

Une relativité institutionnelle des modèles de dérivée et d'intégrale à la source de difficultés d'apprentissage

Kevin BALHAN ¹

Hervé CAPS ²

ULiège

Centre de formation des enseignants
(CEFEN)

¹ Didactique des mathématiques

² Didactique de la physique

Kevin.Balhan@uliege.be

Herve.Caps@uliege.be

L'enseignement des sciences physique et mathématique porte d'entrée de jeu un regard conceptuel sur les savoirs, ce qui a tendance à laisser entendre qu'un savoir est unique et « figé ». Or, si l'on regarde les pratiques effectives des mathématiques en diverses institutions, un même savoir est étudié différemment par les individus de ces différentes institutions, parfois même les regards croisés peuvent être contradictoires. Des distorsions significatives apparaissent alors, voire une incompatibilité entre pratiques dans différentes institutions qui se rencontrent pourtant à certains moments. Il importe dès lors d'étudier ces pratiques : de quelles manières évoluent-elles dans le temps, quelles sont ces pratiques effectives dans ces différentes institutions, comment s'interpénètrent-elles en communiquant entre elles ou non ?

Les concepts de « dérivée » et d'« intégrale », entre autres, sont des savoirs mathématiques mobilisés dans les cours de physique et de mathématique, aux niveaux de l'école secondaire et de l'université, et invoqués à travers des notations telles $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ que et $\int_a^b f(x)dx$.

Du point de vue épistémologique, il s'agit avant tout de modèles standards de détermination de grandeurs, dont l'usage renvoie aux sens donnés par les communautés scientifiques qui les ont construits et qui les ont fait évoluer pour répondre à leurs projets et besoins scientifiques.

Le propos de notre article est de mettre en évidence une certaine relativité institutionnelle de ces modèles au sein des institutions de mathématiciens et de physiciens qui en font usage, ainsi que certaines difficultés d'apprentissage qui en découlent.

1. Modélisations physique et mathématique de vitesses et de position d'un mobile

Les acceptions du mot « modèle » sont nombreuses. Sans rendre compte de la multiplicité de positions scientifiques qui s'y rapportent, nous tâcherons néanmoins d'explicitier ce que nous entendrons par « modèle », qu'il soit mathématique ou physique.

En première approche, nous nous appuyons sur la schématisation que fait Chevallard (1989) du processus de modélisation entre deux registres d'entités « système » et « modèle » :

- Première étape : partant d'un système (mathématique ou non) que l'on souhaite étudier, on définit ce système en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système. Il s'agit à cette étape d'explicitier les variables que l'on prend en considération et par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît.
- Deuxième étape : on établit un certain nombre de relations entre ces variables, et l'ensemble de ces relations constituera notre modèle du système étudié.
- Troisième étape : le modèle ainsi construit est « travaillé » dans le but de produire des connaissances nouvelles entre les variables du système, autrement dit de nouvelles relations entre ces variables.

Chevallard (1989) donne l'exemple d'un pendule oscillant dans le champ de pesanteur pour lequel on s'intéresse à la période d'oscillation. Dans un premier temps, si les frottements sont négligeables et négligés, le physicien peut se convaincre que, dans ce système, la période T d'oscillation devrait pouvoir s'exprimer uniquement à partir des seules grandeurs caractéristiques du problème suivantes : le poids P , la masse M , la longueur L et l'angle A du pendule par rapport à la verticale. Dans un deuxième temps, sur la base d'outils généraux de la physique, il établit dès lors que la période doit être donnée par une égalité de la forme $T = M^x \cdot L^y \cdot P^z \cdot f(A)$.

