérer la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, +\infty[: x \mapsto |x|$.
- $\triangleright$ La fonction *identité* est la fonction $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$.
- $\triangleright$ Si $a \in \mathbb{R}$, la fonction *constante* égale à a est la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a$ (attention, on utilise la même notation pour parler du réel et de la fonction).
- $\triangleright$ Si $B \subset \mathbb{R}$, la fonction *caractéristique* de B est la fonction

$$\mathbb{1}_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\triangleright$ Si on veut considérer la fonction qui à tout réel associe son inverse, on doit enlever le réel 0 qui ne possède pas d'inverse. On a

$$\cdot^{-1} : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$$

  où $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\triangleright$ La fonction *racine carrée* est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Définition 5.1.4 Si f est une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, le *graphe* de f est l'ensemble

$$\mathcal{G}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in A\big\}.$$

C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Il ne faut pas confondre le graphe de f et sa *représentation graphique* (ou le graphique), qui est la représentation géométrique de son graphe. Même si la représentation graphique d'une fonction est très intuitive et utile dans de nombreux exemples pratiques, elle possède des inconvénients. Par exemple :

- $\triangleright$ il est impossible de tracer le graphique de certaines fonctions, c'est le cas de la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$,
- $\triangleright$ lorsque l'on travaillera avec des fonctions à 3 variables (par rapport à des grandeurs qui dépendent de la position dans l'espace), on ne pourra plus tracer leurs graphiques.

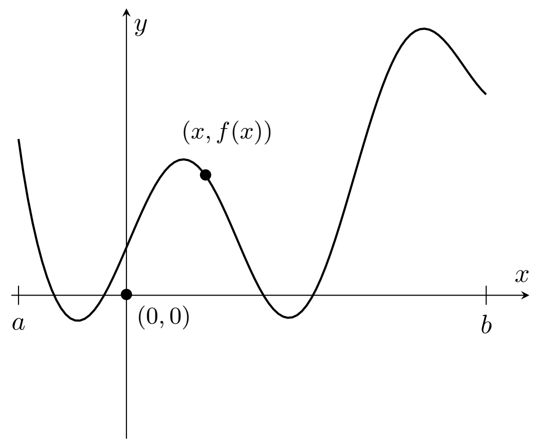


FIGURE 5.1 – Représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Terminons par quelques remarques sur différentes notations employées pour désigner une fonction :

- ▷ Comme pour l'indice des suites, la variable x est muette. Cela signifie qu'on peut aussi écrire de manière totalement équivalente $f : A \to \mathbb{C} : t \mapsto f(t)$ ou $f : A \to \mathbb{C} : y \mapsto f(y)$, ou encore $f : A \to \mathbb{C} : \heartsuit \mapsto f(\heartsuit)$.
- ▷ Parler de "la fonction $y = f(x)$" est un abus de langage ; cela correspond à l'équation cartésienne du graphe de la fonction f.
- ▷ Parler de "la fonction $f(x)$" est également un abus de langage. On l'utilise lorsque le contexte est clair car il est plus facile par exemple de parler de "la fonction $x^2 - 2x + 3$" que de parler de la fonction $\cdot^2 - 2 \cdot +3$ ou encore de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 2x + 3$. On dira aussi "soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$".

5.2 Opérations sur les fonctions

Si deux fonctions sont définies sur le même ensemble A, nous avons vu qu'on dit qu'elles sont *égales*, ce qu'on écrit $f = g$, si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$. Si deux fonctions sont à valeurs réelles et définies sur un même ensemble, on peut aussi les comparer du point de vue de l'ordre.

Définition 5.2.1 Soient f et g deux fonctions réelles définies sur A. On dit que

- ▷ la fonction f est *supérieure ou égale* à g (ou que f majore g), ce qu'on note $f \geq g$, si

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{pour tout } x \in A,$$

- ▷ la fonction f est *inférieure ou égale* à g (ou que f minore g), ce qu'on note $f \leq g$, si

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Par exemple, si f est une fonction positive, alors $f \geq 0$.

Intéressons-nous à présent aux opérations algébriques que l'on peut faire sur les fonctions.

Définition 5.2.2 Soient f, g deux fonctions définies sur A et $c \in \mathbb{C}$.

- ▷ La fonction $f + g$ est définie par

$$f + g : A \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x) + g(x).$$

- ▷ La fonction fg est définie par

$$fg : A \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x)g(x).$$

- ▷ La fonction cf est définie par

$$cf : A \to \mathbb{C} : x \mapsto cf(x).$$

- ▷ Si $A' = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie par

$$\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{C} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque 5.2.3 Si les fonctions considérées ne sont pas définies sur le même ensemble, on s'y ramène en considérant $A = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$.

En itérant ces constructions, on peut par exemple obtenir des combinaisons linéaires de fonctions

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n.$$

Exemple 5.2.4 Les *fonctions polynomiales*

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ peuvent être obtenues à partir d'opérations algébriques sur la fonction identité et les constantes, puisqu'on peut écrire

$$P = a_n \underbrace{\mathrm{id} \ldots \mathrm{id}}_{n \text{ fois}} + \cdots + a_1 \mathrm{id} + a_0.$$

Terminons cette section en rappelant une autre manière de construire de nouvelles fonctions à partir d'anciennes : en les composant. La définition est intuitive si on se rappelle qu'une fonction est une "loi" qui à toute valeur réelle associe une valeur réelle. On peut donc imaginer appliquer successivement plusieurs lois : partir de x, lui appliquer f pour obtenir $f(x)$ et à cette valeur $f(x)$, appliquer la loi g pour obtenir $g(f(x))$. Évidemment, il faut que le domaine de définition de g soit "compatible" avec l'ensemble image de f : Autrement dit, il faut que $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g pour tout $x \in A$.

Définition 5.2.5 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : B \to \mathbb{C}$ deux fonctions. Si $f(A) \subseteq B$, la fonction *composée* de f et g est la fonction $g \circ f$ définie par

$$g \circ f : A \to \mathbb{C} : x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

Exemple 5.2.6 Soient f et g les fonctions définies par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^5.$$

On a

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^5 + 1 \quad \text{et} \quad g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (2x + 1)^5.$$

Si la condition $f(A) \subseteq B$ n'est pas vérifiée, il faut d'abord restreindre f à un sous-ensemble A' pour lequel $f(A') \subseteq B$ et définir $g \circ f$ sur A'. On peut également itérer ce procédé pour définir $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$.

Exemple 5.2.7 Si $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction inverse et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$f \circ g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$$

où $A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ et

$$g \circ f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto g\left(\frac{1}{x}\right).$$

On peut également composer les fonctions polynômiales et la fonction inverse pour obtenir les fractions rationnelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$Q : A \to \mathbb{C} : x \mapsto \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

où $A = \{x \in \mathbb{R} : b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$, avec $n, m \in \mathbb{N}$ et et $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$.

Enfin, rappelons que si une fonction réelle f est bijective, alors on peut considérer sa fonction réciproque f^{-1} qui vérifie

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

pour tout x appartenant au domaine de définition de f et tout y appartenant à l'ensemble image de f.

5.3 Propriétés particulières des fonctions

Dans cette section, nous introduisons quelques propriétés de base qui peuvent être satisfaites par les fonctions. Commençons par les notions de parité.

Définition 5.3.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite

- ▷ *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- ▷ *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.3.2 La fonction valeur absolue est une fonction paire, de même que toutes les fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2k}$ avec $k \in \mathbb{N}$. Par contre, l'identité est une fonction impaire, de même que toutes les fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2k+1}$ avec $k \in \mathbb{N}$. La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 2x$$

n'est ni paire, ni impaire.

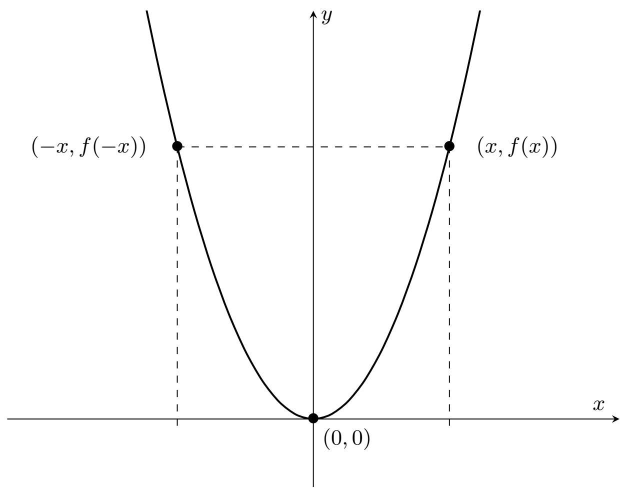


FIGURE 5.2 – Représentation graphique de la fonction paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

On montre facilement que toute combinaison linéaire de fonctions paires est paire et que toute combinaison linéaire de fonctions impaires est impaire.

La parité des fonctions se lit facilement sur leur représentation graphique : la représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

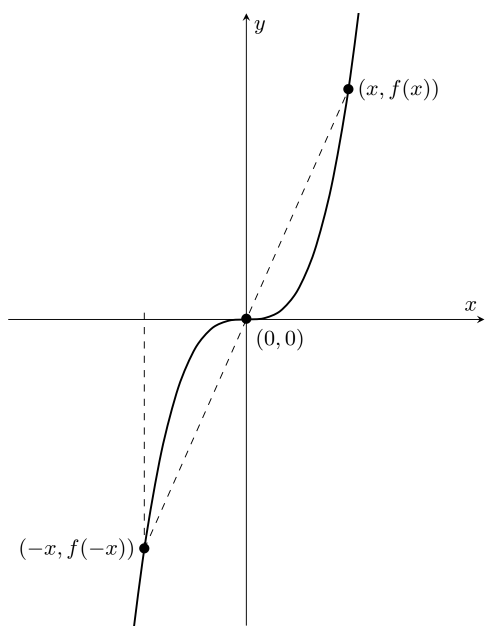


FIGURE 5.3 – Représentation graphique de la fonction impaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

Nous introduisons à présent les fonctions périodiques : elles représentent des phénomènes qui se reproduisent à intervalle régulier.

Définition 5.3.3 Soit T un nombre réel strictement positif. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *périodique de période* T si

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que si f est périodique de période T, elle est également périodique de période nT pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ puisque

$$f(x+nT) = f(x+(n-1)T+T) = f(x+(n-1)T) = \cdots = f(x+T) = f(x).$$

Si elle existe, la *période* de f est le plus petit T pour lequel f est T-périodique.

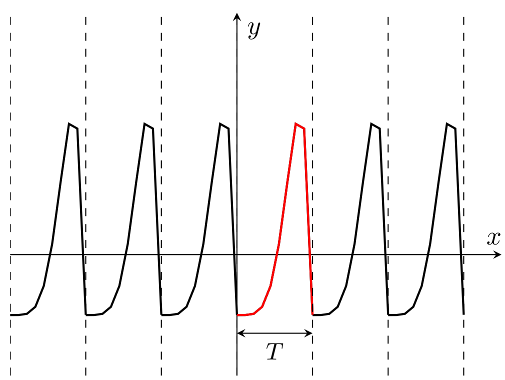


FIGURE 5.4 – Représentation graphique d'une fonction T-pérodique.

Exemple 5.3.4 La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire et 2π-périodique, la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire et 2π-périodique.

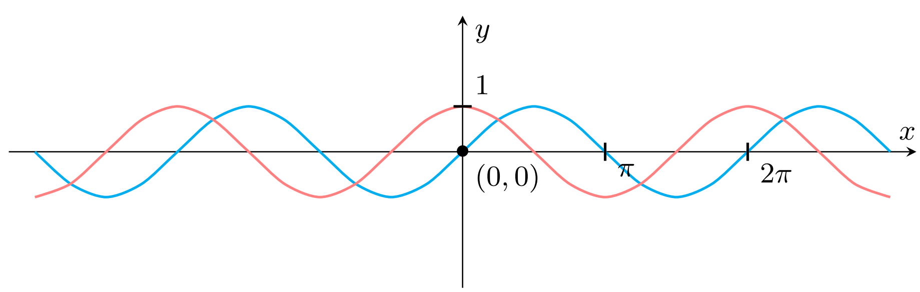


FIGURE 5.5 – Représentation graphique des fonctions sinus (en bleu) et cosinus (en rouge).

Définition 5.3.5 Une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R}$ est

- ▷ *croissante* si pour tous $x, y \in A$ tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$,
- ▷ *décroissante* si pour tous $x, y \in A$ tels que $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$,
- ▷ *monotone* si elle est soit croissante, soit décroissante.

Lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes, on parle de fonctions strictement croissantes, strictement décroissantes et strictement monotones. On parle aussi de fonction croissante, décroissante... sur un ensemble A' si la restriction de f à A' est croissante, décroissante...

Exemples 5.3.6

- ▷ La fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est croissante.
- ▷ La fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Définition 5.3.7 Une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R}$ est

- ▷ *bornée* si l'ensemble $f(A)$ est borné, c'est-à-dire s'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$|f(x)| \leq C \quad \text{pour tout } x \in A,$$
- ▷ *majorée* si $f(A)$ est majoré,
- ▷ *minorée* si $f(A)$ est minoré.

On définit alors

- ▷ la *borne supérieure* de f sur A comme étant la borne supérieure de $f(A)$, et on la note $\sup_A f$ ou $\sup_{x\in A} f(x)$,
- ▷ la *borne inférieure* de f sur A comme étant la borne inférieure de $f(A)$, et on la note $\inf_A f$ ou $\inf_{x\in A} f(x)$.

S'il existe $x_0 \in A$ tel que
$$f(x_0) = \sup_A f,$$
on dit que f admet un *maximum* en x_0 sur A. De même, s'il existe $x_0 \in A$ tel que
$$f(x_0) = \inf_A f,$$
on dit que f admet un *minimum* en x_0 sur A.

Remarquons qu'une fonction peut être bornée sans admettre de maximum ou de minimum. On peut aussi parler de fonction à valeurs complexes bornée en remplaçant dans la définition la valeur absolue par le module.

Exemple 5.3.8 La borne supérieure de la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $\frac{\pi}{2}$ et sa borne inférieure est $-\frac{\pi}{2}$. Néanmoins, il n'existe pas de réel dont l'arc tangente est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

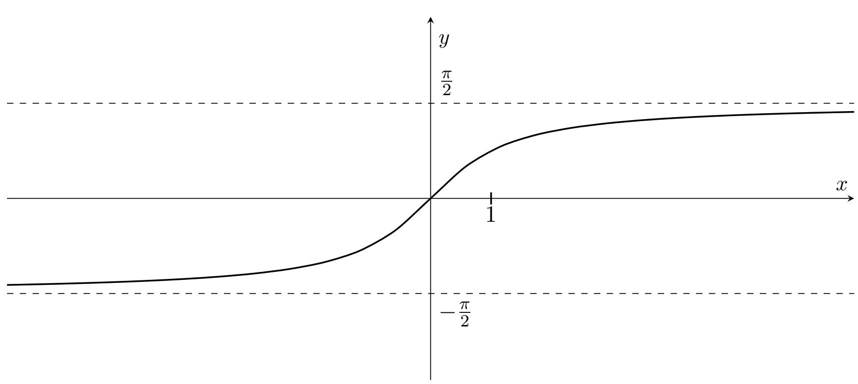


FIGURE 5.6 – Représentation graphique de la fonction arc tangente.

Terminons cette section par l'introduction des fonctions concaves et convexes.

Définition 5.3.9 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est

- ▷ *convexe* si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et tout $\lambda \in]0,1[$

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

- ▷ *concave* si $-f$ est convexe, autrement dit si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et tout $\lambda \in]0,1[$

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Graphiquement,

- ▷ les points $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in]0,1[$ décrivent le segment d'extrémités x_1 et x_2,
- ▷ la droite déterminée par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ a pour équation

$$y - f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

Ainsi, l'ordonnée du point d'abscisse $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ est donnée par

$$y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Par conséquent, dire que f est convexe sur I revient à dire que, pour tous $x_1, x_2 \in I$, le segment d'extrémités $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est "au-dessus" du graphique de f entre x_1 et x_2. Si f est concave, ce segment sera "en-dessous" du graphique.

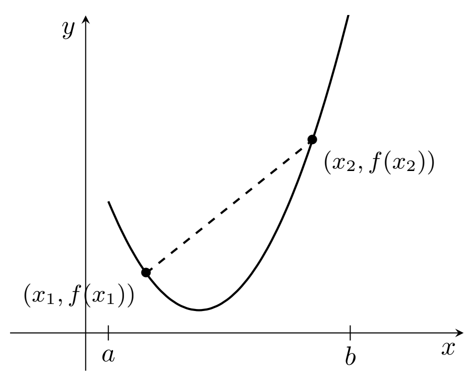


FIGURE 5.7 – Représentation graphique d'une fonction convexe sur l'intervalle $[a,b]$.

Exemple 5.3.10 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est convexe.

5.4 Limite d'une fonction

5.4.1 Limite d'une fonction en un point

La notion de continuité d'une fonction f en un point ξ repose sur le concept de *limite* de f en ξ. De manière intuitive, la notion de limite d'une fonction en un point peut être comparée à celle de limite d'une suite : la limite de f en ξ est la limite des valeurs $f(x)$ lorsque la variable x se rapproche de ξ. Afin de définir la limite de f en ξ, est nécessaire que les valeurs $f(x)$ existent pour x proche de ξ. En d'autres termes, la fonction f doit être définie pour un nombre "suffisant" de points "proches de ξ". Il est important de noter que la fonction n'a pas besoin d'être définie au point ξ lui-même pour que la limite ait un sens. Ce qui importe dans ce contexte, ce sont les valeurs de $f(x)$ pour les valeurs de x proches de ξ, et non pas la valeur de $f(\xi)$.

Définition 5.4.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $\xi \in \mathbb{R}$. On dit que ξ est *adhérent* à A si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[$ est non-vide.

Autrement dit, un point ξ est adhérent à A si tous les "voisinages de ξ" (c'est-à-dire les ensemble qui contiennent un intervalle de centre ξ) rencontrent A. Notons qu'on n'a pas nécessairement $\xi \in A$.

Exemples 5.4.2

- ▷ Si $A = [0, 1[$, alors 0, 0.2 et 1 sont adhérents à A, mais 1.1 n'est pas adhérent à A.
- ▷ Si $A = \mathbb{N}$, alors 5 est adhérent à A mais $\frac{1}{2}$ n'est pas adhérent à A.
- ▷ Si $A = \mathbb{Q}$, tous les réels sont adhérents à A.

Définition 5.4.3 Soient $f : A \to \mathbb{C}$, ξ un point adhérent à A et $a \in \mathbb{C}$. On dit que a est la *limite de f lorsque x tend vers ξ* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } |x - \xi| < \delta, \text{ on a } \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit aussi que *f tend (ou converge) vers a lorsque x tend vers ξ* et que a est la *limite de f en ξ*, et on note

$$\lim_{x \to \xi,\, x \in A} f(x) = a$$

ou

$$f(x) \to a \quad \text{lorsque } x \to \xi.$$

En général et seulement lorsque le contexte est clair, on écrira $\lim_{x \to \xi} f(x) = a$ sans préciser l'ensemble A sur lequel on travaille.

S'il n'y a pas de valeur a pour laquelle la définition est satisfaite, on dit que *la limite de f lorsque x tend vers ξ n'existe pas.*

Remarque 5.4.4 La valeur de δ dépend de ε. Plus ε est petit, plus δ sera également petit. Notons que la valeur de δ dépend également évidemment de ξ.

Exemple 5.4.5 Considérons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_0$ par

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrons que f tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Notons tout d'abord que 0 est bien adhérent à $\mathbb{R}_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_0$ tel que $|x| < \varepsilon$, on a

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| \leq |x| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\delta = \varepsilon$ convient.

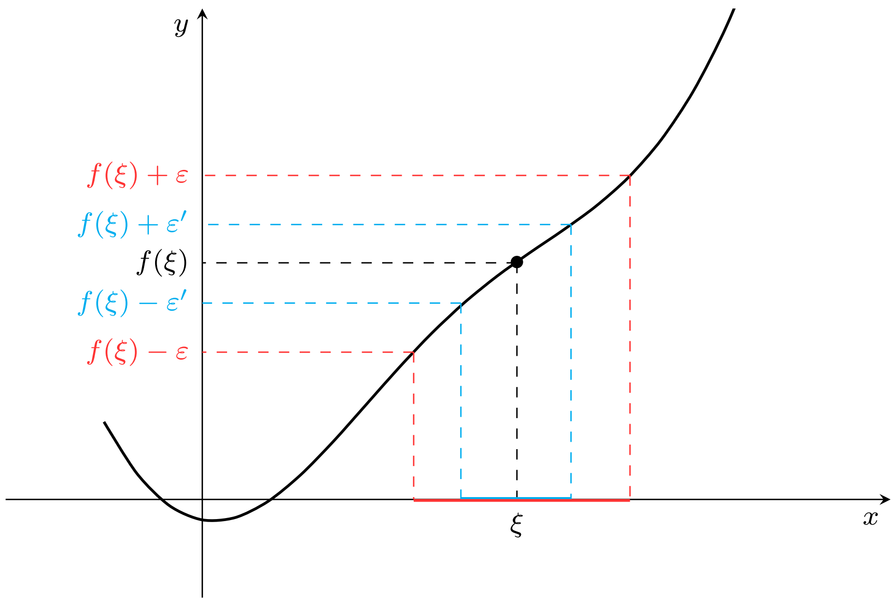


FIGURE 5.8 – Illustration de la continuité en ξ.

Si f possède une limite en un point ξ, alors cette limite est unique. Cela nous permet donc de parler de *la* limite de f en ξ.

Proposition 5.4.6 *Soit $f : A \to \mathbb{C}$ et soit ξ un point adhérent à A. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = b.$$

Alors $a = b$.

Démonstration : Procédons par l'absurde et supposons que $a \neq b$. Posons $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Par définition de la limite de f en ξ,

- ▷ il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in A$ tel que $|x-\xi| < \delta_1$, on a $|f(x) - a| < \varepsilon$,
- ▷ il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in A$ tel que $|x-\xi| < \delta_2$, on a $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Fixons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pour tout $x \in A$ tel que $|x-\xi| < \delta$, l'inégalité triangulaire donne

$$|a-b| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|$$

ce qui est impossible. ■

Comme pour les suites, la détermination de la limite d'une fonction en un point demande a priori de manipuler la définition mathématique. Nous donnons ici quelques exemples pour apprendre à utiliser cette définition.

Exemples 5.4.7

- ▷ Fixons une constante $c \in \mathbb{C}$ et considérons la fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$. Si $\xi \in \mathbb{R}$, montrons que $\lim_{x\to\xi} f(x) = c$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $\delta = 1$ (par exemple, vous pouvez prendre le δ que vous souhaitez !), on a que si $|x-\xi| < 1$, alors $|f(x) - c| = 0 < \varepsilon$.

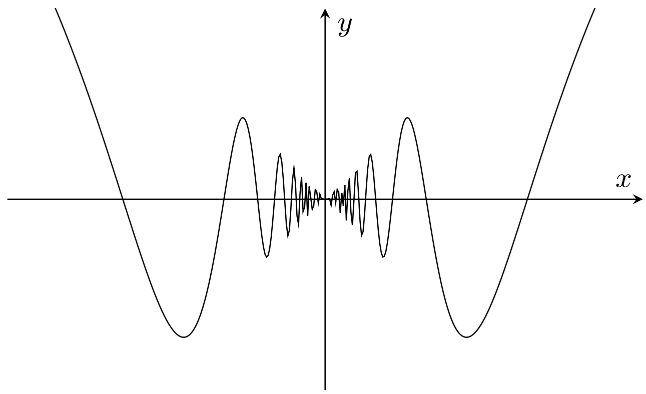


FIGURE 5.9 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

- ▷ Considérons la fonction identité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Si $\xi \in \mathbb{R}$, montrons qu'on a $\lim_{x\to\xi} f(x) = \xi$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $\delta = \varepsilon$, on a que si $|x-\xi| < \delta$, alors $|f(x)-\xi| = |x-\xi| < \varepsilon$. On voit bien ici la dépendance de δ en ε.
- ▷ Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Montrons que $\lim_{x\to 3} f(x) = 9$.
  Soit $\varepsilon > 0$. On souhaite majorer $|x^2-9|$. Pour cela, commençons par remarquer que
  $$|x^2-9| = |x+3|\,|x-3|.$$
  Si $\delta \leq 1$ et si $|x-3| < \delta$, alors on a $|x+3| < 7$. Ainsi, si $|x-3| < \delta \leq 1$, on a
  $$|x^2-9| = |x+3|\,|x-3| < 7\delta.$$
  Ainsi, il est clair que $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ convient.

Proposition 5.4.8 *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et ξ un point adhérent à A. Si*
$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = a \in \mathbb{C}$$
alors il existe $\delta > 0$ tel que f est bornée sur $A \cap \,]\xi-\delta, \xi+\delta[$.

Démonstration : Soit $\varepsilon = 1$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ satisfaisant $|x-\xi| < \delta$, on a $|f(x)-a| < 1$. Ainsi, pour tout $x \in A \cap \,]\xi-\delta, \xi+\delta[$, on a
$$|f(x)| \leq |f(x)-a| + |a| < 1 + |a|.$$
■

5.4.2 Limite à gauche, à droite, épointée

Lorsque f est définie pour des valeurs supérieures ou inférieures à ξ, on peut s'intéresser au comportement de la fonction lorsque x tend vers ξ en étant respectivement plus petit ou plus grand. C'est ce qu'on appelle les *limites à gauche et à droite.*

Définition 5.4.9 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$.

- ▷ Si ξ un point adhérent à $A \cap]-\infty, \xi[$, on dit que f *tend (ou converge) vers* a *lorsque* x *tend vers* ξ *par la gauche* lorsque
$$\lim_{x \to \xi, x \in A \cap]-\infty, \xi[} f(x) = a.$$
Dans ce cas, a est la *limite à gauche de* f *en* ξ et on note
$$\lim_{x \to \xi^-,\, x \in A} f(x) = a.$$
- ▷ Si ξ un point adhérent à $A \cap]\xi, +\infty[$, on dit que f *tend (ou converge) vers* a *lorsque* x *tend vers* ξ *par la droite* lorsque
$$\lim_{x \to \xi,\, x \in A \cap]\xi, +\infty[} f(x) = a.$$
Dans ce cas, a est la *limite à droite de* f *en* ξ et on note
$$\lim_{x \to \xi^+,\, x \in A} f(x) = a.$$

Le résultat suivant est évident mais fournit un critère pratique pour démontrer qu'une limite n'existe pas.

Proposition 5.4.10 *Si* $\lim_{x \to \xi,\, x \in A} f(x) = a$*, alors si elles ont du sens, les limites à droite et à gauche de* f *en* ξ *sont également égales à* a*.*

Exemple 5.4.11 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{|x|}{x}$. Alors, la limite de f en 0 n'existe pas puisque

- ▷ si $x > 0$, on a $\frac{|x|}{x} = 1$ et donc
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1,$$
- ▷ si $x < 0$, on a $\frac{|x|}{x} = -1$ et donc
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Remarquons à présent que si f est définie en ξ, alors la limite de la fonction f en ξ dépend de la valeur prise par f en ξ : en effet, quel que soit $\delta > 0$, on a $|\xi - \xi| < \delta$. Ainsi, le seul candidat limite raisonnable est $f(\xi)$ puisque si $a = \lim_{x \to \xi} f(x)$, on majorera $|f(\xi) - a|$ par ε. Ceci n'intervient pas dans les limites à droite et à gauche puisqu'on ne regarde que les points x tels que $x > \xi$ et $x < \xi$ respectivement. Si on veut que la limite ne dépende pas *a priori* de la valeur de f en ξ, on considère la notion de limite "épointée".

Définition 5.4.12 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. Si ξ un point adhérent à $A \setminus \{\xi\}$, on dit que

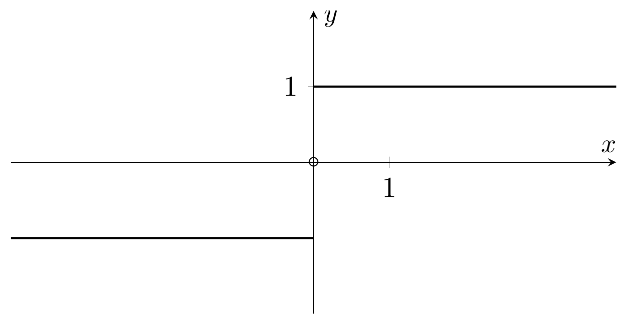


FIGURE 5.10 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{|x|}{x}$.

a est la *limite épointée de* f *en* ξ si

$$\lim_{x\to\xi, x\in A\setminus\{\xi\}} f(x) = a.$$

Remarquons que $\lim_{x\to\xi,x\in A\setminus\{\xi\}} f(x) = a$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ tel que $0 < |x - \xi| < \delta$, on a $|f(x) - a| < \varepsilon$. On utilise également la notation $\lim_{x\to\xi,x\neq\xi} f(x) = a$ lorsque le contexte est clair. A nouveau, si la limite de f en ξ existe et est égale à a, alors la limite épointée de f en ξ existe et est égale à a. L'implication réciproque est fausse en général.

Exemple 5.4.13 Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\xi^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\xi, x\neq 0} f(x) = 0$$

mais la limite de f en 0 n'existe pas car $f(0) \neq 0$.

5.4.3 Limite infinie

Comme dans le cas des suites, lorsqu'une limite en un point n'existe pas, on peut regarder si la fonction tend vers l'infini en ce point.

Définition 5.4.14 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et ξ un point adhérent à A. On dit que f *tend vers l'infini lorsque* x *tend vers* ξ si pour tout $R > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } |x - \xi| < \delta, \text{ on a } \quad |f(x)| > R.$$

Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{x\to\xi, x\in A} f(x) = \infty$$

ou

$$f(x) \to \infty \quad \text{lorsque } x \to \xi.$$

Autrement dit, à chaque fois qu'on se fixe un nombre positif R, on peut trouver un petit voisinage de ξ dans lequel f est en module plus grande que R.

Si la fonction est à valeurs réelles, on peut comme dans le cas des suites distinguer les convergences vers $+\infty$ et $-\infty$ en demandant respectivement que $f(x) > R$ ou $f(x) < -R$ si $x \in A$ et $|x-\xi| < \delta$.

