

Topologie générale

Céline Esser

Année académique 2023–2024

Table des matières

1	Espaces topologiques	4
1.1	Topologies et fermés	4
1.2	Bases de topologies	7
1.3	Voisinages	10
1.4	Intérieur, adhérence et frontière	13
1.5	Continuité	14
2	Constructions classiques de topologies	20
2.1	Comparaison de topologies	20
2.2	Topologies initiales et finales	21
2.3	Sous-espaces	23
2.4	Espaces produits	26
2.5	Espaces quotients	29
3	Convergence, filtres et axiomes	30
3.1	Convergence dans un espace topologique	30
3.2	Filtres	32
3.3	Axiomes de séparation	35
3.4	Axiomes de dénombrabilité	44
4	Compacts et connexes	49
4.1	Espaces topologiques compacts	49
4.2	Compacts, ultrafiltres et produits	52
4.3	Espaces localement compacts et Théorème de Baire	55
4.4	Compactifications	60
4.5	Espaces connexes	61
5	Espaces vectoriels topologiques	66
5.1	Espaces vectoriels topologiques	66

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
5.2 Sous-espaces, produits et quotients	71
5.3 Espaces vectoriels topologiques de dimension finie	73
References	76

Avant propos

Ce cours est une introduction à la topologie générale. Cette discipline a pour objet principal l'étude abstraite de notions telles que la continuité, la compacité, la connexité etc... ainsi que les propriétés et théorèmes s'y rapportant. Ces notions sont définies dans un ensemble quelconque, pas nécessairement muni d'une distance, et généralisent celles qui ont été introduites dans le cours d'analyse pour les espaces euclidiens.

Ces notes de cours ont été rédigées sur la base du cours de Pierre Mathonet donné à l'Université de Liège aux étudiants de 3^{ème} année en Sciences Mathématiques. Je l'en remercie chaleureusement.

Chapitre 1

Espaces topologiques

Dans ce premier chapitre, nous nous basons sur les propriétés des ouverts de $\mathbb{R}$ pour introduire la notion d'ouvert sur un ensemble quelconque. Il s'agit de se donner une collection de sous-ensembles qui doivent avoir des propriétés de stabilité vis-à-vis des unions et des intersections finies. Cette collection de sous-ensembles est appelée une topologie. Nous présentons plusieurs moyens de définir une topologie sur un ensemble (via les ouverts, les fermés, les bases, les sous-bases et les systèmes de voisinages). Nous montrons également que cette définition axiomatique permet de réintroduire les notions bien connues d'intérieur, d'adhérence et de frontière d'un ensemble, ainsi que la notion centrale de continuité d'une application, même si les espaces sur lesquels on travaille ne sont pas munis d'une distance.

1.1 Topologies et fermés

Le point de départ de la topologie est la définition axiomatique de la notion d'ouvert.

Définition 1.1.1 Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que

- ($\mathcal{T}1$) toute union d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$,
- ($\mathcal{T}2$) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$,
- ($\mathcal{T}3$) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *ouverts*. Un couple $(X, \mathcal{T})$ formé d'un ensemble X et d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est appelé un *espace topologique*.

Ainsi, une topologie sur X est la donnée d'une famille de sous-ensembles (les ouverts) de X contenant le vide et X , stable par union et par intersection finie. Remarquons que pour vérifier la stabilité par intersection finie, en procédant de proche en proche il suffit de vérifier que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$. Remarquons également que parmi les unions quelconques d'éléments de $\mathcal{T}$, il y a l'union sur la famille vide qui est l'ensemble vide. De même, parmi les intersections finies d'éléments de $\mathcal{T}$, il y a l'intersection sur la famille vide qui est l'ensemble X . On peut définir une topologie en se limitant aux conditions ($\mathcal{T}1$) et ($\mathcal{T}2$). Dans la pratique, pour vérifier qu'une partie de sous-ensembles de X est une topologie, on vérifie néanmoins la condition ($\mathcal{T}3$) puisqu'on travaille avec des unions non-triviales et l'intersection de deux éléments.

Donnons quelques exemples d'espaces topologiques.

Exemple 1.1.2 On peut toujours considérer les deux topologies suivantes sur un ensemble X :

- la *topologie discrète* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ pour laquelle tout sous-ensemble de X est ouvert,
- la *topologie triviale* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ pour laquelle seuls l'ensemble vide et l'ensemble X lui-même sont des ouverts.

Exemple 1.1.3 Si X est un ensemble, la *topologie cofinie* sur X est définie par

$$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{\omega \subseteq X : X \setminus \omega \text{ est fini}\}.$$

Exemple 1.1.4 Soit $X = \{x, y, z\}$. Alors l'ensemble $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y, z\}, X\}$ est une topologie sur X .

Exemple 1.1.5 L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ forme une topologie, appelée la *topologie euclidienne*.

L'exemple de la topologie euclidienne se généralise facilement à tout ensemble muni d'une distance ou d'une pseudo-distance.

Définition 1.1.6 Soit X un ensemble. Une *pseudo-distance* sur X est une application $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ telle que

- ▷ $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,
- ▷ $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$,
- ▷ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

C'est une *distance* si de plus $d(x, y) = 0$ implique $x = y$. Un espace *(pseudo-)métrique* est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une (pseudo-)distance sur X . Si (X, d) est un espace (pseudo-)métrique, on définit la *boule ouverte* de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$ par

$$b(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

La *topologie* $\mathcal{T}_d$ associée à d est définie par

$$\mathcal{T}_d = \{\omega \subseteq X : \forall x \in \omega \exists r > 0 \text{ tel que } b(x, r) \subseteq \omega\}.$$

On vérifie facilement que si (X, d) est un espace (pseudo-)métrique, alors $\mathcal{T}_d$ est bien une topologie sur X .

- (T1) Soit $\omega_\alpha, \alpha \in A$, une famille d'éléments de $\mathcal{T}_d$ et soit $x \in \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$. Alors il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $x \in \omega_{\alpha_0}$. Comme $\omega_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_d$, il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) \subseteq \omega_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$.
- (T2) Soient ω_1 et ω_2 deux éléments de $\mathcal{T}_d$ et $x \in \omega_1 \cap \omega_2$. Il existe donc $r_1, r_2 > 0$ tels que $b(x, r_i) \subseteq \omega_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors, pour $r = \min\{r_1, r_2\}$, on a

$$b(x, r) \subseteq b(x, r_1) \cap b(x, r_2) \subseteq \omega_1 \cap \omega_2.$$

- (T3) Clairement, $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ (aucune condition) et $X \in \mathcal{T}_d$ (si $x \in X$, toute boule ouverte centrée en x est incluse dans X).

Remarque 1.1.7 Deux distances différentes peuvent mener à la même topologie. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, montrons que la distance euclidienne $d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ et la distance de Manhattan $d_M(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ (pour lesquelles les boules sont des carrés) définissent toutes les deux la topologie euclidienne. Il est clair que $d_E(x, y) \leq d_M(x, y)$ et donc tout carré

(boule pour d_M) contient une boule euclidienne de même centre (et de même rayon). D'autre part, on a

$$d_M^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2|$$

et

$$d_E^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$$

Puisque $u^2 + v^2 \geq 2uv$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $2d_E(x, y)^2 \geq d_M(x, y)^2$ en considérant $u = |x_1 - y_1|$ et $v = |x_2 - y_2|$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{2}}d_M(x, y) \leq d_E(x, y)$ et toute boule euclidienne contient un carré (une boule pour d_M) possédant le même centre.

Certaines topologies déjà considérées peuvent être définies via une distance. Par exemple, la topologie discrète sur un ensemble X est donnée par la distance discrète définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $x, y \in X$. En effet, $b(x, r) = \{x\}$ pour tout $r \in]0, 1[$ et tout $x \in X$. On en tire que les singletons sont ouverts pour $\mathcal{T}_d$ et par stabilité par union, que tout sous-ensemble de X est ouvert pour $\mathcal{T}_d$. On dit que la topologie discrète est métrisable.

Définition 1.1.8 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *(pseudo-)métrisable* s'il existe une distance d sur X telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Tous les espaces topologiques ne sont pas pseudo-métrisables. En effet, considérons $X = \{x, y\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ et supposons qu'il existe une pseudo-distance d sur X qui définit $\mathcal{T}$. Alors, puisque $x \in \{x\}$, il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) = \{x\}$. En particulier, $y \notin b(x, r)$ et donc $d(x, y) \geq r$. On en tire que $b(y, r) = \{y\}$ et donc $\{y\} \in \mathcal{T}$, ce qui est impossible.

Passons à présent à la définition des ensembles fermés.

Définition 1.1.9 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'un sous-ensemble F de X est *fermé* si $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Autrement dit, les ensembles fermés sont les complémentaires des ensembles ouverts. Les propriétés des fermés se traduisent donc par passage au complémentaire des propriétés des ouverts.

Proposition 1.1.10 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés pour $\mathcal{T}$. Alors

- (F1) toute intersection d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$,
- (F2) toute union finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$,
- (F3) $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$.

Bien sûr, afin de définir une topologie, on peut se donner les ensembles fermés plutôt que les ensembles ouverts.

Proposition 1.1.11 Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ qui satisfait les conditions (F1), (F2) et (F3). Alors, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle les éléments de $\mathcal{F}$ sont exactement les ensembles fermés pour $\mathcal{T}$.

Démonstration : On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{T} = \{\omega \subseteq X : X \setminus \omega \in \mathcal{F}\}$$

est une topologie qui convient. L'unicité est évidente. ■

1.2 Bases de topologies

Il se peut que les ensembles ouverts d'un espace topologique soient difficiles à écrire explicitement mais que néanmoins, ils puissent être décrits à partir d'ensembles ouverts plus simples. C'est le cas par exemple des espaces métrisables, pour lesquels la topologie peut être décrite à partir des boules ouvertes. Ainsi, une partie de la topologie peut nous permettre de décrire la topologie dans son entièreté. De plus, nous verrons que certaines propriétés topologiques peuvent être caractérisées à partir de ces ouverts particuliers.

Définition 1.2.1 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une *base* de $\mathcal{T}$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ telle que tout élément de $\mathcal{T}$ est union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.2.2 Une base de la topologie discrète est donnée par les singletons.

Remarque 1.2.3 Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$, alors tout élément de $\mathcal{T}$ est union d'éléments de $\mathcal{B}$. De plus, on a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ et donc toute union d'éléments de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{T}$ ne peut être que la famille des unions d'éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 1.2.4 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ est une base de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \mathcal{T}$ et tout $x \in \omega$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq \omega$. En particulier,

$$\mathcal{T} = \{\omega \subseteq X : \forall x \in \omega \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B \subseteq \omega\}.$$

Démonstration : Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. Soient $\omega \in \mathcal{T}$ et $x \in \omega$. Par définition d'une base de topologie, il existe une famille ω_α , $\alpha \in A$, d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que

$$\omega = \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha.$$

Puisque $x \in \omega$, il existe donc $\alpha_0 \in A$ tel que $x \in \omega_{\alpha_0} \subseteq \omega$.

Réciproquement, si $\omega \in \mathcal{T}$, alors pour tout $x \in \omega$, il existe par hypothèse $\omega_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in \omega_x \subseteq \omega$. Par conséquent,

$$\omega = \bigcup_{x \in \omega} \omega_x,$$

ce qui suffit. ■

Exemple 1.2.5 Si (X, d) est un espace métrisable, la topologie $\mathcal{T}_d$ associée à d est définie via la base formée des boules ouvertes. Remarquons que l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel est également une base de $\mathcal{T}_d$.

Exemple 1.2.6 Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des boules centrées en les rationnels de $\mathbb{Q}^n$ est une base de la topologie euclidienne.

Le résultat suivant donne les propriétés qui caractérisent les bases de topologie.

Proposition 1.2.7 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{T}$. Alors,
 (B1) l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$,
 (B2) X est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Démonstration : Comme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est un ouvert et est donc une union d'éléments de $\mathcal{B}$. De même, $X \in \mathcal{T}$ et donc X est une union d'éléments de $\mathcal{B}$. ■

Réciproquement, on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.8 Soient X un ensemble et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ qui satisfait les conditions (B1) et (B2). Alors, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Démonstration : L'unicité est claire puisque si $\mathcal{T}$ est une topologie qui convient, alors par la Remarque 1.2.3, $\mathcal{T}$ est la famille des unions d'éléments de $\mathcal{B}$. Il reste donc à montrer que cette famille est bien une topologie.

(T1) Bien sûr, toute union d'unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.

(T2) Si $\omega_1 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha$ et $\omega_2 = \bigcup_{\beta \in A_2} B_\beta$ sont des unions d'éléments de $\mathcal{B}$, alors

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} \bigcup_{\beta \in A_2} B_\alpha \cap B_\beta.$$

Or par hypothèse, pour tout $\alpha \in A_1$ et tout $\beta \in A_2$, $B_\alpha \cap B_\beta$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$, et donc il en est de même pour $\omega_1 \cap \omega_2$.

(T3) Par hypothèse, X est une union d'éléments de $\mathcal{B}$. De plus, l'ensemble vide est l'union sur la famille vide d'éléments de $\mathcal{B}$. ■

On peut aller une étape plus loin en réduisant encore la famille des ouverts que l'on considère pour décrire la topologie.

Définition 1.2.9 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une *sous-base* de $\mathcal{T}$ est une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ telle que la famille de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ forme une base de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire tout élément de $\mathcal{T}$ est union d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$.

Exemple 1.2.10 Les demi-droites de la forme $] - \infty, b[$ ou $]a, +\infty[$, $a, b \in \mathbb{R}$, forment une sous-base de la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$. En effet, on a

$$]a, b[=] - \infty, b[\cap]a, +\infty[$$

et les intervalles ouverts forment une base de la topologie euclidienne.

Il n'y a aucune propriété nécessaire pour qu'une famille de sous-ensembles forme une sous-base. Elles permettent donc de définir la plus petite topologie qui contient une famille de sous-ensembles donnés.

Proposition 1.2.11 Soient X un ensemble et $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. Alors, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{S}$ est une sous-base de $\mathcal{T}$. Cette topologie contient $\mathcal{S}$ et est incluse dans toute topologie contenant $\mathcal{S}$. On la note $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ et on l'appelle la topologie engendrée par $\mathcal{S}$.

Démonstration : Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble formé des intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$. Alors, $\mathcal{B}$ satisfait la propriété (B1) puisque toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{B}$. De plus, X est l'intersection sur la famille vide et donc $\mathcal{B}$ satisfait la propriété (B2). Cela suffit pour obtenir l'existence et l'unicité de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ par la Proposition 1.2.8.

On a donc que $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ est la famille des unions d'intersection finies d'éléments de $\mathcal{S}$. Ainsi, si $\mathcal{T}'$ est une topologie telle que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}'$, alors $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}'$ par définition d'une topologie. ■

Exemple 1.2.12 Dans $\mathbb{R}^2$, considérons l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{]a, b[\times \mathbb{R} : a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times]c, d[: c < d\}.$$

La topologie engendrée par $\mathcal{S}$ admet pour base les intervalles $]a, b[\times]c, d[$ et est donc la topologie euclidienne. Si

$$\mathcal{S}' = \{[a, b] \times \mathbb{R} : a \leq b\} \cup \{\mathbb{R} \times [c, d] : c \leq d\},$$

alors une base de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ contient les singletons et $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ est donc la topologie discrète.

Les propriétés axiomatiques que nous avons considérées jusqu'à présent permettent de donner une preuve purement topologique de théorie des nombres (démonstration de Furstenberg).

Proposition 1.2.13 Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration : Pour tous $a, b \in \mathbb{N}_0$, on considère la progression arithmétique

$$\mathcal{P}_{a,b} := \{a + bn : n \in \mathbb{N}\}.$$

Considérons la famille $\mathcal{B}$ formée de ces progressions arithmétiques et montrons que $\mathcal{B}$ forme une base de topologie sur $\mathbb{N}_0$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$. Si $\gamma \in \mathcal{P}_{a,b} \cap \mathcal{P}_{c,d}$ et si on note $\alpha = \min(\mathcal{P}_{a,b} \cap \mathcal{P}_{c,d})$, alors γ peut s'écrire sous la forme $\gamma = \alpha + nb$ et $\gamma = \alpha + n'd$ pour des naturels $n, n' \in \mathbb{N}_0$. Ainsi, $\gamma - \alpha$ est un multiple de b et de d , et donc de $\beta = \text{ppcm}(b, d)$. Par conséquent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = \alpha + m\beta$. On en tire que si $\mathcal{P}_{a,b} \cap \mathcal{P}_{c,d}$ est non-vide, alors il est égal à $\mathcal{P}_{\alpha, \beta}$ et $\mathcal{B}$ satisfait la condition (B1).

De plus, $\mathbb{N}_0 = \mathcal{P}_{1,1}$ et donc $\mathcal{B}$ satisfait la condition (B2). Notons $\mathcal{T}$ la topologie sur $\mathbb{N}_0$ admettant $\mathcal{B}$ comme base. Remarquons que tout ouvert non-vide de $\mathcal{T}$ contient une infinité de naturels puisqu'il contient au moins une progression arithmétique. De plus, remarquons que pour tout $b \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble ouvert $\mathcal{P}_{b,b}$ des multiples non-nuls de b est également fermé puisque

$$\mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{P}_{b,b} = \bigcup_{j=1}^{b-1} \mathcal{P}_{j,b}.$$

Comme tout élément de $\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ est un multiple non-nul d'un nombre premier, on a

$$\mathbb{N}_0 \setminus \{1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} \mathcal{P}_{p,p}.$$

Si l'ensemble des nombres premiers était fini, le membre de droite serait une union finie d'ensembles fermés, et donc un ensemble fermé. Or, puisqu'il est fini, l'ensemble $\{1\}$ n'est pas ouvert et donc $\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ n'est pas fermé. D'où la conclusion. ■

1.3 Voisinages

Bien souvent, il est intéressant de travailler localement (autour d'un point) plutôt que globalement. Nous introduisons pour cette raison la notion de voisinage d'un point et nous montrons que les voisinages donnent une nouvelle méthode pour construire une topologie.

Définition 1.3.1 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Un sous-ensemble V de X est un *voisinage* de x s'il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq V$. L'ensemble de tous les voisinages de x est appelé le *système de voisinages* de x et est noté $\mathcal{V}_x$.

Exemple 1.3.2 Dans $\mathbb{R}^n$, un sous-ensemble V est un voisinage d'un point x pour la topologie euclidienne s'il existe un ouvert ω tel que $x \in \omega \subseteq V$, et donc s'il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) \subseteq V$.

Exemple 1.3.3 Si un ensemble X est muni de la topologie discrète, alors $\mathcal{V}_x$ est l'ensemble des parties de X qui contiennent x .

Exemple 1.3.4 Si on considère l'ensemble $X = \{x, y, z, t\}$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ définie par $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y, z\}, \{y, z\}, \{y, z, t\}, X\}$, on a $\mathcal{V}_t = \{\{y, z, t\}, X\}$ tandis que $\mathcal{V}_x$ est l'ensemble des parties de X qui contiennent x .

Les voisinages permettent de caractériser les ensembles ouverts : un ensemble ouvert est un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points. Cette relation est fondamentale et nous l'utiliserons régulièrement.

Proposition 1.3.5 . Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble A de X est ouvert si et seulement si pour tout $x \in A$, $A \in \mathcal{V}_x$.

Démonstration : Supposons que $A \in \mathcal{T}$. Alors pour tout $x \in A$, $x \in A \subseteq A$ et donc $A \in \mathcal{V}_x$. Réciproquement, si pour tout $x \in A$, il existe $\omega_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega_x \subseteq A$, alors $A = \bigcup_{x \in A} \omega_x$ et A est donc un ouvert. ■

Les propriétés suivantes caractérisent les systèmes de voisinages.

Proposition 1.3.6 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les systèmes de voisinages satisfont les propriétés suivantes :

- (V1) si $V \in \mathcal{V}_x$, alors $x \in V$,
- (V2) si $V \in \mathcal{V}_x$ et $V \subseteq W$, alors $W \in \mathcal{V}_x$,
- (V3) $X \in \mathcal{V}_x$,
- (V4) si $V, W \in \mathcal{V}_x$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}_x$,
- (V5) si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $W \in \mathcal{V}_x$ tel que pour tout $y \in W$, on a $V \in \mathcal{V}_y$.

Démonstration : Les trois premiers points sont évidents. Pour le quatrième, on sait qu'il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ tels que $x \in \omega_1 \subseteq V$ et $x \in \omega_2 \subseteq W$. Par conséquent, $x \in \omega_1 \cap \omega_2 \subseteq V \cap W$ avec $\omega_1 \cap \omega_2 \in \mathcal{T}$, ce qui suffit. Enfin pour le cinquième point, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq V$ et $W = \omega$ convient. ■

Réciproquement, on a le résultat suivant qui permet de construire des topologies à partir de systèmes de voisinages.

Proposition 1.3.7 Soient X un ensemble et pour tout $x \in X$, une partie $\mathcal{V}_x$ de $\mathcal{P}(X)$ qui satisfait les conditions (V1) à (V5). Alors, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ est le système de voisinages de x .

Démonstration : Par la Proposition 1.3.5, on sait que si une telle topologie $\mathcal{T}$ existe, alors les ouverts sont exactement les ensembles qui sont voisinages de chacun de leurs points, c'est-à-dire

$$\mathcal{T} = \{\omega \subseteq X : \forall x \in \omega, \omega \in \mathcal{V}_x\}.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{T}$ est bien une topologie et que les systèmes de voisinages pour $\mathcal{T}$ sont donnés par les ensembles $\mathcal{V}_x$.

(T1) Soit $\omega_\alpha, \alpha \in A$, une famille d'ensembles de $\mathcal{T}$. Si $x \in \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$, il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $x \in \omega_{\alpha_0}$ et donc $\omega_{\alpha_0} \in \mathcal{V}_x$ par définition de $\mathcal{T}$. La propriété (V2) implique alors que $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha \in \mathcal{V}_x$.

(T2) Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$. Si $x \in \omega_1 \cap \omega_2$, alors $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{V}_x$ et donc $\omega_1 \cap \omega_2 \in \mathcal{V}_x$ par (V4).

(T3) Bien sûr, $\emptyset \in \mathcal{T}$ puisqu'il n'y a pas de condition à vérifier, et $X \in \mathcal{T}$ par (V3).

Ainsi $\mathcal{T}$ est bien une topologie. Fixons $x \in X$ et montrons que $\mathcal{V}_x$ est le système de voisinages de x pour $\mathcal{T}$. D'une part, si V est un voisinage de x , alors il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq V$. Par définition de $\mathcal{T}$, on a $\omega \in \mathcal{V}_x$ et donc la propriété (V2) implique que $V \in \mathcal{V}_x$. D'autre part, fixons $V \in \mathcal{V}_x$ et montrons que V est un voisinage de x . Pour cela, posons $U = \{y \in X : V \in \mathcal{V}_y\}$. On sait que $x \in U$ et que $U \subseteq V$ par la propriété (V1). Il suffit donc de montrer que $U \in \mathcal{T}$ c'est-à-dire, par définition de $\mathcal{T}$, que $U \in \mathcal{V}_y$ pour tout $y \in U$. Or, si $y \in U$, on sait que $V \in \mathcal{V}_y$ et la propriété (V5) nous permet de considérer un ensemble $W \in \mathcal{V}_y$ tel que pour tout $z \in W$, $V \in \mathcal{V}_z$. En particulier, on a $W \subseteq U$ et la propriété (V2) permet de conclure que $U \in \mathcal{V}_y$. ■

Comme pour les ouverts d'une topologie, on considère souvent une collection de voisinages d'un point qui permet de décrire tous les voisinages de ce point.

Définition 1.3.8 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Une *base de voisinages* de x est une partie $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ telle que pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subseteq V$.

Si $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages de x , on a donc qu'un sous-ensemble $V \subseteq X$ est un voisinage de x si et seulement si il contient un élément de $\mathcal{B}_x$.

Exemple 1.3.9 Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des boules ouvertes (ou fermées) centrées en un point $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon strictement positif est une base de voisinages de x . On peut également montrer facilement que si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0, alors l'ensemble des boules ouvertes (ou fermées) centrées sur x et de rayon r_n est une base de voisinages de x .

Exemple 1.3.10 Si un ensemble X est muni de la topologie discrète, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ est une base de voisinages de x .

Le résultat suivant est immédiat et permet de caractériser les ensembles ouverts à partir des bases de voisinages.

Proposition 1.3.11 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et pour tout $x \in X$, une base de voisinages $\mathcal{B}_x$ de x . Un sous-ensemble A de X est ouvert si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subseteq A$.

Démonstration : Par définition d'une base de voisinages, on sait que A est un voisinage de x si et seulement si il contient un élément de $\mathcal{B}_x$. La Proposition 1.3.5 donne alors la conclusion. ■

Nous présentons à présent un lien naturel entre bases de topologie et bases de voisinages.

Proposition 1.3.12 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Pour tout $x \in X$, on pose

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages de x .

Démonstration : Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ et fixons $x \in X$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, alors par définition des voisinages, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq V$. Par définition des bases de topologie, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq \omega \subseteq V$, ce qui suffit.