Il obtient alors un système de trois relations :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$$

L'ensemble de ces quatre égalités, ainsi que l'égalité « générale » : $P = Mg$ dans laquelle g désigne l'intensité du champ de pesanteur, constituent un modèle du système étudié. Chevallard (1989) poursuit, en précisant qu'un travail mathématique élémentaire sur ce modèle conduit à la relation fondamentale $T = f(A) \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$ permettant à son tour de produire des connaissances nouvelles. En l'occurrence, celle selon laquelle « la période d'un pendule croît comme la racine carrée de sa longueur (d'où on pourra tirer par exemple que, pour

doubler la période d'un pendule, il faut quadrupler sa longueur) » (Chevallard, 1989, p. 54).

En prenant appui sur cette schématisation de Chevallard, nous désignerons par « modèle » d'un système, qu'il soit mathématique ou non, l'ensemble des relations établies entre les variables retenues pour définir le système étudié. Mais l'acception du mot « modèle », selon nous, peut être étendue à une technique de résolution de problèmes. La technique d'adégalité de Fermat en est à nos yeux un exemple emblématique. Nous l'illustrons ici lorsqu'il l'applique au problème d'optimisation suivant : « Soit à partager la droite AC en E , en sorte que $AE \times EC$ soit maximum » (Fermat, 1896, vol. 3, p. 122).

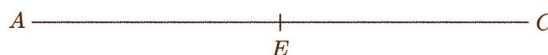


Fig. 1. Illustration du problème de partage de Fermat.

Pour résoudre ce problème, Fermat commence par définir les variables en jeu selon la perception qu'il a du système étudié. D'une part, il fixe la longueur b du segment $[AC]$. Il fixe également la longueur a (initiale) de l'un des deux segments $[AE]$ ou $[EC]$ indifféremment, ce qui fixe par conséquent la longueur $b - a$ de l'autre. D'autre part, Fermat introduit dans ce problème une idée de variation, perceptible dans l'ajout d'un accroissement de longueur e au segment initialement de longueur a . Ce dernier se voit alors attribuer une longueur $a + e$, affectant par conséquent la longueur du second : $b - a - e$.

Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b , le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. (Fermat, 1896, vol. 3, p. 122.)

Il établit ensuite une relation d'adégalité. Sur la base des relations : $ba - a^2$, le produit des longueurs a et $b - a$ des deux segments en jeu, et $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$, produit des longueurs $a + e$ et $b - (a + e)$ des segments impactés par la considération de cet accroissement de longueur e . Une relation d'adégalité est obtenue par Fermat à partir des deux premières, en référence aux faibles variations de e autour du maximum :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Cette relation subit ensuite une succession de simplifications algébriques aboutissant à une nouvelle relation entre les variables en jeu :

Il doit être adégalement au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Supprimant les termes communs : $be \approx 2ae + e^2$.

Divisant tous les termes : $b \approx 2a + e$.

(Fermat, 1896, vol. 3, p. 122.)

In fine, Fermat décide d'annuler l'accroissement e de longueur supposé sur le premier segment :

Supprimer le e : $b = 2a$. Pour résoudre le problème, il faut donc prendre la moitié de b . Il est impossible de donner une méthode plus générale. (Fermat, 1896, vol. 3, p. 122.)

En substance, Fermat étudie donc un système : le produit de deux grandeurs, représentées par des segments, mais qui pourraient également représenter d'autres grandeurs, éventuellement de natures différentes, comme une vitesse et un temps par exemple. À ces grandeurs sont associées des variables : a , b , e , qui en désignent les mesures. De sa perception qu'autour d'un maximum les variations de longueurs sont faibles, il établit alors une relation dite d'égalité entre ces variables en jeu : $ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Les manipulations algébriques et, *in fine*, l'annulation de l'accroissement de longueur qui s'ensuivent aboutissent alors à la connaissance de la plus grande valeur du produit des deux grandeurs étudié. Mais surtout, cette nouvelle technique devient un modèle de résolution de problèmes et d'étude de systèmes qui, à priori, sont étrangers les uns des autres. Comme le dit, lui-même Fermat :

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles ; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrions traiter ailleurs, si nous en avons le loisir. (Fermat, 1896, vol. 3, p. 123.)