Exemple 5.4.15 La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers l'infini en 0. En effet, si $R > 0$ est fixé, alors on choisit de poser $\delta = \frac{1}{R}$ de sorte que

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > R$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_0$ tel que $|x - 0| < \delta$. De plus, on montre facilement que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

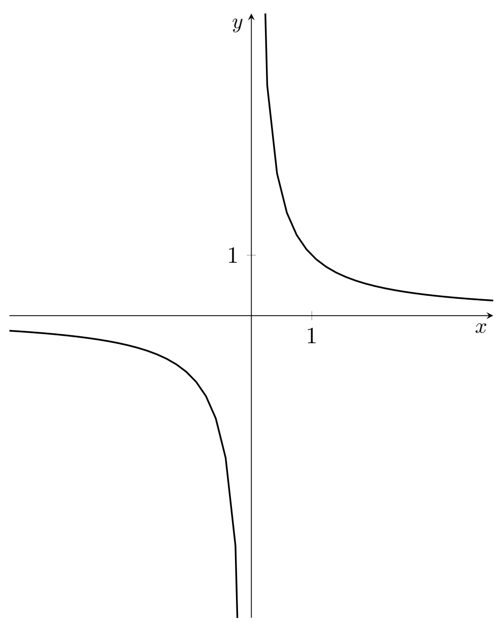


FIGURE 5.11 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

5.4.4 Caractérisation des limites par les suites et règles de calcul

Nous montrons que la limite d'une fonction en un point (ou à l'infini) peut être caractérisée à l'aide des suites qui tendent vers ce point. Cela nous permettra d'obtenir facilement les propriétés de la limite d'une fonction en un point à partir des propriétés des suites.

Proposition 5.4.16 (Critère par les suites) *Soit $f : A \to \mathbb{C}$, soit ξ un point adhérent à A et soit $a \in \mathbb{C}$ ou $a = \infty$. Alors*

$$\lim_{x \to \xi, x \in A} f(x) = a$$

si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers ξ, la suite $\big(f(x_n)\big)_n$ converge vers a.

Démonstration : On va démontrer le cas où $a \in \mathbb{C}$. Le cas $a = \infty$ est laissé à titre d'exercice. Supposons que $\lim_{x\to\xi, x\in A} f(x) = a$ et que $x_n \to \xi$ avec $x_n \in A$ pour tout n. Montrons que $f(x_n) \to f(\xi)$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de f en ξ, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - a| < \varepsilon$ dès que $x \in A$ est tel que $|x - \xi| < \delta$. Par ailleurs, comme $x_n \to \xi$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \xi| < \delta$ si $n \geq N$. Ainsi, si $n \geq N$, on a $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, ce qui suffit.

Pour la réciproque, on procède par l'absurde et on suppose donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in A$ tel que $|x - \xi| < \delta$ et $|f(x) - a| \geq \varepsilon_0$. En prenant $\delta = \frac{1}{n}$, il existe donc $x_n \in A$ tel que $|x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$. Alors, la suite $(x_n - \xi)_n$ convege vers 0 par le Théorème de l'étau, et donc la suite $(x_n)_n$ converge vers ξ. Par contre, $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers a puisque $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$ quel que soit n. D'où une contradiction. ■

Remarque 5.4.17 En particulier, nous avons montré que si ξ est adhérent à A, alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers ξ.

Exemple 5.4.18 La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne possède pas de limite en 0. En effet, définissons les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ en posant $x_n = \frac{1}{n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$. Alors

- ▷ $x_n \to 0$ et $f(x_n) \to 0$ car $f(x_n) = 0$,
- ▷ $y_n \to 0$ et $f(x_n) \to 1$ car $f(y_n) = 1$.

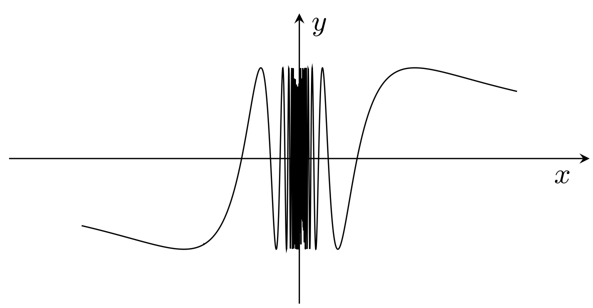


FIGURE 5.12 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Bien sûr, le résultat précédent se particularise au cas des limites à gauche et à droite. Nous laissons cette preuve à titre d'exercice.

Comme nous l'avons vu, il peut être pénible de calculer des limites à l'aide de la définition. Le critère par la suite nous permet d'obtenir directement des règles de calcul similaires à celles obtenues pour les suites. Notons que tous ces résultats pourraient également se démontrer sans passer par les suites et en se ramenant directement à la définition.

Proposition 5.4.19 (Règles de calcul de limites, cas fini) *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions, $c \in \mathbb{C}$ et ξ un point adhérent à A. Supposons que*

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = a \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\xi,\, x\in A} g(x) = b$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

1. $\lim_{x\to\xi,\, x\in A} c\, f(x) = c\, a$,
2. $\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) + g(x) = a + b$,
3. $\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x)g(x) = ab$,
4. *si $b \neq 0$, alors il existe $A' \subseteq A$ sur lequel g se s'annule pas et tel que ξ est adhérent à A', et*
$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A'} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Démonstration : Tout découle des règles de calcul pour les suites. Traitons en guide d'illustration le point 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers ξ. Alors, le critère par les suites nous apprend que $f(x_n) \to a$ et $g(x_n) \to b$. Les règles de calcul pour les suites donnent alors que $f(x_n) + g(x_n) \to a + b$ et le critère par les suites permet de conclure.

Pour le point 4, on remarque comme pour les suites que si $b \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|b| - \varepsilon > 0$. Comme g converge vers b lorsque x tend vers ξ, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - b| < \varepsilon$ si $x \in A$ est tel que $|x - \xi| < \delta$. Alors, si $A' = A \cap]\xi - \delta, \xi + \delta[$, alors on a

$$|g(x)| \geq |b| - |g(x) - b| > |b| - \varepsilon > 0$$

pour tout $x \in A'$. La deuxième partie se démontre comme précédemment en utilisant les règles de calcul pour les suites et le critère par les suites. ■

Exemple 5.4.20 Montrons que
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x + 3}{3x - 4} = 3.$$
Il découle de l'Exemple 5.4.7 que
$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3} x = 3$$
et donc les règles de calcul donnent
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x + 3}{3x - 4} = \frac{9 + 3 + 3}{9 - 4} = 3.$$

Exemple 5.4.21 Montrons que
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$$
On ne peut pas utiliser directement les règles de calcul pour le quotient car $\lim_{x\to 3} x - 3 = 0$ par les règles de calcul. Cependant, on peut écrire
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-1)}{x - 3} = x - 1$$
pour tout $x \neq 3$ et donc
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x\to 3} x - 1 = 2.$$

Remarquons qu'on aurait pu travailler sur un ensemble $B \subseteq A$ et conserver les règles de calcul : elles sont donc également valides pour les limites à droite, à gauche et épointées. Dans le dernier point, le fait de réduire A à A' permet juste de pouvoir considérer le quotient $\frac{f}{g}$. La proposition suivante peut paraître évidente mais elle est très pratique.

Proposition 5.4.22 (Restriction) *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction, $A' \subseteq A$ et ξ un point adhérent à A'. Si*

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = a,$$

alors on a également

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A'} f(x) = a.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - a| < \varepsilon$ pour tout $x \in A$ tel que $|x - \xi| < \delta$. Or, si $x \in A'$, alors on a également $x \in A$. On en tire que $|f(x) - a| < \varepsilon$ pour tout $x \in A'$ tel que $|x - \xi| < \delta$. ■

Remarque 5.4.23 Dans le cas des suites, le résultat de restriction signifie que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq M}$, quel que soit le naturel M fixé.

Enfin, le théorème de comparaison prend la forme suivante. A nouveau, on l'appelle également théorème de "l'étau" ou des "gendarmes".

Théorème 5.4.24 (Sandwich) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ et $h : A \to \mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles et ξ un point adhérent à A. Supposons que $f \leq g \leq h$ et que*

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = \lim_{x\to\xi,\, x\in A} h(x) = a$$

avec $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} g(x) = a.$$

Démonstration : A nouveau, il suffit d'utiliser le critère par les suites et le théorème du Sandwich pour les suites. ■

Exemple 5.4.25 Soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. On ne peut pas appliquer directement les règles de calcul car par l'Exemple 5.4.18, on sait que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne possède pas de limite en 0. Par contre, on sait que la fonction sinus est comprise entre 1 et 1, et donc

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

pour tout $x \neq 0$. Le théorème de comparaison implique que

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

On peut adapter facilement d'autres résultats des suites. Par exemple, on a le résultat suivant.

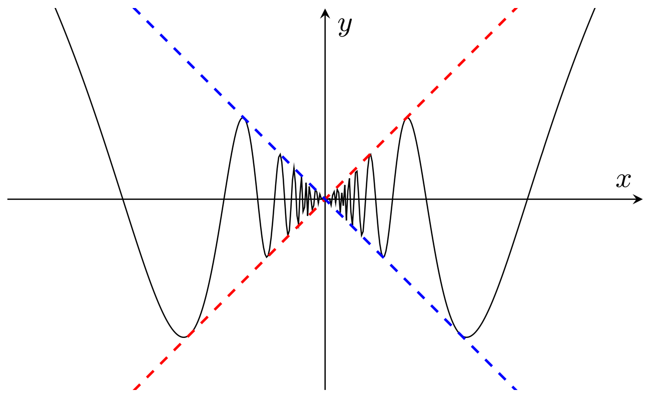


FIGURE 5.13 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et des fonctions $x \mapsto x$ (en rouge) et $x \mapsto -x$ (en bleu).

Proposition 5.4.26 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles et ξ un point adhérent à A. Si $f \leq g$ et si*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\xi} g(x) = b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a \leq b$.

Démonstration : Soit $(x_n)_n$ une suite de A qui converge vers ξ. Alors, on sait par le critère par les suites que $f(x_n) \to a$ et $g(x_n) \to b$. Or on a $f(x_n) \leq g(x_n)$ et donc $a \leq b$ par la Proposition 3.2.5. On conclut en appliquant à nouveau le critère par les suites. ■

Proposition 5.4.27 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $f(A) \subseteq B$ et soit ξ un point adhérent à A. Supposons que*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = a \in \mathbb{C},$$

alors a est adhérent à $f(A)$. De plus, si

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

alors

$$\lim_{x\to\xi} g \circ f(x) = b.$$

Démonstration : On va démontrer le cas où $a \in \mathbb{C}$, l'autre cas se démontrant de la même manière. Soit $(x_n)_n$ une suite de A qui converge vers ξ. En utilisant le critère par les suites, on sait que $(f(x_n))_n$ converge vers a. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f(x_n) \in f(A) \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ et donc a est adhérent à $f(A)$. De plus, une deuxième application du critère par les suites nous donne que $g(f(x_n)) \to b$, ce qui suffit. ■

Dans le cas où la limite de f en ξ est infinie, on ne peut en général rien conclure quant à la somme et au produit de f avec une autre fonction. Cependant, comme dans le cas des suites, on peut traiter certains cas particuliers.

Proposition 5.4.28 (Règles de calcul de limites, cas infini) *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions et ξ un point adhérent à A. Supposons que*

$$\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) = \infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\xi,\, x\in A} g(x) = b.$$

Alors

1. *si $b \in \mathbb{C}$, on a $\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x) + g(x) = \infty$,*
2. *si $b \in \mathbb{C}_0$ ou $b = \infty$, alors $\lim_{x\to\xi,\, x\in A} f(x)g(x) = \infty$,*
3. *si $b = 0$ et si $g \neq 0$, alors*
$$\lim_{x\to\xi} \frac{1}{g(x)} = \infty,$$
4. *si $f \neq 0$, alors*
$$\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Démonstration : Il suffit à nouveau d'appliquer le critère par les suites et la Proposition 3.4.16.

1. Comme $\lim_{x\to\xi,\, x\in A} g(x) = b$, on sait que g est bornée sur un ensemble du type $A \cap]\xi - R, \xi + R[$. Quitte à remplacer A par cet ensemble, on peut supposer que g est bornée sur A et appliquer le critère par les suites et la Proposition 3.4.16.

2. Si $b \in \mathbb{C}_0$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $|b| - \varepsilon > 0$. On peut trouver un $R > 0$ tel que $|g| > |b| - \varepsilon$ sur $A \cap]\xi - R, \xi + R[$. On applique ensuite le critère par les suites et la Proposition 3.4.16.

Si $b = \infty$, alors quitte à diminuer A, on peut supposer que $|g| > C > 0$ et la conclusion provient à nouveau du critère par les suites et de la Proposition 3.4.16.

3 et 4. Il suffit d'appliquer le critère par les suites à la Proposition 3.4.13. ■

Enfin, on a l'équivalent du critère de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles qui tendent vers l'infini.

Proposition 5.4.29 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles et ξ un point adhérent à A.*

1. *Si $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ et si $f \leq g$, alors $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.*
2. *Si $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ et si $f \geq g$, alors $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$.*

Démonstration : Cela provient du critère par les suites et de la Proposition 3.4.17. ■

5.4.5 Limite à l'infini

Lorsque le domaine d'une fonction est non-borné, on peut également s'intéresser au comportement de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par convention, si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas majoré, on pose $\sup A = +\infty$. De même, si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.

Définition 5.4.30 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$.

- ▷ Si $\sup A = +\infty$, on dit que f *tend vers* a *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que
$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } x > r, \text{ on a } \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$
Dans ce cas, on écrit
$$\lim_{x \to +\infty, x \in A} f(x) = a$$
ou
$$f(x) \to a \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$
- ▷ Si $\inf A = -\infty$, on dit que f *tend vers* a *lorsque* x *tend vers* $-\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que
$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } x < -r, \text{ on a } \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$
Dans ce cas, on écrit
$$\lim_{x \to -\infty, x \in A} f(x) = a$$
ou
$$f(x) \to a \quad \text{lorsque } x \to -\infty.$$

Si $\sup A = +\infty$, on dit que $+\infty$ est adhérent à A. De même, si $\inf A = -\infty$, on dit que $-\infty$ est adhérent à A.

Exemple 5.4.31 La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers l'infini car
$$\left| \frac{x}{1+x} - 1 \right| = \left| \frac{1}{1+x} \right| < \varepsilon$$
si $|x| > N$ avec $N = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Enfin, il se peut que les limites en $+\infty$ et $-\infty$ aient du sens mais n'existent pas. Dans ce cas, on peut avoir la divergence vers l'infini (que l'on adapte à nouveau en considérant les cas $+\infty$ et $-\infty$ si f est à valeurs réelles).

Définition 5.4.32 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

- ▷ Si $\sup A = +\infty$, on dit que f *tend vers l'infini lorsque* x *tend vers* $+\infty$ si pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que
$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } x > r, \text{ on a } \quad |f(x)| > R.$$
Dans ce cas, on écrit
$$\lim_{x \to +\infty, x \in A} f(x) = \infty$$
ou
$$f(x) \to \infty \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

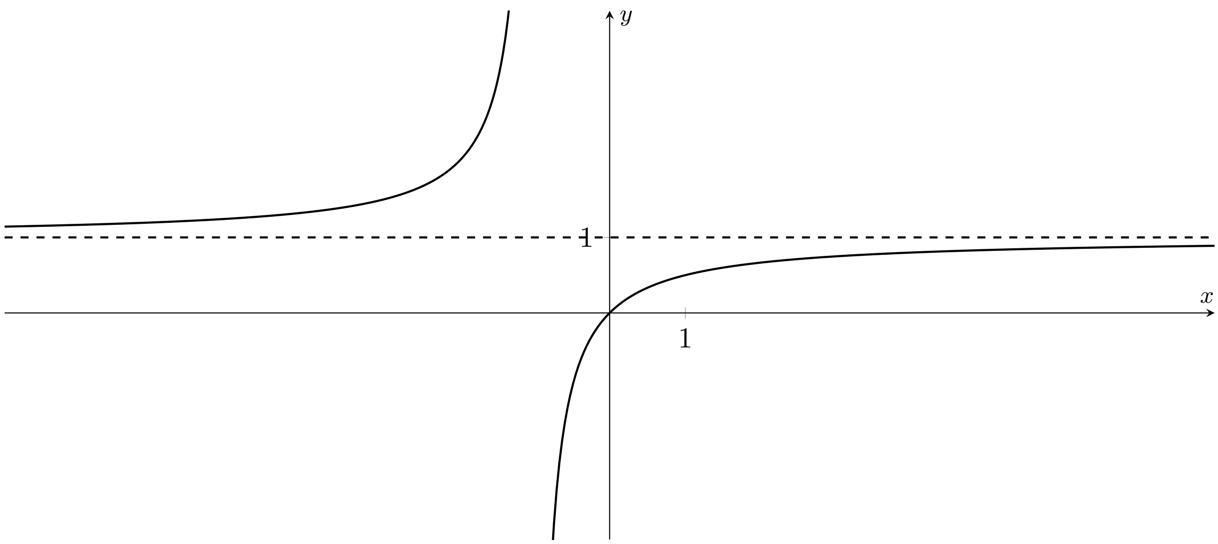


FIGURE 5.14 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+x}$.

▷ Si $\inf A = -\infty$, on dit que f *tend vers l'infini lorsque* x *tend vers* $-\infty$ si pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } x < -r, \text{ on a } \quad |f(x)| > R.$$

Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{x \to -\infty, x \in A} f(x) = \infty$$

ou

$$f(x) \to \infty \quad \text{lorsque } x \to -\infty.$$

Exemple 5.4.33 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ tend vers l'infini lorsque x tend vers $+\infty$ car $x^2 > N$ si $x > \sqrt{N}$.

On démontre facilement un équivalent du critère par les suites qui tendent vers l'infini et on en tire les propriétés des limites à l'infini. Rappelons qu'une suite $(x_n)_n$ tend vers l'infini si et seulement si la suite $(\frac{1}{x_n})_n$ tend vers 0. Les limites à l'infini peuvent donc se ramener à l'étude de limites en 0 en composant avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Etudions le comportement à l'infini de la fonction rationnelle f définie par

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, en tout point x où le dénominateur ne s'annule pas. Comme tout polynôme de degré n admet au plus n racines, on peut envisager la limite en $+\infty$ et en $-\infty$. On a

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \frac{1}{x^m}}$$

et
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}.$$
On en tire que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$
en utilisant les règles de calcul.

5.4.6 Asymptotes, comparaison asymptotique et notations de Landau

Nous concluons ce chapitre en abordant la notion d'asymptote. Pour une fonction donnée, nous examinerons l'existence d'asymptotes horizontales ou obliques, qui reflètent la manière dont la fonction se comporte à l'infini, ainsi que les asymptotes verticales, qui traduisent un comportement arbitrairement grand à proximité d'un point.

Définition 5.4.34 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- ▷ Si $\sup A = +\infty$, on dit que f admet la droite $y = px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$, comme *asymptote en* $+\infty$ si
$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (px + q)\big) = 0.$$
- ▷ Si $\inf A = -\infty$, on dit que f admet la droite $y = px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$, comme *asymptote en* $-\infty$ si
$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (px + q)\big) = 0.$$

Si $p = 0$, on parle d'*asymptote horizontale* et si $p \neq 0$, on parle d'*asymptote oblique*.

Cette définit traduit donc le fait que la distance entre la fonction et la droite tend vers 0 à l'infini. On a caractérisation immédiate suivante.

Proposition 5.4.35 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un ensemble A non-majoré. Alors, f admet la droite d'équation $y = px + q$ comme asymptote en $+\infty$ si et seulement si*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = p \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - px\big) = q.$$

Démonstration : Si la droite d'équation $y = px + q$ est une asymptote de f en $+\infty$, alors on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (px + q)}{x} + \frac{px + q}{x} = 0 + p = p$$
et la deuxième limite est immédiate. La réciproque découle directement de la deuxième limite. ■

Définition 5.4.36 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit ξ un point adhérent à A. On

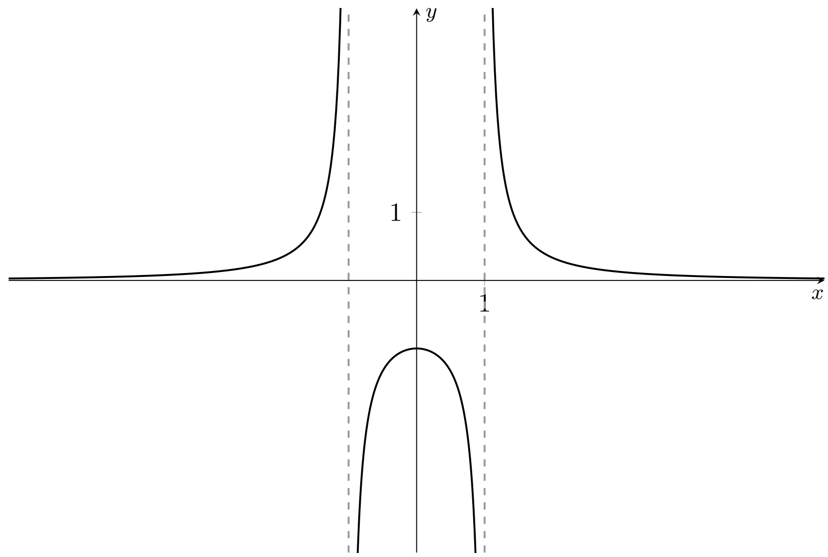


FIGURE 5.15 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ et de ses asymptotes horizontales et verticales.

dit que f admet une *asympotote verticale en* ξ si

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \infty.$$

Remarquons que le comportement infini peut être différent ($+\infty$ ou $-\infty$) pour la limite à gauche et la limite à droite.

Exemple 5.4.37 Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$.

▷ La fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$ puisque

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0.$$

▷ La fonction f admet une asymptote verticale en -1 et en 1 puisque

$$\lim_{x \to \pm 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty.$$

Remarquons que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Exemple 5.4.38 Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-x-3}{x+1}$.

▷ La fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$ puisque

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 3}{x(x+1)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x - 3}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x - 3}{x + 1} = -2.$$

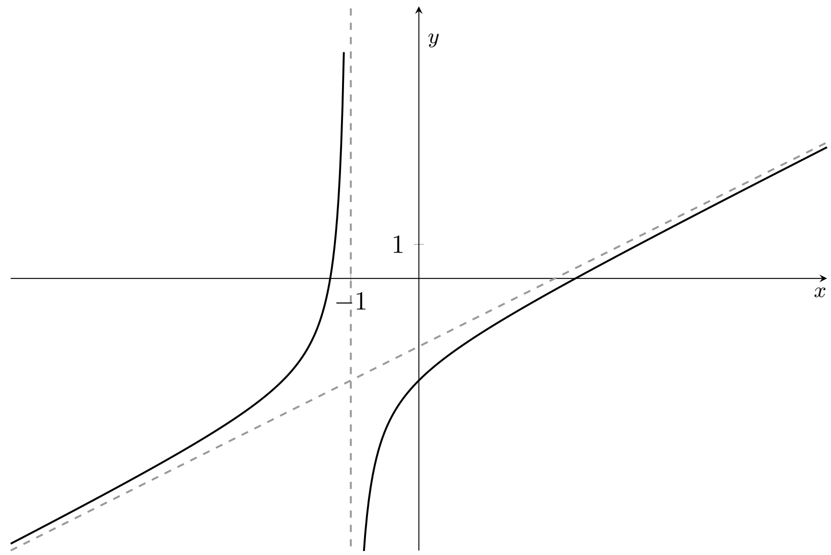


FIGURE 5.16 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-x-3}{x+1}$ et de ses asymptotes obliques et verticale.

▷ La fonction f admet une asymptote verticale en -1 puisque

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 3}{x+1} = \infty.$$

Lorsqu'une fonction possède une asymptote, son comportement au voisinage d'un point ou de l'infini peut être comparé à celui d'une droite. De manière plus générale, on peut comparer le comportement d'une fonction par rapport à celui d'une autre fonction (dont la forme est plus simple par exemple). Les notations de Landau sont introduites comme suit.

Définition 5.4.39 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions et soit ξ un point adhérent à A ($\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$). On dit que f est *négligeable par rapport à g* lorsque x converge vers ξ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \text{pour tout } x \in A\cap]\xi - \delta, \xi + \delta[.$$

Si c'est le cas, on écrit

$$f(x) = o(g(x)) \text{ si } x \to \xi.$$

Le résultat suivant provient directement de la définition des limites.

Proposition 5.4.40 *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions et soit ξ un point adhérent à A ($\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$). S'il existe $R > 0$ tel que g est non nul sur*

▷ $A\cap]\xi - R, \xi + R[$ *si* $\xi \in \mathbb{R}$,

▷ $A\cap]R, +\infty[$ *si* $\xi = +\infty$,

▷ $A\cap] - \infty, R[$ *si* $\xi = -\infty$, *alors*

$$f(x) = o(g(x)) \text{ si } x \to \xi \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 5.4.41 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x^n = o(x^{n+k}) \text{ si } x \to +\infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_0$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^{n+k}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Exemple 5.4.42 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x^{n+k} = o(x^n) \text{ si } x \to 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_0$$

puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+k}}{x^n} = \lim_{x\to 0} x^k = 0.$$

Définition 5.4.43 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions et soit ξ un point adhérent à A ($\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$). On dit que f est *équivalente à* g lorsque x converge vers ξ si

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ si } x \to \xi.$$

Si c'est le cas, on écrit

$$f(x) \sim g(x) \text{ si } x \to \xi.$$

Si g est non-nul au voisinage de ξ, cela signifie que

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemples 5.4.44

- ▷ Si f est admet une asymptote oblique d'équation $y = px + q$ en $+\infty$, alors

$$f(x) \sim px + q \quad \text{si } x \to +\infty.$$

- ▷ On a

$$e^x + x^k \sim e^x \quad \text{si } x \to +\infty$$

quel que soit $k \in \mathbb{N}$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^k}{e^x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 1.$$

- ▷ On pourra montrer qu'on a

$$\sin(x) \sim x \quad \text{si } x \to 0.$$

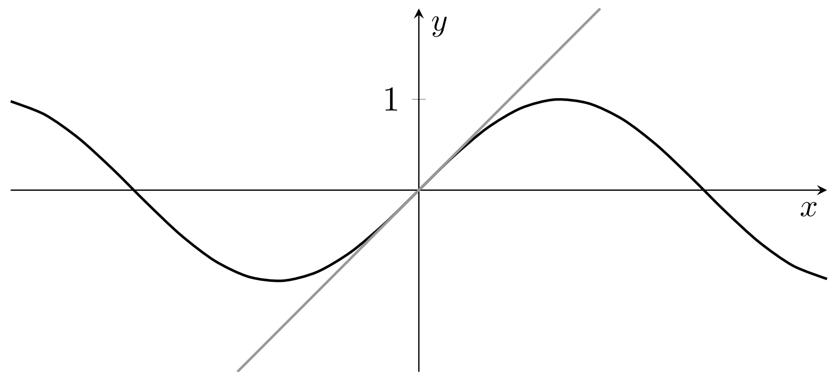


FIGURE 5.17 – La fonction sinus est équivalente à la fonction $x \mapsto x$ lorsque x converge vers 0.

Définition 5.4.45 Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions et soit ξ un point adhérent à A ($\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$). On dit que f est *au plus de l'ordre de* g lorsque x converge vers ξ s'il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad \text{pour tout } x \in A\cap]\xi - \delta, \xi + \delta[.$$

Si c'est le cas, on écrit

$$f(x) = O(g(x)) \text{ si } x \to \xi.$$

Si g est non-nul au voisinage de ξ, cela signifie que que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de ξ.

Remarque 5.4.46 Si $f(x) = o(g(x))$ si $x \to \xi$, on a $f(x) = O(g(x))$ si $x \to \xi$ mais l'implication inverse est fausse.

Les notations de Landau o et O sont très souvent utilisée pour exprimer l'ordre de grandeur des termes négligés (sans les préciser) dans un développement d'une fonction. Elles permettent donc d'exprimer le comportement relatif des de la fonction et de son approximation.

Chapitre 6

Fonctions continues

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la continuité des fonctions. Intuitivement, une fonction est continue lorsque son graphe ne présente aucun "saut". Cependant, afin d'établir une base solide pour cette notion, nous allons commencer par fournir une définition formelle de la continuité. Cette définition rigoureuse nous permettra d'obtenir des résultats fondamentaux concernant les fonctions continues.

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.1.1 Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction et soit $\xi \in A$. On dit que f est *continue en* ξ si la limite $\lim_{x\to\xi} f(x)$ existe et est finie. Par conséquent, on a

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi).$$

Dans ce cas, on dit que ξ est un *point de continuité* de f. Autrement dit, f est continue en ξ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } |x-\xi| < \delta \quad \text{on a } |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Si f n'est pas continu en ξ, on dit que f est *discontinu* en ξ et que ξ est un *point de discontinuité* de f.

Remarquons que la définition exige trois choses :

- ▷ la limite $\lim_{x\to\xi} f(x)$ existe,
- ▷ f est définie au point ξ,
- ▷ la limite de f en ξ est la valeur de f en ξ.

Exemples 6.1.2

- ▷ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x$. Autrement dit, si $x \in [n, n+1[$ pour un $n \in \mathbb{Z}$, alors on a $f(x) = x - n$. Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n tel que $\xi \in]n, n+1[$. On a

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} x - n = \xi - n = f(\xi)$$

et donc f est continue en ξ. Si $\xi \in \mathbb{Z}$, alors les limites à gauche et à droite de f en ξ diffèrent puisque

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = \lim_{x\to\xi^-} x - (\xi - 1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\xi^+} f(x) = \lim_{x\to\xi^+} x - \xi = 0.$$

Ainsi, la limite de f en ξ n'existe pas. On en tire que f n'est pas continue en ξ.

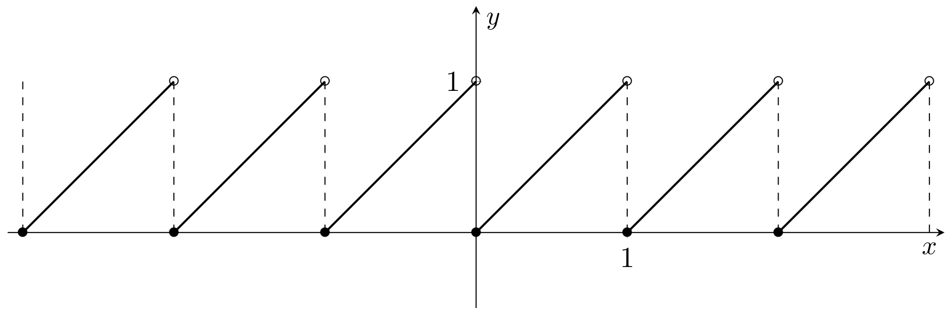


FIGURE 6.1 – Représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

- ▷ La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout $\xi \geq 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Si $\xi \neq 0$, on a
$$|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x-\xi|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}} \leq \frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}}$$
et donc $|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| < \varepsilon$ si $x \geq 0$ est tel que $|x - \xi| < \varepsilon\sqrt{\xi}$. Donc $\delta = \varepsilon\sqrt{\xi}$ convient. Si $\xi = 0$, alors
$$|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \sqrt{x} < \varepsilon$$
si $x \geq 0$ est tel que $|x - 0| = x < \varepsilon^2$. Donc $\delta = \varepsilon^2$ convient.
- ▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[: x \mapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a
$$\big||x| - |\xi|\big| \leq |x - \xi|$$
par l'inégalité triangulaire inversée et donc $\delta = \varepsilon$ convient.