Supposons à présent que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages de x . Soit $\omega \in \mathcal{T}$ et $x \in \omega$. Alors ω est un voisinage de x et il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subseteq \omega$. Par définition de $\mathcal{B}_x$, on a $x \in B$ et $B \in \mathcal{B}$, d'où la conclusion. ■

A nouveau, les bases de voisinages peuvent permettre de construire une topologie. Nous laissons les preuves des résultats suivants en exercice.

Proposition 1.3.13 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et pour tout $x \in X$, une base de voisinages $\mathcal{B}_x$ de x .

(BV1) Si $V \in \mathcal{B}_x$, alors $x \in V$,

(BV2) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, alors il existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tel que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$,

(BV3) Si $V_1 \in \mathcal{B}_x$, il existe $V_2 \in \mathcal{B}_x$ tel que pour tout $y \in V_2$, il existe $V_3 \in \mathcal{B}_y$ tel que $V_3 \subseteq V_1$.

Réciproquement, on a le résultat suivant.

Proposition 1.3.14 Soient X un ensemble et pour tout $x \in X$, une partie $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{P}(X)$ qui satisfait les conditions (BV1), (BV2) et (BV3). Alors, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages de x . Cette topologie est donnée par

$$\mathcal{T} = \{\omega \subseteq X : \forall x \in \omega \exists V \in \mathcal{B}_x \text{ tel que } V \subseteq \omega\}.$$

1.4 Intérieur, adhérence et frontière

Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ n'est en général ni ouverte ni fermée. Néanmoins, on va lui associer trois nouveaux sous-ensembles avec de belles propriétés topologiques : son intérieur, son adhérence et sa frontière.

Définition 1.4.1 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. Un point $x \in X$ est *intérieur* à A si $A \in \mathcal{V}_x$. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'*intérieur* de A et est noté A° .

Proposition 1.4.2 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A .

Démonstration : Si $\omega \in \mathcal{T}$ est tel que $\omega \subseteq A$, alors tout les points de ω appartiennent à A° . De plus, si $x \in A^\circ$, alors il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq A$. Au total, on a donc

$$\bigcup_{\omega \in \mathcal{T} \text{ tels que } \omega \subseteq A} \omega \subseteq A^\circ,$$

ce qui montre que A° est un ouvert inclus dans A et contenant tout ouvert inclus dans A . ■

Passons à présent à l'adhérence.

Définition 1.4.3 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. Un point $x \in X$ est *adhérent* à A si pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'*adhérence* de A et est noté $\overline{A}$.

Les propriétés de l'adhérence sont duales de celles de l'intérieur.

Proposition 1.4.4 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$.

1. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement si tout ouvert contenant x rencontre A .
2. On a $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.
3. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .

Démonstration : Le premier point est évident puisque tout ouvert contenant x est un voisinage de x et tout voisinage de x contient un ouvert contenant x . En particulier, $x \in \overline{A}$ si et seulement si aucun ouvert contenant x n'est inclus dans $X \setminus A$, ce qui est équivalent à dire que $x \notin (X \setminus A)^\circ$. Le deuxième point est ainsi prouvé et en particulier, $\overline{A}$ est un ensemble fermé puisque $(X \setminus A)^\circ$ est ouvert. Clairement, on a $A \subseteq \overline{A}$. Enfin, si F est un fermé contenant A , alors $X \setminus F \subseteq X \setminus A$ d'où $X \setminus F \subseteq (X \setminus A)^\circ$. Cela implique que $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ \subseteq F$, d'où la conclusion. ■

Remarque 1.4.5 Comme toute intersection d'ensembles fermés est un fermé, le troisième point de la proposition précédente implique que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A .

Introduisons à présent la notion de frontière d'un sous-ensemble.

Définition 1.4.6 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. La *frontière* de A , notée $A^\bullet$, est l'ensemble des points adhérents à A et à $X \setminus A$. On a donc

$$A^\bullet = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Remarquons que

$$A^\bullet = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \cap (X \setminus A^\circ) = X \setminus ((X \setminus A)^\circ \cup A^\circ).$$

Proposition 1.4.7 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. On a

1. $A^\bullet$ est un ensemble fermé,
2. $\overline{A} = A^\circ \cup A^\bullet$ et $A^\circ \cap A^\bullet = \emptyset$,
3. $\overline{A} = A \cup A^\bullet$,
4. $A^\circ = A \setminus A^\bullet$.

Démonstration : 1. C'est clair par définition puisque $A^\bullet$ est l'intersection de deux ensembles fermés.

2. On a $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ d'où $A^\circ \subseteq \overline{A}$. De plus, par définition, $A^\bullet \subseteq \overline{A}$. Au total, on a donc $A^\circ \cup A^\bullet \subseteq \overline{A}$. De plus, si $x \in \overline{A}$, deux cas exclusifs peuvent se produire :

- soit il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq A$
- soit pour tout $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega$, on a $\omega \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Dans le premier cas, $x \in A^\circ$ et dans le deuxième cas, $x \in \overline{(X \setminus A)}$ et donc $x \in A^\bullet$.

3. Si $x \in \overline{A}$, alors $x \in A^\circ \subseteq A$ ou $x \in A^\bullet$ par le deuxième point. L'inclusion inverse est immédiate puisque A et $A^\bullet$ sont inclus dans $\overline{A}$.

4. Si $x \in A^\circ$, alors $x \in A$ et $x \notin A^\bullet$ par le deuxième point. Enfin, si $x \in A \setminus A^\bullet$, alors $x \in \overline{A} \setminus A^\bullet = A^\circ$ par le deuxième point. ■

Terminons cette section en introduisant la notion de densité.

Définition 1.4.8 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A, B deux sous-ensembles de X . On dit que A est *dense* dans B si

$$A \subseteq B \subseteq \overline{A}.$$

En particulier, un sous-ensemble A est *dense* (dans X) si $\overline{A} = X$, c'est-à-dire si tout ouvert non-vide de X rencontre A .

1.5 Continuité

Rappelons qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \eta$. Cette définition peut se traduire en termes de boules (donc de bases de voisinages) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(b(x, \eta)) \subseteq b(f(x), \varepsilon)$. On peut encore traduire la continuité de l'application f en x en termes de voisinages : puisqu'un ensemble de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point s'il contient une boule centrée en ce point, on a que f est continu en x si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x . Cette caractérisation ne fait plus du tout apparaître la notion de distance et permet une généralisation de la notion de continuité aux applications entre espaces topologiques quelconques.

Définition 1.5.1 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application et $x \in X$. On dit que f est *continue au point x* si pour tout $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$, on a $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$.

Cette définition est donnée en termes de voisinages. Dans le résultat suivant, nous montrons comment elle se traduit en termes d'ouverts ou de bases de voisinages.

Proposition 1.5.2 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application et $x \in X$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application f est continue en x .
2. Si $\mathcal{B}_x$ et $\mathcal{B}_{f(x)}$ sont des bases de voisinages de x et $f(x)$ respectivement, alors pour tout $B \in \mathcal{B}_{f(x)}$, il existe $A \in \mathcal{B}_x$ tel que $f(A) \subseteq B$.
3. Pour tout $\omega' \in \mathcal{T}'$ tel que $f(x) \in \omega'$, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega$ et $f(\omega) \subseteq \omega'$.
4. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement, alors pour tout $B \in \mathcal{B}'$ tel que $f(x) \in B$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $x \in A$ et $f(A) \subseteq B$.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. Soit $B \in \mathcal{B}_{f(x)}$. Alors B est un voisinage de $f(x)$ et par hypothèse, $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}_x$. Par conséquent, il existe $A \in \mathcal{B}_x$ tel que $A \subseteq f^{-1}(B)$, d'où $f(A) \subseteq B$.

2. $\Rightarrow$ 1. Soit $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Alors il existe $B \in \mathcal{B}_{f(x)}$ tel que $B \subseteq V$. Par hypothèse, il existe $A \in \mathcal{B}_x$ tel que $f(A) \subseteq B \subseteq V$, d'où $A \subseteq f^{-1}(V)$. Ainsi $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$.

2. $\Leftrightarrow$ 3. C'est direct en utilisant les bases de voisinages

$$\mathcal{B}_x = \{\omega \in \mathcal{T} : x \in \omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{f(x)} = \{\omega' \in \mathcal{T}' : f(x) \in \omega'\}.$$

2. $\Leftrightarrow$ 4. C'est direct par la Proposition 1.3.12. ■

Remarque 1.5.3 L'énoncé précédent est légèrement ambigu puisque les assertions 2 et 4 peuvent être comprises comme des propriétés valides pour toute paire de bases ou pour une seule. Nous avons montré en fait l'équivalence entre toutes ces assertions.

Passons à présent à la définition d'une application continue.

Définition 1.5.4 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue* si elle est continue en tout point x de X .

A nouveau, la continuité peut s'exprimer en termes d'ouverts, de voisinages, d'ouverts de bases ou même de sous-bases.

Proposition 1.5.5 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application f est continue.
2. Pour tout $\omega' \in \mathcal{T}'$, on a $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout fermé F de Y , $f^{-1}(F)$ est un fermé de X .
4. Si $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{T}'$, alors pour tout $\omega' \in \mathcal{B}'$, on a $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$.

5. Si $\mathcal{S}'$ est une sous-base de $\mathcal{T}'$, alors pour tout $\omega' \in \mathcal{S}'$, on a $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$.

Le deuxième point signifie qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'image inverse par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X . Les deux derniers points montrent qu'il suffit de le vérifier sur les ouverts de base ou de sous-base.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. Soit $\omega' \in \mathcal{T}'$ et soit $x \in f^{-1}(\omega')$. Comme f est continue en x et comme $f(x) \in \omega'$, on sait que $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{V}_x$. On conclut par la Proposition 1.3.5.

2. $\Rightarrow$ 1. Soient $x \in X$ et $\omega' \in \mathcal{T}'$ tels que $f(x) \in \omega'$. Par hypothèse, on a $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$. Par conséquent, si on pose $\omega = f^{-1}(\omega')$, on a $x \in \omega \in \mathcal{T}$ et $f(\omega) \subseteq \omega'$.

2. $\Rightarrow$ 4. (5.) C'est évident puisque les éléments d'une (sous-)base sont des ouverts.

4. (5.) $\Rightarrow$ 2. Il suffit d'écrire tout ouvert comme une union (d'intersections finies) d'ouverts de (sous-)base et d'utiliser le fait que l'image inverse d'unions (d'intersections finies) est l'union (des intersections finies) des images inverses.

2. $\Leftrightarrow$ 3. C'est évident par passage au complémentaire. ■

La définition que nous avons adoptée pour la continuité permet de prouver directement le résultat suivant.

Proposition 1.5.6 Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ et $(Z, \mathcal{T}'')$ des espaces topologiques. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est une application continue.

Démonstration : Si $\Omega \in \mathcal{T}''$, on a

$$(g \circ f)^{-1}(\Omega) = \{x \in X : g(f(x)) \in \Omega\} = \{x \in X : f(x) \in g^{-1}(\Omega)\} = f^{-1}(g^{-1}(\Omega))$$

qui est un ouvert de X par continuité de f puisque $g^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de Y par continuité de g . ■

La définition suivante donne la notion d'équivalence d'espaces topologiques.

Définition 1.5.7 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est un *homéomorphisme* si f est bijectif, continu et d'inverse continu. S'il existe un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, on dit qu'ils sont *homéomorphes*.

Deux espaces homéomorphes sont topologiquement équivalents : d'un point de vue topologique, ils sont indistinguables. Remarquons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur la classe des espaces topologiques. Les notions que l'on considère en topologie sont des notions qui sont préservées par homéomorphisme : on parle de *propriétés topologiques*.

Exemple 1.5.8 Tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes entre eux et à $\mathbb{R}$ tout entier. Si $a, b \in \mathbb{R}$, l'application

$$f :]0, 1[\rightarrow]a, b[: x \mapsto a + (b - a)x$$

est un homéomorphisme entre $]0, 1[$ et $]a, b[$. Pour passer à $\mathbb{R}$, on peut par exemple considérer l'homéomorphisme

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

et pour l'intervalle $]0, +\infty[$, on utilise l'homéomorphisme

$$h : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[: x \mapsto \exp(x).$$

Exemple 1.5.9 On peut montrer que les intervalles semi-ouverts de la forme $] - \infty, a]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, +\infty[$ sont également homéomorphes entre eux. Il faut pour cela introduire une topologie sur ces intervalles. De même, on peut montrer que tous les intervalles compacts $[a, b]$ sont homéomorphes entre eux.

Exemple 1.5.10 Dans $\mathbb{R}^2$, toute boule est homéomorphe à tout rectangle¹.

Exemple 1.5.11 Le cercle $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ peut être identifié topologiquement à l'intervalle $[0, 1]$ dans lequel les deux extrémités sont identifiées (on a donc une relation d'équivalence $\mathcal{R}$). On considère la fonction

$$f : x \in [0, 1]/\mathcal{R} \mapsto \exp(2i\pi x).$$

Il est pour cela nécessaire de définir une topologie sur les ensembles obtenus par quotient.

Exemple 1.5.12 Le cylindre $S^1 \times [0, 1]$ est homéomorphe au carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans lequel on a identifié deux côtés. Le tore $S^1 \times S^1$ est homéomorphe au carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans lequel on a

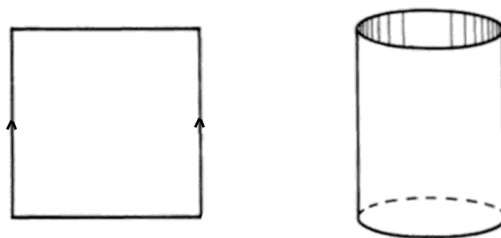


FIGURE 1.1 – Si on recolle les côtés du carré en suivant les flèches, on obtient un cylindre.

identifié les côtés parallèles. Si on considère à nouveau le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ mais on identifie à présent deux des côtés parallèles en inversant le sens. On obtient alors le ruban de Möbius. Enfin, en identifiant les côtés parallèles du carré en préservant une fois le sens et en l'inversant l'autre fois, on obtient la bouteille de Klein. Pour traiter ces exemples, on doit définir une topologie sur les ensembles obtenus par produit.

A titre d'exemple, terminons ce chapitre en montrant que la notion d'espace métrisable est bien une notion topologique.

Proposition 1.5.13 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. Si $(X, \mathcal{T})$ est métrisable, alors $(Y, \mathcal{T}')$ l'est également.

1. Pour différencier les deux notamment via l'existence de "points anguleux" dans les rectangles, il faut introduire la notion de *difféomorphisme*, qui prend en compte la dérivée, et qui est centrale en géométrie différentielle.

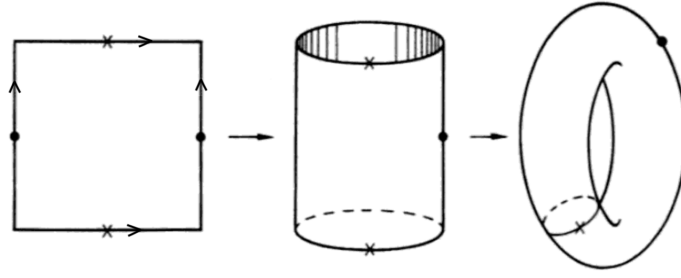


FIGURE 1.2 – Si on recolle successivement les côtés du carré en suivant les flèches, on obtient un tore.

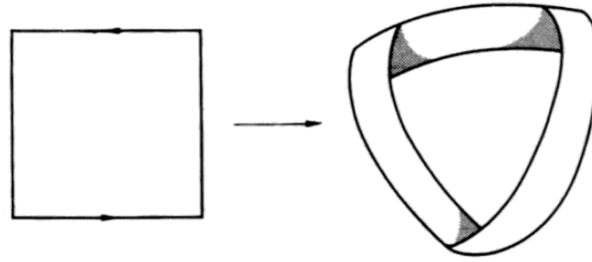


FIGURE 1.3 – Le ruban de Möbius peut être obtenu en faisant subir une torsion à une bande de papier rectangulaire.

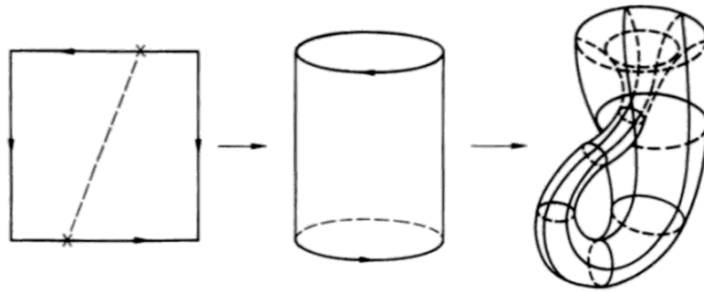


FIGURE 1.4 – La bouteille de Klein obtenue en identifiant les côtés du carré.

Démonstration : Soit d une distance définissant la topologie de X et posons

$$d'(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

pour tous $y_1, y_2 \in Y$. On vérifie directement qu'il s'agit bien d'une distance sur Y .

- Il est clair que d' est symétrique.
- On a $d'(y_1, y_2) = 0$ si et seulement si $d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = 0$. Puisque d est une distance, c'est équivalent à $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ et comme f est injectif, c'est équivalent à $y_1 = y_2$.
- Si on considère un troisième point y_3 , on a

$$\begin{aligned} d'(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) &\leq d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_3)) + d(f^{-1}(y_3), f^{-1}(y_2)) \\ &= d'(y_1, y_3) + d'(y_3, y_2) \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire pour d .

Il reste à montrer que la topologie associée à d' est la topologie $\mathcal{T}'$. Soient $\Omega \in \mathcal{T}'$ et $y \in \Omega$. Puisque f est continue, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathcal{T}$ qui contient $f^{-1}(y)$. Il existe donc $r > 0$ tel que $b(f^{-1}(y), r) \subseteq f^{-1}(\Omega)$. Si $z \in b'(y, r)$, alors $d'(y, z) = d(f^{-1}(z), f^{-1}(y)) < r$ et donc $f^{-1}(z) \in b(f^{-1}(y), r) \subseteq f^{-1}(\Omega)$. D'où $z \in \Omega$. Ainsi, $b'(y, r) \subseteq \Omega$ et Ω est ouvert pour la topologie associée à d' .

Réciproquement, montrons que les boules ouvertes pour d' sont ouvertes dans $(Y, \mathcal{T}')$. Soient $y \in Y$ et $r > 0$. En utilisant la définition de d' et la bijectivité de f , on a $b'(y, r) = f(b(f^{-1}(y), r))$. Puisque f est un homéomorphisme, l'image de la boule ouverte $b(f^{-1}(y), r)$ de X est ouverte dans Y . Donc $b'(y, r) \in \mathcal{T}'$. ■

Chapitre 2

Constructions classiques de topologies

Dans ce chapitre, nous introduisons trois méthodes classiques qui permettent de construire de nouveaux espaces topologiques à partir d'existants : les sous-espaces, les espaces produits et les espaces quotients.

2.1 Comparaison de topologies

Etant donné un ensemble X , nous savons que nous pouvons toujours considérer sur X deux topologies : la topologie discrète et la topologie triviale. Ces topologies sont extrêmes dans le sens où toute topologie sur X contient toujours la topologie triviale et est toujours incluse dans la topologie discrète. On peut en fait mettre un ordre (partiel) sur la collection des topologies d'un ensemble.

Définition 2.1.1 Soient X un ensemble et $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux topologies sur X . On dit que $\mathcal{T}$ est *plus fin* que $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}$ possède plus d'ouverts que $\mathcal{T}'$, c'est-à-dire si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Exemple 2.1.2 Sur $X = \{x, y, z\}$, on a

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \{\emptyset, \{x\}, X\} \subseteq \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, X\} \subseteq \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, X\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Par contre, les topologies $\{\emptyset, \{x, y\}, X\}$ et $\{\emptyset, \{x\}, X\}$ ne sont pas comparables.

La relation d'ordre entre deux topologies sur X peut également s'exprimer via la continuité de l'application identité.

Proposition 2.1.3 Soient X un ensemble et $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux topologies sur X . Alors, $\mathcal{T}$ est plus fin que $\mathcal{T}'$ si et seulement si l'application identité

$$id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$$

est continue.

Démonstration : C'est immédiat en utilisant la Proposition 1.5.5 puisque

$$id^{-1}(\omega') = \omega' \in \mathcal{T} \quad \forall \omega' \in \mathcal{T}' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}.$$

■

Terminons cette section en remarquant que toute collection de topologies admet toujours une borne inférieure et une borne supérieure.

Proposition 2.1.4 *Soient X un ensemble et $\mathbb{A}$ une collection de topologies sur X . Alors, $\bigcap_{\mathcal{T} \in \mathbb{A}} \mathcal{T}$ est la borne inférieure de $\mathbb{A}$ et la topologie engendrée par $\bigcup_{\mathcal{T} \in \mathbb{A}} \mathcal{T}$ est la borne supérieure de $\mathbb{A}$.*

Démonstration : Il est clair que $\bigcap_{\mathcal{T} \in \mathbb{A}} \mathcal{T}$ est une topologie moins fine que toutes les topologies de $\mathbb{A}$. De plus, si $\mathcal{T}'$ est moins fine que toutes les topologies de $\mathbb{A}$, alors $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ pour tout $\mathcal{T} \in \mathbb{A}$, et donc $\mathcal{T}' \in \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathbb{A}} \mathcal{T}$. On procède de même pour la borne supérieure. ■

2.2 Topologies initiales et finales

Considérons l'application suivante

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 3 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Cette application est-elle continue ? La réponse dépend de la topologie que l'on met sur l'espace de départ $\mathbb{R}$ et sur l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$. En effet, si la topologie sur l'espace de départ est la topologie discrète, f sera continue quelque soit la topologie d'arrivée. De plus, si l'espace d'arrivée est muni de la topologie triviale, l'application sera continue quelque soit la topologie de départ.

Dans cette section, nous considérons une application quelconque $f : X \rightarrow Y$ et nous fixons une topologie sur un des deux ensembles. Nous déterminons ensuite la topologie sur l'autre ensemble qui rend l'application f continue et qui s'éloigne le plus possible des exemples triviaux cités ci-dessus. Ces topologies s'appellent les topologies initiales et finales relatives à f . Elles nous permettront par la suite d'introduire les topologies induites, produits et quotients.

Commençons par définir la topologie initiale. On considère un ensemble X , un espace topologique $(Y, \mathcal{T}')$ et une application $f : X \rightarrow Y$. On cherche à mettre sur X une topologie qui rend f continu et qui contient le moins d'ouverts possibles.

Proposition 2.2.1 *Soient X un ensemble, $(Y, \mathcal{T}')$ un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application. On définit $f^{-1}(\mathcal{T}')$ par*

$$f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(\omega') : \omega' \in \mathcal{T}'\}.$$

Alors, $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est l'unique topologie sur X qui rend f continu et qui est moins fine que toute topologie sur X rendant f continu. On l'appelle la topologie initiale relative à f .

Démonstration : Il est clair que $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une topologie et en, utilisant la Proposition 1.5.5, qu'elle rend bien l'application f continue. De plus, si $\mathcal{T}''$ est une topologie qui rend f continu, la Proposition 1.5.5 implique directement que $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}''$. ■

Le résultat suivant découle directement.

Corollaire 2.2.2 *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Alors $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continu si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$.*

On peut généraliser la construction précédente à une famille d'applications définies sur un même ensemble.

Proposition 2.2.3 Soient X un ensemble, $(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une collection d'espaces topologiques et pour tout $\alpha \in A$, une application $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$. Alors la topologie

$$\sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$$

est l'unique topologie sur X qui rend les applications f_α continues et qui est moins fine que toute topologie sur X rendant les applications f_α continues. On l'appelle la topologie initiale relative aux applications f_α , $\alpha \in A$.

Démonstration : Par le Corollaire 2.2.2, il est clair que $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ rend les applications f_α continues. De plus, la définition de la borne supérieure implique que c'est la topologie la moins fine avec cette propriété. ■

Remarque 2.2.4 Par la Proposition 2.1.4, la topologie initiale relative aux f_α est la topologie engendrée par l'union des $f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$. La définition des sous-bases donne que cette topologie admet pour base les intersections finies de la forme

$$f_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n})$$

avec $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \in A_j$ et $\omega_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Terminons cette partie sur la topologie initiale par la caractérisation des applications continues à valeurs dans un espace muni d'une topologie initiale.

Proposition 2.2.5 Soient X un ensemble, $(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une collection d'espaces topologiques et pour tout $\alpha \in A$, une application $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$. Si on munit X de la topologie initiale relative aux applications f_α , $\alpha \in A$, alors une application $g : (Z, \mathcal{T}) \rightarrow X$ est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, l'application $f_\alpha \circ g : (Z, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ est continue.

Démonstration : Si g est continu, alors pour tout $\alpha \in A$, $f_\alpha \circ g$ est continu par la Proposition 1.5.6. Réciproquement, supposons que les applications $f_\alpha \circ g$ sont continues. La Proposition 1.5.5 implique qu'il suffit de montrer que l'image inverse par g de tout ouvert de sous-base de X est un ouvert de Z . Par définition de la topologie initiale, un tel ouvert est de la forme $f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)$ où $\alpha \in A$ et $\omega_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$. On a

$$g^{-1}(f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(\omega_\alpha),$$

qui est ouvert dans Z par hypothèse. ■

Intéressons-nous à présent à la définition la topologie finale. On considère un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, un ensemble Y et une application $f : X \rightarrow Y$. On cherche à mettre sur Y une topologie qui rend f continu et qui contient le plus d'ouverts possibles.