Les connaissances nouvelles s'étendent dès lors au-delà du système premier étudié par Fermat. De notre point de vue, c'est bien ce qui est recherché par Fermat qui aurait pu se contenter de répondre au problème initial par une méthode déjà connue, puisque le produit des grandeurs étudiées met en jeu une fonction du second degré : $ba - a^2$. Le maximum est donc déterminé par l'axe de symétrie de la parabole. Mais Fermat choisit d'établir un nouveau modèle de résolution plus général, qui permet l'étude d'autres systèmes intra ou extra-mathématiques. En outre, il validera son modèle

d'adégalité en le mettant à l'épreuve sur un cas de détermination de tangentes à la parabole dont il connaît le résultat par ailleurs, ce dernier ayant été établi par les Grecs de l'Antiquité par d'autres voies.

2. D'une modélisation physique ou mathématique à une modélisation des savoirs

Cette méthode d'adégalité établie par Fermat est le premier « calcul infinitésimal » de l'histoire. Il sera développé par la suite par Newton et Leibniz, à qui échoit aujourd'hui sa paternité, pour résoudre quatre catégories majeures des problèmes de leur époque : détermination de tangentes à des courbes, détermination de grandeurs (en particulier de vitesses) instantanées, problèmes d'optimisation, et problèmes de quadratures¹.

Les trois premières sont résolues par une technique de « dérivation », la quatrième par une technique d'« intégration ». Mais surtout Leibniz établira le lien de réciprocité entre ces processus de calculs fédérant ainsi tous ces problèmes autour de leur calcul infinitésimal. Toutefois, Newton et Leibniz établissent chacun leur propre version du calcul infinitésimal. De son côté, Newton fonde son calcul d'origine cinématique sur les concepts de *fluente* et de *fluxion*, qu'il note respectivement x et $\dot{x}$. Le premier renvoie à une grandeur qui évolue dans le temps, le second correspond à notre vitesse mécanique, il renvoie au taux d'écoulement de la *fluente* dans le temps. À un second stade de son œuvre, Newton privilégie son concept d'*ultima ratio*. Ce dernier est le rapport de deux *fluxions*, $\dot{x}$ et $\dot{y}$, par exemple : $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Il est anachroniquement, chez Newton, l'« homologue » de notre dérivée actuelle. Leibniz conçoit, de son côté, un nouveau calcul faisant intervenir des variations « infinitésimales » dx , $dy...$, de grandeurs x , $y...$. C'est finalement le symbolisme de Leibniz qui finira par s'imposer en raison de l'efficacité de ses usages. Son instrumentalité est établie par Leibniz lorsqu'il ramène le problème des quadratures au « problème inverse » des tangentes² ; en d'autres termes, il s'agit de ramener le problème du calcul d'aires sous une courbe à un problème de construction d'une courbe à partir de ses tangentes (fig. 2). Aujourd'hui, on dirait que Leibniz construit une fonction primitive dont

les ordonnées déterminent les aires sous la représentation graphique d'une fonction donnée. En substance, une facette de l'instrumentalité de son formalisme qui s'appuie sur une construction géométrique imaginée par Leibniz consiste en une succession de manipulations exprimées en un sens ou l'autre par les doubles flèches ci-dessous :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{z}{a} \leftrightarrow a dx = z dy \leftrightarrow ax = \int z dy$$

La première égalité, appelée « loi des tangentes »

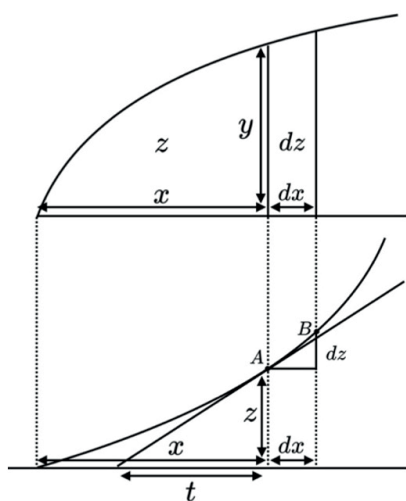


Fig. 2. « Mouvement » imaginé par Leibniz pour construire une fonction z déterminant les aires sous la courbe y .