Le critère par les suites donne directement la caractérisation suivante de la continuité en un point.

Proposition 6.1.3 *Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction et soit $\xi \in A$. Alors, f est continue en ξ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers ξ, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(\xi)$.*

Donnons à présent les règles de construction de nouvelles fonctions continues à partir d'anciennes. Elles suivent les règles de calcul pour les limites.

Proposition 6.1.4 *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : A \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues en $\xi \in A$ et $c \in \mathbb{C}$. Alors*
$$cf, \quad f+g \quad \text{et} \quad fg$$
sont continues en ξ. De plus, si $g(\xi) \neq 0$, alors la fonction
$$\frac{f}{g} : \{x \in A : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{C}$$
est continue en ξ.

Démonstration : On considère une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers ξ et on applique les règles de calcul des suites pour montrer que $cf(x_n) \to cf(\xi)$, $f(x_n) + g(x_n) \to f(\xi) + g(\xi)$, $f(x_n)g(x_n) \to f(\xi)g(\xi)$ et $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$ lorsque n tend vers l'infini. ■

Exemple 6.1.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ est continue en tout point puisque la fonction identité l'est (produit de fonctions continues). Par conséquent, les polynômes sont des fonctions continues en tout point et les fractions rationnelles sont continues en tout point où elles sont définies.

Proposition 6.1.6 *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ et $g : B \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $f(A) \subseteq B$ et soit $\xi \in A$. Si f est continue en ξ et g est continue en $f(\xi)$, alors $g \circ f$ est continue en ξ.*

Démonstration : C'est une application immédiate de la Proposition 5.4.27. ■

Proposition 6.1.7 *Soient $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction, $A' \subseteq A$ et $\xi \in A'$. Si f est continue en ξ, alors $f|_{A'} : A' \to \mathbb{C}$ est continue en ξ.*

Démonstration : C'est une conséquence directe de la Proposition 5.4.22. ■

Enfin, on peut s'intéresser à la continuité à gauche ou à droite d'une fonction en s'intéressant aux limites à gauche ou à droite.

Définition 6.1.8 Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction et soit $\xi \in A$ tel que $A \cap]-\infty, \xi[\neq \emptyset$ et $A \cap]\xi, +\infty[\neq \emptyset$. On dit que f est *continue à gauche en* ξ si

$$\lim_{x \to \xi^-, x \in A} f(x) = f(\xi)$$

et que f est *continue à droite en* ξ si

$$\lim_{x \to \xi^+, x \in A} f(x) = f(\xi).$$

Exemple 6.1.9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Si $\xi \in \mathbb{Z}$, on sait que f n'est pas continue en ξ car les limites à gauche et à droite de f en ξ diffèrent. Cependant, f est continue à droite en ξ puisque puisque

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = \lim_{x \to \xi^+} x - \xi = 0 = f(\xi).$$

6.2 Résultats essentiels

Dans cette section, nous présentons les propriétés importantes des fonctions continues en tout point d'un intervalle fermé $[a, b]$.

Définition 6.2.1 Une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est *continue sur* A si elle est continue en tout point de A. L'ensemble des fonctions continues sur A est noté $C^0(A)$.

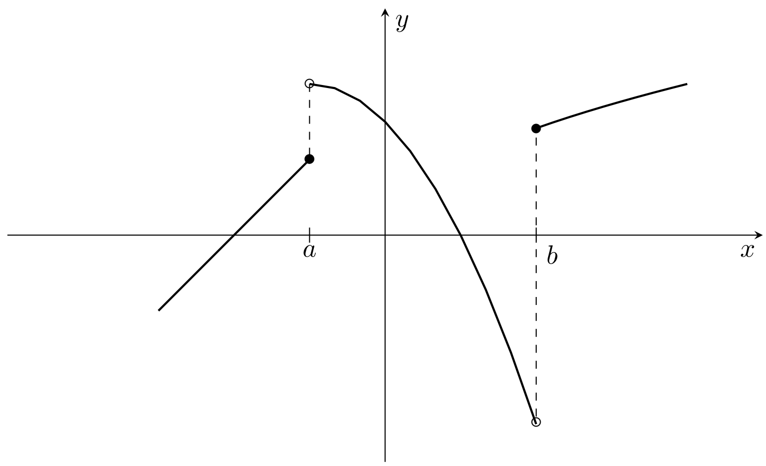


FIGURE 6.2 – Représentation graphique d'une fonction f continue à gauche en a et continue à droite en b.

Théorème 6.2.2 (des bornes atteintes) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et il existe $c, d \in [a,b]$ tels que*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(d).$$

Autrement dit, on a

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Démonstration : Procédons par l'absurde pour montrer que f est bornée. Supposons tout d'abord que f n'est pas majorée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $[a,b]$, elle est bornée et par le Théorème de Bolzano – Weierstrass, on en tire qu'elle possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers un point $x \in \mathbb{R}$. Comme $a \leq x_{n_k} \leq b$, on sait que $a \leq x \leq b$. Donc f est continue en x et on en tire que $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Or, par construction de la suite $(x_n)_n$, la suite $(f(x_{n_k}))_k$ tend vers l'infini, d'où une contradiction.

Montrons à présent que f atteint sa borne supérieure. Posons

$$A = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

On sait vu ce qui précède que $A < +\infty$. Procédons à nouveau par l'absurde et supposons que $f(x) < A$ pour tout $x \in [a,b]$. On définit alors la fonction

$$g : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{A - f(x)}.$$

Par les règles de calcul, on sait que g est continue. Donc par la première partie de la preuve, on sait que g est bornée et il existe donc $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{A - f(x)} \leq C \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

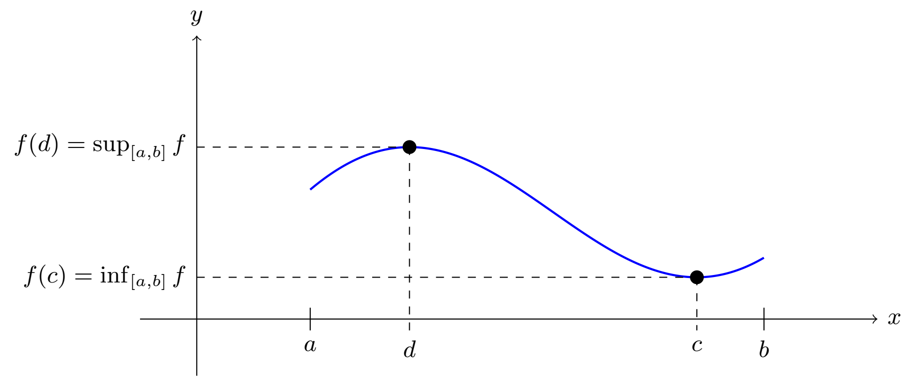


FIGURE 6.3 – Illustration du Théorème des bornes atteintes : la fonction f est bornée sur $[a, b]$ et toutes les valeurs prises par f sur cet intervalle sont comprises entre $f(c)$ et $f(d)$.

On en tire que

$$f(x) \leq A - \frac{1}{C} \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

puisque $A - f(x) \geq 0$ et $C > 0$. Cela contredit le fait que A est la borne supérieure de f sur $[a, b]$.

On procède de la même manière pour montrer que la fonction f est minorée et que sa borne inférieure est atteinte. ■

Remarque 6.2.3 Le fait qu'on travaille avec un intervalle borné fermé $[a, b]$ est essentiel dans le résultat précédent. En effet, la fonction $f :]0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0, 1]$ mais elle n'est pas bornée.

Nous présentons à présent un résultat qui géométriquement est assez clair : si une fonction continue "démarre" sous une droite horizontale et "termine" au-dessus, elle doit croiser la droite quelque part. Nous donnerons ensuite quelques applications importantes de ce résultat.

Théorème 6.2.4 (des valeurs intermédiaires, TVI) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y_0 compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y_0$.*

Démonstration : Supposons que $f(a) < y_0 < f(b)$, le cas $f(b) < f(a)$ se traite de la même manière. Posons

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}.$$

Alors, A n'est pas vide car $a \in A$ et est majoré par b. Par conséquent, A admet une borne supérieure. Notons $x_0 = \sup A$. On a $x_0 \in [a, b]$. Montrons que $f(x_0) = y_0$. Pour cela, on procède par l'absurde en supposant que $f(x_0) \neq y_0$.

Regardons tout d'abord le cas où $f(x_0) < y_0$. Soit $\varepsilon = y_0 - f(x_0) > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $x \in [a, b]$ est tel que $|x - x_0| < \delta$. Ainsi, pour un tel x, on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = y_0.$$

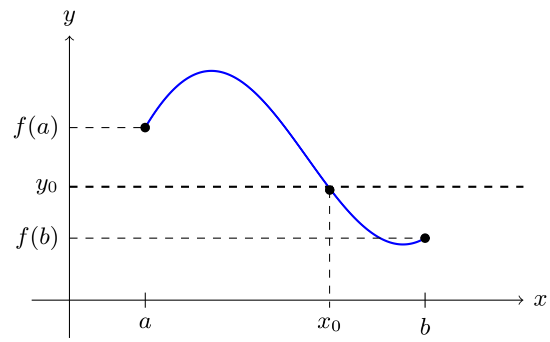


FIGURE 6.4 – Illustration du TVI : Pour y_0 fixé entre $f(a)$ et $f(b)$, on peut trouver x_0 entre a et b pour lequel $f(x_0) = y_0$.

On a $x_0 \neq b$ puisque $f(x_0) < y_0 < f(b)$. Soit donc $x \in [a, b]$ tel que $x \in]x_0, x_0 + \delta]$. Alors, le point x appartient à $[a, b]$ et est tel que $x > x_0$ et $f(x) < y_0$. Cela contredit le fait que x_0 majore A.

Traitons à présent le cas où $f(x_0) > y_0$. On considère $\varepsilon = f(x_0) - y_0 > 0$ et la continuité de f en x_0 nous donne l'existence d'un $\delta' > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $x \in [a, b]$ est tel que $|x - x_0| < \delta'$. Pour un tel x, on a

$$y_0 = f(x_0) - \varepsilon < f(x).$$

Remarquons que $x_0 \neq a$ puisque $f(x_0) > y_0 > f(a)$. Quitte à diminuer δ', on peut supposer que $x_0 - \delta' > a$. Ainsi, pour tout $x \in [x_0 - \delta', x_0]$, on a $f(x) > y_0$. Comme x_0 majore A, on sait que pour tout $x \in]x_0, b]$, on a $f(x) > y_0$. Au total, on a donc que $f(x) > y_0$ pour tout $x \in [x_0 - \delta', b]$. Cela implique que $\sup A \leq x_0 - \delta'$, ce qui contredit le fait que x_0 est le plus petit majorant de A. ∎

Exemple 6.2.5 Un cycliste a parcouru 20 km en une heure. Alors, il existe un temps entre 0 et 1h où il aura parcouru 10 km. En effet, on suppose naturellement que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, où $f(t)$ est la distance parcourue à l'instant t, est continue. Alors, $f(0) = 0$ et $f(1) = 20$ et donc il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $f(\xi) = 10$.

On peut également montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel il parcourt exactement 10 km. Pour cela, on considère la fonction $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t).$$

Ainsi, $g(t)$ donne la distance parcourue entre le temps t et le temps $t + \frac{1}{2}$. On a $g(0) = f(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = 20 - f(\frac{1}{2})$. En particulier, on a

$$g(0) + g(\frac{1}{2}) = 20 \quad \text{avec} \quad g(0) \leq g(\frac{1}{2}).$$

On a donc que $10 \leq g(\frac{1}{2})$ et $10 \geq g(0)$. De plus, g est continue comme composition et somme de fonctions continues et donc il existe $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(\xi) = 10$.

Remarque 6.2.6 Le point x dont il est question dans l'énoncé n'est pas nécessairement unique. Par exemple, si on considère la fonction

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x,$$

alors $f(-2) = -6$ et $f(2) = 6$ et donc il existe $x \in]-2, 2[$ tel que $f(x) = 0$. En fait, il existe trois valeurs de x qui conviennent puisque $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

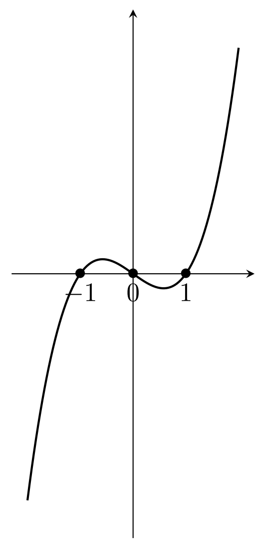


FIGURE 6.5 – Représentation graphique de la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$.

Remarque 6.2.7 Le théorème des valeurs intermédiaires permet de redémontrer l'existence de la racine carrée de 2. Considérons la fonction

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2.$$

Alors f est continue et $f(0) = 0$, $f(2) = 4$. Ainsi, il existe $x \in]0, 2[$ tel que $f(x) = 2$ c'est-à-dire tel que $x^2 = 2$. Cet argument ne montre cependant pas qu'il n'existe pas d'autre réel positif dont le carré vaut 2.

On en déduit directement le résultat suivant sur les racines des fonctions continues.

Corollaire 6.2.8 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(\xi) = 0$.*

Ce résultat s'applique en particulier aux polynômes à coefficients réels de degré impair. En effet, on sait que les polynômes de degré pair peuvent ne pas avoir de racine réelle ; ceci est faux pour les polynômes à coefficients réels de degré impaire qui possèdent au moins toujours une racine réelle.

Corollaire 6.2.9 *Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins un zéro réel.*

Démonstration : Supposons que P s'écrit sous la forme

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec n impair, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$. Etudions le cas $a_n > 0$. On a alors

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty.$$

Pour le voir, il suffit d'écrire

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

et de constater que le terme entre parenthèses converge vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par conséquent, il existe $a < b$ tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$. La conclusion s'obtient par le Corollaire 6.2.8. On procède de la même manière si $a_n < 0$. ■

Corollaire 6.2.10 (Point fixe) *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.*

Démonstration : Considérons la fonction g définie pour tout $x \in [a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors, on a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Si au moins une des deux inégalités est une égalité, alors a ou b est un point fixe. Sinon, les inégalités sont strictes et le Corollaire 6.2.8 implique qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g(\xi) = 0$, c'est-à-dire $f(\xi) = \xi$. ■

Un point x tel que $f(x) = x$ est appelé un *point fixe* de f. Géométriquement, c'est un point où le graphe de f rencontre la diagonale d'équation $y = x$.

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si f est une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$, alors son image contient toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. En fait, on peut dire bien plus en combinant les résultats obtenus.

Théorème 6.2.11 (de l'intervalle) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b])$ est un intervalle.*

Démonstration : Par le théorème des bornes atteintes, on sait qu'il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Par conséquent, on a

$$f([a, b]) \subseteq [f(c), f(d)].$$

Montrons qu'on a en fait l'égalité. Soit $y \in [f(c), f(d)]$ et montrons qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. Si $y = f(c)$ ou $y = f(d)$, le résultat est évident. On peut donc supposer que $y \in]f(c), f(d)[$. Alors, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de x entre c et d tel que $f(x) = y$, ce qui suffit. ■

Terminons cette section par une étude des fonctions monotones continues. On sait que toute fonction strictement monotone est injective : en effet, dans le cas strictement croissant, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ et donc $f(x) \neq f(y)$. On procède de même dans le cas strictement décroissant. Le résultat ci-dessous donne une réciproque lorsque la fonction est continue sur un intervalle fermé borné.

Corollaire 6.2.12 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et injective, alors f est strictement monotone.*

Démonstration : Comme f est injectif, on a $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$ et montrons que f est strictement croissante. Le cas $f(a) > f(b)$ se traite de manière similaire. Soient $x < y$ deux points de $[a, b]$. On doit montrer que $f(x) < f(y)$. Pour commencer, montrons que $f(x) < f(b)$. Si ce n'est pas le cas, alors $f(x) > f(b)$ puisque f est injectif. Fixons $c \in]f(b), f(x)[$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un $\xi_1 \in]x, b[$ tel que $f(\xi_1) = c$. Mais comme $f(a) < f(b)$, on a aussi $f(x) > f(a)$ et le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un $\xi_2 \in]a, x[$ tel que $f(\xi_2) = c$. Alors $\xi_1 \neq \xi_2$ sont tels que $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, ce qui est impossible puisque f est injectif. Par conséquent, $f(x) < f(b)$. Montrons que $f(x) < f(y)$. On procède de la même manière en supposant que $f(x) > f(y)$ et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]x, y[$ et sur l'intervalle $]y, b[$, et en arrivant à une contradiction avec l'injectivité de f. ■

Corollaire 6.2.13 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors la fonction $f^{-1} : f([a, b]) \to \mathbb{R}$ est continue. En particulier, si f est continue et bijective, alors f^{-1} est continue.*

Démonstration : On sait que f^{-1} est bien définie sur $f([a, b])$. Supposons que f est strictement croissante, l'autre cas se démontre de la même manière. Par le théorème de l'intervalle, nous savons qu'il existe $c < d$ tels que $f([a, b]) = [c, d]$. Fixons $y \in]c, d[$ et montrons que f^{-1} est continue en y. Comme y appartient à l'image de f, on sait qu'il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq]a, b[$[1]. Alors, le théorème de l'intervalle implique que $f([x - \varepsilon, x + \varepsilon])$ est un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$. Comme f est strictement croissante, on a $\alpha < y < \beta$. Alors, si $\delta = \min\{y - \alpha, \beta - y\} > 0$, on a que $[y - \delta, y + \delta] \subseteq [\alpha, \beta] = f([x - \varepsilon, x + \varepsilon])$. Donc, si $|t - y| < \delta$, alors $t = f(u)$ avec $u \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Donc

$$|f^{-1}(t) - f^{-1}(y)| = |u - x| < \varepsilon,$$

ce qui suffit.

La continuité aux extrémités se démontre de manière semblable. ■

Exemple 6.2.14 La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est une bijection continue strictement monotone. Par conséquent, la fonction $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$ est continue.

6.3 Continuité uniforme

La continuité d'une fonction en un point est une propriété *locale* : elle n'est liée qu'au comportement de la fonction près du point. La continuité uniforme que nous étudions ici est une propriété *globale*.

Définition 6.3.1 Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *uniformément continue*

1. Il suffit de démontrer l'existence d'un δ pour un tel ε car ce δ conviendra également pour tout ε plus grand.

sur A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tous } x, y \in A \text{ tels que } |x - y| < \delta \quad \text{on a } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Notons la différence avec la continuité : lorsque l'on parle de continuité, on fixe un point $\xi \in A$ et un $\varepsilon > 0$, et on cherche ensuite un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ si $|x - \xi| < \delta$. Le réel δ dépend donc de ε mais aussi de ξ. Pour la continuité uniforme, on ne fixe pas un point ξ ; pour tout $\varepsilon > 0$, le $\delta > 0$ cherché doit convenir pour tous les points x, y tels que $|x - y| < \delta$ et ne dépend donc pas du point considéré.

Bien sûr, toute fonction uniformément continue sur A est continue sur A. L'inverse est faux.

Exemple 6.3.2 La fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $]0,1[$ mais n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tous $x, y \in]0,1[$, on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon \quad \text{si et seulement si} \quad \varepsilon > \frac{|y - x|}{xy},$$

ce qui se réécrit

$$|x - y| < xy\varepsilon.$$

Supposons que $\varepsilon < 1$ et qu'il existe $\delta > 0$ pour lequel la définition de la continuité uniforme est satisfaite. Quitte à diminuer δ, on peut supposer que $\delta < \frac{1}{2}$. Fixons alors $x = \frac{\delta}{2} \in]0,1[$ et $y = x + \frac{\delta}{2} = \delta \in]0,1[$. L'inégalité précédente se réecrit

$$\frac{\delta}{2} < x(x + \frac{\delta}{2})\varepsilon$$

et comme ε et $x + \frac{\delta}{2}$ sont inférieurs à 1, cela implique que $\frac{\delta}{2} < x = \frac{\delta}{2}$. C'est impossible.

Notons également que la notion de continuité uniforme dépend du domaine sur lequel on regarde la fonction. En effet, une fonction peut ne pas être uniformément continue sur un domaine, mais l'être sur un domaine plus petit.

Exemple 6.3.3

- ▷ Montrons que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est uniformément continue. Si $x, y \in [0,1]$, on a
$$|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \le \big(|x| + |y|\big)|x - y| \le 2\,|x - y|.$$
Par conséquent, si $\varepsilon > 0$ est donné, alors pour $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, on a $|x^2 - y^2| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in [0,1]$ tels que $|x - y| < \delta$.
- ▷ Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. Procédons par l'absurde et supposons qu'elle le soit. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $|x^2 - y^2| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta$. Fixons $x > \frac{\varepsilon}{\delta}$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$. Alors, on a $|x - y| < \delta$ et donc $|x^2 - y^2| < \varepsilon$. Par conséquent, on obtient
$$\varepsilon > |x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > \delta x > \varepsilon$$
puisque $2x + \frac{\delta}{2} > 2x$ et vu le choix de x, d'où une contradiction.

Nous venons de voir que la continuité et la continuité uniforme étaient des notions différentes. Il y a cependant un cas dans lequel les deux notions coïncident : lorsque le domaine sur lequel on travaille est un intervalle fermé et borné.

Proposition 6.3.4 (Heine) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors elle est uniformément continue.*

Démonstration : Procédons par l'absurde et supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. En particulier, $x_n - y_n \to 0$. De plus, la suite $(x_n)_n$ ainsi construite est bornée et le Théorème de Bolzano – Weierstrass implique qu'elle possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge. Notons c sa limite. Puisque

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k},$$

la suite $(y_{n_k})_k$ est la somme d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite qui converge vers c. On en tire que $y_{n_k} \to c$. La continuité de f implique alors que

$$f(x_{n_k}) \to f(c) \quad \text{et} \quad f(y_{n_k}) \to f(c).$$

On en tire que

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0,$$

ce qui est impossible puisque $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ pour tout k. ■

Chapitre 7

Fonctions dérivables

Dans ce chapitre, nous abordons la notion de dérivabilité et commençons à explorer ses propriétés fondamentales. Dans les chapitres précédents, nous avons utilisé la notion de limite pour étudier la manière dont les valeurs d'une fonction f convergent vers une valeur particulière a lorsque sa variable se rapproche d'un point donné ξ. La continuité garantit que la limite en ξ de la fonction f est égale à $f(\xi)$, établissant ainsi une connexion solide entre la fonction et sa limite en ce point. La notion de dérivabilité, quant à elle, s'intéresse au taux de variation de la fonction lorsque la variable indépendante se rapproche de ξ. Intuitivement, une fonction est dérivable en un point ξ lorsque, localement autour de ξ, elle peut être approximée par une fonction affine. Cette idée sera précisée de manière plus formelle et généralisée grâce au développement de Taylor d'une fonction en un point.

7.1 Définition

Définition 7.1.1 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I qui contient ξ. On dit que f est *dérivable en* ξ si la limite

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, la limite est appelée la *dérivée de* f *en* ξ et est notée $Df(\xi)$ ou $f'(\xi)$.

Remarquons que nous pouvons poser $x = \xi + h$ dans la limite avec $x \to \xi$. Ainsi, on a

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \lim_{x\to \xi, x\neq \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Intéressons-nous à l'interprétation géométrique de la définition de la dérivée. Pour cela, on suppose que f est une fonction réelle. Pour tout $x \neq \xi$, le *quotient différentiel*

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

représente la pente de la droite joignant les points $(x, f(x))$ et $(\xi, f(\xi))$ du graphe de f. Lorsque x tend vers ξ, la droite va tendre vers la tangente à la courbe en $(\xi, f(\xi))$ et le quotient différentiel va tendre vers la pente de cette tangente.

Notons également que par définition de la limite, f est dérivable en ξ si et seulement si il existe un nombre noté $f'(\xi)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi)\right| < \varepsilon \quad \text{si } |x-\xi| < \delta,$$

ce qui se réecrit

$$\big|f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi)\big| < \varepsilon|x-\xi| \quad \text{si } |x-\xi| < \delta.$$

Cela signifie donc qu'au voisinage de ξ, il existe une approximation de f par une fonction affine $x \mapsto f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$ dont la pente est $f'(\xi)$.

Exemples 7.1.2

- ▷ La dérivée d'une fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ existe et est nulle en tout point de $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

- ▷ La dérivée de la fonction identité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ existe et vaut 1 en tout point de $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{h}{h} = 1.$$

- ▷ La dérivée de la fonction carré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ existe en tout point de $\mathbb{R}$ et est donnée par

$$f'(x) = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} h+2x = 2x.$$

Exemple 7.1.3 La hauteur d'un corps en chute libre est donnée en fonction du temps t écoulé par

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_0$$

où g est l'accélération de la pesanteur et z_0 la hauteur initiale. La vitesse moyenne du corps entre les instants t_1 et t_2 est donnée par

$$\frac{z(t_2)-z(t_1)}{t_2-t_1} = -g\frac{t_1+t_2}{2}.$$

Pour obtenir la vitesse instantanée en t_1, on calcule

$$z'(t_1) = \lim_{t_2\to t_1} \frac{z(t_2)-z(t_1)}{t_2-t_1} = -gt_1.$$

Remarque 7.1.4 On rencontre couramment une autre notation, due à Leibniz, pour la dérivée de f en ξ :

$$\frac{df}{dx}(\xi).$$

Cette notation reflète le fait que le calcul de la dérivée de f en x consiste à observer une petite variation $\delta x = x + h$ de x et d'observer la variation de $\delta f = f(x+h) - f(x)$. La dérivée est alors donnée par la limite du quotient $\frac{\delta f}{\delta x}$ lorsque $\delta x \to 0$. Cette notation a des avantages et des désavantages par rapport à la notation $f'(x)$ de Newton. D'une part, la notation de Leibniz nous rappelle la définition de la dérivée et permet de retenir plus facilement certains résultats. Le gros inconvénient est qu'il est tentant de travailler avec $\frac{df}{dx}$ comme si c'était une fraction, et ainsi de traiter le numérateur et le dénominateur séparément [1]. Dans ce cours, il n'est donc pas permis de séparer le numérateur du dénominateur, et il faut considérer $\frac{df}{dx}$ comme une notation à ne pas manipuler.

Définition 7.1.5 Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle ouvert I est *dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction f' (ou Df) définie par

$$f' : I \to \mathbb{C} : x \mapsto f'(x)$$

est appelée la *dérivée de* f.

Comme nous avons introduit les notions de limites à gauche et à droite, nous pouvons également considérer les dérivées à gauche et à droite en considérant les limites

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Cela permet par exemple de considérer des fonctions définies sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et donc de définir les dérivées à droite en a et à gauche en b. Cela permet aussi de regarder les tangentes à gauche et à droite lorsque la tangente au graphe en ξ n'existe pas.

Exemples 7.1.6

- ▷ La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. En effet, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{x + h - x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Si $x = 0$, on pourrait regarder si la fonction est dérivable à droite. Ce n'est pas le cas car

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

- ▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ admet des dérivées à gauche et à droite en 0 puisque

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = 1.$$

Elle n'admet cependant pas de dérivée en 0 (puisque les deux limites ci-dessus diffèrent).

7.2 Propriétés

1. Cela peut se justifier avec la théorie des formes différentielles que nous n'aborderons pas ici.

Théorème 7.2.1 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en un point ξ de l'intervalle ouvert I, alors f est continue en ξ.*

Démonstration : On remarque qu'on peut écrire

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f(x) - f(\xi)}{(x - \xi)}(x - \xi)$$

pour tout $x \in I$ tel que $x \neq \xi$. Par conséquent, en utilisant les règles de calcul des limites (puisque chacune des limites existe), on obtient

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} f(\xi) + \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{(x - \xi)} \lim_{x \to \xi}(x - \xi) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot 0 = f(\xi),$$

ce qui montre que f est continue en ξ. ■

Attention, la réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple suivant [2].

Exemple 7.2.2 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Nous allons à présent donner des techniques de construction de fonctions dérivables à partir d'autres fonctions dérivables. Nous nous intéressons comme d'habitude aux sommes, aux produits, aux quotients et à la composition de fonctions. Commençons par les opérations algébriques.

Proposition 7.2.3 *Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant ξ et soit $c \in \mathbb{C}$. Si f et g sont dérivables en ξ, alors*

1. *la fonction cf est dérivable en ξ et*
$$(cf)'(\xi) = c \cdot f'(\xi),$$
2. *la fonction $f + g$ est dérivable en ξ et*
$$(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi),$$
3. *la fonction fg est dérivable en ξ et*
$$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi),$$
4. *Si $g(\xi) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert $I' \subseteq I$ contenant ξ sur lequel g ne s'annule pas et la fonction $\frac{f}{g}$ définie sur I' est dérivable en ξ avec*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

2. Signalons qu'on peut même construire des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point !

En particulier,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) = \frac{-g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Démonstration : 1. Cela découle immédiatement des propriétés des limites puisque

$$\frac{cf(\xi+h)-cf(\xi)}{h} = c\,\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}.$$

2. Cela découle à nouveau des propriétés des limites en remarquant que

$$\frac{(f(\xi+h)+g(\xi+h))-(f(\xi)+g(\xi))}{h} = \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} + \frac{g(\xi+h)-g(\xi)}{h}.$$

3. Pour tout $h \neq 0$ tel que $\xi + h \in I$, on écrit

$$\begin{aligned}\frac{f(\xi+h)g(\xi+h)-f(\xi)g(\xi)}{h} &= \frac{f(\xi+h)g(\xi+h)-f(\xi)g(\xi+h)+f(\xi)g(\xi+h)-f(\xi)g(\xi)}{h}\\ &= \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}g(\xi+h)+f(\xi)\frac{g(\xi+h)-g(\xi)}{h}.\end{aligned}$$

Puisque f et g sont dérivables en ξ, les deux quotients convergent respectivement vers $f'(\xi)$ et $g'(\xi)$. De plus, comme g est dérivable en ξ, on sait que g est continue en ξ et donc $g(\xi+h) \to g(\xi)$ si $h \to 0$. Ainsi, les règles de calcul des limites nous donnent

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(\xi+h)g(\xi+h)-f(\xi)g(\xi)}{h} = f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi).$$

4. Il suffit de considérer le cas particulier où $f = 1$. Le cas général se déduira alors du point 3 puisque $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$. Tout d'abord, remarquons que $\frac{1}{g}$ est bien définie sur un intervalle ouvert I' qui contient ξ. Cela provient du fait que $g(\xi) \neq 0$ et du fait que g est continue en ξ puisque g est dérivable en ξ. Ensuite, on écrit le quotient différentiel sous la forme

$$\frac{\frac{1}{g(\xi+h)}-\frac{1}{g(\xi)}}{h} = \frac{g(\xi)-g(\xi+h)}{h}\,\frac{1}{g(\xi+h)g(\xi)}.$$

Comme g est dérivable et donc continu en ξ, on trouve que

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{\frac{1}{g(\xi+h)}-\frac{1}{g(\xi)}}{h} = -g'(\xi)\frac{1}{(g(\xi))^2}.$$

■

Ce résultat nous permet de démontrer les exemples fondamentaux suivants.