Proposition 2.2.6 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, Y un ensemble et $f : X \rightarrow Y$ une application. On définit $f(\mathcal{T})$ par

$$f(\mathcal{T}) = \{\omega' \subseteq Y : f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}\}.$$

Alors, $f(\mathcal{T})$ est l'unique topologie sur Y qui rend f continu et qui est plus fine que toute topologie sur Y rendant f continu. On l'appelle la topologie finale relative à f .

Démonstration : En utilisant la Proposition 1.5.5, on sait que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continu si et seulement si pour tout $\omega' \in \mathcal{T}'$, on a $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$, ce qui se réécrit $\mathcal{T}' \subseteq f(\mathcal{T})$. On vérifie directement que $f(\mathcal{T})$ est une topologie sur Y , ce qui donne la conclusion. ■

A nouveau, le résultat précédent permet d'obtenir directement une caractérisation des topologies sur Y rendant f continu.

Corollaire 2.2.7 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, Y un ensemble et $f : X \rightarrow Y$ une application. Alors, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continu si et seulement si $\mathcal{T}' \subseteq f(\mathcal{T})$.

Comme dans le cas de la topologie initiale, on peut généraliser la construction de la topologie finale à une famille d'applications définies sur un même ensemble.

Proposition 2.2.8 Soient $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une collection d'espaces topologiques, Y un ensemble et pour tout $\alpha \in A$, une application $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$. Alors la topologie

$$\inf_{\alpha \in A} f_\alpha(\mathcal{T}_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha(\mathcal{T}_\alpha)$$

est l'unique topologie sur Y qui rend les applications f_α continues et qui est plus fine que toute topologie sur Y rendant les applications f_α continues. On l'appelle la topologie finale relative aux applications f_α , $\alpha \in A$.

Démonstration : Par le Corollaire 2.2.7, il est clair que $\inf_{\alpha \in A} f_\alpha(\mathcal{T}_\alpha)$ rend les applications f_α continues. De plus, la définition de la borne inférieure implique que c'est la topologie la plus fine avec cette propriété. ■

Enfin, présentons un résultat qui permet d'obtenir la continuité d'applications définies sur un espace muni d'une topologie finale.

Proposition 2.2.9 Soient $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une collection d'espaces topologiques, Y un ensemble et pour tout $\alpha \in A$, une application $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$. Si on munit Y de la topologie finale relative aux applications f_α , $\alpha \in A$, alors une application $g : Y \rightarrow (Z, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, l'application $g \circ f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \rightarrow (Z, \mathcal{T})$ est continue.

Démonstration : Si g est continu, alors la Proposition 1.5.6 implique que pour tout $\alpha \in A$, $g \circ f_\alpha$ est continu. Réciproquement, supposons que les applications $f_\alpha \circ g$ sont continues. Considérons $\omega \in \mathcal{T}$ et montrons que $g^{-1}(\omega)$ appartient à la topologie finale sur Y qui est donnée par $\bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha(\mathcal{T}_\alpha)$. Or, pour tout $\alpha \in A$, on a $f_\alpha^{-1}(g^{-1}(\omega)) = (g \circ f_\alpha)^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}_\alpha$ par hypothèse, ce qui suffit. ■

2.3 Sous-espaces

Un sous-ensemble d'un espace topologique hérite de manière naturelle d'une topologie. Nous présentons cette topologie et ses premières propriétés dans cette section.

Définition 2.3.1 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subseteq X$. La *topologie induite* sur Y par $(X, \mathcal{T})$ est la topologie initiale relative à l'inclusion $i : Y \rightarrow X$. On la note $\mathcal{T}_{\text{ind}}$ ou $\mathcal{T}_X$. L'ensemble Y muni de cette topologie est appelé un *sous-espace topologique* de $(X, \mathcal{T})$.

Remarquons que

$$\mathcal{T}_{\text{ind}} = \{i^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{T}\} = \{\omega \cap Y : \omega \in \mathcal{T}\}.$$

Ainsi, les ouverts de Y sont simplement les intersections des ouverts de X avec Y . En particulier, si $Y \subseteq X$ est un ouvert, alors

$$\{\omega \cap Y : \omega \in \mathcal{T}\} = \{\omega : \omega \in \mathcal{T}, \omega \subseteq Y\}$$

puisque $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.

Exemple 2.3.2 L'espace $\mathbb{R}$ vu comme partie de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.3.3 La topologie induite par $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{N}$ est la topologie discrète.

Au vu des exemples précédents, on pourrait se demander si $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^2$. La réponse est positive et est obtenue dans le résultat suivant.

Proposition 2.3.4 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si $Z \subseteq Y \subseteq X$, alors les topologies induites dans Z par X et Y (muni de la topologie induite par X) coïncident.

Démonstration : Soit ω un ouvert de la topologie induite par Y . Alors, il existe un ouvert Ω de Y tel que $\omega = \Omega \cap Z$. Or, comme Ω est un ouvert de Y , il existe $\Omega' \in \mathcal{T}$ tel que $\Omega = \Omega' \cap Y$. Au total, on a donc $\omega = \Omega' \cap Y \cap Z = \Omega' \cap Z$ et ω est un ouvert de la topologie induite par X . De même, si ω est un ouvert de la topologie induite par X sur Z , alors il existe $\Omega \in \mathcal{T}'$ tel que $\omega = \Omega \cap Z$. On en tire que $\omega = \omega' \cap Z$ où $\omega' = \Omega \cap Y$ est un ouvert de Y . ■

Les fermés d'un sous-espace topologique sont obtenus à partir des fermés de l'espace de manière semblable aux ouverts.

Proposition 2.3.5 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subseteq X$. Un ensemble $A \subseteq Y$ est fermé pour la topologie induite sur Y si et seulement si il existe un fermé F de X tel que $A = F \cap Y$.

Démonstration : Il suffit de passer au complémentaire. En effet, si A est fermé dans Y , alors il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $Y \setminus A = \omega \cap Y$. On en tire que $A = Y \cap (X \setminus \omega)$. Réciproquement, si F est un fermé de X et si $A = F \cap Y$, alors $Y \setminus A = (Y \cap (X \setminus F))$ et donc A est fermé dans Y . ■

Ce résultat permet par exemple de calculer l'adhérence d'un sous-ensemble de Y à partir de son adhérence dans X .

Corollaire 2.3.6 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subseteq X$. Pour toute partie A de Y , on a $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

Démonstration : Par la Proposition 2.3.5, on sait que $\overline{A}^X \cap Y$ est un fermé de Y . De plus, il contient A et donc $\overline{A}^Y \subseteq \overline{A}^X \cap Y$. D'autre part, soit $y \in \overline{A}^X \cap Y$ et soit un ouvert ω de Y qui contient y . Alors, il existe $\Omega \in \mathcal{T}$ tel que $\omega = \Omega \cap Y$ et $\omega \cap A = \Omega \cap Y \cap A = \Omega \cap A \neq \emptyset$ car $y \in \overline{A}^X$. ■

Remarque 2.3.7 En général, on a $A^{\circ_Y} \neq A^{\circ_X} \cap Y$. Il suffit de prendre $A = Y = \mathbb{Q}$ et $X = \mathbb{R}$ puisque dans ce cas, $A^{\circ_Y} = A$ et $A^{\circ_X} = \emptyset$.

Les deux résultats suivants sont utilisés couramment lorsque l'on étudie la continuité d'applications sur des sous-espaces.

Proposition 2.3.8 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Z, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Z$ une application continue. Si $Y \subseteq X$ est muni de la topologie induite par X , alors la restriction $f|_Y : Y \rightarrow Z$ est continue.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la Proposition 1.5.6 et de remarquer que $f|_Y = f \circ i$ où i est continu par définition de la topologie induite. ■

Le résultat suivant est une simple réécriture de la Proposition 2.2.5 dans notre cas particulier.

Proposition 2.3.9 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Z, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Z$ une application continue. Si Y est un sous-espace topologique de Z qui satisfait $f(X) \subseteq Y$, alors l'application $f : X \rightarrow Y$ est continue.

Exemple 2.3.10 Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Puisque l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x$$

est continue, sa restriction à S^2 l'est également. On en tire également que $f : S^2 \rightarrow [-1, 1]$ est continue.

Si une application est continue, on a vu que ses restrictions à tous les sous-espaces topologiques sont continues. Il est donc naturel de se demander si on peut avoir une réciproque à ce résultat. Il suffit en fait de regarder ce qui se passe sur une famille de sous-espaces qui recouvrent un voisinage de chaque point de l'espace de base.

Proposition 2.3.11 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tel que $\mathcal{A}$ contient un voisinage de chaque point $x \in X$. Une application $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'application $f|_A$ est continue.

Démonstration : On a déjà démontré que la condition était nécessaire dans la Proposition 2.3.8. Montrons qu'elle est suffisante. Pour cela, soit $\omega \in \mathcal{T}'$ et soit $x \in f^{-1}(\omega)$. Par hypothèse, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $A \in \mathcal{V}_x$. En particulier, $x \in A^\circ$. On sait aussi que $f|_A$ est continu et donc il existe un ouvert $\Omega \in \mathcal{T}$ tel que $(f|_A)^{-1}(\omega) = \Omega \cap A$. Alors, $\Omega \cap A^\circ$ est un ouvert de X contenant x et inclus dans $f^{-1}(\omega)$, d'où $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{V}_x$. ■

Terminons cette section par des propriétés relatives au comportement des bases de topologie et bases de voisinages vis-à-vis des sous-espaces. Les preuves sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 2.3.12 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subseteq X$ muni de la topologie induite.

1. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$, alors $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ est une base de Y .
2. Si $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages dans X de $x \in Y$, alors $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_x\}$ est une base de voisinages de x dans Y .

2.4 Espaces produits

Dans cette section, nous montrons comment munir un produit cartésien d'espaces topologiques d'une topologie naturelle et utile. Nous commençons par étendre la définition d'un produit cartésien à une famille quelconque d'espaces.

Définition 2.4.1 Soit X_α , $\alpha \in A$, une famille d'ensembles. Le *produit cartésien* des ensembles X_α , $\alpha \in A$, est l'ensemble

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha \forall \alpha \in A\}.$$

Exemple 2.4.2 Si $A = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble fini, alors

$$\prod_{\alpha \in \{1, \dots, n\}} X_\alpha = X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i \forall i \leq n\}.$$

Exemple 2.4.3 Si $A = \mathbb{N}$ et $X_n = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in X \forall n \in \mathbb{N}\}$$

est l'ensemble des suites de X .

Exemple 2.4.4 Si $A = \mathbb{R}$ et $X_\alpha = \mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{(f(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{R}} : f(\alpha) \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4.5 Lorsque l'on considère un produit général, il faut que l'on puisse sélectionner un élément dans chaque ensemble considéré. Ainsi, l'axiome du choix est nécessaire.

Définition 2.4.6 Soit X_α , $\alpha \in A$, une famille d'ensembles. Pour tout $\alpha_0 \in A$, la *projection canonique* p_{α_0} est l'application définie par

$$p_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_{\alpha_0} : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_{\alpha_0}.$$

Ces applications vont nous permettre de définir une topologie sur le produit cartésien d'espaces topologiques.

Définition 2.4.7 Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques. La *topologie produit* ou *topologie faible* sur le produit cartésien $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ est la topologie initiale relative à la famille des projections canoniques p_α , $\alpha \in A$.

On sait donc qu'une base de la topologie produit est donnée par les intersections finies de la forme

$$p_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n})$$

avec $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \in A_j$ et $\omega_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Remarquons que

$$p_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n}) = \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha \quad \text{où} \quad Z_\alpha = \begin{cases} \omega_{\alpha_j} & \text{si } \alpha = \alpha_j \text{ pour un } j \in \{1, \dots, n\} \\ X_\alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, les ouverts de base sont donnés par les produits des ouverts des espaces X_α dont seulement un nombre fini d'entre eux est propre (différent de X_α). Par contre, si on considère un produit fini, les ouverts de base sont les produits d'ouverts.

Exemple 2.4.8 Une base de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est donnée par les produits $\omega_1 \times \omega_2$ d'ouverts de la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$. Comme une base de la topologie euclidienne est donnée par les intervalles ouverts, on trouve facilement qu'une base de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est donnée par les produits d'intervalles ouverts. On retrouve donc la topologie euclidienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Exemple 2.4.9 Considérons $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$ muni de la topologie produit. Le sous-ensemble $] - 1, 1[^{\mathbb{N}}$ formé des suites de $] - 1, 1[$ n'est pas ouvert puisqu'il n'y a pas d'ouvert de base inclus dedans.

Exemple 2.4.10 Considérons l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une base de voisinages d'une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour la topologie produit est donnée par les ensembles $U(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de la forme

$$\begin{aligned} U(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g(x_j) \in]f(x_j) - \varepsilon_j, f(x_j) + \varepsilon_j[\forall j \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon_j \forall j \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{N}_0$, $x_j \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_j > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, vu la Proposition 1.3.12.

Dans tout espace produit, on a par contre que tout produit de fermés est fermé.

Proposition 2.4.11 Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques. Si pour tout $\alpha \in A$, F_α est un fermé de X_α , alors $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé dans $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Démonstration : On remarque que

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} F_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : \exists \alpha_0 \in A \text{ tel que } x_{\alpha_0} \notin F_{\alpha_0}\} = \bigcup_{\alpha_0 \in A} p_{\alpha_0}^{-1}(X_{\alpha_0} \setminus F_{\alpha_0})$$

qui est un ouvert puisque chaque projection est continue. ■

Si on considère une application f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on sait qu'elle est continue si et seulement si chacune de ses composantes l'est. La définition de la topologie produit comme topologie initiale permet de généraliser cette caractérisation de la continuité pour des applications à valeurs dans un produit quelconque.

Proposition 2.4.12 Soient $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques, $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Si on munit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ de la topologie produit, alors l'application f est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, l'application $p_\alpha \circ f$ est continue.

Démonstration : Il s'agit d'une reformulation de la Proposition 2.2.5 dans le contexte des espaces produits. ■

Donnons une application directe mais très utile du résultat précédent.

Corollaire 2.4.13 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie euclidienne. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications continues, alors fg , $f + g$ et cf où $c \in \mathbb{R}$ sont des applications continues. Si $g \neq 0$ sur X , alors f/g est continu sur X .

Démonstration : Nous démontrons le cas de la somme. Les autres cas se traitent de manière semblable. Considérons l'application

$$(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \mapsto (f(x), g(x)).$$

Elle est continue car $p_1 \circ (f, g) = f$ et $p_2 \circ (f, g) = g$. On sait que l'application

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

est continue puisque $\mathbb{R}$ est muni de la topologie euclidienne. Par conséquent, $+ \circ (f, g) = f + g$ est continue. ■

Fréquemment, l'espace $\mathbb{R}^2$ est représenté par un plan en y traçant des axes. Chaque axe est identifié à $\mathbb{R}$ via l'application $x \mapsto (x, 0)$ ou $x \mapsto (0, x)$. Le point 0 que l'on privilégie est évidemment arbitraire et on pourrait identifier $\mathbb{R}$ à toute droite horizontale ou verticale. Cette identification reste valide d'un point de vue topologique dans n'importe quel espace produit.

Proposition 2.4.14 Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques. Pour tout $\alpha_0 \in A$, l'espace topologique $(X_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$ est homéomorphe à un sous-espace topologique du produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Plus précisément, si pour tout $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ on fixe un point $x_\alpha \in X_\alpha$, alors l'application

$$i : X_{\alpha_0} \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : y \mapsto (y_\alpha)_{\alpha \in A} \quad \text{où} \quad y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \\ y & \text{si } \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

est un homéomorphisme entre $(X_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$ et $i(X_{\alpha_0})$ muni de la topologie induite par le produit.

Démonstration : Commençons par montrer que i est une application injective. Supposons donc que $i(y) = i(z)$. Alors, on a $p_{\alpha_0}(i(y)) = p_{\alpha_0}(i(z))$ c'est-à-dire $y = z$. On obtient en particulier que l'inverse de $i : X_{\alpha_0} \rightarrow i(X_{\alpha_0})$ est $p_{\alpha_0}|_{i(X_{\alpha_0})}$. Puisque p_{α_0} est une application continue, la Proposition 2.3.8 implique que $p_{\alpha_0}|_{i(X_{\alpha_0})}$ est également continu. Pour conclure, il suffit de montrer que $i : X_{\alpha_0} \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ est continu en utilisant la Proposition 2.3.9. Or, pour tout $\alpha \in A$, il est clair que $p_\alpha \circ i$ est continu. La Proposition 2.4.12 donne la conclusion. ■

2.5 Espaces quotients

Considérons un ensemble X et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X , c'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive. L'ensemble quotient de X par $\mathcal{R}$, noté $X/\mathcal{R}$, est l'ensemble formé des classes d'équivalence $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X : y\mathcal{R}x\}$. Le passage au quotient est l'application

$$\pi_{\mathcal{R}} : X \rightarrow X/\mathcal{R} : x \mapsto [x]_{\mathcal{R}}.$$

Définition 2.5.1 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique sur X et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . La *topologie quotient* sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie finale $\pi_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})$ relative à $\pi_{\mathcal{R}}$.

Les ouverts de $X/\mathcal{R}$ sont donc les ensembles $\omega \subseteq X/\mathcal{R}$ tels que $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}$. La définition de la topologie quotient permet de caractériser les applications continues sur le quotient. Commençons pour cela par montrer que toute application définie sur un espace quotient est liée à une application définie sur l'espace de départ.

Proposition 2.5.2 Soient $f : X \rightarrow Y$ une application et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . Alors f est constante sur les classes d'équivalence (c'est-à-dire $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$) si et seulement si il existe une unique application $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}$.

Démonstration : Si f est une application constante sur les classes d'équivalence, alors il est clair que $\tilde{f}([x]_{\mathcal{R}}) = f(x)$ pour tout $x \in X$ est l'unique application qui convient. La réciproque est immédiate. ■

Cette propriété permet de caractériser la continuité d'applications définies sur un espace quotient.

Proposition 2.5.3 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . Une application $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si $\tilde{f} : (X/\mathcal{R}, \pi_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continue.

Démonstration : Puisque $f = \tilde{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}$, le résultat découle directement de la Proposition 2.2.9. ■

Exemple 2.5.4 Considérons sur la droite $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, on a $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Cet espace quotient est homéomorphe au cercle S^1 par l'application

$$\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 : [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

On sait que $\tilde{f}$ est bijectif et est continu par les Propositions 2.3.9 et 2.5.3 puisque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'est. Enfin, $\tilde{f}^{-1}$ est continu si et seulement si $\tilde{f}$ est ouvert (l'image de tout ouvert est un ouvert). Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que $\pi^{-1}(\omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors

$$\tilde{f}(\omega) = \{\tilde{f}([x]) : [x] \in \omega\} = \{\tilde{f}(\pi(x)) : \pi(x) \in \omega\} = \{f(x) : x \in \pi^{-1}(\omega)\} = f(\pi^{-1}(\omega))$$

d'où le résultat puisque f est une application ouverte (exercice). Mentionnons que nous verrons un résultat qui permet d'obtenir plus facilement la continuité de $\tilde{f}^{-1}$.

Chapitre 3

Convergence, filtres et axiomes

Dans $\mathbb{R}$, différentes notions topologiques peuvent être caractérisées via la convergence de suites. Naturellement, on peut se demander s'il est possible d'obtenir des résultats similaires dans le cas d'espaces topologiques quelconques. Pour cela, nous introduisons tout d'abord la notion de convergence de suites dans un espace topologique. Nous montrons ensuite que cette notion de convergence séquentielle n'est adaptée qu'aux espaces topologiques qui satisfont le premier axiome de dénombrabilité. Nous introduisons alors un concept de convergence plus général basé sur les filtres qui remplace la convergence séquentielle dans ces espaces topologiques.

3.1 Convergence dans un espace topologique

Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \varepsilon$ si $n \geq N$, c'est-à-dire $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ si $n \geq N$. Ainsi, la suite finira par appartenir à n'importe quel voisinage de la limite. Ceci mène naturellement à la définition suivante.

Définition 3.1.1 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X converge vers $x \in X$ si pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$. Dans ce cas, on note $x_n \rightarrow x$.

Bien sûr, il suffit de regarder ce qui se passe sur une base de voisinages de x . La limite d'une suite convergente possède les propriétés suivantes, bien connues lorsque l'on travaille dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1.2 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X , $A \subseteq X$ et $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ une application continue.

1. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de A et si $x_n \rightarrow x$, alors $x \in \overline{A}$.
2. Si $x_n \rightarrow x$, alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Démonstration : 1. Soit $V \in \mathcal{V}_x$. La convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers x implique l'existence d'un naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$. Comme $x_n \in A$, on a $V \cap A \neq \emptyset$. Il s'ensuit que $x \in \overline{A}$.

2. Soit $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Comme f est continu en x , on sait que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$. De plus, comme $x_n \rightarrow x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in f^{-1}(V)$ pour tout $n \geq N$, et donc $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geq N$. ■

Afin d'obtenir les réciproques de ces propriétés, nous devons restreindre la famille des espaces topologiques sur lesquels nous travaillons. En effet, la convergence séquentielle est suffisante pour

décrire des topologies pour lesquelles les voisinages des points peuvent être décrits de manière dénombrable (c'est-à-dire avec la même cardinalité que l'ensemble des indices des suites).

Définition 3.1.3 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ satisfait le *premier axiome de dénombrabilité* si tout point de X admet une base dénombrable de voisinages.

On vérifie directement qu'il s'agit d'une notion topologique : si $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ sont homéomorphes et si $(X, \mathcal{T})$ satisfait le premier axiome de dénombrabilité, alors $(Y, \mathcal{T}')$ le satisfait également.

Evidemment, l'existence d'une base dénombrable de voisinages d'un point n'implique pas que toutes ses bases de voisinages sont dénombrables puisqu'on peut toujours ajouter des voisinages à une base, tout en gardant une base.

Exemple 3.1.4 Dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace métrique quelconque, l'ensemble des boules ouvertes centrées sur x et de rayon $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, est une base dénombrable de voisinages de x , tandis que l'ensemble des boules ouvertes centrées sur x de rayon strictement positif est une base de voisinages non-dénombrable.

Proposition 3.1.5 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité, alors toute base de voisinages de x contient une base dénombrable de voisinages de x . De plus, toute base dénombrable de voisinages de x peut être modifiée en une base décroissante de voisinages de x .

Démonstration : Soit $\mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x . Commençons par montrer que $\mathcal{B}_x$ contient une base dénombrable de voisinages. Par hypothèse, on peut considérer une base dénombrable $\mathcal{B}'_x = \{V'_n : n \in \mathbb{N}\}$ de voisinages de x . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $V_n \in \mathcal{B}_x$ tel que $V_n \subseteq V'_n$. L'ensemble dénombrable

$$\mathcal{B}''_x = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est formée de voisinages de x . De plus, si $V \in \mathcal{V}_x$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V'_n \subseteq V$ et par suite, $V_n \subseteq V$. Donc, $\mathcal{B}''_x$ est une base dénombrable de voisinages de x . On peut la rendre décroissante en considérant l'ensemble

$$\left\{ \bigcap_{j=0}^n V_j : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

■

Nous pouvons à présent obtenir les réciproques de la Proposition 3.1.2 sous l'hypothèse supplémentaire que l'espace topologique sur lequel on travaille satisfait le premier axiome de dénombrabilité.

Proposition 3.1.6 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$ et $x \in X$. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ satisfait le premier axiome de dénombrabilité.

1. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A telle que $x_n \rightarrow x$.
2. Une application $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X qui converge vers $x \in X$, on a $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Démonstration : 1. Soit $x \in \overline{A}$ et soit $\mathcal{B}_x = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable décroissante de voisinages de x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A \cap V_n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A ainsi construite converge vers x puisque si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $V_n \subseteq V_N \subseteq V$ pour tout $n \geq N$. La réciproque découle de la Proposition 3.1.2.

2. Si f est continu, le résultat découle de la Proposition 3.1.2. Pour l'implication inverse, soit F un fermé de $(Y, \mathcal{T}')$. Montrons que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $(X, \mathcal{T})$. Pour cela, il suffit de montrer que $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$. Bien sûr, on a $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$. De plus, si $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, alors par le point 1, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $f^{-1}(F)$ qui converge vers x . Par hypothèse, on sait que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et donc par le point 1, $f(x) \in \overline{F} = F$. Cela implique que $x \in f^{-1}(F)$, ce qui suffit. ■

Remarque 3.1.7 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application. On différencie la continuité de la continuité séquentielle comme suit : f est *séquentiellement continu* si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X qui converge vers x , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Ainsi, dans un espace qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité, la continuité est équivalente à la continuité séquentielle. C'est vrai en particulier dans tous les espaces métriques.

On en tire que dans les espaces topologiques qui satisfont le premier axiome de dénombrabilité, les suites convergentes permettent de caractériser les ensembles fermés et donc la topologie en général. En particulier, on peut comparer les topologies grâce aux suites.