par Leibniz, met en jeu un rapport de deux infinitésimaux : dx et dy , désignant respectivement des accroissements d'abscisse et d'ordonnée. Ce rapport détermine, de fait, les pentes des tangentes de la courbe quadratrice à construire. La deuxième égalité est déduite algébriquement de la première par une « manipulation » du quotient $\frac{dx}{dy}$, le second membre de l'égalité $z dy$, désignant un accroissement d'aire infinitésimal (sous la courbe première) assimilé à un rectangle. La somme de toutes ces aires infinitésimales donne l'aire totale $\int z dy$ sous la courbe. Dans un premier temps du moins, car une fois ces « équivalences » établies par manipulation algébrique, l'équivalence entre la première égalité et la troisième met en évidence le lien de réciprocity entre les processus de dérivation — avec lequel Leibniz traite les problèmes de détermination de tangentes — et d'intégration — avec lequel il traitera dorénavant les problèmes d'aires.

Toutefois, malgré l'efficacité des calculs infinitésimaux conçus par Newton et Leibniz, des doutes sur leur validité demeurent. Ceux-ci étaient d'ailleurs

déjà présents à la suite du calcul infinitésimal de Fermat. On y annule, en effet, l'accroissement e en fin de course alors qu'on divise par cet accroissement à la ligne précédente, comme nous l'avons vu *supra*. Quel que soit le calcul infinitésimal utilisé, on lui reproche le double statut des infinitésimaux en jeu, tantôt nuls tantôt non nuls.

Ce problème de fondement du calcul infinitésimal sera résolu par la suite par deux institutions³ différentes qui déboucheront *in fine* sur deux disciplines distinctes : l'analyse standard et l'analyse non-standard. Ces deux disciplines possèdent deux architectures déductives distinctes : la première prend appui sur la notion de limite à la suite des travaux de Cauchy⁴ et Weierstrass⁵, entre autres ; la seconde se fonde déductivement sur la notion d'infinitésimal suite aux travaux de Robinson⁶. Des institutions distinctes peuvent donc apporter des réponses différentes à un même problème.

Cette relativité institutionnelle des savoirs conduit Chevallard (1999) à poser un regard anthropologique sur ces derniers, qu'il modélise en termes de *praxéologie* à situer au sein d'une institution donnée. Cette modélisation cherche alors à rendre compte des pratiques mathématiques, ainsi que des discours qui légitiment ces pratiques. C'est à ce couple indissociable entre « pratique » et « discours sur cette pratique » que l'étymologie du terme « praxéologie » renvoie : la « *praxis* » et le « *logos* ». Dans le bloc *praxis*, on étudie les techniques établies par les mathématiciens pour accomplir les tâches qu'ils se sont fixées. Ces techniques sont outillées par une manipulation de symboles propres aux mathématiques. Le *logos*, quant à lui, concerne le discours sur la *praxis*. Il peut prendre la forme d'un discours sur la technique — une « technologie » comme le nomme Chevallard — ou d'une « théorie ». Quelle que soit cette forme, le *logos* justifie la technique choisie pour réaliser les tâches que l'on s'est fixées ; il doit également la rendre intelligible, voire favoriser la production de techniques plus performantes.

En outre, les techniques sont à jauger à l'aune d'une dialectique entre ostensifs et non-ostensifs ; les ostensifs étant des objets qui possèdent une certaine « matérialité » et qui peuvent être appréhendés par nos sens : des symboles, ou encore des graphiques, par exemple ; et à ces ostensifs sont associés des non-ostensifs qui sont les concepts mathématiques eux-mêmes.