Exemples 7.2.4

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et sa dérivée en x vaut nx^{n-1}. Montrons-le par récurrence. On a déjà démontré les cas de base $n = 1$ et $n = 2$. Supposons à présent le résultat vérifié pour n et montrons-le pour $n + 1$. On a

$$(x^{n+1})' = (x\,x^n)' = x^n \cdot 1 + x\,nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

▷ Il s'ensuit que tout polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Passons à présent à la dérivation de fonctions composées.

Théorème 7.2.5 (Règle de la chaîne, Chain Rule) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ deux fonctions définies sur des intervalles ouverts I et J respectivement telles que $f(I) \subseteq J$ et soit $\xi \in I$. Si f est dérivable en ξ et si g est dérivable en $f(\xi)$, alors $g \circ f$ est dérivable en ξ et*

$$(g \circ f)'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big)f'(\xi).$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in I$, on peut écrire

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)F(x)$$

où F est la fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} & \text{si } x \neq \xi \\ f'(\xi) & \text{si } x = \xi. \end{cases}$$

Remarquons que F erst continue en ξ puisque

$$\lim_{x \to \xi, x \neq \xi} F(x) = \lim_{x \to \xi, x \neq \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

par définition de la dérivée. De même, pour tout $y \in I'$, on peut écrire

$$g(y) = g(f(\xi)) + (y - f(\xi))G(y)$$

où G est la fonction définie par

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(\xi))}{y - f(\xi)} & \text{si } y \neq f(\xi) \\ g'(f(\xi)) & \text{si } y = f(\xi). \end{cases}$$

A nouveau, la fonction G est bien continue en $f(\xi)$ puisque g est dérivable en $f(\xi)$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(f(\xi)\big) + \big(f(x) - f(\xi)\big)G\big(f(x)\big) = g\big(f(\xi)\big) + (x - \xi)F(x)G\big(f(x)\big).$$

Par conséquent, on peut écrire le quotient différentiel sous la forme

$$\frac{g \circ f(\xi + h) - g \circ f(\xi)}{h} = F(\xi + h)G\big(f(\xi + h)\big).$$

Puisque f est dérivable en ξ, f est continue en ξ et donc $f(\xi + h) \to f(\xi)$ si $h \to 0$. De plus, la fonction G est continue en $f(\xi)$ (puisque g est dérivable en $f(\xi)$) et donc $G\big(f(\xi+h)\big) \to G\big(f(\xi)\big)$ si $h \to 0$. Il s'ensuit que

$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{g \circ f(\xi + h) - g \circ f(\xi)}{h} = F(\xi)G\big(f(\xi)\big) = f'(\xi)g'(f(\xi)).$$

■

Théorème 7.2.6 *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $y \in J$. Si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration : Comme f^{-1} est la réciproque de f, on peut écrire le quotient différentiel sous la forme

$$\frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(y)}{t - y} = \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(y)}{f(f^{-1}(t)) - f(f^{-1}(y))}$$

si $t \neq y$. Posons $x = f^{-1}(t)$ et $\xi = f^{-1}(y)$. Comme f est continue sur I, on sait que f^{-1} est également continue. Donc $x \to \xi$ si $t \to y$. Par conséquent,

$$\lim_{t \to y,\, t \neq y} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(y)}{t - y} = \lim_{x \to \xi,\, x \neq \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \frac{1}{\lim_{x \to \xi,\, x \neq \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}} = \frac{1}{f'(\xi)}$$

puisque $f'(\xi) = f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ par hypothèse. ■

Exemples 7.2.7

- ▷ Soit $m \in \mathbb{N}_0$. La fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[: x \mapsto x^m$ est une bijection dérivable sur $]0, +\infty[$ et
  $$f'(x) = mx^{m-1} \neq 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$
  Par conséquent, sa fonction réciproque
  $$f^{-1} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[: x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$$
  est également dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a
  $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{m(f^{-1}(x))^{m-1}} = \frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1}.$$
- ▷ Considérons à présent la fonction
  $$f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[: x \mapsto x^{\frac{n}{m}}$$
  avec $n, m \in \mathbb{N}_0$. Alors, on peut écrire $f = G \circ F$ avec $G(x) = x^n$ et $F(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Le chain rule et l'exemple précédent impliquent que
  $$f'(x) = G'(F(x))F'(x) = nx^{\frac{n-1}{m}} \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1}.$$
- ▷ Nous verrons que la règle de dérivation de la fonction réciproque permet d'obtenir la dérivée de la fonction logarithme à partir de la fonction exponentielle, de la fonction arccos à partir de la fonction cos...

7.3 Condition nécessaire pour un extremum local

Un des intérets de la notion de dérivée est qu'elle permet d'étudier les points où une fonction réelle atteint ses maxima et minima. La dérivée étant une notion *locale*, elle ne permet que d'étudier le comportement autour d'un point. Nous devons donc introduire la notion d'extrema locaux.

Définition 7.3.1 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\xi \in A$. On dit que

- ▷ f atteint un *maximum local* en ξ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq f(\xi)$ pour tout $x \in A$ tel que $|x - \xi| < \varepsilon$;
- ▷ f atteint un *minimum local* en ξ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \geq f(\xi)$ pour tout $x \in A$ tel que $|x - \xi| < \varepsilon$;
- ▷ f atteint un *extremum local* en ξ si f atteint un maximum local ou un minimum local en ξ.

Proposition 7.3.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I qui contient ξ. Si f est dérivable en ξ et si f atteint un extremum local en ξ, alors $f'(\xi) = 0$.*

Démonstration : Considérons le cas où f atteint un maximum local en ξ, l'autre cas se démontre de manière similaire. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq f(\xi)$ pour tout $x \in]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[$. Par conséquent, si $x \in]\xi, \xi + \varepsilon[$, on a

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

et si $x \in]\xi - \varepsilon, \xi[$, on a

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

Comme f est dérivable en ξ, ces deux quotients convergent vers $f'(\xi)$ lorsque $x \to \xi^+$ et $x \to \xi^-$ respectivement. On en tire que $f'(\xi) \geq 0$ et $f'(\xi) \leq 0$, d'où $f'(\xi) = 0$. ■

Définition 7.3.3 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et dérivable sur un intervalle ouvert I. Un point $\xi \in I$ tel que $f'(\xi) = 0$ est appelé un *point stationnaire* de f dans I, ou encore un *point critique.*

Nous venons de démontrer que point en lequel f atteint un extrema local est un point stationnaire. La réciproque est fausse, comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 7.3.4 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, 0 est un point stationnaire de f mais ne correspond pas à un extremum local de f.

La méthode classique de recherche des extrema (locaux ou globaux) d'une fonction f réelle et dérivable consiste donc à déterminer les points stationnaires de f puis d'étudier chacun des points pour vérifier s'ils sont des extrema ou non.

Exemple 7.3.5 Soit $f : [0, 3] \to \mathbb{R} : x \mapsto x(x - 1)(x - 2)$. Cette fonction est continue sur un intervalle fermé borné, et elle y atteint donc ses bornes. Cherchons les points en lesquels les

bornes de f sont atteintes. Comme f est dérivable sur $]0,3[$, on cherche les points $x \in]0,3[$ tels que
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0.$$
On trouve les points $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Les seules possibilités pour les valeurs maximales de f sur $[0,3]$ sont donc
$$f(0), f(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}), f(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}), \text{ et } f(1).$$
En calculant, on trouve que $f(0) = 0$, $f(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $f(3) = 6$. On en tire que le minimum de f sur $[0,3]$ est $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ qui est atteint en $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et le maximum est 6 qui est atteint en $x = 3$.

7.4 TAF et condition nécessaire pour la monotonie

Dans cette section, nous présentons le théorème des accroissements finis et donnons ses conséquences pour étudier la monotonie d'une fonction. Commençons par démontrer un cas particulier, appelé théorème de Rolle.

Théorème 7.4.1 (Rolle) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.*

Démonstration : Si f est constant sur $[a,b]$, alors tout point de $[a,b]$ convient. Sinon, puisque f est continue, on peut appliquer le théorème des bornes atteintes. On sait donc qu'il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$
avec $f(x_1) \neq f(x_2)$. Alors, au moins une des deux valeurs $f(x_1)$ ou $f(x_2)$ n'est pas égale à $f(a) = f(b)$. Donc, au moins un des deux points se trouve dans $]a,b[$. On note ce point ξ. Comme f atteint un extremum global en ξ, c'est donc un extremum local et la Proposition 7.3.2 implique que $f'(\xi) = 0$. ■

Théorème 7.4.2 (des accroissements finis, TAF) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration : Considérons la fonction g définie pour tout $x \in [a,b]$ par
$$g(x) = f(x) - c\,x$$
où
$$c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
Alors, g est continue sur $[a,b]$ et est dérivable sur $]a,b[$ puisque f l'est. De plus, on vérifie directement que $g(a) = g(b)$. On peut donc appliquer le Théorème de Rolle qui nous donne l'existence d'un nombre $x \in]a,b[$ tel que $g'(x) = 0$. Or, on a
$$g'(x) = f'(x) - c = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

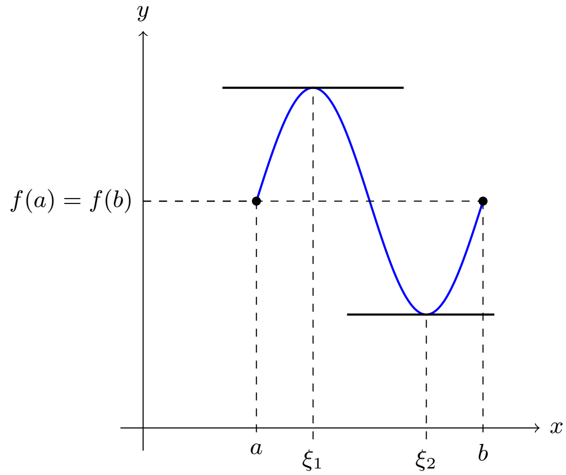


FIGURE 7.1 – Illustration du théorème de Rolle : on a $f(a) = f(b)$ et on peut trouver $\xi \in]a, b[$ avec $f'(\xi) = 0$. Ici deux points critiques ξ_1 et ξ_2 apparaissent.

et on en tire donc que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Remarquons que le TAF implique l'existence d'un point x strictement compris entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(x).$$

Notons aussi que d'un point de vue géométrique, le TAF signifie qu'il existe un point x pour lequel la tangente du graphe de f au point $(x, f(x))$ est parallèle à la droite qui joint les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. On appelle parfois le TAF aussi le théorème *de la moyenne*.

Remarque 7.4.3 Signalons que le TAF ne s'applique pas aux fonctions à valeurs complexes. Si on l'applique aux parties réelles et imaginaires, on obtient des points x_1 et x_2 qui sont en général différents.

Regardons à présent comment le TAF peut aider dans l'étude de la monotonie d'une fonction.

Proposition 7.4.4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.*
2. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*
3. *On a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ si et seulement si f est constante sur $[a, b]$.*

Démonstration : 1. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$ avec $x_1 < x_2$. Si on applique le TAF sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, on obtient l'existence d'une valeur $x \in]x_1, x_2[$ telle que

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

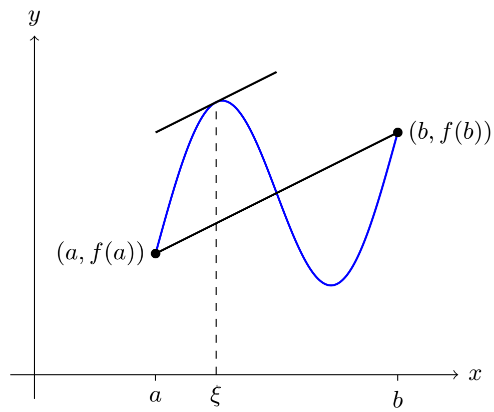


FIGURE 7.2 – Illustration du TAF : la tangente à f en ξ est parallèle à la droite reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Comme $f'(x) > 0$, on en tire que $f(x_2) > f(x_1)$.

2. La preuve est semblable à celle du point 1.

3. On sait déjà que la dérivée de toute fonction constante est nulle. Réciproquement, supposons que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $x_1 \neq x_2$. Montrons qu'on a $f(x_1) = f(x_2)$. Par le TAF, il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Comme $f'(x) = 0$, on en tire que $f(x_2) = f(x_1)$. ■

Corollaire 7.4.5 *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = g + c$.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le point 3 de la Proposition 7.4.4 à la fonction $f - g$. ■

Contrairement au $3^{\text{ème}}$ point, les réciproques des points 1 et 2 de la Proposition 7.4.4 sont fausses. Il suffit par exemple de considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Cette fonction est strictement croissante mais $f'(0) = 0$. On a par contre le résultat suivant.

Proposition 7.4.6 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *On a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ si et seulement si f est croissante sur $[a, b]$.*
2. *On a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ si et seulement si f est décroissante sur $[a, b]$.*

Démonstration : 1. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, on procède comme dans la preuve précédente. Réciproquement, si f est croissante sur $[a, b]$, alors pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

2. On procède comme dans le premier cas. ■

Corollaire 7.4.7 (Test de de la dérivée première) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in]a,b[$.*

1. *S'il existe $\delta > 0$ tel que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0[$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]x_0, x_0+\delta[$, alors la fonction f admet un maximum local en x_0.*
2. *S'il existe $\delta > 0$ tel que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0[$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]x_0, x_0+\delta[$, alors la fonction f admet un minimum local en x_0.*

Démonstration : 1. Vu la Proposition 7.4.6, la fonction f est croissante sur $]x_0-\delta, x_0[$ et décroissante sur $]x_0, x_0+\delta[$. Par conséquent, pour tous $x, y \in]x_0-\delta, x_0[$ tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$. En prenant la limite pour $y \to x_0^-$ et en utilisant la continuité de f, il vient

$$f(x) \leq \lim_{y \to x_0^-} f(y) = f(x_0).$$

De même, pour tous $x, y \in]x_0, x_0+\delta[$ tels que $x > y$, on a $f(x) \leq f(y)$ et donc

$$f(x) \leq \lim_{y \to x_0^+} f(y) = f(x_0).$$

2. On procède de la même manière. ■

Terminons cette section en signalant que le TAF permet bien souvent de démontrer des inégalités.

Exemple 7.4.8 (Inégalité de Bernoulli) Fixons $\alpha > 1$ [3] et montrons que

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Posons $h(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x > 0$. Alors, h est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Soit $x > 0$. En appliquant le TAF sur l'intervalle $]0, x[$, on sait qu'il existe un nombre $c \in]0, x[$ tel que $h(x) - h(0) = h'(c)(x-0)$, c'est-à-dire

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha(1+c)^{\alpha-1}x.$$

Comme $c > 0$ et $\alpha - 1 > 0$, on a $(1+c)^{\alpha-1} > 1$ et donc

$$(1+x)^\alpha - 1 \geq \alpha x.$$

7.5 Dérivation d'ordre n et développement de Taylor

Il peut être très pratique d'approcher les fonctions par des polynômes. L'objectif de cette section est de démontrer un résultat fondamental, le Théorème de Taylor, ainsi que quelques applications. Le Théorème de Taylor peut être vu comme une généralisation du TAF. En effet, supposons que l'on veut approximer une fonction continue et dérivable f en un point x par sa valeur en un point x_0 voisin. Le TAF permet de contrôler l'erreur faite via la dérivée de f puisque

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\xi)$$

3. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des exposants rationnels mais le raisonnement reste valide dans ce contexte général.

pour un point ξ entre x et x_0. Cette erreur est donc donnée par $(x-x_0)f'(\xi)$.

Le Théorème de Taylor va donner une relation entre les valeurs d'une fonction et les dérivées successives. Notons que si f est dérivable en x_0, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + o(x-x_0) \quad \text{si} \quad x \to x_0$$

puisque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Ainsi, au voisinage de x_0, on peut approcher f par la fonction affine

$$x \mapsto f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0),$$

et l'erreur associée est négligeable par rapport à $x - x_0$. La formule de Taylor va permettre d'approcher f avec une erreur plus petite, en ajoutant des termes au développement. Ces termes sont liés aux dérivées successives de f.

Les dérivées d'ordre $n \geq 2$ sont une extension naturelle du processus de dérivation. En effet, si la dérivée f' d'une fonction f existe dans un intervalle $]a,b[$, on peut s'intéresser à l'existence de la dérivée de la fonction f' en tout point de $]a,b[$. Si f' est dérivable en ξ, alors on dit que sa dérivée est la *dérivée seconde ou d'ordre 2* de f en ξ et on la note $f''(\xi)$, $f^{(2)}(\xi)$ ou encore $D^2f(\xi)$. De la même manière, on peut à présent s'intéresser à la dérivée de la fonction f'', ce qui mène à la notion de *dérivée d'ordre 3*, etc.

Définition 7.5.1 Soit $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$. On dit que f est

- ▷ *continûment dérivable* sur $]a,b[$ si elle est dérivable sur $]a,b[$ et si sa dérivée f' est continue sur $]a,b[$. L'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $]a,b[$ est noté $C^1(]a,b[)$;
- ▷ *n fois dérivable* sur $]a,b[$ si $f, f', \ldots, f^{(n)}$ existent sur $]a,b[$, où on pose $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. On dit qu $f^{(n)}$ est la *dérivée d'ordre n* de f. On la note également $D^n f$;
- ▷ *n fois continûment dérivable* sur $]a,b[$ si elle est n fois dérivable sur $]a,b[$ et si les fonctions $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sont continues sur $]a,b[$. L'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur $]a,b[$ est noté $C^n(]a,b[)$;
- ▷ *infiniment continûment dérivable* sur $]a,b[$ si elle est n fois continûment dérivable sur $]a,b[$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. L'ensemble des fonctions infiniment continûment dérivables sur $]a,b[$ est noté $C^\infty(]a,b[)$.

Notons qu'on pose souvent $f^{(0)} = f$.

Remarque 7.5.2 Toute fonction dérivable n'est pas continûment dérivable. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0.

Exemple 7.5.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = 2x$, et f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ avec $f'(x) = 3x^2$. En 0, on calcule les limites à gauche et à droite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3}{h} = 0$$

et on en tire que f est dérivable en 0. On a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 3x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On vérifie directement que f' est continue donc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Par contre, f' est dérivable en tout point sauf en 0 car

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3h^2}{h} = 0$$

et donc f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Evidemment, les propriétés des dérivées permettent de dire que toute combinaison linéaire (somme, multiplication par une constante), tout produit, tout quotient (avec un dénominateur qui ne s'annule en aucun point) et toute composition de fonctions de $C^n(\,]a, b[\,)$ appartient à $C^n(\,]a, b[\,)$. On a aussi les règles de calcul

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (c\, f)^{(n)} = c\, f^{(n)}$$

si f, g sont n fois dérivables et $c \in \mathbb{C}$. Pour calculer la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions n fois dérivables, on utilise la formule suivante.

Proposition 7.5.4 (Formule de Leibniz) *Soient $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ et $g :]a, b[\to \mathbb{C}$ deux fonctions n fois dérivables sur $]a, b[$. Alors, fg est n fois dérivable sur $]a, b[$ et on a*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Démonstration : On démontre le résultat par récurrence. Si $n = 1$, on a déjà vu que

$$(fg)' = fg' + f'g = \sum_{j=0}^{1} C_1^j f^{(j)} g^{(1-j)}$$

et l'égalité est donc vraie. Supposons donc avoir le résultat pour $n-1$ et montrons-le pour n. Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$(fg)^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} f^{(j)} g^{(n-1-j)}.$$

On en tire que

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} f^{(j)} g^{(n-1-j)}\right)' \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} \big(f^{(j)} g^{(n-1-j)}\big)' \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} f^{(j+1)} g^{(n-1-j)} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} f^{(j)} g^{(n-j)} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \\
&= f^{(n)} g + \sum_{j=1}^{n-1} \big(C_{n-1}^{j-1} + C_{n-1}^{j}\big) f^{(j)} g^{(n-j)} + C_{n-1}^{0} f g^{(n)} \\
&= f^{(n)} g + \sum_{j=1}^{n-1} C_{n}^{j} f^{(j)} g^{(n-j)} + C_{n-1}^{0} f g^{(n)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} C_{n}^{j} f^{(j)} g^{(n-j)}
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule du triangle de Pascal

$$C_{n-1}^{j-1} + C_{n-1}^{j} = C_{n}^{j}.$$

■

Revenons à présent à l'approximation d'une fonction f par un polynôme. Si f possède une dérivée d'ordre n en un point x_0, alors il n'est pas difficile de construire un polynôme P_n de degré n tel que

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Il suffit en effet de considérer le polynôme

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Taylor de f en x_0* ou *développement limité de f en x_0 à l'ordre n*. Il est raisonnable d'espérer que ce polynôme fournisse une bonne approximation de f pour des valeurs de x proches de x_0. Pour jauger la qualité de cette approximation, il faut pouvoir contrôler le reste

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Le théorème de Taylor nous donne exactement cette information.

Théorème 7.5.5 (Développement de Taylor) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle appartenant à $C^{n+1}(\,]a,b[\,)$ et soit $x_0 \in \,]a,b[\,$. Si $x \in \,]a,b[\,$, alors il existe un point ξ compris strictement entre x et x_0 tel que*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Démonstration : Fixons $x_0, x \in \,]a,b[\,$. Soit C le nombre qui satisfait

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{C}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Nous devons trouver une expression pour C en terme de la dérivée d'ordre $n+1$ de f. Notons I l'intervalle fermé d'extrémités x_0 et x et définissons la fonction F sur I en posant

$$F(t) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x - t)^j - \frac{C}{(n+1)!}(x - t)^{n+1}$$

de sorte que $F(x) = F(x_0) = 0$. Cette fonction est continue sur I et dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant et le Théorème de Rolle implique alors qu'il existe ξ entre x et x_0 tel que

$$F'(\xi) = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1} + \frac{C}{n!}(x-t)^n \\ &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j + \frac{C}{n!}(x-t)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{C}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$0 = F'(\xi) = \left(-f^{(n+1)}(\xi) + C\right)\frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

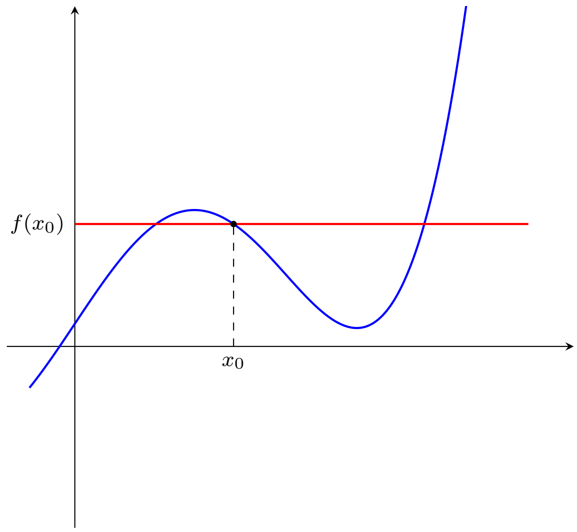
d'où $C = f^{(n+1)}(\xi)$. ■

Remarque 7.5.6 Si f est $n+1$ fois continûment dérivable, alors sa dérivée est continue et donc bornée sur $[x_0, x]$ (resp. $[x, x_0]$). Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que

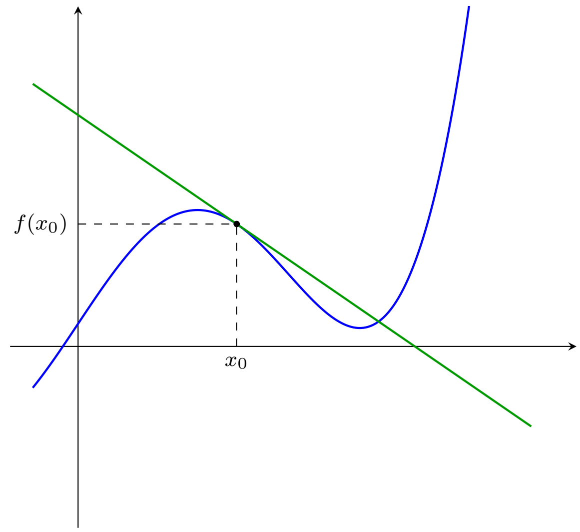
$$|f^{(n+1)}(t)| \leq C$$

pour tout t entre x et x_0. On en tire donc que si R_n exprime l'erreur commise en approchant f par P_n, on a

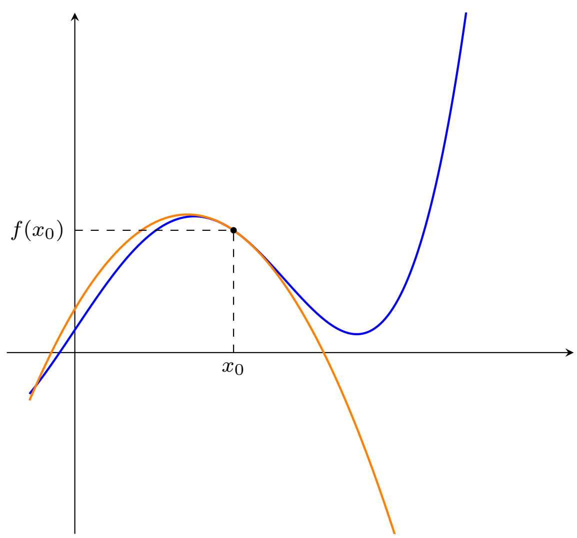
$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \right| \leq \lim_{x \to x_0} C \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x-x_0)^n} \right| = 0.$$



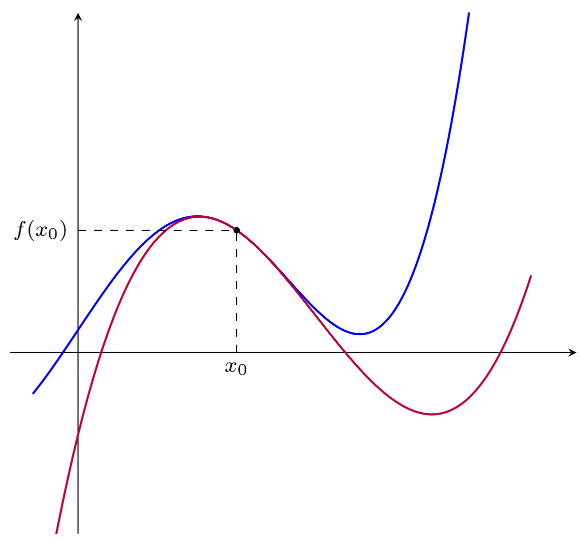
(a) Approximation à l'ordre 0 (par une fonction constante).



(b) Approximation à l'ordre 1 (par une droite).



(c) Approximation à l'ordre 2 (par un polynôme de degré 2).



(d) Approximation à l'ordre 3 (par un polynôme de degré 3).

FIGURE 7.3 – Développements de Taylor d'une fonction f en x_0, aux ordres 0, 1, 2 et 3. Plus l'ordre est élevé, meilleure est l'approximation locale de la courbe de f.

On a donc
$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+o\big((x-x_0)^n\big)$$
si $x\to x_0$.

La formule de Taylor limitée s'appelle également la formule de Taylor-Lagrange. Notons déjà qu'il existe d'autres méthodes pour estimer le reste R_n, qui dépendent des hypothèses faites sur la fonction : la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor-Laplace avec reste intégral.

Terminons cette section en donnant quelques applications de la formule de Taylor. Tout d'abord, il est clair qu'elle permet d'estimer l'erreur effectuée lorsque l'on approche une fonction par son polynôme de Taylor P_n. Illustrons ce calcul sur un exemple.

Exemple 7.5.7 Utilisons la formule de Taylor à l'ordre $n=2$ pour approcher la fonction f définie par $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ pour $x>-1$ au point $x_0=0$. On calcule
$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{-2}{3}},\quad f''(x)=\frac{-2}{9}(1+x)^{\frac{-5}{3}}\quad\text{et}\quad f^{(3)}(x)=\frac{10}{27}(1+x)^{\frac{-8}{3}}.$$
On a donc $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{3}$, $f''(0)=\frac{-2}{9}$ et on peut écrire
$$f(x)=P_2(x)+R_2(x)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+R_2(x)$$
avec
$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)x^3=\frac{5}{81}(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}x^3$$
pour un nombre réel ξ entre 0 et x. Par exemple, si $x=0.3$, on trouve que
$$P_2(0.3)=1.09\quad\text{et}\quad |R_2(0.3)|\le\frac{5}{81}(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}0.3^3<\frac{5}{81}\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{1}{600}<0.17\cdot10^{-2}$$
puisque $(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}<1$, ce qui nous donne la précision de l'approximation de $f(0.3)=(1.3)^{\frac{1}{3}}$ par 1.09.

Le théorème de Taylor permet aussi de démontrer des inégalités.

Exemple 7.5.8 Montrons que
$$1-\frac{1}{2}x^2\le\cos(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$
L'inégalité est vérifiée pour $x=0$. On pose $f(x)=\cos(x)$ et on considère le point $x_0=0$. Alors, la formule de Taylor nous donne
$$\cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)\quad\text{où}\quad R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3=\frac{\sin(\xi)}{6}x^3$$
pour un ξ entre 0 et x. Il reste à montrer que $R_2(x)\ge0$ pour tout x. Supposons que $x\in]0,\pi]$, alors on a aussi $\xi\in]0,\pi]$ et donc $\sin(\xi)\ge0$ et $x^3\ge0$. Si $x\in[-\pi,0]$, on a $\sin(\xi)\le0$ et $x^3\le0$. Dans les deux cas, le produit est positif. Enfin, si $|x|>\pi$, alors on a
$$1-\frac{1}{2}x^2<-3\le\cos(x)$$
et l'inégalité est valide.

7.6 Technique pour la convexité

Nous avons vu que, lors de la recherche d'extrema d'une fonction, les points stationnaires étaient de bons candidats. Pour vérifier qu'un tel point correspond effectivement à un extremum local (ou même global) de la fonction, la notion de convexité est utile.