Proposition 3.1.8 Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur un ensemble X . Supposons que $(X, \mathcal{T})$ satisfait le premier axiome de dénombrabilité. Alors $\mathcal{T}$ est plus fin que $\mathcal{T}'$ si et seulement si toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X qui converge vers $x \in X$ dans $(X, \mathcal{T})$ converge également vers x dans $(X, \mathcal{T}')$.

Démonstration : On remarque que l'identité

$$\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$$

est continue si et seulement si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. La Proposition 3.1.6 permet de conclure. ■

3.2 Filtres

Certains espaces topologiques ne sont pas à base dénombrable de voisinages. C'est le cas par exemple de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ou encore de tout ensemble non-dénombrable X muni de la topologie cofinie. Dans ces espaces, on ne peut pas utiliser les suites pour caractériser les différentes notions topologiques. On peut alors utiliser la notion de *filtre* qui permet de généraliser celle de convergence.

Définition 3.2.1 Soit X un ensemble. Un *filtre* sur X est une partie non-vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- (F2) si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, alors $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
- (F3) Si $F_1 \in \mathcal{F}$ et $F_1 \subseteq F_2$, alors $F_2 \in \mathcal{F}$.

Exemple 3.2.2 Si $Y \subseteq X$ est non-vide, alors $\mathcal{F}_Y = \{F \subseteq X : Y \subseteq F\}$ est un filtre sur X .

Exemple 3.2.3 Si X est infini, alors $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ est fini}\}$ est un filtre sur X .

Un filtre très important pour définir la notion de convergence de filtres est le filtre des voisinages d'un point.

Définition 3.2.4 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Si $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x est un filtre sur X appelé le *filtre des voisinages de x* .

Le fait qu'il s'agisse d'un filtre découle immédiatement des propriétés $(\mathcal{V}1)$, $(\mathcal{V}2)$ et $(\mathcal{V}4)$ des voisinages d'un point.

Définition 3.2.5 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X *converge* vers $x \in X$ si $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$. On dit que x est un point *limite* du filtre $\mathcal{F}$ et on note $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Comme dans le cas des suites, on peut évidemment vérifier qu'un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x en montrant que $\mathcal{F}$ contient une base de voisinages $\mathcal{B}_x$ de x par la propriété $(\mathcal{F}3)$. Bien sûr, le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x converge vers x .

La définition que nous venons d'introduire généralise la notion de convergence des suites. Pour cela, commençons par remarquer qu'à toute suite correspond un filtre. Autrement dit, on peut voir les filtres comme des suites généralisées.

Définition 3.2.6 Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'un ensemble X , l'ensemble des parties de X qui contiennent une queue de cette suite est un filtre sur X , appelé le *filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* .

Il est direct de vérifier qu'il s'agit bien d'un filtre.

Proposition 3.2.7 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X converge vers $x \in X$ si et seulement si le filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Démonstration : Par définition, on a $x_n \rightarrow x$ si pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$. C'est équivalent à dire que le filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient $\mathcal{V}_x$, c'est-à-dire converge vers x . ■

Introduisons à présent la notion de base de filtre, qui permet de construire des filtres à partir d'une famille d'ensembles.

Définition 3.2.8 Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ est une *base* de $\mathcal{F}$ si pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subseteq F$, c'est-à-dire si

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } B \subseteq F\}.$$

Les bases de filtres satisfont la propriété suivante. Nous verrons qu'elle les caractérise entièrement.

Proposition 3.2.9 Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{F}$, alors pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Démonstration : Par définition, on a $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ et donc par $(\mathcal{F}2)$, on a aussi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$. La conclusion en découle. ■

La réciproque est donnée dans le résultat suivant.

Proposition 3.2.10 Soit $\mathcal{B}$ une famille non-vidé de parties non-vides de X telle que pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Alors

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } B \subseteq F\}$$

est un filtre sur X , appelé le filtre engendré par $\mathcal{B}$.

Démonstration : La preuve est immédiate, il s'agit de simples vérifications laissées à titre d'exercice. ■

Les bases de filtres permettent de définir l'image d'un filtre par une application qui sera utile pour la caractérisation des applications continues.

Définition 3.2.11 Soient X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une application et $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Le *filtre image* est le filtre sur Y engendré par $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$. On le note $f(\mathcal{F})$.

On peut facilement montrer que $f(\mathcal{F}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$.

Le résultat suivant fournit la généralisation souhaitée de la Proposition 3.1.6. Notons que nous n'imposons plus rien sur les espaces topologiques.

Proposition 3.2.12 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$ et $x \in X$.

1. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe un filtre $\mathcal{F}$ tel que $A \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \rightarrow x$.
2. Une application $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ de X qui converge vers $x \in X$, on a $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$ dans Y .

Démonstration : 1. Supposons tout d'abord que $x \in \overline{A}$. Alors, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $A \cap V \neq \emptyset$ et clairement $\mathcal{B} = \{A \cap V : V \in \mathcal{V}_x\}$ est la base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X . Ce filtre contient A et converge vers x car pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A \subseteq V$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est un filtre de X tel que $A \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \rightarrow x$. Alors, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $V \in \mathcal{F}$. En particulier, $V \cap A \neq \emptyset$ et $x \in \overline{A}$.

2. Supposons que f est continu et que $\mathcal{F} \rightarrow x$. Soit $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Alors $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$ et donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. On en tire que $f(f^{-1}(V)) \in f(\mathcal{F})$ et comme $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, il s'ensuit que $V \in f(\mathcal{F})$, ce qui suffit.

Réciproquement, soit $\mathcal{V}_x$ le filtre des voisinages de x . Alors, $\mathcal{V}_x \rightarrow x$ et par hypothèse, on a également $f(\mathcal{V}_x) \rightarrow f(x)$. Ainsi, pour tout $V' \in \mathcal{V}_{f(x)}$, $V' \in f(\mathcal{V}_x)$ c'est-à-dire il existe $V \in \mathcal{V}_x$ tel que $f(V) \subseteq V'$. La conclusion s'ensuit. ■

On en tire que la notion de convergence de filtres permet de définir la topologie de l'espace, via ses ensembles fermés par exemple.

Proposition 3.2.13 Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur un ensemble X . Alors $\mathcal{T}$ est plus fin que $\mathcal{T}'$ si et seulement si tout filtre de X qui converge vers $x \in X$ dans $(X, \mathcal{T})$ converge également vers x dans $(X, \mathcal{T}')$.

Démonstration : L'identité

$$\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$$

est continue si et seulement si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. La Proposition 3.2.12 donne la conclusion. ■

Par conséquent, deux topologies sur X sont égales si et seulement si elles ont les mêmes filtres convergents et les mêmes limites. De plus, plus une topologie est fine, moins il y a de filtres convergents pour cette topologie.

Terminons cette section sur les filtres en montrant que la topologie que nous avons introduite sur le produit traduit la convergence terme à terme.

Proposition 3.2.14 *Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques. Un filtre $\mathcal{F}$ sur $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ converge vers x si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, $p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow p_\alpha(x)$ dans X_α .*

Démonstration : Si $\mathcal{F} \rightarrow x$, alors par continuité de p_α , on a $p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow p_\alpha(x)$. Supposons donc que $p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow p_\alpha(x)$ pour tout $\alpha \in A$. Les ensembles du type $p_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n})$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \in A_j$ et $x_{\alpha_j} \in \omega_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ forment une base de voisinages de x dans le produit. Pour un tel élément, on a $\omega_{\alpha_j} \in \mathcal{V}_{x_{\alpha_j}}$ et puisque $p_{\alpha_j}(\mathcal{F}) \rightarrow x_{\alpha_j}$, on en tire que $\omega_{\alpha_j} \in p_{\alpha_j}(\mathcal{F})$. Par conséquent, il existe $F_{\alpha_j} \in \mathcal{F}$ tel que $p_{\alpha_j}(F_{\alpha_j}) \subseteq \omega_{\alpha_j}$. On en tire que $F_{\alpha_j} \subseteq p_{\alpha_j}^{-1}(\omega_{\alpha_j})$. En posant $F = F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}$, on a $F \in \mathcal{F}$ par (F2) et

$$F \subseteq p_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n}).$$

La propriété (F3) implique alors que $p_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n}) \in \mathcal{F}$, et donc $\mathcal{F} \rightarrow x$. ■

3.3 Axiomes de séparation

Les notions de limite de suite et de limite de filtre dans des espaces topologiques introduites dans les sections précédentes n'assurent pas l'unicité de la limite. Par exemple, si X est muni de la topologie triviale et si $\mathcal{F}$ est un filtre de X , alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{V}_x$ et converge donc vers x .

Dans un espace topologique quelconque $(X, \mathcal{T})$, si un filtre $\mathcal{F}$ converge vers deux points x et y avec $x \neq y$, alors $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{F}$. Ainsi, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$ et tout $V' \in \mathcal{V}_y$, la propriété (F2) implique que $V \cap V' \in \mathcal{F}$ et donc par (F1), $V \cap V' \neq \emptyset$. Dans le cas particulier des suites, ceci se réécrit de la manière suivante : si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \neq y$, alors pour tous $V \in \mathcal{V}_x$ et $V' \in \mathcal{V}_y$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V \cap V'$ pour tout $n \geq N$, d'où $V \cap V' \neq \emptyset$.

Pour assurer l'unicité de la limite, on doit donc s'assurer que cette situation est impossible.

Définition 3.3.1 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparé* ou *de Hausdorff* si pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe des voisinages $V \in \mathcal{V}_x$ et $V' \in \mathcal{V}_y$ qui satisfont $V \cap V' = \emptyset$. Dans ce cas, on dit également que $(X, \mathcal{T})$ satisfait l'axiome (T_2) .

L'axiome (T_2) peut s'écrire sous les formes équivalentes suivantes.

Proposition 3.3.2 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace $(X, \mathcal{T})$ est séparé.*
2. *Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $\omega_x, \omega_y \in \mathcal{T}$ tels que $x \in \omega_x$, $y \in \omega_y$ et $\omega_x \cap \omega_y = \emptyset$.*
3. *Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe un voisinage fermé V de x qui ne contient pas y .*

De plus, si $(X, \mathcal{T})$ est séparé, alors les singletons de X sont fermés.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. C'est évident par définition des voisinages puisque tout voisinage d'un point contient un ouvert qui contient le point.

2. $\Rightarrow$ 3. On sait qu'il existe $\omega_x, \omega_y \in \mathcal{T}$ tels que $x \in \omega_x, y \in \omega_y$ et $\omega_x \cap \omega_y \neq \emptyset$. Alors $\omega_x \subseteq X \setminus \omega_y$ et donc $\overline{\omega_x} \subseteq X \setminus \omega_y$. Par conséquent, $\overline{\omega_x}$ est un voisinage fermé de x qui ne contient pas y .

3. $\Rightarrow$ 1. Si V est un voisinage fermé de x qui ne contient pas y , alors $x \in V^\circ$, et $X \setminus V$ est voisinage ouvert de y qui ne rencontre pas V° .

De plus, si $(X, \mathcal{T})$ est séparé et si $x \in X$, alors pour tout $y \in X \setminus \{x\}$, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $y \in \omega$ et $x \notin \omega$. Ceci montre que $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de chacun de ses points, et est donc ouvert. ■

Les espaces topologiques dans lesquels tout singleton est fermé sont appelés des espaces *accessibles*. On dit qu'ils satisfont l'axiome (T_1) .

Exemple 3.3.3 Tout espace métrique (X, d) est séparé. En effet, si $x \neq y$, alors $d(x, y) > 0$ et les boules centrées en x et y respectivement de rayon $\frac{1}{2}d(x, y)$ sont disjointes.

Exemple 3.3.4 Considérons l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie initiale relative à la première projection p_1 . Les ouverts sont les unions d'ensembles de la forme $]a, b[\times \mathbb{R}$. Ainsi, les points de la forme (x, y) et (x, z) avec $y \neq z$ ne peuvent être séparés par des ouverts disjoints. L'espace n'est donc pas séparé.

Exemple 3.3.5 Considérons un ensemble infini X muni de la topologie cofinie. Cet espace topologique n'est pas séparé car il ne possède pas de couple d'ouverts non-vides disjoints (mais il est accessible).

Le raisonnement établi en début de section montre que les espaces séparés fournissent un cadre naturel pour parler de limite.

Proposition 3.3.6 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace $(X, \mathcal{T})$ est séparé.
2. Tout filtre $\mathcal{F}$ sur X qui converge admet une limite unique.
3. La diagonale $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. C'est le raisonnement effectué en début de section.

2. $\Rightarrow$ 1. Si $(X, \mathcal{T})$ n'est pas séparé, alors il existe $x \neq y$ tel que pour tous $\omega_x, \omega_y \in \mathcal{T}$ tels que $x \in \omega_x$ et $y \in \omega_y$, on a $\omega_x \cap \omega_y \neq \emptyset$. En utilisant la Proposition 3.2.10, on vérifie directement que l'ensemble

$$\{\omega_x \cap \omega_y : \omega_x, \omega_y \in \mathcal{T}, x \in \omega_x, y \in \omega_y\}$$

est la base d'un filtre $\mathcal{F}$. On a $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$ car pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $\omega_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega_x \subseteq V$ et $\omega_x = \omega_x \cap \omega_y$ pour $\omega_y = X$. De même, $\mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{F}$ et le filtre $\mathcal{F}$ converge donc vers x et vers y , ce qui est impossible.

1. $\Leftrightarrow$ 3. Par définition de la topologie produit, l'ensemble Δ_X est fermé si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$, il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ tels que

$$(x, y) \in \omega_1 \times \omega_2 \subseteq X \times X \setminus \Delta_X.$$

Autrement dit, Δ est fermé si et seulement si pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ tels que $x \in \omega_1$, $y \in \omega_2$ et $\omega_1 \times \omega_2 \cap \Delta_X = \emptyset$. Cette dernière relation signifie exactement que $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$. ■

Présentons à présent les propriétés de l'axiome (T_2) vis-à-vis des constructions classiques d'espaces topologiques. Signalons qu'une application est *ouverte* si l'image de tout ouvert est un ouvert.

Proposition 3.3.7 1. *Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.*
 2. *Tout produit d'espaces topologiques séparés est séparé.*
 3. *Si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{R}) = \{(x, y) \in X \times X : x\mathcal{R}y\}$ de $\mathcal{R}$ est fermé dans $X \times X$.*
 4. *Si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé dans $X \times X$ et si $\pi_{\mathcal{R}}$ est une application ouverte, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.*

Démonstration : 1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $Y \subseteq X$. Si x, y sont deux points différents de $Y \subseteq X$, il existe des ouverts disjoints ω_x, ω_y de X qui contiennent x et y respectivement. Alors, les ensembles $\omega_x \cap Y$ et $\omega_y \cap Y$ sont des ouverts disjoints de Y qui contiennent x et y respectivement.

2. Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques séparés. Soient $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ deux points distincts du produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Alors il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$. Puisque l'espace $(X_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$ est séparé, il existe des ouverts disjoints $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}_{\alpha_0}$ tels que $x_{\alpha_0} \in \omega_1$, $y_{\alpha_0} \in \omega_2$. Alors, les ouverts $p_{\alpha_0}^{-1}(\omega_1)$ et $p_{\alpha_0}^{-1}(\omega_2)$ sont disjoints et contiennent les points x et y respectivement.

3. Considérons l'application

$$\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}} : X \times X \rightarrow X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} : (x, y) \mapsto (\pi_{\mathcal{R}}(x), \pi_{\mathcal{R}}(y)).$$

Il s'agit d'une application continue par la Proposition 2.4.12.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}} & X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \\ \downarrow p_1 & \circlearrowleft & \downarrow p'_1 \\ X & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{R}}} & X/\mathcal{R} \end{array}$$

Si $X/\mathcal{R}$ est séparé, la Proposition 3.3.6 implique que sa diagonale $\Delta_{X/\mathcal{R}}$ est fermée. Or, on a

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}) = (\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}})^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}})$$

et donc $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ est fermé.

4. Si $\pi_{\mathcal{R}}$ est une application ouverte, alors l'image de tout ouvert de base de $X \times X$ par $\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}$ est ouverte puisque $\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}(\omega_1 \times \omega_2) = \pi_{\mathcal{R}}(\omega_1) \times \pi_{\mathcal{R}}(\omega_2)$, et donc $\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}$ est une application ouverte. Par conséquent, si $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ est fermé, l'ensemble

$$\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}(X \times X \setminus \mathcal{G}(\mathcal{R})) = X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \setminus \Delta_{X/\mathcal{R}}$$

est ouvert. Cela suffit par la Proposition 3.3.6. ■

Enfin, la proposition suivante généralise un résultat bien connu dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.3.8 *Si f et g sont deux applications continues de $(X, \mathcal{T})$ dans $(Y, \mathcal{T}')$ et si $(Y, \mathcal{T}')$ est séparé, alors l'ensemble*

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

est fermé. En particulier, si f et g coïncident sur un ensemble dense D de X , alors $f = g$.

Démonstration : Par la Proposition 2.4.12, l'application

$$(f, g) : X \rightarrow Y \times Y : x \mapsto (f(x), g(x))$$

est continue. Comme Δ_Y est fermé par la Proposition 3.3.6, on obtient que l'ensemble

$$(f, g)^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

est fermé. ■

Bien souvent, on est amené à considérer d'autres axiomes de séparation. Nous présentons ici les axiomes (T_3) et (T_4) . Pour cela, nous avons besoin de généraliser la notion de voisinage.

Définition 3.3.9 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. Un sous-ensemble V de A est un *voisinage* de A s'il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $A \subseteq \omega \subseteq V$.

Un voisinage d'un point $x \in X$ est donc exactement un voisinage de l'ensemble $\{x\}$.

Définition 3.3.10 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *régulier* si pour tout fermé F de X et tout point $x \in X \setminus F$, F et x ont des voisinages disjoints. Dans ce cas, on dit également que $(X, \mathcal{T})$ satisfait l'axiome (T_3) .

Notons qu'en général, l'axiome (T_3) n'est pas plus fort que l'axiome (T_2) . Par contre, les axiomes (T_1) et (T_3) impliquent (T_2) .

L'axiome (T_3) admet les reformulations suivantes.

Proposition 3.3.11 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace $(X, \mathcal{T})$ est régulier.*
2. *Pour tout fermé F et tout point $x \in X \setminus F$, il existe $\Omega, \omega \in \mathcal{T}$ tels que $F \subseteq \Omega$, $x \in \omega$, et $\Omega \cap \omega = \emptyset$.*
3. *Pour tout fermé F et tout point $x \in X \setminus F$, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega$ et $\overline{\omega} \cap F = \emptyset$.*

4. Tout point $x \in X$ admet une base de voisinages fermés.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. C'est évident par définition des voisinages.

2. $\Rightarrow$ 3. Considérons des ouverts $\Omega, \omega \in \mathcal{T}$ tels que $F \subseteq \Omega$, $x \in \omega$ et $\Omega \cap \omega = \emptyset$. Alors, on a $\omega \subseteq X \setminus \Omega$ et donc également $\bar{\omega} \subseteq X \setminus \Omega$. En particulier, $\bar{\omega}$ et F sont disjoints.

3. $\Rightarrow$ 4. Soit $x \in X$. Posons

$$\mathcal{B}_x = \{\bar{\omega} : \omega \in \mathcal{T}; x \in \omega\}.$$

Clairement, les éléments de $\mathcal{B}_x$ sont des voisinages fermés de x . De plus, si $V \in \mathcal{V}_x$, il contient un ouvert Ω contenant x . Alors $x \notin X \setminus \Omega$ et par hypothèse, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega$ et $\bar{\omega} \cap (X \setminus \Omega) = \emptyset$, ce qui donne $\bar{\omega} \subseteq \Omega \subseteq V$.

4. $\Rightarrow$ 1. Soit $x \in X$ et soit F un fermé ne contenant pas x . Alors, x appartient à l'ouvert $X \setminus F$ et par hypothèse, il existe un voisinage fermé V de x tel que $V \subseteq X \setminus F$. Alors V et $X \setminus V$ sont des voisinages disjoints de x et F . ■

Exemple 3.3.12 Nous montrerons que tout espace métrisable est régulier.

Exemple 3.3.13 Soit X un ensemble contenant au moins deux points. Muni de la topologie triviale, cet espace n'est pas séparé mais il est régulier.

Exemple 3.3.14 Considérons la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par $\mathcal{T}_{\text{eucl}} \cap \{\mathbb{Q}\}$ où $\mathcal{T}_{\text{eucl}}$ est la topologie euclidienne. Cet espace est séparé puisqu'on peut séparer deux points disjoints de $\mathbb{R}$ par des ouverts de la topologie euclidienne donc de $\mathcal{T}$. Montrons que cet espace n'est cependant pas régulier. Considérons pour cela le point $0 \in \mathbb{R}$ et le fermé $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe des ouverts $\omega, \Omega \in \mathcal{T}$ tels que $0 \in \omega$, $F \subseteq \Omega$ et $\omega \cap \Omega = \emptyset$. Alors, il existe un ouvert de base ω' tel que $0 \in \omega' \subseteq \omega$ et vu la forme de la base, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] - \varepsilon, \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \subseteq \omega'$. Soit $x \in] - \varepsilon, \varepsilon[\cap F$. Il existe un ouvert de base Ω' tel que $x \in \Omega' \subseteq \Omega$ et comme $x \notin \mathbb{Q}$, cet ouvert est nécessairement un ouvert de la topologie euclidienne. Comme $] - \varepsilon, \varepsilon[\cap \Omega'$ est un ouvert euclidien non-vide, il rencontre $\mathbb{Q}$. Cela implique que $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$, d'où une contradiction.

Les propriétés de l'axiome (T_3) vis-à-vis des constructions classiques d'espaces topologiques sont données dans le résultat suivant.

Proposition 3.3.15

1. Tout sous-espace d'un espace topologique régulier est régulier.
2. Tout produit d'espaces topologiques réguliers est régulier.

Démonstration : 1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique régulier et $Y \subseteq X$. Fixons un fermé F de Y et $x \in Y \setminus F$. La Proposition 2.3.5 fournit un fermé F' de X tel que $F = F' \cap Y$. Alors, $x \notin F'$ et par hypothèse, il existe des ouverts disjoints Ω, ω de X tels que $F' \subseteq \Omega$ et $x \in \omega$. Pour conclure, il suffit de remarquer que les ensembles $\omega \cap Y$ et $\Omega \cap Y$ sont des ouverts disjoints de Y qui contiennent x et F respectivement.

2. Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques réguliers. Fixons un point $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ du produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Pour tout $\alpha \in A$, comme $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ est régulier, x_α possède une base $\mathcal{B}_\alpha$ de voisinages fermés. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble formé des produits du type

$$\prod_{\alpha \in A} Z_\alpha \quad \text{où} \quad \begin{cases} Z_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \\ Z_\alpha = X_\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont fermés par la Proposition 2.4.11. De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\omega_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}$ tel que $x \in \omega_{\alpha_j} \subseteq Z_{\alpha_j}$. En posant $\omega_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, on obtient

$$\prod_{\alpha \in A} \omega_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha,$$

ce qui montre que les éléments de $\mathcal{B}$ sont des voisinages de x . Enfin, si V est un voisinage de x pour la topologie produit, alors il existe un ouvert de base $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha$ qui contient x et qui est inclus dans V . On sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ tels que $W_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}$ si $j \in \{1, \dots, n\}$ et $W_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Il existe donc $V_{\alpha_j} \in \mathcal{B}_{\alpha_j}$ tel que $x_{\alpha_j} \subseteq V_{\alpha_j} \subseteq W_{\alpha_j}$ si $j \in \{1, \dots, n\}$. En posant $V_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, on obtient

$$\prod_{\alpha \in A} V_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in A} W_\alpha \subseteq V$$

et les éléments de $\mathcal{B}$ forment donc bien une base de voisinages de x . ■

Enfin, terminons cette section en considérant l'axiome (T_4) .

Définition 3.3.16 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *normal* si tous fermés disjoints F, F' de X ont des voisinages disjoints. Dans ce cas, on dit également que $(X, \mathcal{T})$ satisfait l'axiome (T_4) .

Proposition 3.3.17 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace $(X, \mathcal{T})$ est normal.
2. Pour tous fermés disjoints F, F' de X , il existe $\omega, \omega' \in \mathcal{T}$ tels que $F \subseteq \omega$, $F' \subseteq \omega'$ et $\omega \cap \omega' = \emptyset$.
3. Pour tous fermés disjoints F, F' de X , il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $F \subseteq \omega$ et $\bar{\omega} \cap F' = \emptyset$.
4. Pour tout fermé F et tout ouvert $\Omega \in \mathcal{T}$ tel que $F \subseteq \Omega$, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $F \subseteq \omega \subseteq \bar{\omega} \subseteq \Omega$.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. Il suffit d'utiliser la définition des voisinages.

2. $\Rightarrow$ 3. On procède comme dans la preuve de la Proposition 3.3.11.