3. Les ostensifs comme modèles instrumentaux de savoirs

Au sein de ces praxéologies, ces ostensifs deviennent à leur tour des modèles mathématiques ou physiques, dont la spécificité est d'être manipulables selon certaines règles d'usage que les non-ostensifs associés autorisent ou non. Chevallard (1999) leur associe deux valences : l'une dite sémiotique, jaugée sur sa capacité à produire du sens ; l'autre dite instrumentale, jaugée sur sa capacité à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques et théoriques. Toutefois, ces deux valences associées à un même ostensif ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Elles sont comme les deux faces d'une même pièce et ne peuvent être séparées. Elles doivent donc toutes deux être jugées en mettant en perspective les techniques, technologies et théories dans lesquelles elles sont mobilisées. Bosch et Chevallard (1999) expriment la relation qui lie les valences d'un ostensif en prenant l'exemple de la notation leibnizienne de la dérivée :

On constate ainsi que la valence sémiotique d'un ostensif fonctionne en étroite relation avec sa valence instrumentale : dans un cas on peut ainsi manipuler $\frac{dy}{dx}$ comme un quotient, dans l'autre il apparaît comme un tout figé, inerte. La complexe dialectique de l'instrumental et du sémiotique conduit ainsi à différents cas de figure. L'ostensif peut notamment perdre son instrumentalité en perdant sa sémiotité, par exemple parce que les techniques de manipulation qui le rendaient opératoire ont cessé d'être intelligibles et justifiables. En sens inverse, l'ostensif peut acquérir une plus grande instrumentalité par le fait d'un travail technologique ou théorique qui permet de légitimer et de contrôler de nouveaux usages techniques. Pour le dire autrement, dans un cas l'emploi de l'ostensif se trouve « privé de sens » du fait de l'obsolescence des technologies associées aux techniques qui le mobilisaient jusque-là, tandis que, dans un autre cas, de nouvelles technologies pourront venir « (re)créer du sens » en justifiant cet emploi. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 26.)

Dans l'institution du calcul infinitésimal établi par Leibniz, l'ostensif $\frac{dy}{dx}$ est un quotient d'infinitésimaux dy et dx . Toutefois, comme mentionné *supra*, leur double statut n'est pas légitimé au sein de cette institution. Ils n'auront dès lors plus droit de cité dans l'institution de l'analyse standard. En perdant leur sémiotité acquise dans le calcul infinitésimal de Leibniz, le « quotient » $\frac{dy}{dx}$ n'en est désormais plus un, et perd par conséquent l'instrumentalité qui lui était liée. Il sera à partir de là à considérer comme un « tout » figé, défini par le biais du concept de limite :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ou, formulé dans le formalisme de Weierstrass :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : |\Delta x| < \eta \Rightarrow \left| f'(a) - \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| < \varepsilon.$$

C'est ce concept de limite qui va forger l'édifice théorique de l'analyse standard, où l'implication en jeu est insécable : $\forall \varepsilon > 0 : \left| f'(a) - \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| < \varepsilon$ signifierait simplement que $f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (ce qui est faux), et qu'il existe un réel η supérieur au réel Δx , ce qui, certes, n'est pas faux, mais ne rend pas compte pour autant de ce que l'on veut exprimer. Cependant, une autre institution peut advenir et recréer du sens aux infinitésimaux dx , dy , et justifierait l'emploi de l'ostensif $\frac{dy}{dx}$ comme quotient d'infinitésimaux. C'est le cas de l'analyse non-standard aujourd'hui, dans laquelle ces infinitésimaux sont définis comme des « hyper réels » ; la construction de ces derniers étant le coût à payer pour fonder l'analyse sur le socle des infinitésimaux.