Une fonction convexe sur un intervalle n'est pas nécessairement dérivable en chaque point, comme le montre l'exemple $f(x) = |x|$, mais on peut montrer que les dérivées à gauche et à droite existent toujours. Par conséquent, une fonction convexe sur un intervalle y est continue. Nous ne démontrerons pas ces affirmations, nous nous contentons ici de donner un lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée seconde, si elle existe.

Proposition 7.6.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Supposons que f est deux fois continûment dérivable sur $]a,b[$. Alors f est*

1. *convexe sur $[a,b]$ si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$,*
2. *concave sur $[a,b]$ si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.*

Démonstration : 1. Supposons tout d'abord que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Fixons $x, y \in [a,b]$. On introduit la fonction h définie par

$$h : [0,1] \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y).$$

On doit montrer que $h(\lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda \in]0,1[$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $h(\lambda) > 0$. Comme h est une fonction continue, on sait par le Théorème des bornes atteintes qu'il existe $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que

$$\sup_{[0,1]} h = h(\lambda_0).$$

Comme $h(\lambda_0) \geq h(\lambda) > 0$, on a $h(\lambda_0) > 0$. Par conséquent $\lambda_0 \neq 0$ et $\lambda_0 \neq 1$ car $h(0) = h(1) = 0$. Donc $\lambda_0 \in]0,1[$ et la Proposition 7.3.2 implique que $h'(\lambda_0) = 0$. Comme $h \in C^2(]0,1[)$, en utilisant le Théorème 7.5.5, pour tout $t \in]0,1[$, il existe ξ entre t et λ_0 tel que

$$h(t) = h(\lambda_0) + h'(\lambda_0)(t-\lambda_0) + \frac{h''(\xi)}{2}(t-\lambda_0)^2 = h(\lambda_0) + \frac{h''(\xi)}{2}(t-\lambda_0)^2 \geq h(\lambda_0)$$

car $h''(\xi) = f''\big(\xi x + (1-\xi)y\big)(x-y)^2 \geq 0$. Comme $h(\lambda_0)$ est la borne supérieure de h sur $[0,1]$, on en tire que h est constante sur $]0,1[$. Or, h est continue sur $[0,1]$ donc on a aussi $0 = h(0) = h(\lambda_0)$, ce qui est impossible.

Pour la réciproque, on suppose que f est convexe et on veut montrer que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f''(x_0) < 0$. Par continuité de f'', il existe alors $\delta > 0$ tel que $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Par la première partie de la preuve, on en tire que $-f$ est convexe sur $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, c'est-à-dire que f y est concave. Donc f est à la fois convexe et concave sur $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ et y est donc affine. Par conséquent, on a $f''(x) = 0$ sur $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, ce qui est impossible.

2. On utilise la même méthode ou on applique le point 1 à $-f$. ■

Vu le lien entre dérivée et monotonie, on a montré que f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante. De même, f est concave si et seulement si f' est une fonction décroissante.

Proposition 7.6.2 (Test de la dérivée seconde) *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle de $C^2(\,]a,b[\,)$.*

1. *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors la fonction f admet un minimum local en x_0.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors la fonction f admet un maximum local en x_0.*

Démonstration : 1. Comme f'' est continu, il existe $\delta > 0$ tel que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Dès lors, par le Théorème 7.5.5, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, il existe ξ entre x et x_0 tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0)$$

puisque $f'(x_0) = 0$ et puisque $f''(\xi) \geq 0$.

2. On procède de la même manière. ■

En combinant les deux résultats précédents, on obtient donc le lien suivant entre extrema et concavité.

Corollaire 7.6.3 *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de $C^2(\,]a,b[\,)$. Supposons que x_0 est un point stationnaire de f.*

1. *Si f est convexe, alors x_0 est un minimum de f sur $]a,b[$.*
2. *Si f est concave, alors x_0 est un maximum de f sur $]a,b[$.*

7.7 Règle de l'Hospital

Dans cette section, nous présentons un résultat très important qui permet de déterminer la limite d'un quotient à partir des dérivées de son numérateur et de son dénominateur.

Soient f et g deux fonctions continues réelles. On souhaite déterminer la limite

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$$

pour un point ξ appartenant aux domaines de définition de f et g. En utilisant les règles de calcul, on sait que si $g(\xi) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

Si $g(\xi) = 0$ et $f(\xi) \neq 0$, alors la limite sera $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $f(\xi)$. Lorsque $f(\xi) = g(\xi) = 0$, les résultats obtenus jusqu'à présent ne permettent pas de conclure : la valeur de la limite dépendra de la "vitesse" à laquelle f et g tendent vers 0 respectivement. Si f tend vers 0 "plus vite" que g, on est tenté de dire que le "numérateur l'emportera" et donc la limite sera nulle. Si par contre f tend vers 0 "moins vite" que g, le "dénominateur l'emportera" et donc la limite sera infinie.

Puisque l'on veut comparer les "vitesses" de f et g "en 0", il semble naturel d'utiliser la notion de dérivée. C'est ce que le Théorème de l'Hospital nous montre. Nous commençons par un cas simple où la fonction g est dérivable en ξ.

Proposition 7.7.1 (Règle de l'Hospital, cas simple) *Considérons deux fonctions réelles* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continues sur* $[a, b]$ *et dérivables sur* $]a, b[$ *et soit* $\xi \in]a, b[$ *. Si* $f(\xi) = g(\xi) = 0$ *et si* $g'(\xi) \neq 0$*, alors on a*

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Démonstration : Pour tout $x \in [a, b]$ tel que $g(x) \neq g(\xi)$ et $g(x) \neq 0$, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \frac{x - \xi}{g(x) - g(\xi)}.$$

Par conséquent, si $g'(\xi) \neq 0$, on a

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

Exemple 7.7.2 Après les avoir définies proprement, nous montrerons que les fonctions cos et sin sont dérivables en tout point avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. En appliquant la règle de l'Hospital, montrons que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Posons $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = g(0) = 0$. Par conséquent, puisque $g'(0) = 1 \neq 0$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

La première généralisation de la règle de l'Hospital consiste à ne plus supposer la dérivabilité de f et g en ξ, et donc regarder la limite lorsque x tend vers ξ du quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Théorème 7.7.3 (Règle de l'Hospital) *Soient* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *et considérons deux fonctions réelles* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *et* $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *dérivables sur* $]a, b[$*. Supposons que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

et que $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$ *. Si la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, alors on a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration : 1. Supposons que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Par le critère par les suites, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ qui prend ses valeurs dans $]a,b]$ et qui converge vers a. Fixons une telle suite. Soit h_n la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x)g(x_n) - g(x)f(x_n) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

pour tout $x \in [a, x_n]$. Alors, h_n est continue sur $[a, x_n]$ et dérivable sur $]a, x_n[$. De plus, on a $h(a) = h(x_n) = 0$. Le Théorème de Rolle implique qu'il existe $y_n \in]a, x_n[$ tel que

$$0 = h'(y_n) = f'(y_n)g(x_n) - g'(y_n)f(x_n)$$

d'où

$$\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Comme $x_n \to a$ et $a < y_n < x_n$, le théorème du sandwich permet d'affirmer que $y_n \to a$. On en tire que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to L \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

■

On peut évidemment obtenir le même résultat pour la limite lorsque x tend vers b. Le résultat permet de gérer des limites du type $\frac{0}{0}$. Bien sûr, il suffit d'avoir les hypothèses du théorème vérifiées au *voisinage* de a.

Exemple 7.7.4 On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos(x) = 0.$$

Remarquons que le dénominateur n'est pas dérivable en 0 et qu'on ne peut donc pas appliquer la règle simple de l'Hospital.

Exemple 7.7.5 Parfois, il est nécessaire d'appliquer la règle de l'Hospital plusieurs fois d'affilée car le quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ satisfait les mêmes hypothèses que $\frac{f(x)}{g(x)}$. Par exemple, on souhaite calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

Pour cela, on aimerait se ramener à l'étude de la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}$$

pour appliquer la règle de l'Hospital. Or, on est encore dans un cas $\frac{0}{0}$ et donc on est amené à étudier

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, une première application de la règle de l'Hospital donne

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}=\frac{1}{2}$$

et une seconde application permet de conclure que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Il existe une dernière version de la règle de l'Hospital qui permet de gérer les cas "$\frac{\cdot}{\infty}$". En fait, les seuls cas dans lesquels cette règle est utile est le cas "$\frac{\infty}{\infty}$" et le cas où f n'admet pas de limite en a puisque "$\frac{c}{\infty}=0$" si $c\in\mathbb{C}$.

Théorème 7.7.6 (Règle de l'Hospital) *Soient $-\infty\le a<b\le+\infty$ et considérons deux fonctions réelles $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivables sur $]a,b[$. Supposons que*

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

et que $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[$. Si la limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors on a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Les règles présentées permettent donc de gérer les cas "$\frac{0}{0}$" et "$\frac{\infty}{\infty}$" qui sont indéterminés par les règles de calcul des limites. Signalons que les autres cas d'indétermination peuvent s'y ramener facilement.

▷ Le cas "$0\cdot\infty$" se ramène au cas "$\frac{0}{0}$" ou au cas "$\frac{\infty}{\infty}$" en notant que

$$fg=\frac{f}{\frac{1}{g}}.$$

▷ Pour le cas "$+\infty-\infty$", on remarque que

$$f-g=f(1-\frac{g}{f}).$$

▷ Les cas "0^0", "1^∞" et "∞^0" se traitent en utilisant la formule $A^B=e^{B\ln A}$. Nous reviendrons sur cette formule plus tard.

Exemples 7.7.7

▷ Montrons que
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$
On ne peut pas appliquer directement la règle de l'Hospital mais on peut s'y ramener en remarquant que
$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$
Nous sommes à présent dans les conditions pour appliquer la règle de l'Hospital. On calcule donc
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$
puisque $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ (ce sera démontré lorsque l'on introduira proprement la fonction logarithme) et $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$, et cela permet de conclure.

▷ Montrons que
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = 0.$$
On écrit
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\sin(x)}\right) = \frac{1 - \frac{x}{\sin(x)}}{x}$$
et on sait par le théorème de l'Hospital que
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.$$
On est donc dans le cas indéterminé "$\frac{0}{0}$". On calcule la limite du quotient des dérivées
$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{\sin^2(x)}.$$
Puisqu'on est à nouveau dans le cas indéterminé "$\frac{0}{0}$", on calcule cette limite en calculant la limite du quotient des dérivées
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + x\sin(x) - \cos(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\cos(x)} = 0$$
et on obtient le résultat en appliquant successivement le théorème de l'Hospital.

▷ Montrons que
$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$
Pour cela, on écrit
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$
et on remarque que
$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Pour appliquer la règle de l'Hospital, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x+1}\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1.$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big) = 1$$

et comme la fonction exponentielle est continue, on en tire que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

▷ De la même manière, on montre que

$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Terminons cette section par quelques remarques sur la règle de l'Hospital.

Remarque 7.7.8 Si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

on ne peut pas en déduire que

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Il suffit de considérer l'exemple $f(x) = x + \sin(x)$, $g(x) = x$ et $a = +\infty$.

Remarque 7.7.9 L'utilisation de la règle de l'Hospital ne permet pas toujours de conclure. Par exemple, considérons les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ et regardons la limite du quotient en $a = +\infty$. On est dans le cas "$\frac{\infty}{\infty}$" mais en calculant les dérivées du numérateur et du dénominateur, la règle de l'Hopital nous ramène à l'étude de

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Néanmoins, cette limite peut se calculer avec des manipulations algébriques simples.

Chapitre 8

Fonctions de plusieurs variables réelles

Dans de nombreuses applications, il est nécessaire de décrire des quantités qui dépendent de plusieurs paramètres. Par exemple, nous pouvons examiner la distribution de la température à l'intérieur d'un liquide, qui varie en fonction de la position et évolue dans le temps. Ainsi, nous avons une fonction qui dépend de quatre variables : (x, y, z, t), où (x, y, z) représente la position d'un point et t représente le temps.

Dans ce chapitre, nous allons donc introduire des fonctions qui dépendent non plus d'une seule variable, mais de plusieurs variables réelles. Nous nous limiterons à l'étude du cas où ces fonctions prennent des valeurs réelles (ou complexes), et non pas des valeurs vectorielles.

8.1 Définitions

Afin de rester le plus général possible, nous allons considérer des fonctions de n variables, avec $n \in \mathbb{N}_0$.

Définition 8.1.1 L'ensemble

$$\mathbb{R}^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\big\}$$

des n-uples de nombres réels est appelé l'*espace euclidien de dimension n*.

- ▷ Si $j \in \{1, \ldots, n\}$ et si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on dira que x_j est la $j^{\text{ème}}$ *composante* de x.
- ▷ On dira que deux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sont *égaux* si leurs composantes sont égales, c'est-à-dire si

$$x_j = y_j \quad \text{pour tout } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

- ▷ On définit l'addition de deux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ composante à composante, c'est-à-dire

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et la multiplication par un scalaire $c \in \mathbb{R}$ composante à composante, c'est-à-dire

$$cx = (cx_1, \ldots, cx_n).$$

Dans le cas où $n = 2, 3, 4$, on utilisera souvent plutôt les notations (x, y), (x, y, z) et (x, y, z, t)

respectivement.

Définition 8.1.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Une *fonction réelle de n variables réelles* définie sur A est une application définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

$$f : A \to \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n).$$

L'ensemble A est le *domaine de définition* de f et l'ensemble $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ est l'ensemble *image* de A par f.

Comme dans le cas d'une seule variable, on peut introduire le *graphe* de f qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\mathcal{G}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in A\big\}.$$

Evidemment, si f est définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$, il est impossible de représenter le graphe de f. Par contre, si f est définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, alors la représentation graphique de f sera donnée par la surface d'équation cartésienne

$$z = f(x, y).$$

Si une fonction dépend de 2 ou de 3 variables réelles, il est aussi courant de la représenter au moyen de ses courbes ou surfaces de niveau.

Définition 8.1.3 Si f est une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $A \subset \mathbb{R}^2$ et si C appartient à $f(A)$, alors l'ensemble

$$\big\{(x, y) \in A : f(x, y) = C\big\}$$

est une *courbe de niveau* de f.

Ainsi, la courbe de niveau associée à C est l'ensemble des points dont l'image est C. On utilise par exemple cette technique pour représenter l'ensemble des points du sol ayant la même température (les isothermes). Si f est définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$, alors les courbes de niveau deviennent des surfaces de niveau.

Définition 8.1.4 Si f est une fonction réelle de trois variables réelles définie sur $A \subset \mathbb{R}^3$ et si C appartient à $f(A)$, alors l'ensemble

$$\big\{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = C\big\}$$

est une *surface de niveau* de f.

8.2 L'espace euclidien

Afin de généraliser les notions étudiées dans le cas de fonctions à une seule variable réelle (limites, continuité, dérivabilité), il faut pouvoir parler de la *distance* entre deux points de $\mathbb{R}^n$.

Définition 8.2.1

▷ Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la *norme euclidienne* de x est définie par

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

▷ Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, la *distance euclidienne* entre x et y est définie par

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

Remarquons que si $n = 2$, le Théorème de Pythagore nous assure que $\|x-y\|$ est bien la distance entre x et y. De plus, si $n = 1$, la distance entre x et y est simplement donnée par $|x-y|$.

Proposition 8.2.2 *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$.

On retrouve l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire inversée démontrées dans le cas $n = 1$.

Proposition 8.2.3 (Inégalité triangulaire) *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$$

La norme euclidienne est liée au produit scalaire défini ci-dessous.

Définition 8.2.4 Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, le *produit scalaire* entre x et y, noté $\langle x, y\rangle$, est défini par

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes. Il s'agit de simples vérifications.

Proposition 8.2.5 *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$,
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Un lien très important entre le produit scalaire et la distance dans $\mathbb{R}^n$ est donné par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 8.2.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)$$

pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants, c'est-à-dire s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ tels que

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Démonstration : On remarque que

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons

$$P(\lambda) = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors P est un polynôme de degré 2 en λ qui est toujours positif ou nul et donc

$$4(\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

c'est-à-dire

$$(\langle x, y\rangle)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2,$$

ce qui permet de conclure la première partie. De plus, on a l'égalité si et seulement si le polynôme P admet une racine, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\|x+\lambda y\|^2 = 0$. On en tire que $x+\lambda y = 0$.

■

Enfin, afin d'envisager la notion de limite qui est à la base des développements présentés précédemment pour les fonctions d'une variable réelle, il faut introduire la généralisation des points adhérents à un ensemble. Pour cela, commençons par généraliser la notion d'intervalle centré en un point.

Définition 8.2.7 Soient $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

- ▷ La *boule ouverte de centre* ξ *et de rayon* r est définie par

$$b(\xi, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\| < r\}.$$

- ▷ La *boule fermée de centre* ξ *et de rayon* r est définie par

$$\overline{b}(\xi, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\| \leq r\}.$$

La boule ouverte de centre ξ et de rayon r est donc l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ situés à une distance strictement inférieure à r de ξ. Si $n = 1$, alors cette boule est simplement l'intervalle ouvert $]\xi - r, \xi + r[$. De même, la boule fermée $\overline{b}(\xi, r)$ correspond à l'intervalle fermé $[\xi - r, \xi + r]$ si $n = 1$.

Remarque 8.2.8 Nous aurions pu considérer une approche légèrement différente pour généraliser la notion d'intervalle : un intervalle de $\mathbb{R}^n$ est un produit de n intervalles de $\mathbb{R}$. Par exemple, si $n = 2$, alors

$$[0, 3] \times [1, 2] = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3 \text{ et } 1 \leq y \leq 2\}$$

est un intervalle de $\mathbb{R}^2$. On parle d'intervalle ouvert s'il s'agit d'un produit d'intervalles ouverts, et d'un intervalle fermé si c'est un produit d'intervalles fermés. Notons que cette approche donnerait lieu aux mêmes notions de limite car toute boule contient un intervalle et tout intervalle contient une boule.

Définition 8.2.9 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\xi \in \mathbb{R}^n$. On dit que ξ est *adhérent* à A si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap b(\xi, \varepsilon)$ est non-vide.

8.3 Limites et continuité

Avec ces définitions en mains, nous pouvons donner les définitions de limite et de continuité pour des fonctions à plusieurs variables réelles. Ces notions se définissent de manière identique à ce qui avait été fait pour les fonctions d'une variable réelle, en remplaçant la valeur absolue $|x - \xi|$ entre des points x et ξ de $\mathbb{R}$ par la distance $\|x - \xi\|$ entre des points x et ξ de $\mathbb{R}^n$.

Définition 8.3.1 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ et soit ξ un point adhérent à A. On dit que a est la *limite de f lorsque x tend vers ξ* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } \|x - \xi\| < \delta, \text{ on a } \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit aussi que *f tend (ou converge) vers a lorsque x tend vers ξ* et que a est la *limite de f en ξ*, et on note

$$\lim_{x \to \xi,\, x \in A} f(x) = a$$

ou

$$f(x) \to a \quad \text{lorsque } x \to \xi.$$

La condition $\|x - \xi\| < \delta$ signifie que x est dans la boule ouverte de centre ξ et de rayon δ. Notons que les règles de calcul des limites et les résultats de comparaison obtenus dans le Chapitre 5 restent valides.

Exemple 8.3.2 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Etudions la limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$. On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3 + y^3 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0$$

et on se retrouve donc avec un cas indéterminé "$\frac{0}{0}$". Remarquons cependant que

$$\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2} + \frac{|y^3|}{y^2} = |x| + |y|.$$

Comme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = 0,$$

le théorème de l'étau permet de conclure que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Bien que les notions de limite à gauche et à droite introduites dans $\mathbb{R}$ ne peuvent être considérées dans le cas de fonctions de n variables, remarquons que lorsqu'elle existe, la limite d'une fonction de n variables en un point ne doit pas dépendre de la manière dont on tend vers le point. Par conséquent, on peut montrer qu'une limite n'existe pas en montrant que les limites obtenues en approchant le point selon deux courbes différentes ont des valeurs différentes.

Exemple 8.3.3 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Etudions la limite lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Si on fixe $y=0$ et que l'on tend vers $(0,0)$ sur "l'axe des x", alors on a

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Approchons à présent le point $(0,0)$ selon une direction $\lambda > 0$, c'est-à-dire le long de la droite $y = \lambda x$. On calcule alors

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0.$$

Ainsi, la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

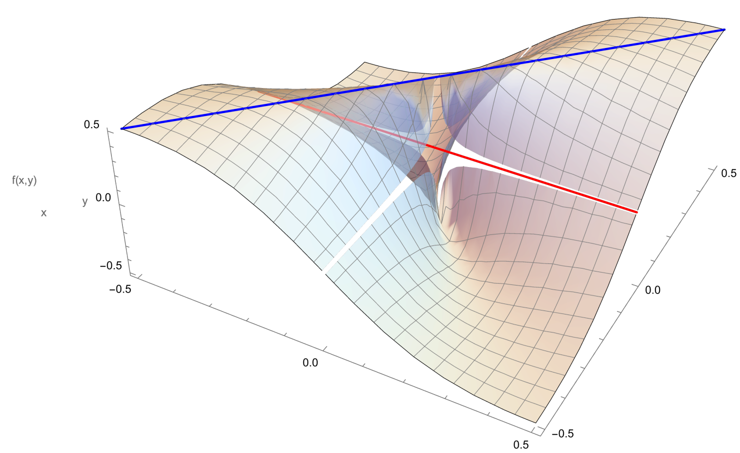


FIGURE 8.1 – Comportement autour de l'origine de la fonction $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, montrant deux trajectoires vers $(0,0)$: en rouge l'axe des x ($y=0$) où la limite est 0, et en bleu la droite $y = x$ où la limite vaut $\frac{1}{2}$.

Exemple 8.3.4 Il ne suffit pas de regarder comment la fonction tend vers un point selon toutes les directions, mais bien toutes les courbes. Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}.$$

Si on regarde les limites en $(0,0)$ sur les droites $y = \lambda x$, on trouve

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} = 0.$$

Or, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

et la limite en $(0,0)$ n'existe donc pas.

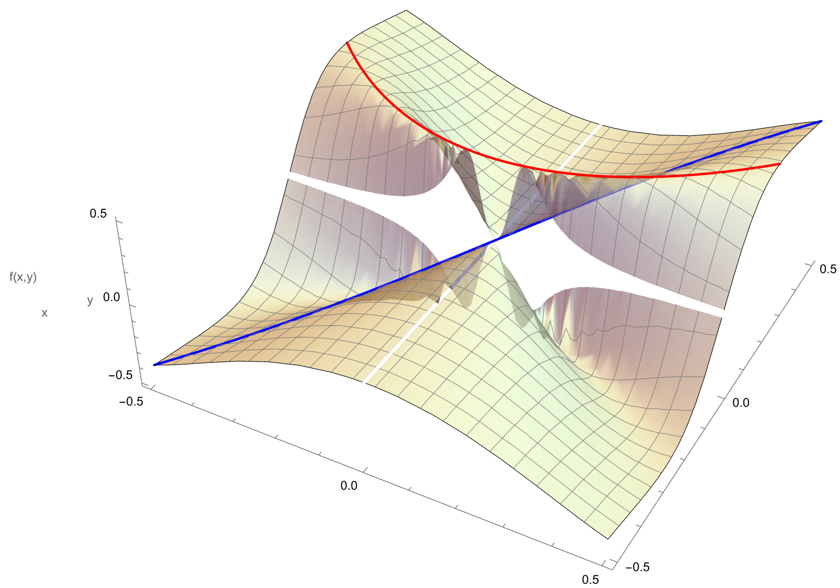


FIGURE 8.2 – Comportement autour de l'origine de la fonction $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$, montrant deux trajectoires vers $(0,0)$: en bleu la droite $y = x$ où la limite est 0, et en rouge la parabole $y = x^2$ où la limite vaut $\frac{1}{2}$.

La définition de la continuité en ξ s'énonce de manière identique au cas d'une seule variable réelle.

Définition 8.3.5 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\xi \in A$. On dit que f est *continue en* ξ si la limite $\lim_{x\to\xi} f(x)$ existe et est finie. Par conséquent, on a

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi).$$

Dans ce cas, on dit que ξ est un *point de continuité* de f. Autrement dit, f est continue en ξ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in A \text{ tel que } \|x - \xi\| < \delta \quad \text{on a } |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Si f n'est pas continu en ξ, on dit que f est *discontinu* en ξ et que ξ est un *point de discontinuité* de f.

A nouveau, les propriétés des fonctions continues sont identiques à celles énoncées dans la Proposition 6.1.4 du Chapitre 6 pour les fonctions d'une variable réelle. On a aussi l'équivalent de la Proposition 6.1.6.

Proposition 8.3.6 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, et soit $g : B \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur une partie B de $\mathbb{R}$ telle que $f(A) \subset B$. Si f est continue en $\xi \in A$ et si g est continue en $f(\xi)$, alors $g \circ f$ est continue en ξ.*

Afin d'énoncer la généralisation du Théorème 8.3.8 des bornes atteintes, introduisons la notion d'ensemble compact.

Définition 8.3.7

- ▷ Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que
$$b(x, r) \subseteq U.$$
- ▷ Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est *fermé* si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.
- ▷ Un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ est *borné* s'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\|x\| \leq C \quad \text{pour tout } x \in B.$$
- ▷ Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est *compact* s'il est fermé et borné.

Théorème 8.3.8 (des bornes atteintes) *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$. Alors f est bornée et il existe $c, d \in K$ tels que*
$$\inf_{x \in K} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in K} f(x) = f(d).$$
Autrement dit, on a
$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \text{pour tout } x \in K.$$

8.4 Dérivées partielles

Nous allons à présent nous intéresser au sens à donner au "taux de variation instantané" pour une fonction qui dépend de plusieurs variables réelles. Il est important de rappeler que la dérivée d'une fonction d'une variable réelle donne la pente de la tangente à sa représentation graphique. Si on travaille avec une fonction f de deux variables réelles, la représentation graphique de f est une surface plutôt qu'une courbe. Par conséquent, notre objectif est d'obtenir des "directions tangentes" qui permettront de décrire le "plan tangent" à la surface en un point.

Pour cela, nous introduisons les dérivées partielles, qui nous donnent des informations sur les taux de variation instantanés de la fonction par rapport à chaque variable, tout en maintenant les autres variables constantes. Pour ce faire, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, notons e_j le point de $\mathbb{R}^n$ donné par
$$e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j^{\text{ème}} \text{ position}}, 0, \ldots, 0).$$

Remarquons que ces éléments forment une base de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la décomposition sont exactement les composantes de x.

Définition 8.4.1 Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $\xi \in U$.

- ▷ On dit que f est *partiellement dérivable en ξ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ coordonnée* si la limite
$$\lim_{h \to 0, h \neq \mathbb{R}_0} \frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{h}$$
existe et est finie. Dans ce cas, on dit que cette limite est la *$j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en ξ* et on la note
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) \quad \text{ou} \quad D_j f(\xi)\,.$$
- ▷ Si f est partiellement dérivable en ξ par rapport à toutes ses coordonnées, on dit que f est *dérivable en ξ*.
- ▷ On dit que f est *dérivable sur U* si f est dérivable en tout point de U.

Remarquons que si $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, alors

$$\lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}_0} \frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{h} = \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}_0} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + h, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) - f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{h}.$$

Le calcul s'effectue donc ici comme une limite d'une fonction d'une seule variable, les autres étant fixées. Ainsi, la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en ξ donne la pente de la tangente au graphe dans la direction donnée par le $j^{\text{ème}}$ axe.

Exemple 8.4.2 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x \cos(y).$$

On a

$$D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(y) \quad \text{et} \quad D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x\ \sin(y).$$

Au point $(0, 0)$, on obtient donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

ce qui donne les pentes des tangentes au graphe au point $(0, 0)$ dans les directions des axes.

Puisque les dérivées partielles s'obtiennent comme des dérivées d'une fonction d'une seule variable réelle, les autres étant maintenues constantes, les règles de calcul des dérivées s'appliquent au calcul des dérivées partielles. Par exemple, si f et g sont partiellement dérivables en ξ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée, on a

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_j}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)\, g(\xi) + f(\xi)\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi).$$

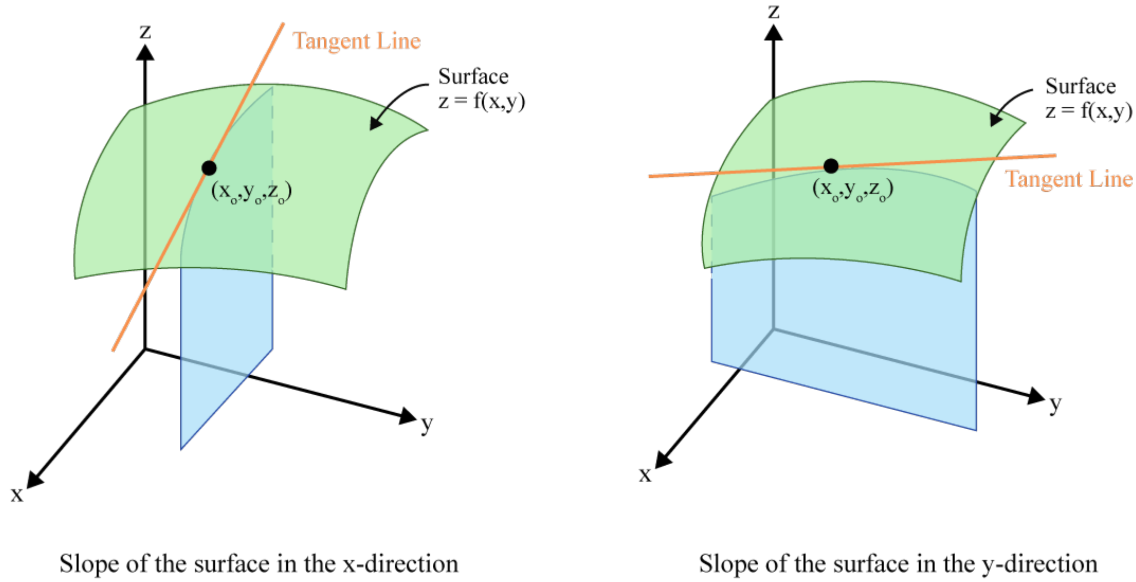


FIGURE 8.3 – Illustration des dérivées partielles d'une fonction de deux variables. La surface est représentée en vert clair, avec les tangentes dans les directions x et y au point de coordonnées (x_0, y_0).

De même, si f est partiellement dérivable en ξ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée et si g est une fonction d'une variable réelle dérivable en $f(\xi)$, on a

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(\xi) = g'(f(\xi))\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi).$$

Le TAF prend la forme générale suivante.