3. $\Rightarrow$ 4. Si F est un fermé inclus dans un ouvert Ω , alors F et $X \setminus \Omega$ sont deux fermés disjoints. Par hypothèse, il existe donc un ouvert ω tel que $F \subseteq \omega$ et $\bar{\omega} \cap X \setminus \Omega = \emptyset$, c'est-à-dire $F \subseteq \omega \subseteq \bar{\omega} \subseteq \Omega$.

4. $\Rightarrow$ 1. Soient F et F' deux fermés disjoints de X . Alors, F est inclus dans l'ouvert $X \setminus F'$ et par hypothèse, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $F \subseteq \omega \subseteq \bar{\omega} \subseteq X \setminus F'$. Par conséquent, ω et $X \setminus \bar{\omega}$ sont des ouverts disjoints qui contiennent F et F' respectivement. ■

Exemple 3.3.18 Soit (X, d) un espace métrique et soient F et F' deux fermés disjoints de $(X, \mathcal{T}_d)$. Alors $X \setminus F$ est un ouvert qui contient F' . Ainsi, pour tout $x \in F'$, il existe $r_x > 0$ tel que $b(x, r_x) \subseteq X \setminus F$. De même, pour tout $x \in F$, il existe $R_x > 0$ tel que $b(x, R_x) \subseteq X \setminus F'$. Posons $\omega_1 = \bigcup_{x \in F} b(x, R_x/2)$ et $\omega_2 = \bigcup_{x \in F'} b(x, r_x/2)$. S'il existe $x \in \omega_1 \cap \omega_2$, on peut alors trouver $x_1 \in F$ et $x_2 \in F'_2$ tels que $d(x, x_1) < R_{x_1}/2$ et $d(x, x_2) < r_{x_2}/2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $r_{x_2} \leq R_{x_1}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient alors

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < \frac{R_{x_1} + r_{x_2}}{2} \leq R_{x_1}.$$

Par conséquent, $x_2 \in b(x_1, R_{x_1})$, ce qui est impossible puisque $x_2 \in F'$. On en tire que $(X, \mathcal{T}_d)$ est normal. Comme tout singleton est fermé, on trouve que $(X, \mathcal{T}_d)$ est également régulier.

Exemple 3.3.19 Considérons la droite $\mathbb{R}$ munie de la topologie $\mathcal{T} = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Cet espace n'est ni séparé, ni régulier. En effet, premièrement, si $x < y$, alors tout ouvert contenant x contient y . De plus, le fermé $F =]-\infty, 0]$ et le point $x = 1$ ne peuvent pas avoir des voisinages disjoints. Néanmoins, l'espace est normal car il n'existe pas de couple de fermés non-vides disjoints.

Proposition 3.3.20 *Tout sous-espace fermé d'un espace normal est normal.*

Démonstration : Si Y est un sous-ensemble fermé de X , alors par la Proposition 2.3.5, des fermés disjoints de Y sont également des fermés disjoints de X . On peut donc les séparer par des ouverts disjoints de X . La trace de ces ouverts dans Y donne des ouverts disjoints de Y qui conviennent. ■

Signalons qu'en général, un produit d'espaces normaux n'est pas nécessairement normal.

Remarque 3.3.21 On vérifie directement que les axiomes (T_2) , (T_3) et (T_4) sont des notions topologiques, c'est-à-dire stables par homéomorphisme.

Terminons cette section par la caractérisation suivante des espaces normaux. Il s'agit d'un des grands théorèmes de topologie et nous en présenterons une conséquence à la fin de ce chapitre.

Théorème 3.3.22 (Lemme d'Urysohn) *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est normal si et seulement si pour tous fermés disjoints F_0 et F_1 de X , il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f|_{F_0} = 0$ et $f|_{F_1} = 1$.*

Démonstration : Construisons une famille d'ouverts U_t , $t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tels que

$$\overline{U_s} \subseteq U_t \quad \forall s < t.$$

Par hypothèse, il existe un ouvert $U_0 \in \mathcal{T}$ tel que $F_0 \subseteq U_0$ et $\overline{U_0} \cap F_1 = \emptyset$. Comme $\overline{U_0}$ et F_1 sont deux fermés disjoints, il existe un ouvert $U_1 \in \mathcal{T}$ tel que $\overline{U_0} \subseteq U_1$ et $\overline{U_1} \cap F_1 = \emptyset$. Comme $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable, on peut l'écrire sous la forme $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec $r_0 = 0$ et $r_1 = 1$. Il suffit alors de procéder de proche en proche. Supposons que les ouverts $U_{r_0}, U_{r_1}, \dots, U_{r_n}$ ont été construits et construisons $U_{r_{n+1}}$. Notons r_i et r_j le prédécesseur et le successeur directs de r_{n+1} dans $\{r_0, \dots, r_n\}$, c'est-à-dire $r_i < r_{n+1} < r_j$ et $]r_i, r_j[\cap \{r_0, \dots, r_{n+1}\} = \{r_{n+1}\}$. Par

construction, on sait que $\overline{U_{r_i}} \subseteq U_{r_j}$ et donc les fermés $\overline{U_{r_i}}$ et $X \setminus U_{r_j}$ sont disjoints. Il existe donc un ouvert $U_{r_{n+1}}$ tel que $\overline{U_{r_i}} \subseteq U_{r_{n+1}}$ et $\overline{U_{r_{n+1}}} \subseteq U_{r_j}$.

Construisons à présent la fonction f . Pour tout $x \in X$, on définit l'ensemble

$$Q_x = \{t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : x \in U_t\} \cup \{1\}.$$

Remarquons que chaque ensemble Q_x est croissant : si $t \in Q_x$ et si $s > t$, alors $s \in Q_x$. Posons

$$f(x) = \inf(Q_x).$$

Bien sûr, f est à valeurs dans $[0, 1]$. Si $x \in F_0$, alors $x \in U_0$ et donc $f(x) = 0$. Si $x \in F_1$, alors $x \notin U_t$ pour tout $t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ puisque $\overline{U_1} \subseteq X \setminus F_1$. Il reste donc à montrer que $f : X \rightarrow [0, 1]$ est continue. Comme les ensembles de la forme $[0, b[$ et $]a, 1]$ engendrent la topologie de $[0, 1]$, il suffit de montrer que l'image inverse par f de ces ensembles est ouverte. Or, on a $f(x) < b$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{Q} \cap [0, b[$ tel que $x \in U_t$. Autrement dit,

$$f^{-1}([0, b[) = \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, b[} U_t$$

qui est bien un ensemble ouvert. De plus, on a $f(x) > a$ si et seulement si $\inf(Q_x) > a$. Par densité de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans $[0, 1]$, il existe $t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tel que $a < t < \inf(Q_x)$. Cela implique que $x \notin U_t$. Réciproquement, puisque Q_x est croissant, l'existence d'un $t \in \mathbb{Q} \cap]a, 1]$ tel que $x \notin U_t$ implique que $\inf(Q_x) \geq t > a$. On a donc

$$f^{-1}(]a, 1]) = \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap]a, 1]} X \setminus U_t = X \setminus \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap]a, 1]} U_t.$$

Il reste donc à montrer que $\bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap]a, 1]} U_t$ est fermé. Or, par construction des ensembles U_t , on a

$$\bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap]a, 1]} U_t = \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap]a, 1]} \overline{U_t},$$

ce qui suffit.

Réciproquement, supposons que F_0 et F_1 sont deux fermés disjoints de X . Par hypothèse, il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f|_{F_0} = 0$ et $f|_{F_1} = 1$. Alors, les ensembles $\omega_0 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ et $\omega_1 = f^{-1}(] \frac{1}{2}, 1])$ sont des ouverts disjoints de X qui contiennent F_0 et F_1 respectivement. ■

Remarque 3.3.23 Les nombres 0 et 1 du Théorème d'Urysohn peuvent être remplacés facilement par des réels $a < b$. Ainsi, l'espace $(X, \mathcal{T})$ est normal si et seulement si pour tous fermés disjoints F_a et F_b de X , il existe une application continue $\tilde{f} : X \rightarrow [a, b]$ telle que $\tilde{f}|_{F_a} = a$ et $\tilde{f}|_{F_b} = b$. Si f est la fonction donnée par le Théorème d'Urysohn, il suffit de poser

$$\tilde{f} = (b - a)f + a.$$

Notons que ce résultat permet également de démontrer le Théorème d'extension de Tietze, qui permet d'étendre continument toute application continue et définie sur un sous-ensemble fermé à l'espace tout entier.

Théorème 3.3.24 (Théorème de Tietze) *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est normal si et seulement si pour tout fermé F de X et toute application continue $f : F \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une application continue $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g|_F = f$.*

Afin de démontrer ce résultat, commençons par énoncer deux lemmes. Le premier s'intéresse à la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues.

Lemme 3.3.25 *Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Si la suite est uniformément de Cauchy, c'est-à-dire si*

$$\sup_{y \in X} |f_p(y) - f_q(y)| \rightarrow 0 \quad \text{si } p, q \rightarrow +\infty,$$

alors la fonction

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x)$$

est bien définie et continue.

Démonstration : Pour tout $x \in X$, la suite $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle de Cauchy, puisque

$$0 \leq |f_p(x) - f_q(x)| \leq \sup_{y \in X} |f_p(y) - f_q(y)|.$$

Puisque $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel et la fonction f est donc bien définie.

Soient un intervalle $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in f^{-1}(]a, b[)$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \in]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{y \in X} |f_p(y) - f_q(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } p, q \geq N.$$

Fixons alors $q = N$. Pour tout $y \in X$, la suite $(f_m(y))_{m \geq N}$ est dans la boule fermée de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ et de centre $f_N(y)$. Donc sa limite est dans la boule fermée, c'est-à-dire

$$\sup_{y \in X} |f(y) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en tire que $f_N(x_0) \in]a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}[$ et l'ouvert $U = f_N^{-1}(]a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}[)$ contient donc x_0 . Il est également inclus dans $f^{-1}(]a, b[)$, puisqu'on a, pour tout y dans U , $f_N(y) \in]a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}[$ et $|f(y) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Lemme 3.3.26 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace normal, F un fermé de X , et $a > 0$. Pour toute fonction continue $f : F \rightarrow [-a, a]$, il existe une fonction continue $g : X \rightarrow [-a/3, a/3]$ telle que*

$$\sup_{x \in F} |f(x) - g(x)| \leq \frac{2a}{3}.$$

Démonstration : Posons $F_0 = f^{-1}([-a, -a/3])$ et $F_1 = f^{-1}([a/3, a])$. Ces ensembles sont des fermés de f puisque f est continue. Comme F est un sous-ensemble fermé de X , ce sont également des fermés de X et le Lemme d'Urysohn implique l'existence d'une fonction continue $g : X \rightarrow [-a/3, a/3]$ qui vaut $-a/3$ sur F_1 et $a/3$ sur F_0 . Cela implique directement l'inégalité demandée. ■

Démonstration : Preuve du Théorème de Tietze Traitons d'abord le cas particulier où la fonction f est à valeurs dans $[-1, 1]$. On utilise le Lemme 3.3.26 pour f et avec $a = 1$: il existe une fonction $f_1 : X \rightarrow [-1/3, 1/3]$, continue, et telle que $(f - f_1)(F) \subset [-2/3, 2/3]$. On utilise le même lemme avec la fonction $f - f_1$ continue sur F et $a = 2/3$: il existe une fonction $f_2 : X \rightarrow [-2/9, 2/9]$, continue, et telle que $(f - f_1 - f_2)(F) \subset [-4/9, 4/9]$. On construit par induction une suite f_m de fonctions continues sur X et telles que

$$f_m(X) \subset \left[-\frac{2m-1}{3^m}, \frac{2m-1}{3^m} \right] \quad \text{et} \quad \sup_{x \in F} |f(x) - \sum_{k=1}^m f_k(x)| \leq \frac{2}{3^m}.$$

Appliquons à présent le Lemme 3.3.25 à la suite de fonctions continues $g_m = \sum_{k=1}^m f_k$. On a,

$$|g_p(x) - g_q(x)| = \left| \sum_{k=q+1}^p f_k(x) \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |f_k(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=q+1}^p \frac{2}{3^k},$$

pour tous $p > q$ et tout $x \in X$. Par conséquent,

$$\sup_{x \in X} |g_p(x) - g_q(x)| \rightarrow 0$$

lorsque $p, q \rightarrow \infty$. Le Lemme 3.3.25 permet de conclure que la fonction

$$g = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$$

est bien définie et est continue. De plus, $g|_F = f$ puisque pour tout $x \in F$, on a

$$|f(x) - g(x)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x) - g_m(x)| \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^m = 0.$$

Traitons maintenant le cas général. Comme $] -1, 1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, il existe une homéomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow] -1, 1[.$$

Alors, le premier cas permet de montrer l'existence d'une fonction g_0 continue de X dans $\mathbb{R}$ telle que $g_0|_F = \varphi \circ f$. Posons à présent $F_0 = g_0^{-1}(\mathbb{R} \setminus] -1, 1[)$. C'est un fermé de X , disjoint de F car sur F , g_0 est à valeurs dans $] -1, 1[$. Par le lemme d'Urysohn, il existe une fonction $h : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $h|_F = 1$ et $h|_{F_0} = 0$. La fonction hg_0 est maintenant à valeurs dans $] -1, 1[$, est continue et coïncide avec f sur F . La fonction $\varphi^{-1} \circ hg_0$ convient. ■

3.4 Axiomes de dénombrabilité

Dans cette section, nous introduisons trois propriétés topologiques liées au caractère dénombrable de certaines parties de l'espace topologique et nous étudions les liens qui existent entre elles. Rappelons que nous avons déjà introduit un premier axiome de dénombrabilité qui impose à l'espace de posséder pour tout point, une base dénombrable de voisinages. On a le deuxième axiome suivant.

Définition 3.4.1 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ satisfait le *deuxième axiome de dénombrabilité* s'il admet une base dénombrable.

On vérifie directement qu'il s'agit d'une notion topologique.

Exemple 3.4.2 L'ensemble des boules centrées en des points à composantes rationnelles et à rayon rationnel forme une base de $\mathbb{R}^n$, qui satisfait donc le deuxième axiome de dénombrabilité.

Proposition 3.4.3 *Tout espace qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité satisfait le premier axiome de dénombrabilité.*

Démonstration : La Proposition 1.3.12 donne directement le résultat. ■

A nouveau, si $(X, \mathcal{T})$ satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité, une base quelconque de $\mathcal{T}$ n'est pas nécessairement dénombrable. Néanmoins, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.4.4 *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité, alors toute base de $\mathcal{T}$ contient une base dénombrable de $\mathcal{T}$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{T}$. Par hypothèse, il existe $\mathcal{B}' = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de $\mathcal{T}$. Pour tout couple (i, j) pour lequel il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $\omega_i \subseteq B \subseteq \omega_j$, on choisit un tel B et on le note B_{ij} . On désigne par $\mathcal{B}''$ l'ensemble formé des éléments B_{ij} . Bien sûr, $\mathcal{B}''$ est dénombrable et ses éléments sont des ouverts. De plus, soient Ω un ouvert et x un point de Ω . Il existe un ouvert $\omega_j \in \mathcal{B}'$ tel que $x \in \omega_j \subseteq \Omega$. De même, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq \omega_j$ et il s'ensuit qu'il existe $\omega_i \in \mathcal{B}'$ tel que $x \in \omega_i \subseteq B$. Au total, on a donc $x \in \omega_i \subseteq B \subseteq \omega_j \subseteq \Omega$ et par construction, on obtient également $x \in \omega_i \subseteq B_{ij} \subseteq \omega_j \subseteq \Omega$. En particulier, $x \in B_{ij} \subseteq \Omega$, ce qui montre que $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathcal{T}$. ■

Afin d'introduire la notion suivante, rappelons qu'un recouvrement d'un ensemble X est une famille U_α , $\alpha \in A$, de sous-ensembles de X telle que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$. On dit que le recouvrement est *ouvert* si $U_\alpha \in \mathcal{T}$ pour tout $\alpha \in A$.

Définition 3.4.5 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est de *Lindelöf* si tout recouvrement ouvert de X contient un recouvrement dénombrable.

Le résultat suivant montre qu'il s'agit bien d'une notion topologique.

Proposition 3.4.6 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique de Lindelöf et $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ une application continue. Alors, l'espace $f(X)$ muni de la topologie induite est de Lindelöf.*

Démonstration : Soit ω_α , $\alpha \in A$, un recouvrement ouvert de $f(X)$. Puisque $f : X \rightarrow f(X)$ est continu par la Proposition 2.3.9, on en tire que les ensembles $f^{-1}(\omega_\alpha)$ sont des ouverts de X . Comme ils forment un recouvrement de X , il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\omega_{\alpha_n})$, d'où $f(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_{\alpha_n}$. ■

Nous introduisons à présent la notion d'espace séparable.

Définition 3.4.7 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparable* s'il contient une partie dénombrable et dense.

Remarquons que D est dense dans X si pour tout $x \in X$ et tout $\Omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \Omega$, on a $\Omega \cap D \neq \emptyset$. Cela revient à dire que D rencontre tout ouvert non-vide. Autrement dit, $(X, \mathcal{T})$ est séparable s'il existe un ensemble dénombrable $D \subseteq X$ tel que $\overline{D} = X$ tel que pour tout $\Omega \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, on a $\Omega \cap D \neq \emptyset$.

Clairement, il s'agit à nouveau d'une notion topologique puisque si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est continu et si D est une partie dénombrable dense de X , alors $f(D)$ est une partie dénombrable dense de $f(X)$.

Exemple 3.4.8 L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie euclidienne est séparable puisque l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ y est dense.

Proposition 3.4.9 *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité, alors $(X, \mathcal{T})$ est de Lindelöf et séparable.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base de $\mathcal{T}$. Considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{O}$ de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que ω_n est inclus dans un élément de $\mathcal{O}$, choisissons un tel élément et notons-le Ω_n . Pour tout $x \in X$, il existe $\Omega \in \mathcal{O}$ tel que $x \in \Omega$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \omega_n \subseteq \Omega$ et donc par construction, $x \in \omega_n \subseteq \Omega_n$. Ainsi, le sous-ensemble dénombrable $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{O}$ est un recouvrement de X . Ceci montre que $(X, \mathcal{T})$ est de Lindelöf.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons un élément $x_n \in \omega_n$ et considérons l'ensemble $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit Ω un ouvert non-vide. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_n \subseteq \Omega$ et donc $x_n \in \Omega$. Par conséquent, D rencontre Ω et D est dense dans $(X, \mathcal{T})$ ■

La réciproque de cette propriété est fausse en général. Néanmoins, dans les espaces métriques, on a les équivalences suivantes.

Proposition 3.4.10 *Soit (X, d) un espace (pseudo-)métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace $(X, \mathcal{T}_d)$ satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité.*
2. *L'espace $(X, \mathcal{T}_d)$ est de Lindelöf.*
3. *L'espace $(X, \mathcal{T}_d)$ est séparable.*

Démonstration : Par la Proposition 3.4.9, il suffit de montrer que 2. $\Rightarrow$ 1. et 3. $\Rightarrow$ 1.

2. $\Rightarrow$ 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, considérons le recouvrement ouvert

$$\mathcal{O}_k = \{b(x, \frac{1}{k}) : x \in X\}$$

de X . Comme $(X, \mathcal{T}_d)$ est de Lindelöf, il existe une suite $(x_{j,k})_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X pour laquelle les boules $b(x_{j,k}, \frac{1}{k})$, $j \in \mathbb{N}$, forment un recouvrement de X . Montrons que

$$\{b(x_{j,k}, \frac{1}{k}) : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

est une base de $\mathcal{T}_d$. Soit $\Omega \in \mathcal{T}_d$ et $x \in \Omega$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) \subseteq \Omega$. Soit $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{k} \leq \frac{r}{2}$. Comme les boules de centre $(x_{j,k})_{j \in \mathbb{N}}$ et de rayon $\frac{1}{k}$ forment un recouvrement de X , il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in b(x_{j,k}, \frac{1}{k})$. On vérifie directement que $b(x_{j,k}, \frac{1}{k}) \subseteq b(x, r) \subseteq \Omega$, ce qui suffit.

3. $\Rightarrow$ 1. Soit D une partie dénombrable dense de $(X, \mathcal{T}_d)$. L'ensemble dénombrable

$$\mathcal{B} = \{b(x, \frac{1}{k}) : x \in D, k \in \mathbb{N}_0\}$$

est formé d'ouverts. Soient $\Omega \in \mathcal{T}_d$ et $x \in \Omega$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) \subseteq \Omega$. Par hypothèse, il existe $y \in D \cap b(x, \frac{r}{2})$. On vérifie facilement que $x \in b(y, \frac{1}{k}) \subseteq b(x, r) \subseteq \Omega$ si $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$ et on en tire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_d$. ■

Proposition 3.4.11 *Tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ régulier et de Lindelöf est normal.*

Démonstration : Soient F et F' deux fermés disjoints de X . Pour tout $x \in F$, il existe $\omega_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega_x$ et $\overline{\omega_x} \cap F' = \emptyset$. Ces ouverts et $X \setminus F$ recouvrent X . Par hypothèse, on peut donc en extraire un recouvrement dénombrable

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n \cup X \setminus F.$$

En particulier, on a $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$. De la même manière, on construit une suite d'ouverts $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tels que $F' \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m$ et $\overline{\Omega_m} \cap F = \emptyset$. On vérifie directement que les ouverts

$$\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\omega_n \setminus \bigcup_{m \leq n} \overline{\Omega_m}) \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\Omega_m \setminus \bigcup_{n \leq m} \overline{\omega_n})$$

contiennent F et F' respectivement et sont disjoints. ■

En combinant le résultat précédent avec la Proposition 3.4.9, on obtient directement le résultat suivant.

Corollaire 3.4.12 *Tout espace régulier qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité est normal.*

Le dernier résultat de ce chapitre donne une condition suffisante pour obtenir la métrisabilité d'un espace topologique.

Théorème 3.4.13 (Théorème d'Urysohn) *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé, régulier et à base dénombrable, alors il est métrisable.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de $\mathcal{T}$. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires (B_i, B_j) telles que $\overline{B_i} \subseteq B_j$. Comme cet ensemble est dénombrable, on peut l'écrire sous la forme $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par le lemme d'Urysohn, on sait que pour toute paire $P_n = (B_i, B_j)$, il existe $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ tel que $f_n|_{\overline{B_i}} = 1$ et $f_n|_{X \setminus B_j} = 0$. On définit ensuite l'application d sur $X \times X$ par

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Montrons que d définit bien une distance sur X .

- Il est clair que d est bien à valeurs dans $[0, +\infty[$ et que $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$.
- On a $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$. De plus, supposons que $x \neq y$ et montrons que $d(x, y) \neq 0$. Comme X est séparé, il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega$ et $y \notin \overline{\omega}$. Il existe un ouvert de base B_j tel que $x \in B_j \subseteq \omega$. De plus, comme X est séparé, le singleton

$\{x\}$ est fermé. Comme il est disjoint du fermé $X \setminus B_j$, il existe un ouvert ω' tel que $x \in \omega' \subseteq \overline{\omega'} \subseteq B_j$. Soit B_i un ouvert de base tel que $x \in B_i \subseteq \omega'$. On a en particulier $\overline{B_i} \subseteq B_j$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = (B_i, B_j)$. Alors $f_n(x) = 1$ et $f_n(y) = 0$, d'où $|f_n(x) - f_n(y)| = 1$ et on en tire que $d(x, y) \geq 2^{-n} > 0$.

— Pour l'inégalité triangulaire, il suffit de noter que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, d est une distance sur X et il reste à montrer que la topologie $\mathcal{T}_d$ associée à d coïncide avec la topologie $\mathcal{T}$ de X .

Soient $\Omega \in \mathcal{T}$ et $x \in \Omega$. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_j \subseteq \Omega$. Les fermés $\{x\}$ et $X \setminus B_j$ sont disjoints et par normalité, il existe donc $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \omega \subseteq \overline{\omega} \subseteq B_j$. On trouve alors $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_i \subseteq \omega$. Par conséquent, $\overline{B_i} \subseteq B_j$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = (B_i, B_j)$. Pour ce n , on a $f_n(x) = 1$ et $f_n|_{X \setminus \Omega} = 0$. On vérifie facilement que

$$x \in b(x, 2^{-n}) \subseteq B_j \subseteq \Omega.$$

En effet, si $y \in b(x, 2^{-n})$, alors on a $|f_n(x) - f_n(y)| < 1$ et puisque $f_n(x) = 1$, cela implique que $f_n(y) \neq 0$. Par conséquent, $y \notin X \setminus B_j$, i.e. $y \in B_j \subseteq \Omega$.