Une justification d'un autre niveau de rationalité que celui d'une théorie mathématique peut également dicter le sens et l'instrumentalité des modèles des savoirs. Une nouvelle technologie par exemple peut, de la même manière, rendre obsolètes le sens et l'instrumentalité d'un ostensif. C'est le cas de l'ostensif $\int y dx$ de Leibniz, désignant dans un premier temps une somme infinie d'aires infinitésimales « $y \cdot dx$ ». Puis, une fois le lien de réciprocity $\frac{dx}{dy} = \frac{z}{a} \leftrightarrow ax = \int z dy$ établi par Leibniz dans une dialectique entre problème des tangentes et calcul d'aire, Leibniz remplace le calcul laborieux de somme d'infinitésimaux par un calcul de primitive sur la « fonction » y en jeu. Le « dx », présent dans la notation $\int y dx$ ne trouve alors a priori plus de raisons d'être. Mais Leibniz conservera la même notation en dépit du changement de nature des symboles en jeu ; en outre, il nous met en garde contre les dangers liés à l'omission du dx dans ses notations : « J'avertis qu'on prenne garde de ne pas omettre dx ... faute fréquemment commise, et qui empêche d'aller de l'avant, du fait qu'on ôte par là à ces indivisibles, comme ici dx , leur généralité... de laquelle naissent d'innombrables transfigurations et équipollence de figures » (Leibniz cité par Chilov, 1973, p. 258).

Le lecteur désireux de rentrer dans les détails pourra se référer à Balhan (2016) ; en substance, la méthode des indivisibles renvoie à une technique de calcul d'aires et de volumes qui précède le calcul intégral, et la « transfiguration » de figures évoquée par Leibniz préfigure la technique de primitivation par changement de variable. Ce qui nous prémunit aujourd'hui des fautes évoquées par Leibniz est un théorème de changement de variable, tandis qu'à son époque c'est bien l'instrumentalité algébrique de l'écriture quotient $\frac{dy}{dx}$ qui joue ce rôle de garde-fou, et, par là, justifie et légitime son usage.

De même, malgré l'ambiguïté conceptuelle créée, certaines institutions ne se privent pas de considérer la notation leibnizienne de la dérivée comme un quotient. Les raisons de cette pratique sont liées aux projets que se donnent ces institutions et à leurs besoins, certaines institutions privilégiant l'efficacité des techniques à la recherche de fondements théoriques. C'est ce que montrent les propos suivants de Rogalski (2006) portant sur la distinction entre les procédures d'accroissements différentiels dans l'institution des physiciens et celle des mathématiciens :

- la procédure physique de l'accroissement différentiel (PPAD), où les ressorts sont l'intuition physique de ce qui est négligeable, la simplicité maximum de la modélisation, le prix à payer en termes de calculs le plus bas possible, et la cohérence entre les hypothèses et les conséquences qu'on en tire;
- la procédure mathématique de l'accroissement différentiel (PMAD), où l'objectif est de prouver que l'erreur commise est bien négligeable, ou de prouver que le quotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ a bien une limite quand Δx tend vers 0, et où il n'est pas question de justifier une hypothèse par ses conclusions, mais de la prouver *a priori*. (Rogalski, 2006, p. 7.)

La pratique des physiciens est alors justifiée par une technologie différente de celle des mathématiciens. En effet, la démarche du physicien « [...] correspond à son champ spécifique d'étude, et bien sûr son intuition s'appuie aussi sur tout un réseau antérieur de cohérences entre hypothèses de modélisation et résultats expérimentaux. Les mathématiciens doivent prendre acte que la procédure de l'accroissement différentiel, dans la modélisation par équations différentielles, est extrêmement fertile en physique, même si elle ne correspond pas aux canons mathématiques » (Rogalski, 2006, p. 7).