Théorème 8.4.3 (des accroissements finis) *Soit f une fonction réelle continue et dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soient $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$ deux points de U. Notons*

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n$$

le plus petit intervalle qui contient a et b [a] *et supposons que $I \subset U$. Alors, il existe des points $c^{(1)}, \ldots, c^{(n)}$ de I tels que*

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c^{(j)})(b_j - a_j).$$

a. Par exemple, si $b = a + h$ avec $h_1 \geq 0, \ldots, h_n \geq 0$, on a $I = [a_1, a_1 + h_1] \times \cdots \times [a_n, a_n + h_n]$.

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Le cas de base $n = 1$ correspond au TAF dans le cas d'une fonction d'une seule variable réelle et est donc vérifié. Supposons le résultat correct pour les fonctions à $n-1$ variables. On a

$$f(b_1,\dots,b_n) - f(a_1,\dots,a_n) = \big(f(b_1,\dots,b_{n-1},b_n) - f(b_1,\dots,b_{n-1},a_n)\big) \\ + \big(f(b_1,\dots,b_{n-1},a_n) - f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)\big).$$

Par hypothèse de récurrence, il existe des points $(c_1^{(1)},\dots,c_{n-1}^{(1)}),\dots,(c_1^{(n-1)},\dots,c_{n-1}^{(n-1)})$ de $I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ tels que

$$f(b_1,\dots,b_{n-1},a_n) - f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c_1^{(j)},\dots,c_{n-1}^{(j)},a_n)(b_j-a_j).$$

De plus, le TAF dans le cas d'une seule variable fournit $c_n \in I_n$ tel que

$$f(b_1,\dots,b_{n-1},b_n) - f(b_1,\dots,b_{n-1},a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(b_1,\dots,b_{n-1},c_n)(b_n-a_n).$$

On obtient donc le résultat en posant

$$c^{(j)} = (c_1^{(j)},\dots,c_{n-1}^{(j)},a_n) \quad \text{si } j \in \{1,\dots,n-1\}$$

et

$$c^{(n)} = (b_1,\dots,b_{n-1},c_n).$$

■

Remarque 8.4.4 En appliquant le résultat précédent aux points a et $a+h$, on obtient l'existence de points $h^{(1)},\dots,h^{(n)}$ de $\mathbb{R}^n$ de norme plus petite ou égale à $\|h\|$ tels que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h^{(j)})h_j.$$

On a vu que si f est une fonction d'une seule variable qui est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point. On obtient donc directement que si f est partiellement dérivable en ξ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ composante, alors elle est continue selon la $j^{\text{ème}}$ composante. Autrement dit, on a

$$\lim_{t\to\xi_j} f(\xi_1,\dots,\xi_{j-1},t,\xi_{j+1},\dots,\xi_n) = f(\xi_1,\dots,\xi_{j-1},\xi_j,\xi_{j+1},\dots,\xi_n) = f(\xi).$$

Attention, cela n'implique pas que la fonction est continue !

Exemple 8.4.5 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

est continue selon ses deux composantes en $(0,0)$ mais elle n'est pas continue en $(0,0)$ vu l'Exemple 8.3.3.

Pour obtenir la continuité, on ajoute une hypothèse sur les dérivées partielles.

Définition 8.4.6 Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est *continûment dérivable sur* U si f est dérivable sur U et si ses dérivées partielles sont continues sur U. Dans ce cas, on note

$$f \in C^1(U).$$

Proposition 8.4.7 *Si f est une fonction réelle continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors f est continue sur U.*

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence du TAF pour les fonctions de plusieurs variables. En effet, soit $\xi \in U$. On sait que si h est suffisamment petit, alors

$$\left|f(\xi+h)-f(\xi)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi+h^{(j)})h_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi+h^{(j)})\right| |h_j|$$

pour des points $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ de $\mathbb{R}^n$ de norme plus petite ou égale à $\|h\|$. Comme les dérivées partielles sont continues, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi+h^{(j)}) \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$$

lorsque $h \to 0$ (puisqu'alors on a $h^{(j)} \to 0$ par de théorème l'étau). On en tire que

$$\left|f(\xi+h)-f(\xi)\right| \to 0 \quad \text{si } h \to 0.$$

■

8.5 Différentiation des fonctions composées

Si g est une fonction d'une variable réelle, on peut la composer avec une fonction f à valeurs réelles et obtenir la formule

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(\xi) = g'(f(\xi))\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$$

lorsque les dérivées existent. On pourrait aussi prendre n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ réelles à m variables définies sur une partie de $\mathbb{R}^m$ et appliquer une fonction g à n variables à $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Si la composition a du sens, on définit ainsi une fonction $g(f_1, \ldots, f_n)$ à m variables en posant

$$g(f_1, \ldots, f_n)(x) = g\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big).$$

La résultat suivant nous montre comment dériver une telle fonction à partir des dérivées des fonctions qui la composent et des dérivées partielles de g.

Proposition 8.5.1 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions réelles dérivables sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ et soit g une fonction continûment dérivable sur un ouvert qui contient l'ensemble $\{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in U\}$. Alors, $g(f_1, \ldots, f_n)$ est une fonction dérivable sur U et on a*

$$\frac{\partial\big(g(f_1, \ldots, f_n)\big)}{\partial x_j}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $\xi \in U$.

Démonstration : Soit $\xi \in U$. Fixons $r > 0$ tel que la boule centrée en $(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi))$ et de rayon r soit incluse dans l'ouvert sur lequel g est dérivable. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la dérivabilité de f_k en ξ implique la continuité en ξ de f_k dans chaque direction, c'est-à-dire

$$f_k(\xi + he_j) \to f_k(\xi) \quad \text{si } h \to 0,\ h \in \mathbb{R}_0$$

quel que soit $j \in \{1, \ldots, m\}$. Appliquons à présent le TAF aux points $(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi))$ et $(f_1(\xi + he_j), \ldots, f_n(\xi + he_j))$ et à la fonction g. Il existe donc $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{aligned} & g\big(f_1(\xi + he_j), \ldots, f_n(\xi + he_j)\big) - g\big(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)\big) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\big((f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)) + H^{(k)}\big)\big(f_k(\xi + he_j) - f_k(\xi)\big) \end{aligned}$$

et on sait en plus que

$$\|H^{(k)}\| \leq \big|f_k(\xi + he_j) - f_k(\xi)\big|.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \frac{g\big(f_1(\xi + he_j), \ldots, f_n(\xi + he_j)\big) - g\big(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)\big)}{h} \\ & = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\big((f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)) + H^{(k)}\big)\frac{\big(f_k(\xi + he_j) - f_k(\xi)\big)}{h}. \end{aligned}$$

Si h tend vers 0, alors on a aussi $\|H^{(k)}\| \to 0$ et la continuité des dérivées partielles de g permet d'affirmer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}\big((f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)) + H^{(k)}\big) \to \frac{\partial g}{\partial x_k}\big((f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi))\big).$$

Puisqu'on a aussi par définition

$$\frac{\big(f_k(\xi + he_j) - f_k(\xi)\big)}{h} \to \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$$

si h tend vers 0, on obtient le résultat. ■

Exemple 8.5.2 On souhaite dériver la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = (\sin(xy))^2.$$

On calcule directement que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2\sin(xy)y\cos(xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2\sin(xy)x\cos(xy).$$

On peut aussi calculer ces dérivées partielles de la manière suivante.

▷ Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \sin(xy).$$

On constate directement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy).$$

▷ On pose maintenant

$$h(t) = t^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La formule précédente permet d'écrire

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = h'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\sin(xy)y\cos(xy)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = h'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sin(xy)x\cos(xy).$$

Exemple 8.5.3 On pose

$$h(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

avec $f_1(x,y) = x^2 - y^2$ et $f_2(x,y) = x - y$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que g est continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(x,y), f_2(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(x,y), f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\\ &= 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x^2-y^2, x-y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^2-y^2, x-y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(x,y), f_2(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(x,y), f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\\ &= -2y\frac{\partial g}{\partial x}(x^2-y^2, x-y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x^2-y^2, x-y).\end{aligned}$$

8.6 Dérivées directionnelles et gradient

Nous avons introduit les dérivées partielles qui donnent, un point, les taux de variation de la fonction dans les directions parallèles aux axes. On pourrait naturellement s'intéresser au taux de variation dans d'autres directions. On introduit pour cela la notion suivante.

Définition 8.6.1 Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, $\xi \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit f est *admet une dérivée directionnelle en* ξ *selon* v si la limite

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}_0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, on note cette limite

$$\partial_v f(\xi)\,.$$

Il est clair que cette définition généralise la notion de dérivée partielle puisqu'on a

$$\partial_{e_j} f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = D_j f(\xi).$$

Attention, malgré son nom, la dérivée directionnelle ne dépend pas que de la direction de v, mais aussi de sa longueur ! En effet, on a

$$\begin{aligned}\partial_{2v} f(\xi) &= \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}_0} \frac{f(\xi+2hv)-f(\xi)}{h}\\ &= 2\lim_{h'\to 0, h'\in\mathbb{R}_0} \frac{f(\xi+h'v)-f(\xi)}{h'} = 2\partial_v f(\xi)\end{aligned}$$

en posant $h' = 2h$. Pour cette raison, on s'intéresse en général aux dérivées directionnelles selon des vecteurs de norme 1. Montrons à présent que les dérivées directionnelles existent et peuvent se calculer facilement dès que les dérivées partielles sont connues et continues.

Définition 8.6.2 Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et dérivable en $\xi \in U$. On définit le *gradient de f en ξ*, noté $\nabla f(\xi)$ ou $\mathrm{grad}\, \mathrm{f}(\xi)$, comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes

$$\nabla f(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)\right).$$

Le gradient est donc simplement le vecteur formé des dérivées partielles.

Proposition 8.6.3 *Soit f une fonction réelle continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$. Alors,*

$$\partial_v f(\xi) = \langle \nabla f(\xi), v\rangle.$$

Démonstration : On veut montrer que

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}_0} \frac{f(\xi+hv)-f(\xi)}{h} = \langle \nabla f(\xi), v\rangle.$$

Si on définit la fonction g en posant

$$g(h) = f(\xi+hv)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}_0} \frac{f(\xi+hv)-f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}_0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0)$$

et il suffit de calculer $g'(0)$. Remarquons que

$$\xi + hv = (\xi_1 + hv_1, \ldots, \xi_n + hv_n)$$

et donc, si on pose

$$f_k(h) = \xi_k + hv_k$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$g(h) = f(f_1(h), \dots, f_n(h)).$$

La Proposition 8.5.1 donne donc

$$g'(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(f_1(0), \dots, f_n(0)) f_k'(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) v_k,$$

ce qui permet de conclure. ■

Le résultat suivant indique que le gradient indique la direction dans laquelle la fonction varie le plus rapidement.

Corollaire 8.6.4 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en ξ. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$|\partial_v f(\xi)| \leq \|v\| \, \|\nabla f(\xi)\|$$

avec égalité si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v = c \nabla f(\xi)$.

Démonstration : Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnée dans la Proposition 8.2.6 puisque $\partial_v f(\xi) = \langle \nabla f(\xi), v \rangle$. ■

Le corollaire précédent montre que si le vecteur $\nabla f(\xi)$ est non-nul, il définit la demi-droite issue de ξ sur laquelle la fonction f croît le plus fort. Ainsi,

- ▷ le taux de variation d'une fonction f en un point ξ est maximum dans la direction et le sens du vecteur $\nabla f(\xi)$,
- ▷ le taux de variation d'une fonction f en un point ξ est minimum dans la direction et le sens du vecteur $-\nabla f(\xi)$,
- ▷ le taux de variation d'une fonction f en un point ξ est nul dans toute direction orthogonale au vecteur $\nabla f(\xi)$.

8.7 Dérivées multiples et approximations polynomiales

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut se demander si les dérivées partielles admettent également des dérivées partielles. Par exemple, si f est une fonction de deux variables réelles telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, on peut se demander si $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ existent.

Définition 8.7.1 Soient f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, $\xi \in U$ et $p \in \mathbb{N}_0$.

- ▷ On appelle *dérivée partielle d'ordre* p de f en ξ toute expression de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{k_p}}(\xi)$$

  avec $k_1, \dots, k_p \in \{1, \dots, n\}$.
- ▷ On dit que f est p *fois continûment dérivable sur* U si toutes les dérivées partielles d'ordre $q \leq p$ existent en tout point de U et si chacune de ces dérivées partielles est continue sur U. On note $C^p(U)$ l'ensemble des fonctions p fois continûment dérivables sur U.

▷ On dit que f est *infiniment continûment dérivable sur* U si elle est p fois continûment dérivable sur U pour tout $p \in \mathbb{N}$. On note $C^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions infiniment continûment dérivables sur U.

En général, on utilise la notation

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_p}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{k_p}}.$$

Le résultat suivant montre que le calcul des dérivées partielles successives peut se faire dans n'importe quel ordre.

Proposition 8.7.2 *Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Considérons deux indices $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$. Si les dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_2} \partial x_{k_1}}$$

existent et sont continues sur U, alors elles sont égales.

Remarque 8.7.3 Signalons que dans la proposition précédente, l'hypothèse de continuité des dérivées partielles est essentielle.

Le résultat précédent se généralise de la manière suivante.

Proposition 8.7.4 *Si une fonction est p fois continûment dérivable sur U, alors toutes ses dérivées partielles d'ordre $q \leq p$ qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel on dérive sont égales.*

Ce résultat permet d'introduire des notations plus allégées pour les dérivées partielles. En effet, si f est p fois continûment dérivable sur un ouvert U, si $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$ sont tels que

$$j_1 + \cdots + j_m = p$$

et si $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$, on note

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1}^{j_1} \dots \partial x_{k_m}^{j_m}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m} \partial x_{k_m}}$$

où l'indice k_r est répété j_r fois. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est 3 fois continûment dérivable, on note

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}.$$

Comme dans le cas $n = 1$, l'idée derrière la formule de Taylor est de chercher un polynôme à n variables dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p en un point x_0 coïncident avec celles de la fonction f. Plus le degré p du polynôme est grand, plus on peut espérer approcher fidèlement la fonction f au voisinage de x_0. La formule de Taylor dans $\mathbb{R}^n$ prend la forme suivante.

Théorème 8.7.5 (Développement de Taylor dans $\mathbb{R}^n$) *Soit f une fonction réelle $p+1$ fois continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si $x_0, x_0+h \in U$ et si le segment joignant x_0 à x_0+h est inclus dans U, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) =& f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)h_k + \frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}}(x_0)h_{k_1}h_{k_2} \\ &+ \cdots + \frac{1}{p!}\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_p}}(x_0)h_{k_1}\ldots h_{k_p} \\ &+ \frac{1}{(p+1)!}\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_{p+1}=1}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_{p+1}}}(x_0+\theta h)h_{k_1}\ldots h_{k_{p+1}}. \end{aligned}$$

Exemple 8.7.6 Si $f(x,y) = \frac{x-1}{y-1}$, on a

$$f(h_1,h_2) = 1 - h_1 + h_2 - h_1h_2 + h_2^2 + o(\|(h_1,h_2)\|^2)$$

au voisinage de $(0,0)$.

Comme dans le cas univarié, le reste peut s'exprimer comme $o(\|h\|^p)$. Dans les cas $p=1$ et $p=2$, la formule de Taylor prend une forme plus simple. Pour cela, nous introduisons la matrice suivante.

Définition 8.7.7 Soit f une fonction réelle 2 fois continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si $\xi \in U$, la *matrice Hessienne de f en ξ* est la matrice carrée symétrique $H_f(\xi)$ définie par

$$\big(H_f(\xi)\big)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Ainsi, la matrice Hessienne de f en ξ est la matrice dont la composante à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne est la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_i et x_j.

Grâce à l'introduction de cette matrice, le développement de Taylor à l'ordre 1

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)h_k + \frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}}(x_0+\theta h)h_{k_1}h_{k_2}$$

se réecrit

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle hH_f(x_0+\theta h), h\rangle.$$

Si $p=2$, on peut aussi écrire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle hH_f(x_0), h\rangle + o(\|h\|^2).$$

8.8 Recherche d'extrema

Dans cette section, nous généralisons les méthodes développées pour la recherche d'extrema dans le cas de fonctions d'une variable réelle au cas de fonctions de plusieurs variables réelles.

Définition 8.8.1 Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ et soit $\xi \in A$. On dit que

▷ f admet un *maximum local* en ξ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$f(x) \leq f(\xi)$$
pour tout $x \in A \cap b(\xi, \varepsilon)$;

▷ f admet un *minimum local* en ξ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$f(x) \geq f(\xi)$$
pour tout $x \in A \cap b(\xi, \varepsilon)$;

▷ f admet un*extremum local* en ξ si f admet un maximum local ou un minimum local en ξ.

Si les inégalités ci-dessus sont strictes pour $x \neq \xi$, on parle de maximum ou minimum local *strict*.

Le résultat suivant se déduit facilement du cas d'une fonction d'une variable réelle puisque le calcul des dérivées partielles s'effectue comme une limite d'une fonction d'une seule variable, les autres étant fixées.

Proposition 8.8.2 *Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui contient ξ. Si f est dérivable en ξ et si ξ est un extremum local de f, alors*
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = 0 \quad \textit{pour tout } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Démonstration : Supposons que ξ est un maximum local. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq f(\xi)$ pour tout $x \in b(\xi, \varepsilon)$. En particulier,
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + h, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) - f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{h} \leq 0$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h} \geq 0,$$
ce qui suffit pour conclure. ■

Définition 8.8.3 Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Un point $\xi \in U$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ est appelé un *point stationnaire* de f dans U, ou encore un *point critique*.

Un point stationnaire est donc un point en lequel le gradient s'annule. Comme dans le cas univarié, tout extrema local est un point stationnaire mais la réciproque est fausse.

Exemple 8.8.4 Considérons la fonction f définie en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = xy.$$

Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

et par conséquent, $(0,0)$ est un point stationnaire de f. Ce n'est cependant pas un extremum local de f puisque pour tout $t \in \mathbb{R}_0$, on a

$$f(t,t) = t^2 > 0 \quad \text{et} \quad f(t,-t) = -t^2 < 0.$$

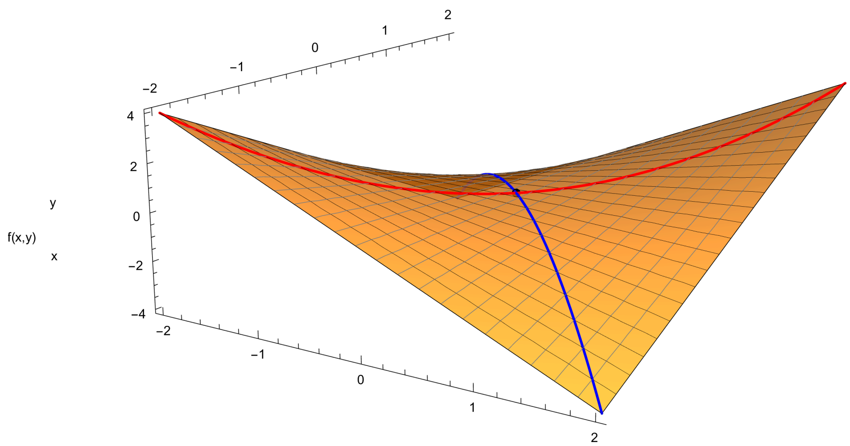


FIGURE 8.4 – Surface de la fonction $f(x,y) = xy$. Le point noir au centre correspond au point stationnaire $(0,0)$. La courbe rouge montre les valeurs de f le long de la droite $y = x$ et la courbe bleue le long de la droite $y = -x$. Cela montre que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

Dans le cas univarié, nous avons utilisé le développement de Taylor à l'ordre 2 pour obtenir le test de la dérivée seconde et détecter si des points stationnaires sont effectivement des extrema. Supposons que ξ est un point stationnaire de f. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ suffisamment petit, le développement de Taylor à l'ordre 2 donne $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(\xi + h) = f(\xi) + \frac{1}{2}\langle hH_f(\xi + \theta h), h\rangle$$

puisque le gradient de f en ξ est le vecteur nul. Si $\langle hH_f(\xi + \theta h), h\rangle > 0$, on en tire que

$$f(\xi + h) > f(\xi).$$

Ceci motive le rappel suivant des notions d'algèbre matricielle.

Définition 8.8.5 On dit qu'une matrice symétrique $H \in \mathbb{R}^n_n$ est

- ▷ *définie positive* si $\langle xH, x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- ▷ *définie négative* si $\langle xH, x\rangle < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- ▷ *semi-définie positive* si $\langle xH, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
- ▷ *semi-définie négative* si $\langle xH, x\rangle \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
- ▷ *indéfinie* dans les autres cas.

Rappelons également le critère pratique suivant.

Proposition 8.8.6 *Soit $H \in \mathbb{R}^n_n$ une matrice symétrique dont toutes les sous-matrices diagonales $H_1, \ldots, H_n$ de H occupant le coin supérieur gauche ont un déterminant non-nul. Alors H est*

- ▷ *définie positive si et seulement si* $\det H_k > 0$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *;*
- ▷ *définie négative si et seulement si* $(-1)^k \det H_k > 0$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *;*
- ▷ *indéfinie sinon.*

Remarque 8.8.7 On montre en algèbre matricielle que toute matrice carrée symétrique H est diagonalisable par une matrice carrée orthogonale réelle et que les valeurs propres de H sont des nombres réels. On en tire que

- ▷ H est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives ;
- ▷ H est définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement négatives ;
- ▷ H est semi-définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ;
- ▷ H est semi-définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont négatives ;
- ▷ H est indéfinie si elle possède au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

Le lien avec la recherche des extrema s'énonce comme suit.

Proposition 8.8.8 *Soit f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $\xi \in I$ un point stationnaire de f.*

- ▷ *Si $H_f(\xi)$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en ξ.*
- ▷ *Si $H_f(\xi)$ est définie négative, alors f admet un maximum local strict en ξ.*
- ▷ *S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H_f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in b(\xi, \varepsilon)$, alors f admet un minimum local en ξ.*
- ▷ *S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H_f(x)$ est semi-définie négative pour tout $x \in b(\xi, \varepsilon)$, alors f admet un maximum local en ξ.*

Démonstration : 1. Si $H_f(\xi)$ est définie positive, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la sous-matrice diagonale carrée de dimension j de $H_f(\xi)$ occupant le coin supérieur gauche a un déterminant strictement positif. Par continuité, il existe $r_j > 0$ tel que ce déterminant de la sous-matrice diagonale carrée de dimension j de $H_f(x)$ occupant le coin supérieur gauche reste positif pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \in b(\xi, r_j)$. En prenant $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, on obtient que $H_f(x)$ est définie positive pour tout $x \in b(\xi, r)$. Maintenant, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| < r$, le développement de Taylor à l'ordre 2 donne $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(\xi + h) = f(\xi) + \frac{1}{2}\langle hH_f(\xi + \theta h), h\rangle$$

puisque le gradient de f en ξ est le vecteur nul. Comme $\|h\| < r$, on a $\xi + \theta h \in b(\xi, r)$ et donc $H_f(\xi + \theta h)$ est définie positive. Ainsi,

$$\langle hH_f(\xi + \theta h), h\rangle > 0$$

et on en tire que
$$f(\xi+h) > f(\xi).$$

2. On procède comme dans le premier cas.

3. On procède à nouveau comme dans le premier cas. Supposons que $H_f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in b(\xi, \varepsilon)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| < \varepsilon$, le développement de Taylor à l'ordre 2 donne $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(\xi+h) = f(\xi) + \frac{1}{2}\langle hH_f(\xi+\theta h), h\rangle$$

puisque le gradient de f en ξ est le vecteur nul. Comme $\|h\| < \varepsilon$, on a $\xi + \theta h \in b(\xi, \varepsilon)$ et donc $H_f(\xi+\theta h)$ est semi-définie positive. Ainsi,

$$\langle hH_f(\xi+\theta h), h\rangle \geq 0$$

et on en tire que
$$f(\xi+h) \geq f(\xi).$$

4. Le dernier point se démontre de manière identique au troisième point. ■

Terminons en présentant le cas indéfini.

Proposition 8.8.9 *Soit f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $\xi \in I$ un point stationnaire de f. Si $H_f(\xi)$ est indéfinie, alors ξ n'est pas un extremum local de f dans U.*

Démonstration : Comme $H_f(\xi)$ est indéfinie, il existe $h, h' \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\langle hH_f(\xi), h\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle h'H_f(\xi), h'\rangle < 0.$$

Par continuité de la matrice Hessienne, pour tout $\theta > 0$ suffisamment petit, on a

$$\langle hH_f(\xi+\theta h), h\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle h'H_f(\xi+\theta h'), h'\rangle < 0.$$

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 2 [1], on trouve que

$$f(\xi+h) > f(\xi) \quad \text{et} \quad f(\xi+h') < f(\xi).$$

■

1. Quitte à multiplier h et h' par une constante, on peut supposer que leur norme est sufisamment petite et donc que $\xi + h \in U$ et $\xi + h' \in U$.

Chapitre 9

Fonctions élémentaires

Ce chapitre se consacre à l'exploration des fonctions élémentaires. Nous entamons notre étude avec les séries de puissances, parmi lesquelles la fonction exponentielle occupe une place particulière. À partir de l'exponentielle, nous abordons également la fonction logarithmique ainsi que les fonctions trigonométriques et circulaires.

9.1 Séries de puissances

Si f est une fonction de classe C^∞ sur $]a,b[$ et si $x_0 \in]a,b[$, alors on peut effectuer le développement limité de f à n'importe quel ordre. Pour certaines fonctions, le reste $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ converge vers 0 pour tout point $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, pour un certain $R > 0$ suffisamment petit. Dans ce cas, on trouve que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

pour tout $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. On a donc obtenu un développement *illimité* de f autour de x_0. Une telle série s'appelle une *série de puissances* de $(x - x_0)$.

Remarque 9.1.1 Attention, en général, la relation entre la série de Taylor et la fonction f n'est pas aussi intime qu'on pourrait l'imaginer :

- ▷ il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que la série de Taylor de f en 0 diverge pour tout $x \neq 0$;
- ▷ il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que la série de Taylor de f en 0 converge en tout point $x \in \mathbb{R}$, mais la valeur de la série est différente de $f(x)$ si $x \neq 0$. C'est le cas de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  pour laquelle $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les séries de puissances fournissent un outil pratique pour définir des fonctions et étudier leurs propriétés. Les séries de puissances possèdent des propriétés de convergence et de régularité remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide de leur rayon de convergence R. Grossièrement parlant, une série de puissances est un polynôme de degré infini où bien sûr, il faut faire intervenir une limite dans la définition.

Définition 9.1.2 Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La *série de puissances* associée à la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $(x - x_0)$ est la série définie par

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (x - x_0)^j.$$

Pour x_0 et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ fixés, le premier objectif est de déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série est convergente. Sur cet ensemble, on aura alors défini une fonction.

Exemple 9.1.3 La série de puissances associée à la suite constante égale à 1 en x est la série géométrique en x

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^j$$

qui converge si $|x| < 1$ et diverge sinon. Elle définit donc une fonction sur $]-1, 1[$ et on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour tout} \quad x \in]-1, 1[\,.$$

Nous allons étendre cette étude en définissant une fonction *à variable complexe*. Autrement dit, on fixe une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et un nombre complexe $z_0 \in \mathbb{C}$ et on étudie les propriétés de convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j$$

pour $z \in \mathbb{C}$.

La convergence d'une série de puissances est traitée en introduisant le concept de *rayon de convergence*.

Proposition 9.1.4 (Abel) *Si la suite $(|a_j| r^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série de puissances*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j$$

converge en tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < r$.

Démonstration : Par hypothèse, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|a_j| r^j \leq C$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < r$. On peut écrire

$$\left| a_j (z - z_0)^j \right| = |a_j| r^j \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^j \leq C \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^j.$$

Comme $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$, la série de raison $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$ converge et le critère de comparaison permet de conclure. ∎

On considère l'ensemble

$$I = \{r \geq 0 : (|a_j| r^j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est une suite bornée }\}.$$

Remarquons que cet ensemble contient 0 et est un intervalle de $[0, +\infty[$. En effet, si $r_0 \in I$ est tel que la suite $(|a_j| r_0^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée par une constante $C > 0$, alors pour tout $r < r_0$, on a

$$|a_n| r^n = |a_n| r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq C.$$

Ainsi $r \in I$. On est donc amené à considérer le "plus grand" r pour lequel la suite $(|a_j| r^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 9.1.5 Le *rayon de convergence* de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j$$

est défini par

$$R = \sup\{r \geq 0 : (|a_j| r^j)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite bornée }\}.$$

Une série de puissances converge si $|z - z_0| < R$ et diverge si $|z - z_0| > R$, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 9.1.6 *Si R est le rayon de convergence de la série de puissances*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

alors

1. *si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z - z_0| < R$, la série de puissances converge absolument en z,*
2. *si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z - z_0| > R$, la série de puissances diverge en z.*

Démonstration : 1. Si $|z - z_0| < R$, alors il existe $r < R$ tel que $|z - z_0| < r$. Comme $R = \sup I$ et que I est un intervalle, on a $r \in I$ et la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La Proposition 9.1.4 permet de conclure.

2. Si $|z - z_0| > R$, alors $|z - z_0| \notin I$. Par conséquent, la suite $(|a_n|\, |z - z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. En particulier, elle ne converge pas vers 0. La série ne peut donc pas converger. ■

Exemple 9.1.7 Le rayon de convergence peut prendre toutes les valeurs de 0 à $+\infty$ inclus.

▷ Le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} j!(z - z_0)^j$$

est égal à 0 car pour tout $r > 0$, la suite $(j! r^j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

▷ Le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{R^j}(z-z_0)^j$$

où $R>0$ est égal à R.

▷ Le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}(z-z_0)^j$$

est égal à $+\infty$ car pour tout $r>0$, la suite $(\frac{r^j}{j!})_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et est donc bornée.

Exemple 9.1.8 Le cas des nombres pour lesquels $|z-z_0|=R$ est indéterminé en général.

▷ Le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (z-z_0)^j$$

est égal à 1 et la série diverge si $|z-z_0|=1$ puisque son terme général ne tend pas vers 0.

▷ Le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j}(z-z_0)^j$$

est égal à 1, la série est convergente si $z-z_0=-1$ et diverge si $z-z_0=1$.

▷ Le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^2}(z-z_0)^j$$

est égal à 1 et la série est convergente si $|z-z_0|=1$.

En pratique, il est parfois possible d'éviter le calcul de la borne supérieure apparaissant dans la définition du rayon de convergence. On peut plutôt déterminer celui-ci en utilisant le critère du quotient et de la racine.

Proposition 9.1.9 *Soit R le rayon de convergence de la série de puissances*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(z-z_0)^j.$$

Supposons que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. *la suite*

$$\left(|a_j|^{\frac{1}{j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

admet une limite L finie ou infinie, *2. il existe $J \geq 0$ tel que $a_j \neq 0$ pour tout $j \geq J$ et la suite*

$$\left(\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|}\right)_{j\geq J}$$

admet une limite L finie ou infinie.