Soient à présent un ouvert $\Omega \in \mathcal{T}_d$ et $x \in \Omega$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) \subseteq \Omega$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \geq N} 2^{-n} < r/2$. Posons ensuite

$$U = \bigcap_{n \leq N} \left\{ y \in X : |f_n(y) - f_n(x)| < \frac{r 2^{n-1}}{N} \right\}.$$

Chaque ensemble apparaissant dans l'intersection finie est ouvert puisqu'il s'agit de l'image inverse de la boule euclidienne de centre $f_n(x)$ et de rayon $\frac{r 2^{n-1}}{N}$ par l'application continue f_n . Par conséquent, U est également ouvert. De plus, U contient clairement x et $U \subseteq b(x, r)$ car si $y \in U$, alors

$$d(x, y) < \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{r}{2} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{r}{2N} + \frac{r}{2} = r,$$

où on a utilisé le fait que f est à valeurs dans $[0, 1]$. ■

Chapitre 4

Compacts et connexes

La compacité est un outil fondamental de l'analyse qui permet de faire passer certaines propriétés du local au global. Ainsi, une propriété qui est vraie au voisinage de chaque point devient vraie de façon uniforme sur tout le compact. Cela permet par exemple de montrer que toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Nous introduisons dans ce chapitre la notion de compacité dans le cas d'espaces topologiques quelconques. Nous montrons qu'à l'instar des compacts de $\mathbb{R}^n$ pouvant être caractérisés par les sous-suites convergentes, les espaces topologiques compacts peuvent être caractérisés grâce aux valeurs d'adhérences de filtres et aux ultrafiltres. Nous en déduisons ensuite que tout produit d'espaces compacts est compact.

Nous aborderons ensuite les notions d'espaces localement compacts, qui sont des espaces qui conservent certaines propriétés des espaces compacts, et les compactifications, qui fournissent un moyen de plonger tout espace topologique dans un espace compact.

Dans la dernière partie du chapitre, nous étudions les espaces connexes. Cette notion est identique à celle étudiée dans $\mathbb{R}^n$.

4.1 Espaces topologiques compacts

Définition 4.1.1 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *compact* si de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un recouvrement fini.

Autrement dit, pour toute famille ω_α , $\alpha \in A$, formée d'ouverts de X et telle que $X = \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$, il existe un nombre fini d'éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ tels que $X = \omega_{\alpha_1} \cup \dots \cup \omega_{\alpha_n}$.

On peut exprimer la définition des espaces compacts en termes de fermés et non d'ouverts par passage au complémentaire. En passant à la contraposée, on trouve une troisième caractérisation.

Proposition 4.1.2 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace $(X, \mathcal{T})$ est compact.
2. Toute famille $\mathcal{F}$ de fermés d'intersection vide contient une sous-famille finie d'intersection vide.
3. Si $\mathcal{F}$ est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non-vide, alors $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

On peut étendre la définition des espaces compacts à des sous-ensembles comme suit.

Définition 4.1.3 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble Y de X est *compact* s'il est compact pour la topologie induite par X .

Il est souvent utile de traduire cette définition en termes d'ouverts de X plutôt que de travailler avec les ouverts de Y . Remarquons que si ω_α , $\alpha \in A$, est un recouvrement de Y par des ouverts de la topologie induite, alors on a

$$Y = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \cap Y$$

où $\Omega_\alpha \in \mathcal{T}$ et $\omega_\alpha = \Omega_\alpha \cap Y$. On a donc $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$. On dit que Ω_α , $\alpha \in A$, est un *recouvrement de Y par des ouverts de X* . Inversément, tout recouvrement de Y par des ouverts de X induit naturellement un recouvrement de Y par des ouverts de la topologie induite. Ainsi, Y est compact si et seulement si de tout recouvrement de Y par des ouverts de X , on peut extraire un recouvrement fini.

Exemple 4.1.4 Tout sous-ensemble fini d'un espace topologique est compact.

La notion de compacité est bien une notion topologique comme le montre le résultat suivant.

Proposition 4.1.5 *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

Démonstration : Il suffit de procéder comme dans la preuve de la Proposition 3.4.6. ■

En particulier, tout espace quotient d'un espace compact est compact.

Dans $\mathbb{R}^n$, nous savons que tout ensemble compact est fermé et que tout fermé inclus dans un compact est également compact. Ces relations restent valides dans tout espace topologique séparé.

Proposition 4.1.6

1. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact, alors tout sous-ensemble fermé de X est compact.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé, alors tout compact K et tout point de $X \setminus K$ ont des voisinages disjoints.
3. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé, alors tout sous-ensemble compact de X est fermé.

Démonstration : 1. Soit F un ensemble fermé de $(X, \mathcal{T})$. Supposons que $\mathcal{O}$ est un recouvrement ouvert de F . Alors $\mathcal{O} \cup \{X \setminus F\}$ est un recouvrement ouvert de X . Il contient donc un recouvrement fini. Soient donc $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}$ tels que $X = \omega_1 \cup \dots \cup \omega_n \cup (X \setminus F)$. Alors $F \subseteq \omega_1 \cup \dots \cup \omega_n$, ce qui suffit.

2. Soient K un ensemble compact et x un point n'appartenant pas à K . Pour tout $y \in K$, il existe des ouverts ω_y et Ω_y de X tels que $x \in \Omega_y$, $y \in \omega_y$ et $\omega_y \cap \Omega_y = \emptyset$. En particulier, on a $K \subseteq \bigcup_{y \in K} \omega_y$ et par compacité, il existe $y_1, \dots, y_n \in K$ tels que $K \subseteq \omega_{y_1} \cup \dots \cup \omega_{y_n}$. Pour conclure, il suffit de considérer les ouverts disjoints $\omega := \omega_{y_1} \cup \dots \cup \omega_{y_n}$ et $\Omega := \Omega_{y_1} \cap \dots \cap \Omega_{y_n}$ qui contiennent K et x respectivement.

3. Soit K un compact de l'espace séparé $(X, \mathcal{T})$. Pour tout $x \in X \setminus K$, le point précédent fournit des ouverts disjoints ω et Ω tels que $x \in \omega$ et $K \subseteq \Omega$. En particulier, $x \in \omega \subseteq X \setminus K$, ce qui montre que $X \setminus K$ est un voisinage de chacun de ses points. ■

Les compacts partagent avec les fermés les propriétés relatives aux unions et aux intersections.

Proposition 4.1.7 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

1. *Toute union finie de sous-ensembles compacts de X est un ensemble compact.*
2. *Si $(X, \mathcal{T})$ est séparé, toute intersection non-triviale de sous-ensembles compacts de X est un ensemble compact.*

Démonstration : 1. C'est évident car si $\mathcal{O}$ est un recouvrement ouvert de $K_1 \cup \dots \cup K_n$, c'est en particulier un recouvrement ouvert de chaque K_j , $j \in \{1, \dots, n\}$. On peut donc trouver $\omega_{j,1}, \dots, \omega_{j,n_j} \in \mathcal{O}$ tels que $K_j \subseteq \bigcup_{l=1}^{n_j} \omega_{j,l}$. On en tire que $\bigcup_{j=1}^n K_j \subseteq \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{l=1}^{n_j} \omega_{j,l}$.

2. Si $\mathcal{F}$ est une famille non-vide de compacts, les éléments de $\mathcal{F}$ sont fermés et donc il en est de même pour l'intersection $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Puisque cette intersection est incluse dans n'importe quel $F_0 \in \mathcal{F}$ qui est compact, elle forme donc un ensemble compact. ■

Proposition 4.1.8 *Toute bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

Démonstration : Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace compact et $(Y, \mathcal{T}')$ un espace séparé. Supposons que $f : X \rightarrow Y$ est une bijection continue. Montrons que f^{-1} est continu. Pour tout fermé F de X , on a $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$. Puisque F est fermé dans un espace compact, c'est un ensemble compact. Par conséquent, $f(F)$ est compact dans $(Y, \mathcal{T}')$ qui est séparé, d'où $f(F)$ est fermé. ■

Exemple 4.1.9 Reprenons l'exemple 2.5.4. Il était immédiat de vérifier que l'application

$$\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 : [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

est bijective et continue. Pour montrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme, il suffit de constater que l'espace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact par application de la Proposition 4.1.8, puisque S^1 est séparé dans $\mathbb{R}^2$. Pour cela, on remarque que l'application

$$\pi|_{[0,1]} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} : x \mapsto [x]$$

est continue et surjective. Ainsi, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact comme image continue de $[0,1]$.

Remarquons que nous avons montré dans la Proposition 4.1.6 que dans un espace topologique séparé, on peut séparer un point et un compact. En fait, les sous-ensembles compacts se comportent "comme des points" et on peut renforcer le résultat précédent en séparant deux compacts.

Proposition 4.1.10

1. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé si et seulement si deux compacts disjoints de X ont des voisinages disjoints.*
2. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est régulier si et seulement si pour tout fermé F de X et tout compact K de X tels que $F \cap K = \emptyset$, F et K ont des voisinages disjoints.*

Démonstration : 1. Soient K_1 et K_2 deux ensembles compacts disjoints de X . Par la Proposition 4.1.6, pour tout $x \in K_1$, il existe des ouverts ω_x et Ω_x tels que $x \in \omega_x$, $K \subseteq \Omega_x$ et $\omega_x \cap \Omega_x = \emptyset$. Puisque $K_1 \subseteq \bigcup_{x \in K_1} \omega_x$, il existe $x_1, \dots, x_n \in K_1$ tels que $K_1 \subseteq \omega$, où on a posé $\omega := \omega_{x_1} \cup \dots \cup \omega_{x_n}$. Alors, l'ouvert $\Omega := \Omega_{x_1} \cap \dots \cap \Omega_{x_n}$ contient K_2 et $\Omega \cap \omega = \emptyset$ par construction, ce qui suffit.

La réciproque est immédiate puisque les singletons sont des ensembles compacts.

2. On procède exactement de la même manière en faisant jouer à F le rôle de K_2 . ■

Corollaire 4.1.11

1. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace séparé et compact, alors il est régulier.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace régulier et compact, alors il est normal.
3. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace séparé et compact, alors il est normal.

Démonstration : 1. Soit F un fermé de X et $x \in X \setminus F$. Comme F est fermé dans un espace compact, il est compact. La Proposition 4.1.6 permet de conclure.

2. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X . Comme $(X, \mathcal{T})$ est compact, F_1 est un ensemble compact et on conclut en utilisant la Proposition 4.1.10.

3. Il suffit de combiner les deux points précédents. ■

A titre d'exemple et afin de cloturer cette section, montrons comment la compacité permet de passer du local au global. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, on dit qu'une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est localement bornée si pour tout $x \in X$, il existe $V \in \mathcal{V}_x$ tel que f est borné sur V .

Proposition 4.1.12 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une application localement bornée, alors elle est bornée.

Démonstration : Par hypothèse, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert ω_x et une constante $C_x > 0$ tels que $|f(y)| \leq C_x$ pour tout $y \in \omega_x$. On a $X = \bigcup_{x \in X} \omega_x$ et par compacité, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $X = \omega_{x_1} \cup \dots \cup \omega_{x_n}$. On remarque alors que $|f| \leq C$ pour $C = \max\{C_{x_1}, \dots, C_{x_n}\}$. ■

4.2 Compacts, ultrafiltres et produits

Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne une caractérisation des compacts de $\mathbb{R}^n$ par les suites. Plus précisément, une partie K de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de K . On parle d'ensemble *extractable*. Comme on peut s'y attendre, cette caractérisation des ensembles compacts via les suites n'est pas valide dans tous les espaces topologiques et il faut passer par la notion de filtre pour obtenir un cadre plus général de convergence. Ce cadre plus général nous permettra de démontrer directement que tout produit d'espaces compacts est compact.

Commençons par proposer une généralisation des “sous-suites convergentes” aux filtres. Rappelons que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de X , alors la convergence de la suite est équivalente à la convergence du filtre associé, formé par les parties de X qui contiennent une queue de la suite. Le filtre associé à une sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constitué des parties de X qui contiennent

une queue de la sous-suite. Evidemment, toute partie qui contient une queue de la suite contient une queue de la sous-suite. Ainsi, le filtre associé à $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ contient le filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 4.2.1 Soient X un ensemble et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux filtres sur X . On dit que $\mathcal{F}_1$ est *plus fin* que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Ainsi, le filtre associé à une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est plus fin que le filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La limite de la sous-suite va être exprimée en terme de valeur d'adhérence du filtre.

Définition 4.2.2 Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Un point $x \in X$ est une *valeur d'adhérence* de $\mathcal{F}$ si x est adhérent à tous les éléments de $\mathcal{F}$.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de $\mathcal{F}$ est donc donné par $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. On vérifie facilement que si un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x , alors x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$.

Proposition 4.2.3 Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Un point $x \in X$ est une valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$ si et seulement si il existe un filtre $\mathcal{G}$ plus fin que $\mathcal{F}$ qui converge vers x .

Démonstration : Supposons que $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Alors, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$ et tout $F \in \mathcal{F}$, on a $V \cap F \neq \emptyset$. Les propriétés des filtres et des voisinages impliquent que l'ensemble

$$\{V \cap F : V \in \mathcal{V}_x, F \in \mathcal{F}\}$$

est la base d'un filtre $\mathcal{G}$ qui contient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_x$, ce qui suffit.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \rightarrow x$. Soient $F \in \mathcal{F}$ et $V \in \mathcal{V}_x$. En particulier, on a $F, V \in \mathcal{G}$ et donc $V \cap F \in \mathcal{G}$. Par (F1), on obtient $V \cap F \neq \emptyset$, d'où $x \in \overline{F}$. ■

Nous avons naturellement mis une relation d'ordre sur l'ensemble des filtres de X . Cet ensemble est inductif car si $\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in A$, est une chaîne formée de filtres sur X , alors on vérifie directement que $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha$ est un filtre qui majore les filtres $\mathcal{F}_\alpha$. Par le Lemme de Zorn, il existe donc un élément maximal dans l'ensemble des filtres sur X .

Définition 4.2.4 Soit X un ensemble. Un ultrafiltre sur X est un filtre $\mathcal{F}$ qui est maximal pour l'inclusion.

Autrement dit, un filtre $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si pour tout filtre $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, on a $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Le lemme de Zorn nous a assuré l'existence d'un ultrafiltre sur X . De manière plus générale, il permet de montrer que tout filtre est inclus dans un ultrafiltre.

Proposition 4.2.5 Soit X un ensemble. Tout filtre sur X est inclus dans un ultrafiltre.

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Notons $\mathfrak{F}$ la collection des filtres sur X plus fins que $\mathcal{F}$, ordonné par inclusion. Alors, toute chaîne de $\mathfrak{F}$ admet un majorant donné par l'union des éléments de la chaîne. En appliquant le lemme de Zorn, on obtient l'existence d'un élément maximal de $\mathfrak{F}$. Il est clair que cet élément est un ultrafiltre qui contient $\mathcal{F}$. ■

Remarque 4.2.6 Le résultat précédent nous donne l'existence d'un ultrafiltre contenant un filtre donné. Cet ultrafiltre n'est en général pas unique. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est le filtre formé des parties contenant $A \subseteq X$, alors pour tout $x \in A$, le filtre de tous les ensembles contenant x est un ultrafiltre qui contient $\mathcal{F}$ par la Proposition 4.2.9 ci-dessous.

Si un filtre converge, sa limite est une valeur d'adhérence. Pour un ultrafiltre, les seules valeurs d'adhérence sont les points limites.

Proposition 4.2.7 *Soient X un ensemble et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X . Si x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U} \rightarrow x$.*

Démonstration : Par la Proposition 4.2.3, on sait que si x est une valeur d'adhérence, alors il existe un filtre $\mathcal{G}$ plus fin que $\mathcal{U}$ qui converge vers x . Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, on a $\mathcal{U} = \mathcal{G}$, ce qui suffit. ■

Nous pouvons à présent énoncer la caractérisation des espaces compacts par les filtres.

Proposition 4.2.8 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace $(X, \mathcal{T})$ est compact.*
2. *Tout filtre sur X possède une valeur d'adhérence.*
3. *Tout ultrafiltre sur X converge.*

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. Supposons que $\mathcal{F}$ est un filtre sur X tel que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset$. Comme $(X, \mathcal{T})$ est compact, il existe donc $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ tels que $\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n} = \emptyset$. Par $(\mathcal{F}3)$, on sait que $\overline{F_1}, \dots, \overline{F_n} \in \mathcal{F}$. La propriété $(\mathcal{F}2)$ implique alors que $\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n} \in \mathcal{F}$, ce qui est impossible par $(\mathcal{F}1)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Il suffit d'appliquer la Proposition 4.2.7.

3. $\Rightarrow$ 2. C'est évident puisque tout filtre est inclus dans un ultrafiltre qui converge donc.

2. $\Rightarrow$ 1. Soit $\mathcal{O}$ un recouvrement ouvert de X . Supposons que $\mathcal{O}$ ne contient pas de recouvrement fini de X . Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tous $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}$, $X \setminus (\omega_1 \cup \dots \cup \omega_n) \neq \emptyset$. Par conséquent, l'ensemble

$$\{X \setminus (\omega_1 \cup \dots \cup \omega_n) : n \in \mathbb{N}_0, \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}\}$$

est la base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X (puisque l'intersection de deux de ses éléments est un de ses éléments). Par hypothèse, ce filtre admet une valeur d'adhérence x . Comme $\mathcal{O}$ est un recouvrement de X , il existe $\Omega \in \mathcal{O}$ tel que $x \in \Omega$. La Proposition 4.2.3 implique qu'il existe un filtre $\mathcal{G}$ plus fin que $\mathcal{F}$ qui converge vers x et donc en particulier, $\Omega \in \mathcal{G}$. D'autre part, par construction, on a $X \setminus \Omega \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Par $(\mathcal{F}1)$, on en tire que $\Omega \cap (X \setminus \Omega) = \emptyset \in \mathcal{G}$, ce qui contredit $(\mathcal{F}1)$. ■

Afin d'obtenir le résultat sur les produits d'espaces compacts, nous devons introduire encore quelques résultats préliminaires. Nous savons par les propriétés $(\mathcal{F}1)$ et $(\mathcal{F}2)$ que si $\mathcal{F}$ est un filtre et si $A \subseteq X$, alors on ne peut pas avoir simultanément $A \in \mathcal{F}$ et $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Dans le cas d'un ultrafiltre, on peut affirmer qu'une des deux appartenances est vraie.

Proposition 4.2.9 *Soient X un ensemble et $\mathcal{U}$ un filtre sur X . Alors $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si, quel que soit $A \subseteq X$, on a $A \in \mathcal{U}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

a. Il s'agit d'un "ou" exclusif car $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

Démonstration : Supposons que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre et qu'il existe une partie A de X telle que ni A ni $X \setminus A$ n'appartiennent à $\mathcal{U}$. Alors, pour tout $F \in \mathcal{U}$, on a $F \cap A \neq \emptyset$ car sinon, $F \subseteq X \setminus A$ et donc $X \setminus A \in \mathcal{U}$ par (F3). On vérifie alors directement que $\{F \cap A : F \in \mathcal{U}\}$ est la base d'un filtre qui contient $\mathcal{U}$. Ce filtre est plus fin que $\mathcal{U}$ car il contient A , ce qui est impossible. Réciproquement, supposons qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ strictement plus fin que $\mathcal{U}$. Alors, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \notin \mathcal{U}$. Par hypothèse, on en tire que $X \setminus A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, et donc par (F2), $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$. Ceci contredit (F1). ■

Proposition 4.2.10 Soient X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une application et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X . Alors le filtre image $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre sur Y .

Démonstration : Soit $A \subseteq Y$. Par hypothèse, $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ ou $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. La Proposition 4.2.9 permet de conclure puisque le filtre $f(\mathcal{U})$ est engendré par $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ et puisque $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pour tout $B \subseteq Y$. ■

Nous pouvons à présent démontrer que tout produit de compacts est compact. Remarquons que la preuve est élémentaire mais signalons que ce résultat est équivalent au lemme de Zorn, et donc à l'axiome du choix. On ne peut donc pas démontrer ce résultat en utilisant la caractérisation des compacts par les valeurs d'adhérence des filtres, la notion d'ultrafiltre est ici primordiale.

Théorème 4.2.11 (Tychonoff) Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces topologiques. Alors $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ est compact si et seulement si tous les espaces X_α , $\alpha \in A$, sont compacts.

Démonstration : Si le produit est compact, alors chaque espace X_α l'est par continuité de la projection p_α et la Proposition 4.1.5.

Supposons à présent que les espaces $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ sont compacts. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Pour tout $\alpha \in A$, $p_\alpha(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre sur X_α par la Proposition 4.2.10. La Proposition 4.2.8 implique qu'il existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tel que $p_\alpha(\mathcal{U}) \rightarrow x_\alpha$. On conclut que $\mathcal{U}$ converge vers $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ par la Proposition 3.2.14. Cela suffit par la Proposition 4.2.8. ■

4.3 Espaces localement compacts et Théorème de Baire

De nombreux espaces topologiques que l'on rencontre ne sont pas compacts, mais jouissent d'une propriété légèrement plus faible, la compacité locale.

Définition 4.3.1 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *localement compact* si tout point de X possède un voisinage compact.

Autrement dit, pour tout $x \in X$, il existe un compact K et un ouvert ω tels que $x \in \omega \subseteq K$. Cela revient à demander que $x \in K^\circ$.

Exemple 4.3.2 Evidemment, tout espace compact X est localement compact puisque X est voisinage de chacun de ses points.

Exemple 4.3.3 L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie euclidienne est localement compact puisque les boules fermées centrées sur un point forment des voisinages compacts de ce point.

Exemple 4.3.4 L'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ n'est pas localement compact. En effet, supposons que 0 admet un voisinage compact K . Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $I = [-\varepsilon, \varepsilon] \cap \mathbb{Q} \subseteq K$. Comme I est fermé dans $\mathbb{Q}$ et inclus dans K , il est compact. Donc, son image par l'inclusion $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ est également compacte, c'est-à-dire I est compact donc fermé dans $\mathbb{R}$. Or $\bar{I} = [-\varepsilon, \varepsilon] \neq I$, ce qui donne une contradiction.

Dans le cas des espaces localement compacts séparés, le résultat suivant montre qu'on peut trouver beaucoup de voisinages compacts d'un point. Il montre également que les propriétés de séparation peuvent être renforcées.

Proposition 4.3.5 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ est localement compact et séparé, alors il est régulier.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ est localement compact et régulier, alors tout point de X admet une base de voisinages compacts et fermés.

Démonstration : 1. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est localement compact et séparé. Soient F un fermé de X et x un point n'appartenant pas à F . Par hypothèse, il existe un voisinage compact K de x . En particulier, comme X est séparé, K est fermé. Deux cas peuvent se produire. Premièrement, si $K \cap F = \emptyset$, alors K° et $X \setminus K$ sont des ouverts disjoints qui contiennent x et F respectivement. Deuxièmement, si $K \cap F \neq \emptyset$, alors $K \cap F$ est un fermé inclus dans K et donc $K \cap F$ est compact. Comme X est séparé, la Proposition 4.1.10 implique qu'il existe des ouverts ω_1, ω_2 tels que $x \in \omega_1$, $K \cap F \subseteq \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$. Alors $\omega_2 \cup X \setminus K$ est un ouvert qui contient F et $K^\circ \cap \omega_1$ est un ouvert qui contient x . Puisque ces ouverts sont disjoints, on obtient la conclusion.

2. Soient $x \in X$ et K un voisinage compact de X . Comme l'espace est régulier, il existe une base $\mathcal{B}$ de voisinages fermés de x . On pose

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq K\}$$

et on vérifie directement que $\mathcal{B}'$ forme une base de voisinages compacts de x . ■

Nous allons à présent démontrer le théorème de Baire. Ce résultat possède de nombreuses applications. Signalons par exemple que deux des théorèmes les plus puissants d'analyse fonctionnelle¹ sont des conséquences directes du théorème de Baire.

Définition 4.3.6 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X .

En passant au complémentaire, on obtient qu'un espace est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Théorème 4.3.7 (Baire)

1. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace localement compact et séparé, alors il est de Baire.
2. Si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(X, \mathcal{T}_d)$ est de Baire.

1. Le théorème du graphe fermé et le théorème de Banach-Steinhaus.

Démonstration : Dans les deux cas, soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans X . Il faut montrer que si ω est un ouvert non-vide, alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \cap \omega \neq \emptyset.$$

1. Par la Proposition 4.3.5, on sait que tout point de X admet une base de voisinages compacts et fermés. Comme Ω_0 est dense dans X , il existe $x_0 \in \Omega_0 \cap \omega$ et donc un voisinage fermé et compact K_0 de x_0 tel que $K_0 \subseteq \Omega_0 \cap \omega$. Alors K_0° est un ouvert non-vide (puisqu'il contient x_0) et par densité de Ω_1 dans X , il existe un compact K_1 d'intérieur non-vide tel que $K_1 \subseteq K_0^\circ \cap \Omega_1$. En continuant de la sorte, on construit une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts d'intérieur non-vide tels que $K_n \subseteq K_{n-1}^\circ \cap \Omega_n$. On a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \cap \omega$$

et il suffit de montrer que l'intersection des K_n , $n \in \mathbb{N}$, est non-vide. Ces compacts sont des fermés non-vides emboîtés en décroissant et donc toute sous-famille finie est d'intersection non-vide. Comme ils sont inclus dans le compact K_0 , on en tire que leur intersection est non-vide, ce qui suffit.

2. Comme Ω_0 est dense dans X , il existe $x_0 \in \Omega_0 \cap \omega$. On peut donc trouver une boule ouverte $b(x_0, r_0)$ avec $r_0 < 1$ telle que $\overline{b(x_0, r_0)} \subseteq \Omega_0 \cap \omega$. La même construction avec $\Omega_1 \cap b(x_0, r_0)$ donne une boule $b(x_1, r_1)$ avec $r_1 < \frac{1}{2}$ et $\overline{b(x_1, r_1)} \subseteq \Omega_1 \cap b(x_0, r_0)$. En continuant de la sorte, on construit une suite de boules $b(x_n, r_n)$ avec $r_n < 2^{-n}$ et $\overline{b(x_n, r_n)} \subseteq \Omega_n \cap b(x_{n-1}, r_{n-1})$. On a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{b(x_n, r_n)} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \cap \omega$$

et il reste à montrer que l'intersection des boules est non-vide. Pour cela, remarquons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy car si $p, q \geq N$, $x_p, x_q \in b(x_N, r_N)$ et donc

$$d(x_p, x_q) < \frac{2}{2^N}.$$

Comme l'espace est complet, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point x . On sait que $x \in \overline{b(x_n, r_n)}$ pour tout n , d'où la conclusion. ■

On peut montrer qu'aucune des deux conditions du théorème de Baire n'implique l'autre.

L'utilisation du théorème de Baire permet de prouver facilement l'existence d'objets qui sont difficiles à construire et encore plus à visualiser. En 1931, une application du théorème de Baire permit à Banach et Mazurkiewicz de démontrer que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables est dense dans l'espace des fonctions continues, sans utiliser de construction explicite d'une telle fonction.

Proposition 4.3.8 *Il existe des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont nulle part dérivables.*

Démonstration : Soit $C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Sur cet espace, on définit une distance en posant

$$d(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in C([0, 1]).$$

On sait que cet espace métrique est complet². Soit B l'ensemble des fonctions de $C([0, 1])$ dérivables en au moins un point de $[0, 1]$. Remarquons que si une fonction f est dérivable en x , on a

$$\sup_{y \in [0, 1]} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} < +\infty.$$

Il s'ensuit que

$$B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} F_n,$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, F_n est défini par

$$F_n = \{f \in C([0, 1]) : \exists x \in [0, 1] \forall y \in [0, 1] |f(y) - f(x)| \leq n|y - x|\}.$$

Il reste à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, F_n est un fermé d'intérieur vide de $C([0, 1])$.

1. F_n est fermé dans $C([0, 1])$.

Comme on travaille dans un espace métrique, on peut utiliser le critère par les suites. Considérons une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de F_n telle que $f_k \rightarrow f$ dans $C([0, 1])$. Montrons que $f \in F_n$. Puisque $f_k \in F_n$, il existe $x_k \in [0, 1]$ tel que

$$|f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k| \quad \forall y \in [0, 1].$$

Comme la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{m(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Notons $x \in [0, 1]$ sa limite. Pour tout $y \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_K(y)| + |f_K(y) - f_K(x_K)| + |f_K(x_K) - f(x_K)| + |f(x_K) - f(x)| \\ &\leq 2d(f, f_K) + n|y - x_K| + |f(x_K) - f(x)| \end{aligned}$$

pour tout $K \in \mathbb{N}$. Si $K = m(k) \rightarrow +\infty$, on obtient

$$|f(y) - f(x)| \leq n|y - x|.$$

Ainsi, $f \in F_n$.

2. F_n est d'intérieur vide dans $C([0, 1])$.

Soit $f \in F_n$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \not\subseteq F_n$, i.e. montrons qu'il existe $g \in C([0, 1])$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$ et $g \notin F_n$. Au vu du théorème de Weierstrass³, il existe un polynôme P tel que

$$d(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. La distance traduit la convergence uniforme des fonctions sur $[0, 1]$. Or, une suite de fonctions converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

3. Les polynômes forment une partie dense de $C([0, 1])$, i.e. toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0, 1]$.

Choisissons $M = \sup_{x \in [0,1]} |P'(x)|$ et considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon N > 2(M + n + 1)$. Soit la fonction Φ définie par $\Phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$, i.e.

$$\Phi(x) := \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction donne la distance entre x et l'entier le plus proche. En particulier, elle est continue et 1 - périodique. De plus, elle admet une dérivée à droite en tout point. Posons

$$h(x) = \frac{\varepsilon}{2} \Phi(Nx).$$

Remarquons que h est $\frac{1}{N}$ - périodique, continue et sur $[0, \frac{1}{N}]$, on a

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \leq \frac{1}{2N}, \\ \frac{\varepsilon}{2} (1 - Nx) & \text{si } x \geq \frac{1}{2N}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in [0,1]} |h(x)| = \frac{\varepsilon}{4}$$

et de plus, en tout point x ,

$$|h'^+(x)| = \frac{\varepsilon N}{2} > M + n + 1,$$

où h'^+ désigne la dérivée à droite de h . Posons $g = P + h$ et montrons que g convient. Tout d'abord, on a

$$d(f, g) \leq d(f, P) + d(h, 0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

D'autre part, pour tous $x, y \in [0, 1]$, on a

$$|g(y) - g(x)| \geq |h(y) - h(x)| - |P(y) - P(x)|.$$

Vu le choix de M et le théorème des accroissements finis, pour tout $y \in [0, 1]$, on a

$$|P(y) - P(x)| \leq M|x - y|.$$

De plus, comme $|h'^+(x)| > M + n + 1$, pour tout $y > x$ suffisamment proche de x , on a

$$|h(y) - h(x)| > (M + n + 1)|x - y|.$$

On en tire qu'il existe $y \in [0, 1]$ tel que

$$|g(y) - g(x)| \geq (M + n + 1)|x - y| - M|x - y| > n|x - y|,$$

d'où la conclusion. ■

Remarque 4.3.9 On a en fait montré que l'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables est dense dans $C([0, 1])$ muni de la norme uniforme. On aurait pu obtenir la densité de l'ensemble des fonctions nulle part dérivables dans $C([0, 1])$ par un autre argument. En effet, soit $f \in C([0, 1])$ et soit g une fonction nulle part dérivable. Comme $f - g \in C([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que

$$d(f, g + P_n) = d(f - g, P_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

La suite $(g + P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers f dans $C([0, 1])$. De plus, s'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $g + P_n$ est dérivable en x , alors il en est de même pour $g = (g + P_n) - P_n$, ce qui est impossible.

Remarquons que cette preuve utilise le fait qu'il existe une fonction nulle part dérivable, alors que le théorème de Baire nous donne en plus l'existence !

4.4 Compactifications

Comme les espaces compacts ont de belles propriétés, il est souvent intéressant d'étudier des procédés de "compactification", qui permettent de plonger l'espace topologique étudié dans un espace topologique compact.

Définition 4.4.1 Un *compactifié* ou une *compactification* d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un couple $((Y, \mathcal{T}'), f)$ tel que

- $(Y, \mathcal{T}')$ est un espace topologique compact,
- $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme de X sur $f(X)$,
- $f(X)$ est dense dans Y .

En général et lorsque le contexte est clair, on parlera du compactifié Y de X sans préciser la topologie et l'application f .

Exemple 4.4.2 Puisque, pour la topologie euclidienne, $]0, 1[$ est dense dans $[0, 1]$ qui est compact, l'inclusion $i :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ permet de voir $[0, 1]$ comme un compactifié de $]0, 1[$.

Exemple 4.4.3 L'application $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un homéomorphisme et donc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est un compactifié de $\mathbb{R}$.

Exemple 4.4.4 La projection stéréographique donne un homéomorphisme entre le cercle S^1 privé du pôle nord et $\mathbb{R}$. Ainsi, S^1 est un compactifié de $\mathbb{R}$.

Nous allons présenter une méthode générale de compactification des espaces non-compacts. Avant de présenter cette construction, étudions un cas particulier.

Rappelons que pour une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ pour tout x tel que $|x - x_0| < \delta$. Autrement dit, pour tout voisinage V de L , il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que $f(V_0) \subseteq V$. Ainsi, la limite d'une fonction en un point peut se traduire en termes de voisinages. Pour pouvoir définir la limite de f à l'infini, il faudrait donc définir les voisinages de l'infini. Rappelons que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ pour tout x tel que $|x| > M$. Ainsi, tout se passe comme si on avait ajouté à $\mathbb{R}$ le point ∞ et défini ses voisinages comme étant les ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R} : |x| > M\} \cup \{\infty\}$. C'est exactement la démarche qu'on suit pour définir le compactifié d'Alexandrov.

Définition 4.4.5 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On définit $X^* = X \cup \{\infty\}$, où ∞ est un symbole n'appartenant pas à X , et

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{\omega_K = (X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \text{ compact fermé de } X\}.$$

Si i est l'inclusion de X dans X^* , le couple $((X^*, \mathcal{T}^*), i)$ est le *compactifié d'Alexandrov* de $(X, \mathcal{T})$.

Il faut évidemment montrer que le compactifié d'Alexandrov est bien un compactifié de $(X, \mathcal{T})$. C'est ce que l'on fait dans la proposition suivante.

Proposition 4.4.6 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. L'ensemble $\mathcal{T}^*$ définit une topologie sur X^* .
2. La topologie induite par $\mathcal{T}^*$ dans X est $\mathcal{T}$.
3. L'espace topologique $(X^*, \mathcal{T}^*)$ est compact.
4. Si $(X, \mathcal{T})$ n'est pas compact, alors X est dense dans X^* .
5. L'espace $(X, \mathcal{T})$ est localement compact et séparé si et seulement si $(X^*, \mathcal{T}^*)$ est séparé.

Démonstration : 1. Il s'agit d'une simple vérification.

2. Si ω est un ouvert de la topologie induite sur X par $(X^*, \mathcal{T}^*)$, alors il existe $\Omega \in \mathcal{T}^*$ tel que $\omega = \Omega \cap X$. Si $\Omega \in \mathcal{T}$, alors $\omega \cap X = \Omega \in \mathcal{T}$. Si $\Omega = \omega_K$, alors $\omega = X \setminus K \in \mathcal{T}$ puisque K est un fermé de X . De plus, tout ouvert de $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}^*$ et donc de la topologie induite.

3. Soit $\mathcal{O}$ un recouvrement ouvert de X^* . Alors, il existe $\Omega \in \mathcal{O}$ tel que $\infty \in \Omega$, et $\Omega = \omega_K$ pour un compact fermé K de X . Dès lors, $\mathcal{O} \setminus \{\Omega\}$ est un recouvrement de K par des ouverts de $\mathcal{T}^*$, et il s'ensuit que $\{\omega \cap X : \omega \in \mathcal{O} \setminus \{\Omega\}\}$ est un recouvrement de K par des ouverts de $\mathcal{T}$ par le point 2. Il existe donc des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_n \in \mathcal{O}$ tels que $K \subseteq (\Omega_1 \cap X) \cup \dots \cup (\Omega_n \cap X)$, d'où $X^* = \Omega \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$.

4. Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathcal{T}^*$. On a $\Omega \cap X = \emptyset$ si et seulement si $\Omega = \{\infty\}$. Or, cet ensemble est ouvert si et seulement si X est un compact fermé de X .

5. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est localement compact et séparé. Soient x et y deux points distincts de X^* . Si $x, y \in X$, alors on peut les séparer par des ouverts de $\mathcal{T}$ et donc de $\mathcal{T}^*$. Si $x \in X$ et $y = \infty$, alors x admet un voisinage compact fermé K , donc K° et ω_K séparent x et y . Réciproquement, si $(X^*, \mathcal{T}^*)$ est séparé, alors $(X, \mathcal{T})$ est séparé par le point 2 et la Proposition 3.3.7. De plus, si $x \in X$, alors on peut séparer x et ∞ . Il existe donc un ouvert ω contenant x et un compact fermé K tels que $\omega \cap \omega_K = \emptyset$. Cela implique que $x \in \omega \subseteq K$, et donc K est un voisinage compact de x . ■

Terminons en mentionnant qu'il existe d'autres méthodes de compactification, plus complexes, notamment la compactification de Stone-Čech qui a de meilleures propriétés.

4.5 Espaces connexes

Dans cette section, nous étudions les espaces connexes tels qu'étudiés en analyse. Intuitivement, un espace connexe est un espace "d'un seul tenant".

Définition 4.5.1 Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *connexe* s'il ne possède pas de partition en deux ouverts non-vides.

Autrement dit, $(X, \mathcal{T})$ est connexe s'il n'existe pas d'ouverts $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ tels que $\omega_1 \neq \emptyset$, $\omega_2 \neq \emptyset$, $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ et $X = \omega_1 \cup \omega_2$.

Exemple 4.5.2 On sait que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est connexe car le complémentaire d'un ouvert non-vide n'est pas ouvert.

Exemple 4.5.3 L'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la topologie euclidienne n'est pas connexe. En effet, les ensembles $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$ et $\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[$ forment une partition de $\mathbb{Q}$ en deux ouverts disjoints.

Exemple 4.5.4 Tout espace possédant au moins deux éléments et muni de la topologie discrète n'est pas connexe.

On peut réexprimer la condition de connexité en termes de fermés en passant au complémentaire.

Proposition 4.5.5 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace $(X, \mathcal{T})$ est connexe.
2. Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non-vides.
3. Il n'existe pas d'ensemble ouvert fermé non-vide propre.

Démonstration : Tout est évident car si $X = \omega_1 \cup \omega_2$ avec $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$, alors $\omega_1 = X \setminus \omega_2$ et $\omega_2 = X \setminus \omega_1$ sont des fermés de X . ■

Cette dernière propriété est très utilisée en analyse. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les points d'une partie connexe, on montre que l'ensemble des points qui la satisfont est un ensemble non-vide ouvert et fermé.

Comme dans le cas des espaces compacts, on peut parler de sous-ensemble connexe.

Définition 4.5.6 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble Y de X est *connexe* s'il est connexe pour la topologie induite par X .

Plutôt que de travailler avec les ouverts de Y , on reformule en général cette condition en termes d'ouverts de X . Ainsi, Y est connexe s'il n'existe pas d'ouverts $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ tels que $\omega_1 \cap Y \neq \emptyset$, $\omega_2 \cap Y \neq \emptyset$, $\omega_1 \cap \omega_2 \cap Y = \emptyset$ et $Y \subseteq \omega_1 \cup \omega_2$. On parle alors de *disconnexion de Y par des ouverts de X* .

Proposition 4.5.7 L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Démonstration : Soit $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ une application continue. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est connexe et montrons que $f(X)$ est connexe. Si $f(X)$ n'est pas connexe, alors il existe des ouverts $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}'$ qui forment une disconnexion de $f(X)$. Puisque f est continue, les ensembles $f^{-1}(\omega_1)$ et $f^{-1}(\omega_2)$ sont des ouverts non-vides de X qui forment une partition de X , d'où une contradiction. ■

En particulier, tout quotient d'un espace connexe est connexe. De même, si un produit d'espaces topologiques est connexe, alors chacun des espaces est connexe. La réciproque est également vérifiée, nous le démontrerons plus loin.

Le résultat précédent permet par exemple de montrer que les espaces euclidiens $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, quitte à le composer avec une translation, on a que $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Or, l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est un connexe alors que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas, ce qui contredit le caractère continu de f .

Le théorème des valeurs intermédiaires peut aussi être obtenu directement grâce à la Proposition 4.5.7.

Proposition 4.5.8 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe et $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que

$f(a) < f(b)$, alors pour tout $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration : Supposons que pour tout $x \in X$, $f(x) \neq y$. Alors, les ouverts $] -\infty, y[$ et $]y, +\infty[$ forment une disconnexion de $f(X)$ par des ouverts de $\mathbb{R}$, ce qui est impossible par la Proposition 4.5.7. ■

Proposition 4.5.9 Soit Y un ensemble connexe de $(X, \mathcal{T})$. Alors toute partie Z de X dans laquelle Y est dense est connexe.

Démonstration : Supposons que les ouverts ω_1, ω_2 de X forment une disconnexion de Z . Comme $Z \subseteq \bar{Y}$ et $\omega_i \cap Z \neq \emptyset$, on a $\omega_i \cap Y \neq \emptyset$ par définition de l'adhérence pour $i \in \{1, 2\}$. On en tire que les ouverts ω_1, ω_2 de X forment une disconnexion de Y , d'où une contradiction. ■

Il est clair que l'union de deux ensembles connexes n'est pas nécessairement connexe. Le résultat suivant montre que si ces ensembles sont "suffisamment proches", alors l'union sera connexe.

Proposition 4.5.10 Soit $\mathcal{A}$ une collection de parties non-vides connexes de $(X, \mathcal{T})$. Supposons que pour toute partition de $\mathcal{A}$ en deux parties non-vides $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, on a

$$\bar{X}_1 \cap X_2 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad X_1 \cap \bar{X}_2 \neq \emptyset$$

pour $X_i = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_i} A$, alors $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ est connexe. En particulier, toute union d'ensembles connexes ayant un point en commun est connexe.

Démonstration : Supposons que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ n'est pas connexe. Il existe alors une disconnexion de $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ par des ouverts ω_1 et ω_2 de X . Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$A \subseteq \omega_1 \cup \omega_2 \quad \text{et} \quad A \cap \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset.$$

Comme A est connexe, on doit avoir $\omega_1 \cap A = \emptyset$ ou $\omega_2 \cap A = \emptyset$. Dans le premier cas, on a $A \subseteq \omega_2$ et dans le deuxième cas, $A \subseteq \omega_1$. Comme ces deux cas sont exclusifs, on peut construire une partition de $\mathcal{A}$ en posant $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq \omega_1\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq \omega_2\}$. Ces ensembles sont non-vides par définition d'une disconnexion de $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Si on définit X_1 et X_2 comme dans l'énoncé, on a $X_1 \subseteq X \setminus \omega_2$, d'où également $\bar{X}_1 \subseteq X \setminus \omega_2$. On en tire que $\bar{X}_1 \cap X_2 \subseteq \bar{X}_1 \cap \omega_2 = \emptyset$. De même, on montre que $X_1 \cap \bar{X}_2 = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

Le résultat précédent s'applique en particulier pour gérer le cas des produits d'espaces connexes.

Proposition 4.5.11 Tout produit d'espaces connexes est connexe.

Démonstration : Commençons par traiter le cas des deux espaces connexes $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Fixons $x_2 \in X_2$. On remarque que

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_1 \in X_1} \{x_1\} \times X_2 \cup X_1 \times \{x_2\}$$

Pour tout $x_1 \in X_1$, l'ensemble $\{x_1\} \times X_2$ est homéomorphe à X_2 et est donc connexe. De même, $X_1 \times \{x_2\}$ est homéomorphe à X_1 et est donc connexe. La Proposition 4.5.10 permet de conclure.

On passe aux produits finis par induction, en remarquant que $X_1 \times \cdots \times X_n$ est homéomorphe à $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$.

Passons à présent au cas général. On suppose donc que $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, est une famille d'espaces topologique connexes. Fixons $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Pour tout sous-ensemble fini ν de A , on définit

$$Y_\nu = \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha \quad \text{où} \quad Z_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \in \nu \\ \{x_\alpha\} & \text{si } \alpha \notin \nu. \end{cases}$$

Alors, Y_ν est homéomorphe à $\prod_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ et est donc connexe par le cas fini. Montrons que

$$\overline{\bigcup_{\nu \subseteq A, \nu \text{ fini}} Y_\nu} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

ce qui suffira par la Proposition 4.5.9. Il suffit pour cela de montrer que tout ouvert de base non-vide du produit rencontre $\bigcup_{\nu \subseteq A, \nu \text{ fini}} Y_\nu$. Si Ω est un ouvert de base, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ tels que

$$\Omega = \prod_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Omega_\alpha = X_\alpha & \text{si } \alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \\ \Omega_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}. \end{cases}$$

Alors, on vérifie directement que Ω rencontre $Y_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}$. ■

Quand un espace n'est pas connexe, il est naturel de le décomposer en "morceaux connexes". C'est l'idée des composantes connexes.

Définition 4.5.12 Une *composante connexe* de $(X, \mathcal{T})$ est une partie connexe maximale pour l'inclusion dans l'ensemble des parties connexes de X .

Présentons quelques propriétés des composantes connexes.

Proposition 4.5.13 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Toute partie connexe non-vide est incluse dans une unique composante connexe de X .
2. Les composantes connexes de X forment une partition de X .
3. Les composantes connexes de X sont fermées.

Démonstration : 1. Soit $C \neq \emptyset$ une partie connexe. Posons

$$A = \bigcup_{C' \text{ connexe}, C \subseteq C'} C'.$$

Comme A est une union de connexes qui contiennent C (donc en particulier d'intersection non-vide), il s'agit d'un ensemble connexe qui contient C . Si B est un ensemble connexe tel que $A \subseteq B$, alors $C \subseteq B$ et donc $B \subseteq A$. Ceci montre que A est maximal et est l'unique composante connexe qui contient C .

2. Pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est connexe et est donc inclus dans une composante connexe. De plus, il est clair par maximalité que les composantes connexes sont disjointes et elles forment donc une partition de X .

3. Soit C une composante connexe de X . Alors $\overline{C}$ est connexe et par maximalité de C , on en tire que $C = \overline{C}$. ■

On aurait aussi pu démontrer le résultat précédent en remarquant que les composantes connexes sont exactement les classes d'équivalence de X pour la relation

$$x\mathcal{R}y \iff \text{il existe un ensemble connexe } C \text{ tel que } x, y \in C.$$

Un espace topologique connexe ne possède qu'une seule composante connexe. A l'extrême opposé, on retrouve l'ensemble des rationnels ou des ensembles du type Cantor. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *totalelement discontinu* si les composantes connexes de X sont exactement les singletons.

Terminons ce chapitre en signalant qu'il existe une notion plus forte de connexité, la connexité par arcs. On peut également étudier la connexité locale.

Chapitre 5

Espaces vectoriels topologiques

Etant donné un ensemble X muni d'une structure algébrique, il est naturel de demander que la topologie que l'on met sur X soit compatible avec cette structure, c'est-à-dire rende les opérations de X continues. Par exemple, un groupe topologique sera un groupe G muni d'une topologie pour laquelle les applications $*$: $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto x * y$ et $\cdot^{-1}$: $X \rightarrow X : x \mapsto x^{-1}$ sont continues. De même, on pourrait s'intéresser aux corps topologiques. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une autre famille de structures algébriques : les espaces vectoriels. Nous montrons en particulier que leur structure particulière permet de ramener l'étude de toute topologie compatible à l'étude des voisinages de 0. Nous étudions également le cas des espaces vectoriels de dimension finie et montrons qu'à homéomorphisme près, le seul espace vectoriel topologique séparé de dimension finie est l'espace euclidien.

5.1 Espaces vectoriels topologiques

Dans ce chapitre, on fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on travaille avec des espaces topologiques sur $\mathbb{K}$.

Définition 5.1.1 Un *espace vectoriel topologique* est un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un espace vectoriel et $\mathcal{T}$ est une topologie sur X qui rend l'addition

$$+ : X \times X \rightarrow X : (x, y) \mapsto x + y$$

et la multiplication par un scalaire

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

continues.

Dans cette définition, il est sous-entendu que les espaces $X \times X$ et $\mathbb{K} \times X$ sont munis de leur topologie produit.

Exemple 5.1.2 Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel muni d'une norme, alors la norme induit une distance d donnée par $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$. L'espace topologique $(X, \mathcal{T}_d)$ est un espace vectoriel topologique.

Remarquons que pour tout $x \in X$, l'application

$$\cdot x : \mathbb{K} \rightarrow X : \lambda \mapsto \lambda x$$

est continue. En effet, on a $\cdot \cdot x = \cdot \circ i$ avec $i : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \times X : \lambda \mapsto (\lambda, x)$, qui est continu par la Proposition 2.4.14.

Exemple 5.1.3 Si X est un espace vectoriel muni de la topologie discrète, alors il ne s'agit pas d'un espace vectoriel topologique (sauf si $X = \{0\}$). En effet, fixons un élément $x \neq 0$ dans X . La continuité de la multiplication par x impliquerait que $(\frac{1}{n}x)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tend vers 0. Comme $\{0\}$ est un voisinage de 0 pour la topologie discrète, cela signifierait que $\frac{1}{n}x = 0$ pour n suffisamment grand, ce qui est impossible.

Proposition 5.1.4 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, alors pour tout $x_0 \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}_0$, l'application

$$f_{x_0, \lambda} : X \rightarrow X : x \mapsto \lambda x + x_0$$

est un homéomorphisme. En particulier, pour tout $x_0 \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}_0$, les applications

$$X \rightarrow X : x \mapsto x + x_0 \quad \text{et} \quad X \rightarrow X : x \mapsto \lambda x$$

sont des homéomorphismes.

Démonstration : Il est clair que $f_{x_0, \lambda}$ est bijectif, d'inverse donné par $f_{-\frac{1}{\lambda}x_0, \frac{1}{\lambda}}$ qui est une application du même type. Il suffit donc de montrer qu'une telle application est continue. Soit $x \in X$. Si $V \in \mathcal{V}_{\lambda x + x_0}$, alors par continuité de l'addition, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{\lambda x}$ et $V_2 \in \mathcal{V}_{x_0}$ tels que $V_1 + V_2 \subseteq V$. La continuité de la multiplication par un scalaire donne un voisinage V_3 de x et un rayon $r > 0$ tels que $b(\lambda, r) \cdot V_3 \subseteq V_1$. Au total, si $y \in V_3$, on a $\lambda y + x_0 \in V_1 + V_2 \subseteq V$, c'est-à-dire $V_3 \subseteq f_{x_0, \lambda}^{-1}(V)$ et $f_{x_0, \lambda}^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$. ■

La proposition précédente a pour conséquence importante que la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par les voisinages de 0.