Alors, on a

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{si } L = 0 \\ \frac{1}{L} & \text{si } L \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } L = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration : 1. Si $|a_j|^{\frac{1}{j}} \to L$, alors on a

$$\left(|a_j|\,|z - z_0|^j\right)^{\frac{1}{j}} = |a_j|^{\frac{1}{j}}|z - z_0| \to L\,|z - z_0| \quad \text{si } j \to +\infty.$$

Le critère de la racine permet d'affirmer que la série converge si $|z - z_0| < \frac{1}{L}$ et diverge si $|z - z_0| > \frac{1}{L}$ (avec les adaptations évidentes si $L = 0$ ou $L = +\infty$).

2. Si $\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \to L$, alors on a

$$\frac{|a_{j+1}|\,|z - z_0|^{j+1}}{|a_j|\,|z - z_0|^j} = \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|}|z - z_0| \to L|z - z_0|$$

et on conclut en utilisant le critère du quotient. ■

Plaçons-nous à nouveau dans le cas d'une variable réelle. Si R est le rayon de convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x - x_0)^j,$$

alors celle-ci définit une fonction sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ ou un des intervalles $[x_0 - R, x_0 + R[$, $]x_0 - R, x_0 + R]$, $[x_0 - R, x_0 + R]$. Dans les 4 cas, on peut s'intéresser aux propriétés de dérivabilité de la série sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. Il est intéressant de noter que les séries de puissances sont particulièrement régulières à l'intérieur de leur intervalle de convergence. En particulier, le résultat suivant nous indique qu'il suffit de dériver chaque terme individuel de la série pour obtenir la dérivée de la série elle-même. Cette propriété découle du concept de convergence uniforme de suites de fonctions, un sujet que vous explorerez l'année prochaine. Pour le moment, nous allons l'accepter comme un fait établi.

Proposition 9.1.10 *Soit R le rayon de convergence de la série de puissances*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x - x_0)^j.$$

Alors, la fonction

$$S : x \in]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (x - x_0)^j$$

est infiniment continûment dérivable dans $]x_0 - R, x_0 + R[$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}_0$, *on a*

$$S^{(n)}(x) = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j \frac{j!}{(j-n)!} (x - x_0)^{j-n}$$

si $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

Exemple 9.1.11 Cherchons le domaine de convergence de la série de puissances

$$S(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j 2^j} x^j,$$

c'est-à-dire l'ensemble des points où la série définit bien une fonction. On utilise le critère du quotient car

$$\frac{\frac{1}{(j+1)2^{j+1}}}{\frac{1}{j2^j}} = \frac{j}{2(j+1)} \to \frac{1}{2}$$

et le rayon de convergence de la série est donc égal à 2. Cela signifie que la série converge absolument pour tout $x \in]-2, 2[$ et diverge si $|x| > 2$. Si $x = 2$, on retrouve la série harmonique qui diverge et si $x = -2$, on a la série harmonique alternée qui converge. Ainsi, la série de puissances est bien définie sur $[-2, 2[$. On calcule directement que

$$S'(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} x^{j-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} x^j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^j = \frac{1}{2-x}$$

si $x \in]-2, 2[$.

Exemple 9.1.12 Calculons la valeur des séries

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j x^{j-1} \quad \text{et} \quad \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1) x^{j-2}$$

pour $x \in]-1, 1[$. On remarque tout d'abord que la série

$$S(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j$$

a un rayon de convergence égal à 1 et on sait que si $x \in]-1, 1[$, alors

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

On calcule

$$S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad S''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Par la Proposition 9.1.10, on obtient donc que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j x^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)x^{j-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

9.2 La fonction exponentielle

Nous allons à présent définir la fonction exponentielle et démontrer ses propriétés principales. On introduit l'étude de la fonction exponentielle en cherchant la forme que devrait avoir une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$. Pour cela, on remarque tout d'abord que les polynômes

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

donnent un espoir de solution puisque

$$P_n'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On est donc naturellement amené à étudier la série de puissances en x associée à la suite $\left(\frac{1}{j!}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Nous allons généraliser la définition de l'exponentielle que vous connaissez à une fonction à variable complexe définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Définition 9.2.1 La fonction *exponentielle* est la fonction définie par

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z) = e^z = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!}.$$

Remarquons que cette définition est légitime car

$$\frac{\frac{1}{(j+1)!}}{\frac{1}{j!}} = \frac{1}{j+1} \to 0 \quad \text{si } j \to +\infty$$

et donc le rayon de convergence de la série de puissances est égal à $+\infty$.

Proposition 9.2.2 *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

Démonstration : Par définition, on a

$$\big|\exp(z+w) - \exp(z)\exp(w)\big| = \lim_{n\to+\infty} \left| \sum_{j=0}^{n} \frac{(z+w)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{j=0}^{n} \frac{w^j}{j!} \right|.$$

De plus, en utilisant la formule du binôme de Newton, on calcule

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\frac{(z+w)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} C_j^k\frac{z^{j-k}w^k}{j!} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\frac{z^{j-k}}{(j-k)!}\frac{w^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{z^{j-k}}{(j-k)!}\frac{w^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{z^l}{l!}\frac{w^k}{k!}\end{aligned}$$

en changeant l'ordre de sommation et en posant $l = j-k$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{n}\frac{(z+w)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{j=0}^{n}\frac{w^j}{j!}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{z^l}{l!}\frac{w^k}{k!} - \sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{j=0}^{n}\frac{w^j}{j!}\right|\\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=n-k+1}^{n}\frac{z^l}{l!}\frac{w^k}{k!}\right|\\ &= \left|\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\sum_{l=n-k+1}^{n}\frac{z^l}{l!}\frac{w^k}{k!} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}\sum_{l=n-k+1}^{n}\frac{z^l}{l!}\frac{w^k}{k!}\right|\\ &\leq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\sum_{l=\frac{n}{2}}^{n}\frac{|z|^l}{l!}\frac{|w|^k}{k!} + \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}\frac{|z|^l}{l!}\frac{|w|^k}{k!}\\ &\leq \exp(|w|)\sum_{l=\frac{n}{2}}^{+\infty}\frac{|z|^l}{l!} + \exp(|z|)\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{+\infty}\frac{|w|^k}{k!}\end{aligned}$$

et ce dernier terme tend vers 0 si n tend vers l'infini puisqu'il s'agit de la queue de séries qui convergent. ■

Les conséquences de cette propriété fondamentale[1] de l'exponentielle sont directes mais très importantes.

Proposition 9.2.3 *On a* $\exp(0) = 1$ *et pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

- ▷ $\exp(z)\exp(-z) = 1$
- ▷ $\exp(z) \neq 0$
- ▷ $\exp(z) = \exp(\Re z)\exp(i\Im z)$
- ▷ $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
- ▷ $|\exp(z)| = \exp(\Re z)$.

En particulier,

$$|e^{ix}| = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. C'est une deuxième manière d'introduire la fonction exponentielle : on cherche une fonction f qui satisfait $f(z+w) = f(z)f(w)$ pour tous $z, w \in \mathbb{C}$. On obtient alors son développement en série de puissances en utilisant le théorème de Taylor.

Démonstration : Il est clair que

$$\exp(0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{0^j}{j!} = 1$$

puisque $0^j = 0$ pour tout $j \neq 0$. On en tire que $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$ et en particulier, $\exp(z) \neq 0$. De plus, on a $\exp(z) = \exp(\Re z + i\Im z) = \exp(\Re z)\exp(i\Im z)$.
On peut aussi écrire

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!}} = \lim_{n\to+\infty} \overline{\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{z}^j}{j!} = \exp(\overline{z})$$

et donc

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z+\overline{z}) = \exp(2\Re z) = \exp(\Re z+\Re z) = (\exp(\Re z))^2.$$

On en tire que $|\exp(z)| = |\exp(\Re z)|$. De plus,

$$\exp(\Re z) = \exp(\Re z/2)\exp(\Re z/2) = (\exp(\Re z/2))^2$$

et donc $\exp(\Re z) > 0$, d'où $|\exp(z)| = \exp(\Re z)$. Enfin, si $x \in \mathbb{R}$, alors pour $z = ix$, on a

$$|\exp(ix)| = \exp(\Re z) = \exp(0) = 1,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous allons maintenant présenter les principales propriétés de la fonction exponentielle réelle

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x) = e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Il s'agit simplement de la restriction de l'exponentielle complexe à $\mathbb{R}$. On va donc pouvoir parler de positivité, de croissance...

Proposition 9.2.4 (Exponentielle réelle)

1. *La fonction* exp *est infiniment continûment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\exp(x) > 0$.
3. *La fonction* exp *est strictement croissante et convexe sur* $\mathbb{R}$.
4. *On a*
$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$
Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0.$$

Démonstration : 1. Cela découle immédiatemment de la Proposition 9.1.10.

2. On sait que l'exponentielle est toujours non-nulle. De plus, $|\exp(x)| = \exp(\Re x) = \exp(x)$, donc $\exp(x) > 0$.

3. Puisque $\exp'' = \exp' = \exp$ et que l'exponentielle est strictement positive, cela découle des Propositions 7.4.4 et 7.6.1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x > 0$, on a

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On en tire que

$$\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}$$

et il s'ensuit par comparaison que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty.$$

Pour la deuxième limite, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} (-x)^n \exp(-x) = (-1)^n \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

vu ce qui précède. ■

Le dernier point signifie que "l'exponentielle l'emporte sur les puissances". On peut aussi montrer cette propriété en utilisant le théorème de l'Hospital.

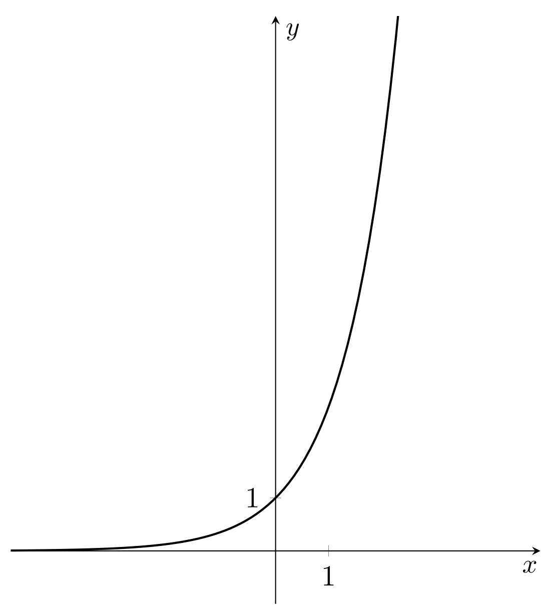


FIGURE 9.1 – Représentation graphique de la fonction exp réelle.

Terminons cette section en introduisant le nombre e.

Définition 9.2.5 Le nombre e est défini par

$$e = e^1 = \exp(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}.$$

Remarquons que

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ fois}}) = \underbrace{\exp(1) \ldots \exp(1)}_{m \text{ fois}} = e^m,$$

ce qui justifie la notation employée. A partir de sa définition, on peut démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. On a $e \approx 2.71828$.

9.3 La fonction logarithme

Puisque la fonction exponentielle réelle est strictement croissante, à valeurs dans $]0, +\infty[$ avec une limite égale à 0 en $-\infty$ et à $+\infty$ en $+\infty$, il s'agit d'une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. La définition suivante est donc légitime.

Définition 9.3.1 Le *logarithme naturel* ou *logarithme népérien* est la fonction inverse de $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. On le note

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in]0, +\infty[$, le nombre $\ln(y)$ est l'unique nombre réel qui satisfait

$$\exp(\ln(y)) = y.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\ln(\exp(x)) = x.$$

Les propriétés du logarithme se déduisent directement de celles de l'exponentielle.

Proposition 9.3.2

1. *La fonction* ln *est infiniment continûment dérivable et vérifie*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. *La fonction* ln *est strictement croissante et concave.*
3. *On a* $\ln(1) = 0$ *et*

$$\ln(x) < 0 \ \text{ si } \ x \in]0, 1[\quad \text{et} \quad \ln(x) > 0 \ \text{ si } \ x \in]1, +\infty[.$$

4. *Pour tous* $x, y > 0$, *on a*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}_0$ *et tout* $x > 0$, *on a*

$$\ln(x^n) = n \ln(x) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

6. *On a*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^n(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0.$$

Démonstration : 1. On applique le Théorème 7.2.6 pour obtenir que ln est dérivable et que

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

puisque la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. De là, on en tire que ln est de classe $C^\infty(\,]0,+\infty[\,)$.

2. Cela découle des Propositions 7.4.4 et 7.6.1 puisque

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{et} \quad \ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$$

si $x \in]0,+\infty[$.

3. On a $\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0$. La croissance stricte de la fonction ln permet d'obtenir les deux inégalités annoncées.

4. Pour tous $x, y > 0$, on a

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x))\exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$$

et donc $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

5. Il s'agit d'un cas particulier du point 4 puisque

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x\cdots x}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\ln(x) + \cdots + \ln(x)}_{n \text{ fois}} = n\,\ln(x).$$

Pour la seconde partie, on note que

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln(1) = 0.$$

6. En utilisant la Proposition 5.4.27, on peut écrire

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{y\to -\infty} \ln(\exp(y)) = \lim_{y\to -\infty} y = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = \lim_{y\to +\infty} \ln(\exp(y)) = \lim_{y\to +\infty} y = +\infty.$$

7. On applique à nouveau la Proposition 5.4.27 pour écrire

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \ln^n(x)\exp(-\ln(x)) = \lim_{y\to +\infty} y^n\exp(-y) = 0$$

et on en tire que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^n(x) = \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y}\ln^n\left(\frac{1}{y}\right) = (-1)^n \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln^n(y)}{y} = 0.$$

■

La dernière propriété signifie que “toute puissance l’emporte sur la fonction logarithme”.

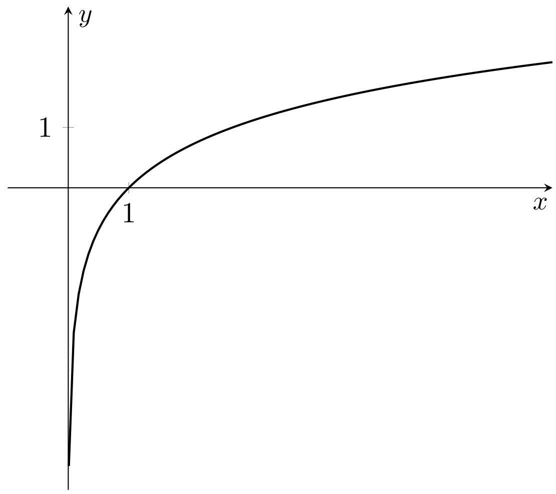


FIGURE 9.2 – Représentation graphique de la fonction ln.

9.4 Les fonctions exponentielle et logarithme en base a

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien introduites précédemment nous permettent de définir des fonctions exponentielle et logarithme en base $a > 0$. Ces fonctions vont être l’inverse l’une de l’autre. Si $a = e$, on retrouve les définitions précédentes. L’exponentielle en base x permet définir la valeur de x^b, que l’on avait seulement introduit pour des puissances rationnelles.

Définition 9.4.1 Soit $a > 0$. La fonction *exponentielle de base a* est la fonction définie par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Si $a = e$, on a $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$, et donc on a bien généralisé la définition de l’exponentielle. Remarquons également que si $n \in \mathbb{N}_0$, alors

$$a^n = \exp(n \ln(a)) = \exp(\ln(a^n)) = a^n$$

et on retrouve les puissances naturelles. On peut faire de même avec $q \in \mathbb{Q}$ puisque

$$a^q = \exp(q \ln(a)) = \exp(\ln(a^q)) = a^q.$$

On retrouve donc bien toutes les puissances rationnelles de $a > 0$ que l’on avait déjà considérées. Les propriétés de l’exponentielle en base a se déduisent aisément de celles de l’exponentielle. Le cas $a = 1$ n’est pas présenté car il correspond simplement à la fonction constante égale à 1.

Proposition 9.4.2 *Si $a > 0$, la fonction exponentielle en base a*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$$

satisfait les propriétés suivantes :

1. *elle est strictement positive,*

2. *elle est infiniment continûment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$(a^x)' = a^x \ln(a),$$

3. *elle est strictement croissante si* $a > 1$ *et strictement décroissante si* $0 < a < 1$,
4. *elle est convexe,*
5. *on a*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

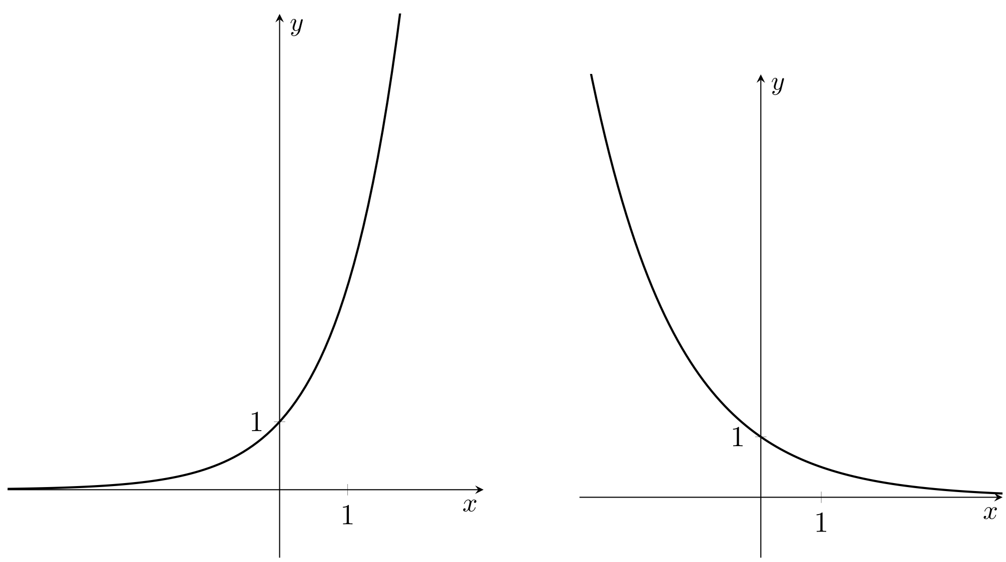


FIGURE 9.3 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto 3^x$ à gauche et de la fonction $x \mapsto (1/2)^x$ à droite.

Remarquons qu'on a également les formules suivantes. Il s'agit de simples vérifications.

Proposition 9.4.3 *Soit* $a > 0$. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{et} \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_0$, *on a*

$$\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = a.$$

Si $a \neq 1$, la fonction exponentielle en base a est strictement monotone, elle définit une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$. A nouveau, on peut considérer son application inverse.

Définition 9.4.4 Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Le *logarithme en base a* est la fonction inverse de l'exponentielle en base a. On le note

$$\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in]0,+\infty[$, le nombre $\log_a(y)$ est l'unique nombre réel qui satisfait

$$a^{\log_a(y)} = y.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\log_a(a^x) = x.$$

Le logarithme népérien est donc le logarithme en base e.

Notation 9.4.5 Si $a = 10$, le logarithme en base 10 est noté simplement log.

Proposition 9.4.6 *Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Démonstration : En effet, on a

$$a^{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\ln(a)\right) = \exp(\ln(x)) = x.$$

■

Par conséquent, les propriétés du logarithme en base a sont données par celles du logarithme népérien, en tenant compte du signe de $\ln(a)$. Ainsi, si $a \in]0,1[$, le logarithme en base a est strictement décroissant tandis que si $a > 1$, il est strictement croissant. On a aussi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{pour tous } x, y > 0.$$

9.5 Les fonctions puissances

Nous généralisons à présent les fonctions de puissances rationnelles

$$x \mapsto x^q$$

pour $q \in \mathbb{Q}$.

Définition 9.5.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction *puissance a* est la fonction définie par

$$x \in]0,+\infty[\mapsto x^a = \exp(a\ln(x)).$$

A nouveau, les propriétés de cette fonction s'obtiennent en utilisant les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Proposition 9.5.2 *Si $a \in \mathbb{R}$, la fonction puissance a*

$$x \in]0,+\infty[\mapsto x^a$$

satisfait les propriétés suivantes :

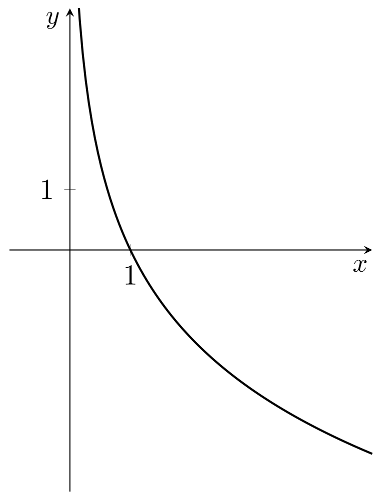


FIGURE 9.4 – Représentation graphique de la fonction $\log_a$ avec $a = \frac{1}{3}$.

1. *elle est strictement positive,*
2. *elle est infiniment continûment dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et*

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

3. *elle est strictement croissante si* $a > 0$ *et strictement décroissante si* $a < 0$,
4. *elle est convexe si* $a \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ *et concave si* $a \in]0, 1[$,
5. *on a*

$$\lim_{x \to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

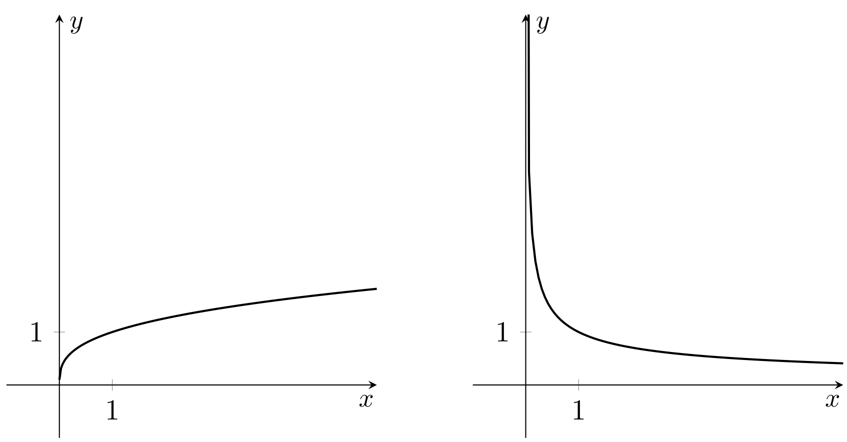


FIGURE 9.5 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ à gauche et de la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$ à droite.

On trouve également directement la formule suivante.

Proposition 9.5.3 *Pour tous $x, y > 0$, on a*

$$x^a y^a = (xy)^a.$$

Démonstration : En effet, on a

$$x^a y^a = \exp(a\ln(x))\exp(a\ln(y)) = \exp(a(\ln(x)+\ln(y))) = \exp(a\ln(xy)) = (xy)^a.$$

■

9.6 Les fonctions trigonométriques

Nous introduisons dans cette section les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente. Nous avons vu que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = e^{\Re z} e^{i\Im z}.$$

Ainsi, pour bien comprendre l'exponentielle complexe, il suffit de bien comprendre les deux fonctions à variable réelle

$$x \mapsto e^x \quad \text{et} \quad x \mapsto e^{ix}.$$

Nous avons déjà étudié la première fonction. Pour étudier la seconde, qui est à valeurs complexes, on étudie séparément sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Définition 9.6.1 La fonction *cosinus* est la fonction définie par

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

La fonction *sinus* est la fonction définie par

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

On remarque que ces fonctions sont bien à valeurs dans $[-1,1]$ puisque $|e^{ix}| = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Cette formule nous montre aussi que les fonctions cosinus et sinus ne s'annulent jamais en même temps. Grâce à cette formule, on peut faire un lien avec le cercle trigonométrique et l'interprétation usuelle du cosinus et du sinus. En effet, posons $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$. Alors, on a

$$a^2 + b^2 = 1$$

et donc le couple (a, b) correspond à un point du cercle unité. Bien sûr, on a les relations

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \text{et} \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)}$$

valables pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par définition de e^{ix} via les séries de puissances, on a aussi les développements en série suivants.

Proposition 9.6.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

et ces séries sont absolument convergentes.

Démonstration : Cela provient des égalités

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \Re(i^j) \frac{x^j}{j!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \Im(e^{ix}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \Im(i^j) \frac{x^j}{j!}$$

et

$$i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 4k \\ i & \text{si } j = 4k+1 \\ -1 & \text{si } j = 4k+2 \\ -i & \text{si } j = 4k+3. \end{cases}$$

■

On pourrait également retrouver ce résultat en utilisant le développement de Taylor. Les propriétés des fonctions cosinus et sinus découlent de celles de l'exponentielle.

Proposition 9.6.3

1. *Les fonctions cosinus et sinus sont infiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\cos' = -\sin \quad \textit{et} \quad \sin' = \cos\,.$$

2. *La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.*
3. *On a $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.*

Démonstration : Tout découle des relations

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

■

En manipulant les définitions, on trouve les formules trigonométriques suivantes.

Proposition 9.6.4 *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y) \\
\cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2\sin(x)\sin(y) \\
\sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2\sin(x)\cos(y) \\
\sin(x) \pm \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
2\cos^2(x) &= 1 + \cos(2x) \\
2\sin^2(x) &= 1 - \cos(2x).
\end{aligned}$$

Démonstration : Les deux formules d'addition découlent de

$$\begin{aligned}
\cos(x \pm y) + i\sin(x \pm y) &= e^{i(x \pm y)} \\
&= e^{ix}e^{\pm iy} \\
&= \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\big(\cos(y) \pm i\sin(y)\big) \\
&= \big(\cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\big) + i\big(\sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)\big)
\end{aligned}$$

et il suffit ensuite d'identifier les parties réelles et imaginaires. De là, on déduit les trois formules suivantes. En posant $x' = x \pm y$ et $y' = x \mp y$, on en déduit les trois égalités suivantes. Les formules d'addition en $x = y$ donnent les formules pour les angles doubles. Enfin, les deux dernières égalités (formules de Carnot) s'obtiennent en prenant $x = y$ dans les troisièmes et quatrièmes formules. ∎

Introduisons à présent le nombre π. En utilisant le développement en série de puissances du cosinus, on peut montrer que $\cos(2) < 0$. Comme $\cos(0) = 1$ et que la fonction cosinus est continue, le TVI implique qu'elle possède un zéro dans l'intervalle $]0,2[$. De plus, en utilisant le développement en série de puissances du cosinus, on peut montrer que $\sin(x) > 0$ pour tout $x \in]0,2[$. Comme $\cos' = -\sin$, la fonction cosinus est donc strictement décroissante sur $]0,2[$. Au total, le cosinus admet un unique zéro dans $]0,2[$.

Définition 9.6.5 Le nombre π est défini comme le nombre égal à deux fois l'unique zéro du cosinus dans $]0,2[$.

Remarquons que

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) + \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 1$$

et donc $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Comme le sinus est positif sur $]0,2[$ et que $\frac{\pi}{2}$ est entre 0 et 2, on en tire que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Par conséquent, on peut calculer les valeurs importantes suivantes.

Proposition 9.6.6 *On a*

$$e^0 = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \quad et \quad e^{2i\pi} = 1.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$e^{2ik\pi} = 1.$$

Démonstration : On sait déjà que $e^0 = 1$. On a

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$$

et de là, on en tire les relations

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = i^2 = -1 \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} &= e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} = -i \\ e^{2i\pi} &= e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$e^{2ik\pi} = (e^{2i\pi})^k = 1.$$

■

Pour les fonctions cosinus et sinus, cela se traduit de manière suivante.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0

Proposition 9.6.7 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad et \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

et

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad et \quad \sin(\pi - x) = \sin(x).$$

De plus, les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les formules d'addition. ■

Ainsi, pour étudier les fonctions sinus et cosinus, il suffit en fait de les connaître sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Proposition 9.6.8

1. *La fonction cosinus vérifie* $\cos(0) = 1$ *et* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$*. De plus, elle est strictement décroissante et concave sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. *La fonction sinus vérifie* $\sin(0) = 0$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$*. De plus, elle est strictement croissante et concave sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Au total, voici ce qu'on obtient

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

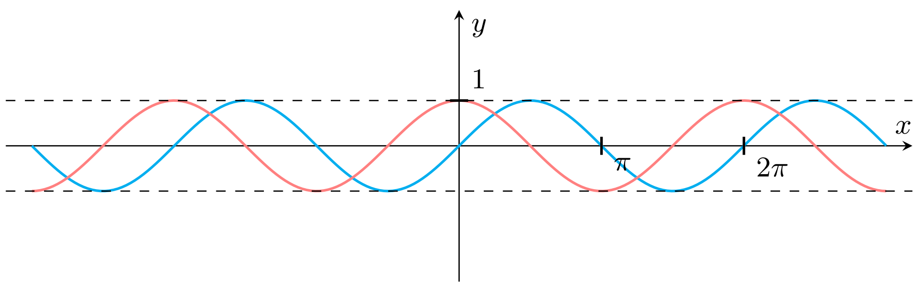


FIGURE 9.6 – Représentation graphique des fonctions sinus (en bleu) et cosinus (en rouge).

Proposition 9.6.9

1. *Les nombres* $k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *sont les seuls zéros de la fonction sinus.*
2. *Les nombres* $\frac{\pi}{2} + k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *sont les seuls zéros de la fonction cosinus.*

Afin de conclure cette section, nous introduisons les fonctions tangente et cotangente. Leurs propriétés se déduiront de celles des fonctions cosinus et sinus.

Définition 9.6.10

▷ La fonction *tangente* est la fonction définie par

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

▷ La fonction *cotangente* est la fonction définie par

$$\mathrm{cotan} : \mathbb{R} \setminus \{\mathrm{k}\pi \ : \ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} : \mathrm{x} \mapsto \frac{\cos(\mathrm{x})}{\sin(\mathrm{x})}.$$

Ces deux fonctions sont infiniment continûment dérivables sur leur domaine de définition. La fonction tangente est π-périodique et il suffit donc de l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Proposition 9.6.11

1. *On a*
$$\tan(0) = 0, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$
2. *La fonction tangente est infiniment continûment dérivable sur son domaine de définition et on a*
$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 .$$
3. *La fonction tangente est strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *. Elle est concave sur* $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ *et convexe sur* $]0, \frac{\pi}{2}[$ *.*

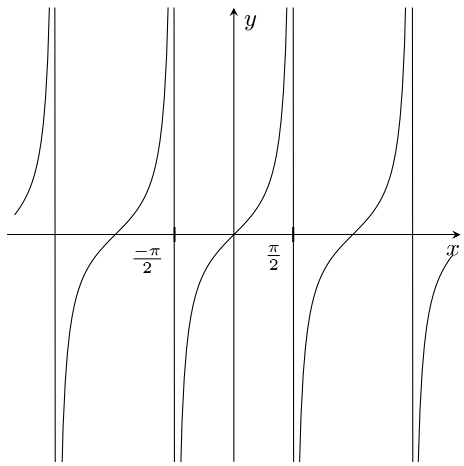


FIGURE 9.7 – Représentation graphique de la fonction tan.