Corollaire 5.1.5 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique, $x_0 \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}_0$.

1. Une partie V de X est un voisinage de x_0 si et seulement si $V - x_0$ est un voisinage de 0. Autrement dit,

$$\mathcal{V}_{x_0} = \{x_0 + V : V \in \mathcal{V}_0\}.$$

2. Si $V \in \mathcal{V}_x$, alors $\lambda V \in \mathcal{V}_{\lambda x}$. En particulier, si $V \in \mathcal{V}_0$, alors $\lambda V \in \mathcal{V}_0$.

Ainsi, les ouverts d'un espace vectoriel topologique sont obtenus en translatant les ouverts contenant 0. On va donc dans la suite étudier les propriétés des voisinages de 0. Notons que l'on a déjà obtenu que toute homothétie d'un voisinage de 0 est aussi un voisinage de 0, ce qui donne une propriété de "stabilité" de $\mathcal{V}_0$.

Proposition 5.1.6 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et $U \in \mathcal{V}_0$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}_0$ tel que $V + V \subseteq U$.

Démonstration : Par continuité de l'addition en $(0, 0)$, il existe des voisinages V_1, V_2 de 0 tels que $V_1 + V_2 \subseteq U$. Il suffit alors de prendre $V = V_1 \cap V_2$. ■

Remarque 5.1.7 En procédant de proche en proche, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $U \in \mathcal{V}_0$, il existe $V \in \mathcal{V}_0$ tel que $\underbrace{V + \cdots + V}_{n \text{ fois}} \subseteq U$.

Afin de présenter quelques propriétés supplémentaires des voisinages de 0 d'un espace vectoriel topologique, nous allons introduire deux notions que des parties d'un espace vectoriel peuvent vérifier.

Définition 5.1.8 Une partie A d'un espace vectoriel X est *équilibrée* si $\lambda A \subseteq A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

En particulier, on obtient directement que si A est équilibré, alors $0 \in A$.

Exemple 5.1.9 Dans un espace normé, il est facile de voir que toute boule centrée en 0 est équilibrée.

Exemple 5.1.10 Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité centrée en $(1/2, 0)$ n'est pas équilibrée. En effet, il suffit de prendre $x = (1, 0)$ et $\lambda = -1$.

Exemple 5.1.11 Les polynômes forment un sous-ensemble équilibré de $C^0([0, 1])$. En effet, tout multiple d'un polynôme est encore un polynôme.

Proposition 5.1.12 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Si A est une partie équilibrée de X , alors $\overline{A}$ est également équilibré.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$. Comme A est équilibré, on a $\overline{\lambda A} \subseteq \overline{A}$ et comme la multiplication par λ est un homéomorphisme, on a directement que $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$. La conclusion s'ensuit. ■

Proposition 5.1.13 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, tout voisinage de 0 contient un voisinage de 0 équilibré et fermé.

Démonstration : Soit U un voisinage de $0 = 0 \cdot 0$. Par continuité de la multiplication par un scalaire, il existe un voisinage V de 0 et $\varepsilon > 0$ tels que

$$b(0, \varepsilon) \cdot V = \{\lambda x : x \in V, |\lambda| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Posons $W = b(0, \varepsilon) \cdot V$. Alors W est équilibré. De plus, on a $\frac{\varepsilon}{2}V \subseteq W$ et comme $\frac{\varepsilon}{2}V \in \mathcal{V}_0$, on trouve que $W \in \mathcal{V}_0$.

Par la Proposition 5.1.6, il existe $W_0 \in \mathcal{V}_0$ tel que $W_0 + W_0 \subseteq W$. Par la première partie, quitte à remplacer W_0 par un ensemble plus petit, on peut supposer que W_0 est équilibré. Pour conclure, montrons que $\overline{W_0} \subseteq U$, ce qui suffit par la Proposition 5.1.12. Soit $x \in \overline{W_0}$. Comme $x + W_0$ est un voisinage de x , on a $(x + W_0) \cap W_0 \neq \emptyset$. Il s'ensuit que $x \in W_0 - W_0 \subseteq W_0 + W_0 \subseteq U$ puisque W_0 est équilibré. ■

Définition 5.1.14 Une partie A d'un espace vectoriel X est *absorbante* si pour tout $x \in X$, il existe $C > 0$ tel que $x \in \lambda A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geq C$.

Exemple 5.1.15 Dans un espace normé, il est facile de voir que toute boule centrée en 0 est absorbante.

Exemple 5.1.16 Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité centrée en $(1/2, 0)$ est absorbante (puisqu'elle contient une boule centrée en 0).

Exemple 5.1.17 Les polynômes forment un sous-ensemble de $C^0([0, 1])$ qui n'est pas absorbant puisqu'on ne peut pas écrire toute fonction continue comme multiple d'un polynôme.

Proposition 5.1.18 *Si une partie A d'un espace vectoriel X est absorbante, alors son enveloppe linéaire est égale à X .*

Démonstration : Si $x \in X$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda A$ et il existe donc $y \in A$ tel que $x = \lambda y$. ■

Proposition 5.1.19 *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, alors tout voisinage de 0 est absorbant.*

Démonstration : Cela découle à nouveau de la continuité de la multiplication par un scalaire. Fixons $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}_0$. Comme $0 = 0 \cdot x$, il existe $W \in \mathcal{V}_x$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$b(0, \varepsilon) \cdot W \subseteq V.$$

En particulier, $\lambda x \in V$ pour tout $|\lambda| < \varepsilon$. Il suffit de prendre $C > \frac{1}{\varepsilon}$ pour conclure. ■

Au total, les Propositions 5.1.13 et 5.1.19 donnent directement le résultat suivant.

Proposition 5.1.20 *Tout espace vectoriel topologique possède une base de voisinages de 0 équilibrés, absorbants et fermés.*

Ce résultat et la Proposition 3.3.11 donnent le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.21 *Tout espace vectoriel topologique est régulier.*

Concernant l'axiome (T_2) , on a la caractérisation suivante.

Proposition 5.1.22 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace $(X, \mathcal{T})$ est séparé.*
2. *L'intersection des voisinages de 0 est le singleton $\{0\}$.*
3. *Le singleton $\{0\}$ est fermé.*

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. Comme l'espace est séparé, pour tout $x \neq 0$, il existe un voisinage V de 0 qui ne contient pas x et x n'appartient donc pas à l'intersection des voisinages de 0.

2. $\Rightarrow$ 3. Par la Proposition 5.1.20, l'intersection des voisinages de 0 peut s'écrire comme une intersection de fermés qui est donc fermée.

3. $\Rightarrow$ 1. Soient $x \neq y$. Alors $x - y \in X \setminus \{0\}$ et comme cet ensemble est ouvert, il existe un voisinage U équilibré de 0 tel que $x - y \in x - y + U \subseteq X \setminus \{0\}$. Par la Proposition 5.1.6, il existe

$V \in \mathcal{V}_0$ tel que $V + V \subseteq U$ et on peut supposer que V est équilibré par la Proposition 5.1.20. Alors, les ensembles $x + V$ et $y + V$ sont des voisinages de x et y respectivement et il reste à s'assurer que $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$. Supposons au contraire qu'il existe $z \in (x + V) \cap (y + V)$. Alors, on peut écrire $z = x + v = y + w$ avec $v, w \in V$ et on en tire que $y - x = v - w \in V - V \subseteq U$. Il s'ensuit que $0 \in x - y + U$, ce qui est impossible. ■

Dans ce cas, tous les singletons sont fermés par translation.

Exemple 5.1.23 Soit X un espace vectoriel muni de la topologie cofinie. Alors ce n'est pas un espace vectoriel topologique car il n'est pas séparé par l'Exemple 3.3.5, mais ses singletons sont fermés.

Proposition 5.1.24 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique et si Y est un sous-espace vectoriel de X , alors

1. $\overline{Y}$ est un sous-espace vectoriel de X .
2. $Y^\circ = \emptyset$ si $Y \neq X$.

Démonstration : 1. Soient $x, y \in \overline{Y}$ et V un voisinage de $x + y$. Alors, il existe $V_0 \in \mathcal{V}_0$ tel que $V = x + y + V_0$. Soit $U \in \mathcal{V}_0$ tel que $U + U \subseteq V_0$. Alors, $x + U \in \mathcal{V}_x$ et donc il existe $x_0 \in (x + U) \cap Y$. De même, il existe $y_0 \in (y + U) \cap Y$. En particulier, $x_0 + y_0 \in Y$ et $x_0 + y_0 \in (x + U) + (y + U) \subseteq x + y + V_0 = V$. On en tire que $V \cap Y \neq \emptyset$ et $x + y \in \overline{Y}$.

On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant la continuité de l'addition¹ pour montrer que $\overline{Y} + \overline{Y} \subseteq \overline{Y}$. En effet, puisque l'addition est continue, il est clair que $+(\overline{Y} \times \overline{Y}) \subseteq \overline{+(Y \times Y)} = \overline{Y + Y} = \overline{Y}$, où on a utilisé le fait que Y est un sous-espace vectoriel. Comme $\overline{Y} \times \overline{Y} = \overline{Y} \times \overline{Y}^2$, on obtient que

$$+(\overline{Y} \times \overline{Y}) \subseteq \overline{Y}.$$

On procède de même pour la multiplication par un scalaire.

2. Supposons qu'il existe $x \in Y^\circ$. Soit $V \in \mathcal{V}_0$ tel que $x + V \subseteq Y$. Comme Y est un sous-espace vectoriel, on a également $V \subseteq Y$. Comme V est un voisinage de 0, il est absorbant par la Proposition 5.1.19 et on en tire directement que $X = Y$. ■

Donnons à présent une caractérisation importante des applications linéaires continues entre espaces vectoriels topologiques.

Proposition 5.1.25 Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces vectoriels topologiques. Une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle est continue en 0.

Démonstration : Soit $x \in X$ tel que $x \neq 0$. Il suffit bien sûr de montrer que si T est continu en 0, alors T est continu en x . Soit U un voisinage de $T(x)$. Alors, il existe un voisinage V de 0 dans Y tel que $U = T(x) + V$ et comme T est une application linéaire, on a

$$x + T^{-1}(V) \subseteq T^{-1}(T(x) + V) = T^{-1}(U).$$

Par continuité de T en 0, on sait que $T^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 et il s'ensuit que $T^{-1}(U)$ est un voisinage de x . ■

1. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, alors pour tout $A \subseteq X$, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
 2. Exercice.

Par conséquent, pour montrer qu'une application linéaire T entre espaces vectoriels topologiques est continue, il suffit de montrer que l'image inverse de tout voisinage de 0 est encore un voisinage de 0 puisque $T(0) = 0$.

Terminons cette section avec un résultat concernant les formes linéaires. Si T est une forme linéaire continue sur un espace vectoriel topologique, il est clair que son noyau est fermé. De plus, la continuité implique que l'adhérence du noyau ne peut être égale à l'espace tout entier que si la forme est nulle. Nous montrons dans le résultat suivant que ces propriétés caractérisent la continuité de formes linéaires.

Proposition 5.1.26 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non-nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application T est continue.*
2. *Le noyau $\ker T$ de T est fermé.*
3. *Le noyau $\ker T$ de T n'est pas dense dans X .*
4. *Il existe un voisinage V de 0 dans X tel que $T(V)$ est borné.*

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. C'est évident car $\ker T = T^{-1}(\{0\})$ est l'image inverse d'un fermé par une application continue.

2. $\Rightarrow$ 3. Comme $\ker T$ est fermé et que T est non-nul, on ne peut pas avoir $\overline{\ker T} = X$.

3. $\Rightarrow$ 4. Comme le noyau de T n'est pas dense dans X , il existe $x \notin \overline{\ker T}$. Par conséquent, on peut trouver un voisinage équilibré V de 0 tel que $(x + V) \cap \ker T = \emptyset$. Supposons que $T(V)$ n'est pas borné. Alors, il existe $y \in V$ tel que $|T(y)| = |T(x)|$. Comme V est équilibré et T est linéaire, quitte à multiplier y par un scalaire de module 1, on peut supposer que $T(y) = -T(x)$, d'où $T(x + y) = 0$. Alors, $x + y \in (x + V) \cap \ker T$, d'où une contradiction.

4. $\Rightarrow$ 1. Supposons qu'il existe un voisinage V de 0 et $C > 0$ tels que $|T(x)| < C$ pour tout $x \in V$. Soit $r > 0$. Alors, on a $|T(x)| < r$ pour tout $x \in \frac{r}{C}V$. Cela suffit par la Proposition 5.1.25 puisque $\frac{r}{C}V \in \mathcal{V}_0$. ■

5.2 Sous-espaces, produits et quotients

Dans cette section, on s'intéresse aux constructions naturelles d'espaces vectoriels topologiques à partir d'anciens. Commençons naturellement par les sous-espaces.

Proposition 5.2.1 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et Y un sous-espace vectoriel de X . Muni de la topologie induite par X , Y est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration : Cela découle directement des Propositions 2.3.8 et 2.3.9. ■

La preuve dans le cas des espaces produits est également immédiate. Notons que l'on utilise l'addition et la multiplication par un scalaire définies composantes à composantes.

Proposition 5.2.2 *Soit $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, une famille d'espaces vectoriels topologiques. Alors l'espace vectoriel $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ muni de la topologie produit est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration : L'addition

$$+ : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \mapsto \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : (x, y) \mapsto x + y$$

est continue par la Proposition 2.4.12 puisque pour tout $\alpha \in A$, l'application $p_\alpha \circ + = +_\alpha \circ (p_\alpha, p_\alpha)$ est bien continue. On prouve de même que la multiplication par un scalaire sur le produit est continue. ■

Intéressons-nous à présent au cas des espaces quotients. Naturellement, on va s'intéresser aux relations d'équivalence données par les sous-espaces vectoriels, de manière à ce que l'espace quotient soit un espace vectoriel. Rappelons que si X est un espace vectoriel et si Y est un sous-espace vectoriel, alors la relation définie par

$$x \mathcal{R}_Y y \iff x - y \in Y$$

est une relation d'équivalence sur X . On note l'espace quotient correspondant X/Y et on le munit des opérations définies par

$$[x + z] = [x] + [z] \quad \text{et} \quad \lambda[x] = [\lambda x].$$

Montrons tout d'abord que la structure d'espace vectoriel topologique sur X assure que l'image de tout ouvert par l'application passage au quotient est un ouvert du quotient.

Lemme 5.2.3 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et Y un sous-espace vectoriel de X . Si on munit X/Y de la topologie quotient, l'application $\pi : X \rightarrow X/Y$ est ouverte.*

Démonstration : Soit ω un ouvert de X . Montrons que $\pi(\omega)$ est un ouvert de X/Y , c'est-à-dire par définition de la topologie quotient, que $\pi^{-1}(\pi(\omega)) \in \mathcal{T}$. Il suffit pour cela de remarquer que $\pi^{-1}(\pi(\omega)) = \{x \in X : \pi(x) \in \pi(\omega)\}$ est l'ensemble des points en relation avec des points de ω . Ainsi,

$$\pi^{-1}(\pi(\omega)) = \omega + Y = \bigcup_{y \in Y} (\omega + y)$$

qui est une union d'ouverts puisque $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique. ■

Proposition 5.2.4 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et Y un sous-espace vectoriel de X . Muni de la topologie quotient, l'espace X/Y est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration : Montrons que l'addition est continue. La preuve de la multiplication par un scalaire est semblable. Soit $U \subseteq X/Y$ un ouvert de X/Y contenant $[x + z]$. Par continuité de l'application passage au quotient π , on sait que $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X contenant $x + z$. La continuité de l'addition dans l'espace vectoriel topologique X donne des ouverts V_1 et V_2 de X contenant 0 tels que $(x + V_1) + (z + V_2) \subseteq \pi^{-1}(U)$. Par le Lemme 5.2.3, on sait que $\pi(x + V_1)$ et $\pi(z + V_2)$ sont des ouverts de X/Y contenant $[x]$ et $[z]$ respectivement. On conclut en remarquant que

$$+(\pi(x + V_1) \times \pi(z + V_2)) = \pi((x + V_1) + (z + V_2)) \subseteq \pi(\pi^{-1}(U)) \subseteq U.$$

■

Proposition 5.2.5 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et Y un sous-espace vectoriel de X . Alors X/Y est séparé si et seulement si Y est fermé dans X .

Démonstration : Par les Propositions 5.1.22 et 5.2.4, on sait que X/Y est séparé si et seulement si $\{[0]\}$ est fermé dans X/Y . Or, par définition de la topologie quotient, on a que $\{[0]\}$ est fermé si et seulement si $\pi^{-1}(X/Y \setminus \{[0]\})$ est ouvert dans X . On obtient la conclusion en remarquant que $\pi^{-1}(X/Y \setminus \{[0]\}) = X \setminus Y$. ■

Exemple 5.2.6 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique non-séparé. Alors $X/\overline{\{0\}}$ est un espace séparé. On l'appelle *l'espace séparé* de $(X, \mathcal{T})$. Si $(X, \mathcal{T})$ est séparé, alors il est homéomorphe à son séparé.

5.3 Espaces vectoriels topologiques de dimension finie

Dans cette dernière section, on étudie le cas particulier des espaces vectoriels topologiques de dimension finie. On sait que si X est de dimension finie n , alors il existe un isomorphisme entre X et $\mathbb{K}^n$. Si à présent on munit X d'une structure d'espace vectoriel topologique, il est donc naturel de se demander si l'isomorphisme est un homéomorphisme. On va montrer que c'est le cas lorsque l'on travaille avec des espaces séparés. En particulier, on obtient donc que tout espace vectoriel topologique séparé de dimension finie est localement compact. On montre dans un deuxième temps que la réciproque est également vraie.

Commençons par montrer que toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont continues. De manière générale, on a le résultat suivant.

Proposition 5.3.1 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Toute application linéaire $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ est continue.

Démonstration : Soit U un voisinage de 0 dans X . Alors, on sait qu'il existe un voisinage équilibré V de 0 tel que

$$\underbrace{V + \cdots + V}_{n \text{ fois}} \subseteq U.$$

En particulier, si $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, il existe une constante $c > 0$ telle que $T(e_j) \in cV$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ puisque V est absorbant. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a

$$T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(e_j) \in \sum_{j=1}^n x_j cV$$

où $x_1, \dots, x_n$ désignent les composantes de x dans la base canonique. Si $x \in b(0, \frac{1}{c})$, alors on a $|x_j c| < 1$ et donc $x_j cV \subseteq V$ et il s'ensuit que $T(b(0, \frac{1}{c})) \subseteq U$. La continuité en 0 est donc prouvée, ce qui suffit par la Proposition 5.1.25. ■

Proposition 5.3.2 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie n , alors $(X, \mathcal{T})$ est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ muni de la topologie euclidienne.

Démonstration : Considérons l'isomorphisme

$$T : \mathbb{K}^n \rightarrow X : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j b_j$$

où $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de X . Comme T est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans un espace vectoriel topologique, on sait par la Proposition 5.3.1 qu'elle est continue. Il suffit donc de montrer que l'application inverse

$$T^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x = \sum_{j=1}^n x_j b_j \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

est continue. Considérons l'ensemble compact $S = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = 1\}$. On sait que $T(S)$ est compact et puisque X est séparé, on obtient que $T(S)$ est fermé. En particulier, comme $0 \notin T(S)$ par bijectivité de T , il existe un voisinage V de 0 équilibré tel que $V \subseteq X \setminus T(S)$. Montrons que $T^{-1}(V) \subseteq b(0, 1)$. Si ce n'est pas le cas, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^n$ tel que $|\lambda| \geq 1$ et $T(\lambda) \in V$. Or, V est équilibré, ce qui implique donc que $T(S) \subseteq V$, d'où une contradiction. Il suffit à présent de remarquer que chaque forme linéaire

$$T_i^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K} : x = \sum_{j=1}^n x_j b_j \mapsto x_i$$

est continue par la Proposition 5.1.26 puisque $T_i^{-1}(V)$ est borné. Cela suffit pour obtenir la continuité de T^{-1} . ■

Par conséquent, la seule topologie sur $\mathbb{K}^n$ qui rend $\mathbb{K}^n$ séparé est la topologie euclidienne.

Proposition 5.3.3 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique séparé et Y un sous-espace vectoriel de X de dimension finie. Alors Y est fermé dans X .

Démonstration : On sait que Y muni de la topologie induite par $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie. Par conséquent, la Proposition 5.3.2 implique que Y est homéomorphe à K^n avec $n = \dim Y$. Soit $x \in X \setminus Y$. Soit W l'espace engendré par $Y \cup \{x\}$. Alors $\dim W = n + 1$ et W est homéomorphe à $\mathbb{K}^{n+1}$. Comme $\mathbb{K}^n$ est fermé dans $\mathbb{K}^{n+1}$, on en tire que Y est fermé dans W et donc il existe un fermé F de X tel que $Y = F \cap W$. Mais alors, on a aussi, $Y = F \cap Y$ et donc Y est un fermé de X . ■

Bien sûr, la topologie euclidienne est localement compacte puisque les boules fermées sont compactes. Ainsi, tout espace vectoriel topologique séparé de dimension finie est localement compact. Le résultat ci-dessous montre que la réciproque est vraie.

Théorème 5.3.4 (Riesz) Un espace vectoriel topologique séparé est localement compact si et seulement si il est de dimension finie.

Démonstration : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique séparé. Si X est de dimension finie n , alors par la Proposition 5.3.2 $(X, \mathcal{T})$ est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ et est donc localement compact.

Supposons à présent que $(X, \mathcal{T})$ est localement compact. Soit K un voisinage compact de 0. Puisque $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, on sait que $\frac{1}{2}K \in \mathcal{V}_0$. Pour tout $x \in K$, $x + \frac{1}{2}K$ est un voisinage de x et puisque

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} x + \frac{1}{2}K,$$

on peut trouver $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$K \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} + \frac{1}{2}K.$$

Soit Y le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_1, \dots, x_n\}$. Par la Proposition 5.3.3, on sait que Y est fermé dans X . Remarquons que

$$\frac{1}{2}K \subseteq \frac{1}{2}\{x_1, \dots, x_n\} + \frac{1}{4}K \subseteq Y + \frac{1}{4}K,$$

d'où

$$K \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} + Y + \frac{1}{4}K \subseteq Y + \frac{1}{4}K.$$

En procédant de la même manière, on a

$$\frac{1}{4}K \subseteq \frac{1}{4}\{x_1, \dots, x_n\} + \frac{1}{8}K$$

et donc

$$K \subseteq Y + \frac{1}{8}K.$$

En itérant, on trouve que

$$K \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} (Y + \frac{1}{2^m}K).$$

Montrons que si $x \in K$, alors $x \in \overline{Y}$. Par la Proposition 3.1.2, il suffit de trouver une suite de Y qui converge vers x . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on sait qu'il existe $x_m \in Y$ et $z_m \in K$ tel que $x = x_m + \frac{1}{2^m}z_m$. Montrons que $x_m \rightarrow x$. Comme $x - x_m = \frac{1}{2^m}z_m$, il suffit de montrer que $\frac{1}{2^m}z_m \rightarrow 0$ ³. Soit V un voisinage de 0 équilibré. Comme V est absorbant, on sait que

$$K \subseteq \bigcup_{c>0} cV$$

et il existe donc $c_1 < \dots < c_L$ tels que $K \subseteq c_1V \cup \dots \cup c_LV = c_LV$ puisque V est équilibré⁴. Par conséquent, $\frac{1}{2^m}z_m \in \frac{1}{2^m}c_LV \subseteq V$ pour tout m tel que $2^m > c_L$. Par conséquent, la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers x et donc $x \in \overline{Y}$. Ainsi, on a montré que $K \subseteq \overline{Y} = Y$ et comme K est absorbant, on conclut que $X = Y$. ■

3. Dans un espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{T})$, une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si la suite $(x_m - x)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Cela provient du fait que tout voisinage de x est un translaté d'un voisinage de 0.

4. On a montré que tout compact d'un espace vectoriel topologique est borné : Pour tout $V \in \mathcal{V}_0$, il existe $c > 0$ tel que $K \subseteq cV$.

Bibliographie

- [1] N. Bourbaki (1971) *Topologie générale*. Springer, Berlin.
- [2] M. De Wilde (1997), *Topologie générale, Notes de cours*. Université de Liège.
- [3] Jarchow H. (1981)c *Locally Convex Spaces*. Teubner, Stuttgart.
- [4] Köthe G. (1969) *Topological Vector Spaces 1*. Springer, Berlin.
- [5] P. Mathonet (2013-2014), *Topologie générale, Notes de cours*. Université de Liège.
- [6] Rudin, W. (1991) *Functional Analysis*. Second Edition, McGraw-Hill, Inc
- [7] Schmets, J. (2004 – 2005) *Analyse Fonctionnelle*. Notes de cours, Université de Liège.
- [8] S. Willard (1970), *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company.