L'étude de la fonction cotangente se déduit de celle de la tangente car on a

$$\mathrm{cotan(x)} = \tan(\frac{\pi}{2} - \mathrm{x}).$$

Ainsi, on étudie la fonction cotangente sur $]0, \pi[$ et on notera que

$$\mathrm{cotan}' = \frac{-1}{\sin^2} = -(1 + \mathrm{cotan}^2).$$

En utilisant les formules des cosinus et sinus, on obtient les formules suivantes.

Proposition 9.6.12 *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$*, on a*

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

et pour tout x *tel que* $2x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ :\in \mathbb{Z}\}$*, on a*

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Enfin, rappelons les valeurs remarquables des fonctions cosinus, sinus et tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

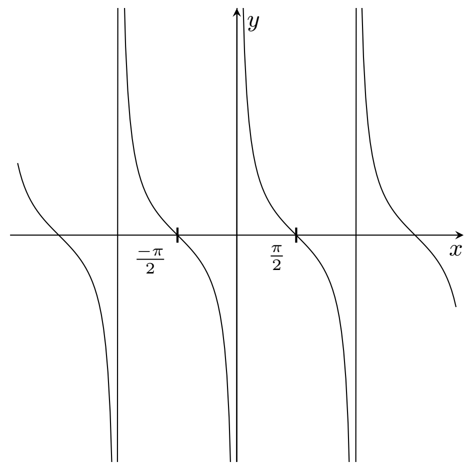


FIGURE 9.8 – Représentation graphique de la fonction cotan.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/
cotan(x)	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tout peut se déduire des formules trigonométriques et du fait que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

9.7 Les fonctions trigonométriques inverses

En restreignant correctement les intervalles de définition des fonctions trigonométriques, on obtient des bijections et on peut donc considérer leurs fonctions inverses. Tout d'abord, on remarque que la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

Définition 9.7.1 La fonction *arc cosinus* est la fonction inverse de la fonction

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1].$$

On la note

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Autrement dit, pour tout $y \in [-1, 1]$, le nombre $\arccos(y)$ est l'unique nombre de $[0, \pi]$ tel que

$$\cos(\arccos(y)) = y.$$

Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a aussi

$$\arccos(\cos(x)) = x.$$

Les propriétés de la fonction arc cosinus sont rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 9.7.2

1. *La fonction arc cosinus est strictement décroissante sur* $[-1,1]$, *convexe sur* $[-1,0]$ *et concave sur* $[0,1]$.
2. *On a* $\arccos(-1)=\pi$ *et* $\arccos(1)=0$.
3. *La fonction arc cosinus est continue sur* $[-1,1]$ *et infiniment continûment dérivable sur* $]-1,1[$. *De plus, on a*

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{pour tout } x\in\,]-1,1[\,.$$

Démonstration : Tout se calcule directement. Notons que pour la dérivée, on utilise le Théorème 7.2.6 pour écrire

$$\arccos'(x)=\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Si $y=\arccos(x)$, alors $y\in[0,\pi]$ et puisque le sinus est positif sur $[0,\pi]$, on a

$$\sin(y)=\sqrt{1-\cos^2(y)}=\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}=\sqrt{1-x^2}.$$

■

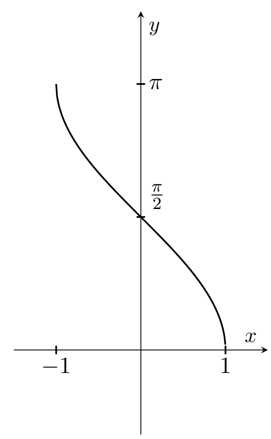


FIGURE 9.9 – Représentation graphique de la fonction arc cosinus.

Intéressons-nous à présent à la fonction sinus. Sa restriction à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est bijective et on considère donc la définition suivante.

Définition 9.7.3 La fonction *arc sinus* est la fonction inverse de la fonction

$$\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1].$$

On la note

$$\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Autrement dit, pour tout $y\in[-1,1]$, le nombre $\arcsin(y)$ est l'unique nombre de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\sin(\arcsin(y)) = y.$$

Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a aussi

$$\arcsin(\sin(x)) = x.$$

Les propriétés de la fonction arc sinus sont données dans la proposition suivante. On procède comme dans le cas de l'arc cosinus pour calculer la dérivée, ou on utilise la relation donnée dans le premier point de la Proposition ci-dessous.

Proposition 9.7.4

1. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$, *on a*

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x).$$

2. *La fonction arc sinus est strictement croissante sur* $[-1, 1]$, *concave sur* $[-1, 0]$ *et convexe sur* $[0, 1]$.
3. *On a* $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
4. *La fonction arc sinus est continue sur* $[-1, 1]$ *et infiniment continûment dérivable sur* $]-1, 1[$. *De plus, on a*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \textit{pour tout } x \in]-1, 1[.$$

Démonstration : Pour le premier point, on remarque que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right) = \cos(\arccos(x)) = x,$$

ce qui suffit. Les autres points se déduisent facilement. ■

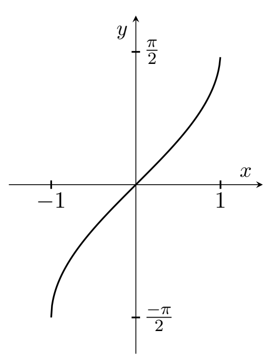


FIGURE 9.10 – Représentation graphique de la fonction arc sinus.

Continuons en étudiant l'inverse de la fonction tangente : pour pouvoir le définir, on restreint la tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Définition 9.7.5 La fonction *arc tangente* est la fonction inverse de la fonction

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}.$$

On la note

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}$, le nombre $\arctan(y)$ est l'unique nombre de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$\tan(\arctan(y)) = y.$$

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a aussi

$$\arctan(\tan(x)) = x.$$

Proposition 9.7.6

1. *La fonction arc tangente est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *convexe sur* $]-\infty, 0]$ *et concave sur* $[0, +\infty[$.
2. *On a* $\arctan(0) = 0$ *et*

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

3. *La fonction arc tangente est infiniment continûment dérivable sur* $\mathbb{R}$. *De plus, on a*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : Pour le calcul de la dérivée, on utilise le Théorème 7.2.6 et on trouve

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

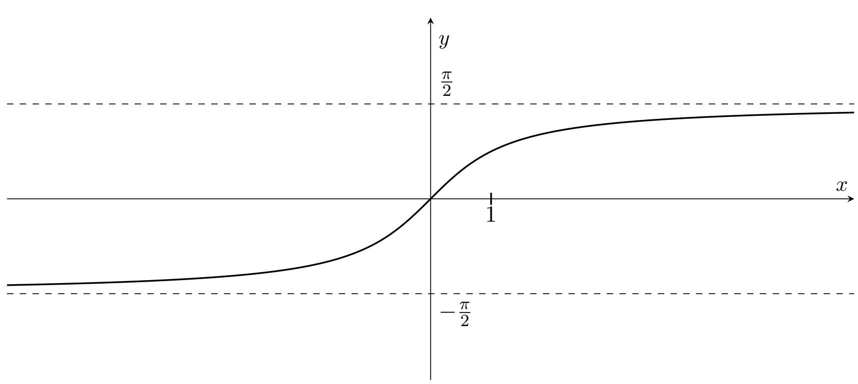


FIGURE 9.11 – Représentation graphique de la fonction arc tangente.

Terminons en étudiant l'inverse de la fonction cotangente.

Définition 9.7.7 La fonction *arc cotangente* est la fonction inverse de la fonction

$$\text{cotan} :]0, \pi[\to \mathbb{R}.$$

On la note

$$\text{arccotan} : \mathbb{R} \to]0, \pi[\,.$$

Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}$, le nombre arccotan(y) est l'unique nombre de $]0, \pi[$ tel que

$$\text{cotan}(\text{arccotan}(\text{y})) = \text{y}.$$

Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a aussi

$$\text{arccotan}(\text{cotan}(\text{x})) = \text{x}.$$

Proposition 9.7.8

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*
$$\text{arccotan}(\text{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\text{x}).$$
2. *La fonction arc cotangente est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.*
3. *On a*
$$\lim_{x \to -\infty} \text{arccotan}(\text{x}) = \pi \quad \textit{et} \quad \lim_{\text{x} \to +\infty} \text{arccotan}(\text{x}) = 0.$$
4. *La fonction arc cotangente est infiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a*
$$\text{arccotan}'(\text{x}) = -\frac{1}{1 + \text{x}^2} \quad \textit{pour tout } \text{x} \in \mathbb{R}.$$

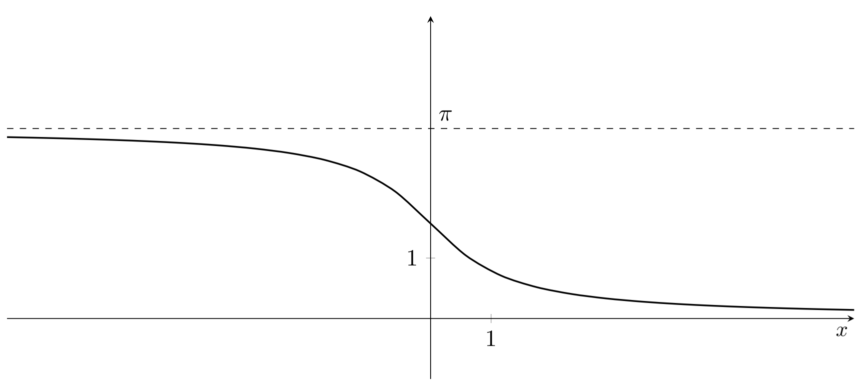


FIGURE 9.12 – Représentation graphique de la fonction arc cotangente.

9.8 Les fonctions hyperboliques

Via les fonctions cosinus et sinus, nous avons étudié les parties réelle et imaginaire de la fonction $x \mapsto e^{ix}$. Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = e^{\Re z} e^{i \Im z}.$$

Dans cette section, nous allons nous intéresser au premier facteur et donc à la fonction $x \mapsto e^x$. Plus précisément, nous allons étudier les parties paire et impaire de cette fonction.

Définition 9.8.1 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle, on définit

- ▷ la *partie paire* de f par la fonction
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$
- ▷ la *partie impaire* de f par la fonction
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie immédiatement que g est une fonction paire, h une fonction impaire et
$$f = g + h.$$
Appliquons cette décomposition à la fonction exponentielle réelle.

Définition 9.8.2

- ▷ La fonction *cosinus hyperbolique*, notée cosh, est la partie paire de la fonction exponentielle réelle, c'est-à-dire
$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
- ▷ La fonction *sinus hyperbolique*, notée sinh, est la partie impaire de la fonction exponentielle réelle, c'est-à-dire
$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On a donc les relations
$$\boxed{e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a
$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - (e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x})\right) \\ &= 1\end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$
En posant $a = \cosh(x)$ et $b = \sinh(b)$, on voit donc que le point (a, b) appartient à l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$. Le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique permettent de décrire les points de cette hyperbole (comme le cosinus et le sinus permettaient de décrire ceux du cercle unité).

Une manipulation immédiate de la série de puissances définissant l'exponentielle mène au résultat suivant.

Proposition 9.8.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cosh(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad et \quad \sinh(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

et ces séries sont absolument convergentes.

On pourrait également retrouver ce résultat en utilisant le développement de Taylor. Les propriétés des fonctions cosinus et sinus découlent de celles de l'exponentielle.

Proposition 9.8.4

1. *Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont infiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\cosh' = \sinh \quad et \quad \sinh' = \cosh .$$

2. *On a* $\cosh(0) = 1$ *et* $\cosh(x) > 0$ *pour tout* $x \neq 0$.
3. *On a* $\sinh(0) = 0$, $\sinh(x) < 0$ *pour tout* $x < 0$ *et* $\sinh(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$.
4. *La fonction* cosh *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0[$ *et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$. *Elle est convexe sur* $\mathbb{R}$.
5. *La fonction* sinh *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Elle est concave sur* $]-\infty, 0[$ *et convexe sur* $]0, +\infty[$.
6. *On a*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to \pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty.$$

Remarquons que puisque $\cosh(0) = 1$ et vu les propriétés de décroissance et de croissance de la fonction cosinus hyperbolique, on a en fait que $\cosh(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notons qu'on peut aussi écrire des formules de calcul hyperbolique comme nous l'avons fait à la Proposition 9.6.4 pour les fonctions trigonométriques. Pour démontrer ces formules, il suffit de se ramener à la forme exponentielle et d'écrire par exemple

$$\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}\right) \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

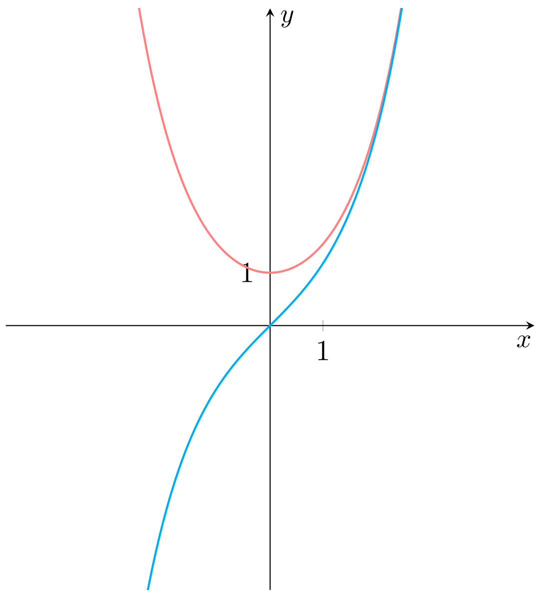


FIGURE 9.13 – Représentation graphique des fonction cosinus hyperbolique (en rouge) et sinus hyperbolique (en bleu).

Proposition 9.8.5 *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)\\
\cosh(x \pm y) &= \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)\\
\cosh(x+y) + \cosh(x-y) &= 2\cosh(x)\cosh(y)\\
\cosh(x+y) - \cosh(x-y) &= 2\sinh(x)\sinh(y)\\
\sinh(x+y) + \sinh(x-y) &= 2\sinh(x)\cosh(y)\\
\sinh(x) \pm \sinh(y) &= 2\sinh\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)\\
\cosh(x) + \cosh(y) &= 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
\cosh(x) - \cosh(y) &= 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
\sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x)\\
\cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x)\\
2\cosh^2(x) &= 1 + \cosh(2x)\\
2\sinh^2(x) &= \cosh(2x) - 1.
\end{aligned}$$

Nous introduisons à présent les fonctions tangente et cotangente hyperboliques.

Définition 9.8.6

▷ La fonction *tangente hyperbolique* est la fonction définie par

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

▷ La fonction *cotangente hyperbolique* est la fonction définie par

$$\text{cotanh} : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : \text{x} \mapsto \frac{\cosh(\text{x})}{\sinh(\text{x})}.$$

Les propriétés de la fonction exponentielle permettent d'obtenir les propriétés suivantes de la tangente hyperbolique et de la cotangente hyperbolique.

Proposition 9.8.7

1. *Les fonctions tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique sont infiniment continûment dérivables respectivement sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}_0$ *et on a*

$$\tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \quad \textit{et} \quad \text{cotanh}' = \frac{-1}{\sinh^2} = 1 - \text{cotanh}^2\,.$$

2. *La fonction* tanh *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Elle est convexe sur* $]-\infty,0[$ *et concave sur* $]0,+\infty[$.
3. *La fonction* cotanh *est strictement décroissante sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$. *Elle est concave sur* $]-\infty,0[$ *et convexe sur* $]0,+\infty[$.
4. *On a*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) = \pm 1 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \text{cotanh(x)} = \pm 1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \text{cotanh(x)} = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} \text{cotanh(x)} = -\infty.$$

Démonstration : Tout est direct en calculant les dérivées. Par exemple,

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

et

$$1 - \tanh^2(x) = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Pour le calcul des limites, on calcule par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.$$

■

En utilisant les formules des cosinus et sinus hyperboliques, on vérifie directement les formules suivantes.

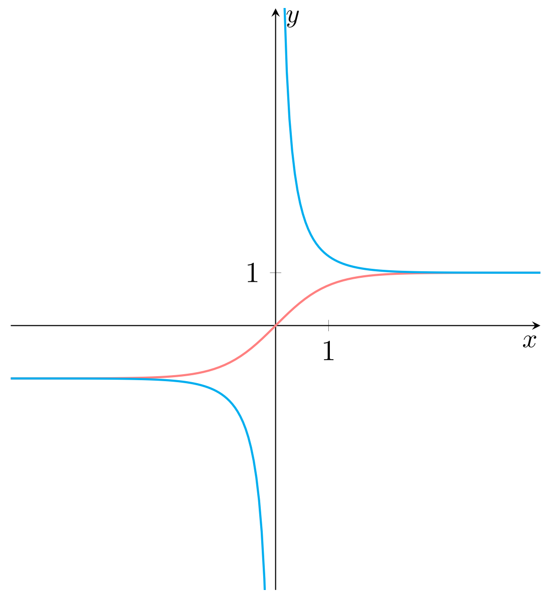


FIGURE 9.14 – Représentation graphique des fonction tangente hyperbolique (en rouge) et cotangente hyberbolique (en bleu).

Proposition 9.8.8 *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$$

et

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}.$$

9.9 Les fonctions hyperboliques inverses

Dans cette section, nous nous intéressons aux fonctions inverses des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente hyperboliques. La fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Puisque $\cosh(0) = 1$, on en tire que le cosinus hyperbolique est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Définition 9.9.1 La fonction *arc cosinus hyperbolique* est la fonction inverse de la fonction $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$. On la note

$$\text{arccosh} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$

Autrement dit, pour tout $y \in [1, +\infty[$, le nombre arccosh(y) est l'unique nombre de $[0, +\infty[$ tel que

$$\cosh(\text{arccosh(y)}) = \text{y}.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a aussi

$$\operatorname{arccosh}(\cosh(x)) = x.$$

Les propriétés de la fonction arc cosinus hyperbolique sont rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 9.9.2

1. *La fonction arc cosinus hyperbolique est strictement croissante et concave sur* $[1, +\infty[$.
2. *On a* $\operatorname{arccosh}(1) = 0$ *et*
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccosh}(x) = +\infty.$$
3. *La fonction arc cosinus hyperbolique est continue sur* $[1, +\infty[$ *et infiniment continûment dérivable sur* $]1, +\infty[$ *. De plus, on a*
$$\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \textit{pour tout } x > 1.$$

Démonstration : Tout se calcule directement. Notons que pour la dérivée, on utilise le Théorème 7.2.6. ■

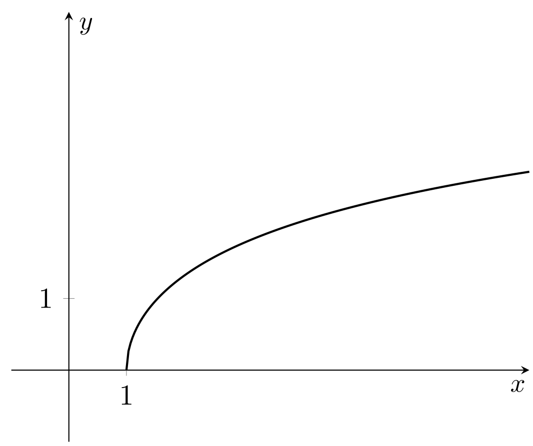


FIGURE 9.15 – Représentation graphique de la fonction arc cosinus hyperbolique.

Passons à l'inverse de la fonction sinus hyperbolique. Rappelons que cette fonction est strictement croissante et tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$. Il s'agit donc d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.

Définition 9.9.3 La fonction *arc sinus hyperbolique* est la fonction inverse de la fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On la note

$$\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}$, le nombre $\operatorname{arcsinh}(y)$ est l'unique nombre de $\mathbb{R}$ tel que

$$\sinh(\operatorname{arcsinh}(y)) = y.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\mathrm{arcsinh}(\sinh(x)) = x.$$

On étudie facilement les propriétés de la fonction arc sinus hyperbolique.

Proposition 9.9.4

1. *La fonction arc sinus hyperbolique est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, elle est convexe sur* $]-\infty, 0[$ *et concave sur* $]0, +\infty[$ *.*
2. *On a* $\mathrm{arcsinh}(0) = 0$ *et*
$$\lim_{x \to +\pm\infty} \mathrm{arcsinh}(x) = \pm\infty.$$
3. *La fonction arc sinus hyperbolique est infiniment continûment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*
$$\mathrm{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

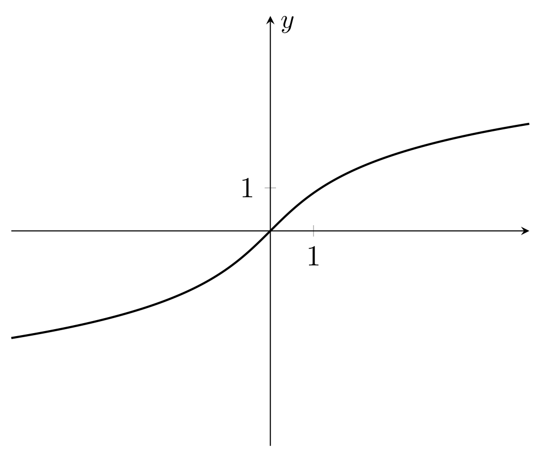


FIGURE 9.16 – Représentation graphique de la fonction arc sinus hyperbolique.

On procède de la même manière à partir de la fonction tangente hyperbolique qui est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]-1, 1[$ pour introduire l'arc tangente hyperbolique.

Définition 9.9.5 La fonction *arc tangente hyperbolique* est la fonction inverse de la fonction $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$. On la note

$$\mathrm{arctanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in]-1, 1[$, le nombre $\mathrm{arctanh}(y)$ est l'unique nombre de $\mathbb{R}$ tel que

$$\tanh(\mathrm{arctanh}(y)) = y.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\mathrm{arctanh}(\tanh(x)) = x.$$

A nouveau, on étudie facilement la fonction arc tangente hyperbolique.

Proposition 9.9.6

1. *La fonction arc tangente hyperbolique est strictement croissante sur* $]-1,1[$, *elle est concave sur* $]-1,0[$ *et convexe sur* $]0,1[$.
2. *On a* $\mathrm{arctanh}(0)=0$ *et*

$$\lim_{x\to -1^+} \mathrm{arctanh(x)} = -\infty \quad et \quad \lim_{\mathrm{x}\to 1^-} \mathrm{arctanh(x)} = +\infty.$$

3. *La fonction arc tangente hyperbolique est infiniment continûment dérivable sur* $]-1,1[$. *De plus, on a*

$$\mathrm{arctanh}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{1-\mathrm{x}^2} \quad pour\ tout\ \mathrm{x} \in]-1,1[.$$

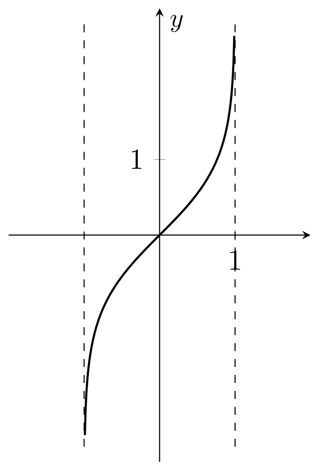


FIGURE 9.17 – Représentation graphique de la fonction arc tangente hyperbolique.

Enfin, on termine avec la fonction arc cotangente hyperbolique, en remarquant que la restriction de la cotangente hyperbolique à $]0,+\infty[$ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.

Définition 9.9.7 La fonction *arc cotangente hyperbolique* est la fonction inverse de la fonction $\mathrm{cotanh} :]0,+\infty[\to]1,+\infty[$. On la note

$$\mathrm{arccotanh} :]1,+\infty[\to]0,+\infty[.$$

Autrement dit, pour tout $y \in]1,+\infty[$, le nombre arccotanh(y) est l'unique nombre de $]0,+\infty[$ tel que

$$\mathrm{cotanh(arccotanh(y))} = \mathrm{y}.$$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a aussi

$$\mathrm{arccotanh(cotanh(x))} = \mathrm{x}.$$

On termine avec les propriétés élémentaires de la fonction arc cotangente hyperbolique.

Proposition 9.9.8

1. *La fonction arc cotangente hyperbolique est strictement décroissante et convexe sur* $]1, +\infty[$.
2. *On a*
$$\lim_{x \to 1^+} \operatorname{arccotanh}(\mathrm{x}) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{\mathrm{x} \to +\infty} \operatorname{arccotanh}(\mathrm{x}) = 0.$$
3. *La fonction arc tangente hyperbolique est infiniment continûment dérivable sur* $]1, +\infty[$. *De plus, on a*
$$\operatorname{arccotanh}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{1 - \mathrm{x}^2} \quad \textit{pour tout } \mathrm{x} > 1.$$

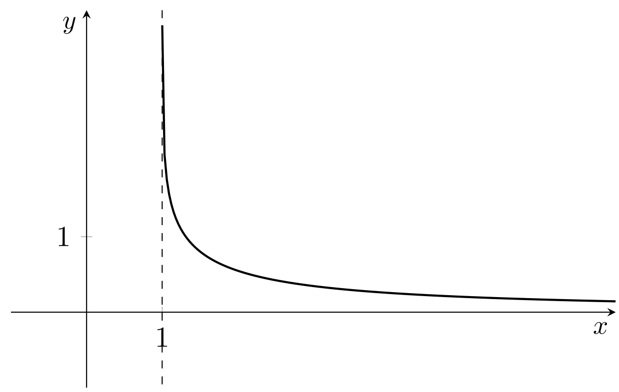


FIGURE 9.18 – Représentation graphique de la fonction arc cotangente hyperbolique.

Toutes les fonctions hyperboliques inverses peuvent se rééecrire à partir de la fonction logarithme. En effet, on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 9.9.9

1. *Si* $x \geq 1$, *alors*
$$\operatorname{arccosh}(\mathrm{x}) = \ln(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 1}).$$
2. *Si* $x \in \mathbb{R}$, *alors*
$$\operatorname{arcsinh}(\mathrm{x}) = \ln(\mathrm{x} + \sqrt{1 + \mathrm{x}^2}).$$
3. *Si* $x \in]-1, 1[$, *alors*
$$\operatorname{arctanh}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \mathrm{x}}{1 - \mathrm{x}}\right).$$
4. *Si* $x > 1$, *alors*
$$\operatorname{arccotanh}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \mathrm{x}}{\mathrm{x} - 1}\right).$$

Démonstration : On démontre ces formules en se ramenant à la forme exponentielle des fonctions hyperboliques. Par exemple, on a $\operatorname{arccosh}(\mathrm{x}) = \mathrm{w}$ si et seulement si $\cosh(w) = x$, c'est-à-dire $e^w + e^{-w} = 2x$ ou encore $e^{2w} - 2xe^w + 1 = 0$. En posant $t = e^w$, cette équation se rééecrit
$$t^2 - 2xt + 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont

$$x+\sqrt{x^2-1} \quad \text{et} \quad x-\sqrt{x^2-1}.$$

On remarque que $x-\sqrt{x^2-1}<1$ et donc on garde l'autre solution. Ainsi, $t=x+\sqrt{x^2-1}$ et donc

$$w=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

■

9.10 Récapitulatif

Dans cette section, nous présentons un tableau récapitulatif des différentes fonctions étudiées jusqu'à présent, leur domaine de définition et de dérivabilité, et leur dérivée.

Fonction	Définition	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Dérivée
exp	$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	exp
ln	$\exp^{-1}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
x^m	$x \dots x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	mx^{m-1}
x^{-m}	$\frac{1}{x^m}$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$-mx^{-m-1}$
x^a	$e^{a\ln(x)}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	ax^{a-1}
b^x	$e^{x\ln(b)}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$b^x \ln(b)$
cos	$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin$
sin	$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cos
tan	$\frac{\sin}{\cos}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
cotan	$\frac{\cos}{\sin}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2} = -(1 + \mathrm{cotan}^2)$
arccos	$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arcsin	$\sin^{-1}$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan	$\tan^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$
arccotan	cotan^{-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{1+x^2}$
cosh	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	sinh
sinh	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cosh
tan	$\frac{\sinh}{\cosh}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 + \tanh^2$
cotanh	$\frac{\cosh}{\sinh}$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$-\frac{1}{\sinh^2} = 1 - \mathrm{cotanh}^2$
arccosh	$\cosh^{-1}$	$[1, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
arcsinh	$\sinh^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
arctanh	$\tanh^{-1}$	$]-1, 1[$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$
arccotanh	cotanh^{-1}	$]1, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$\frac{1}{1-x^2}$

avec $m \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et en posant $0^a = 0$.

Bibliographie

[1] Amory, C., Bastin, F., Crasborn, J., Dozot, C. et Godefroy, G. (2019) *MATH 1350 cm^3 d'exercices corrigés pour la Licence 1*, Dunod.

[2] Arnaudiès, J.-M. et Fraysse, H. (1991) *Cours de mathématiques Tome 2, Analyse*, Dunod.

[3] F. Bastin (2023–2024) *Mathématiques générales*, Notes du cours, Université de Liège.

[4] Bartle, R.G. et Sherbert, D.R. (2000) *Introduction to Real Analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons.

[5] Bonheure, D., Fine, J. et Richard, N. (2014–2015), *Calcul Différentiel et Intégral 1 Partie 1*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques et en sciences physiques, Université Libre de Bruxelles.

[6] Delhez, E. (2012) *Analyse, Première Partie*, Notes du cours, Université de Liège.

[7] Mathonet, P. (2019–2020), *Mathématiques élémentaires*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques , Université de Liège.

[8] Nicolay, S. (2018) *Analyse mathématique, Fonctions définies sur une partie de la droite réelle Cours avec exercices corrigés et exercices d'approfondissement*, Ellipses, Références Sciences.

[9] Rudin, W. (2006) *Principes d'analyse mathématique, Cours et exercices*, Dunod, Paris.

[10] Schinazi, R.B. (2012) *From Calculus to Analysis*, Birkhäuser, Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

[11] Schmets, J. (2004–2005), *Analyse I*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques ou en sciences physiques, Université de Liège.

[12] Tao, T. (2022) *Analysis I*, Fourth Edition, Texts and Readings in Mathematics 37, Springer, Hindustan Book Agency, New Delhi.

[13] Tao, T. (2022) *Analysis II*, Fourth Edition, Texts and Readings in Mathematics 38, Springer, Hindustan Book Agency, New Delhi.

[14] Wengenroth, J. (2006–2007), *Analyse I*, Notes du cours des premiers Bacheliers en sciences mathématiques et en sciences physiques, Université de Liège.