4. Une non-communication entre institutions source d'obstacles d'apprentissage

Les ostensifs leibniziens et les techniques qu'ils permettent rencontrent donc des succès inégaux dans les diverses institutions où l'on en fait usage, et ce, indépendamment du niveau d'étude auquel nos étudiants les rencontrent. Certains sont tentés d'attribuer aux ostensifs leibniziens une grande valence instrumentale en raison du cumul des nombreuses techniques dans lesquelles ils sont mobilisés. Celles-ci se montrant, de plus, robustes et fiables dans l'accomplissement de tâches données : intégration par changement de variables, dérivation

des fonctions composées ou réciproques, résolution d'équations différentielles à variables séparées, procédure d'accroissement différentiel... D'autres, malgré cette grande valence instrumentale *a priori*, bannissent leur usage, y compris dans l'institution scolaire. Bosch et Chevallard (1999) attribuent cette défection des techniques instrumentalisées par les ostensifs leibniziens à un interdit mathématique faute d'une praxéologie dans laquelle la technique se trouverait justifiée dans un cadre technologico-théorique approprié.

Mais la non-communication entre ces différentes institutions engendre des conceptions qui se heurtent et conduisent à des obstacles d'apprentissages chez nos élèves et étudiants. Sur la base d'un débat entre étudiants ayant eu lieu sur un forum internet de mathématiques du collège et lycée, Krysinska (2014) identifie et analyse différentes conceptions des élèves, difficilement compatibles, associées aux ostensifs leibniziens. Cette chercheuse montre que certains étudiants conçoivent la notation leibnizienne $\frac{df}{dx}$ de la dérivée comme un tout indissociable — la limite d'un taux de variation — et doutent de la légitimité de cette notation s'apparentant à un calcul sur les nombres. D'un autre côté, certains étudiants n'hésitent pas à l'interpréter, eux, comme l'ostensif le suggère : une fraction. Parmi ceux-là, tous ne conçoivent pas les numérateurs et dénominateurs en jeu de la même manière. Certains parlent d'applications linéaires sans plus de précisions ou utilisent l'ostensif $df : a \rightarrow L$ pour la désigner, suggérant la différentielle comme une fonction de la variable indépendante x et de celle-ci uniquement. D'autres la voient comme une fonction n'étant pas à valeurs réelles. D'autres encore n'interprètent pas df comme une différentielle, mais comme une toute petite variation de f qu'ils décrivent par cette interprétation erronée d'un incrément de la variable : $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) - f(a)$. Ce conflit et certaines de ces conceptions seraient en partie dus à l'équivalence $f'(a) = \frac{df}{dx} \Leftrightarrow df(x) = f' \cdot dx$, laissant penser que celle-ci est de nature algébrique.

D'autre part, ces conceptions sont également la manifestation de l'obstacle empiriste étudié par Schneider (1988). Celui-ci résulte d'un manque de distanciation entre le système étudié, qu'il soit intra ou extra-mathématique, et sa modélisation mathématique. Cet obstacle est si résistant que futurs enseignants, enseignants, auteurs de manuels et/ou de programmes scolaires et inspecteurs en sont eux-mêmes victimes. Pour n'en citer que quelques exemples :

- De futurs enseignants, des enseignants et des auteurs de programmes scolaires définissent l'intégrale comme une somme infinie d'éléments de mesure nulle. L'aire sous une courbe

y est donc conceptualisée à la manière d'une série, et non comme la limite d'une suite de sommes finies d'aires de rectangles (Schneider, 1988; Balhan, 2016).

- « dx » est défini par les futurs enseignants et des auteurs de manuels scolaires de la manière suivante : $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$; autrement dit : $dx = 0$. Cette conception erronée résulte de contextes de calculs d'aires sous des courbes : « les rectangles devenant de plus en plus nombreux et de plus en plus fins », comme ils disent, en passant à la limite. (Balhan, 2016).
- À un niveau déductif, de futurs enseignants et enseignants définissent la limite d'une variable « $x \rightarrow a$ », scindant ainsi l'implication définissant la limite d'une fonction, de la manière suivante : $\forall \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon$, inconscients que cette définition proposée signifie tout simplement que $x = a$. La raison de ce choix est de nature didactique, ces enseignants souhaitant simplifier la définition de limite pour les élèves en ne gérant dans un premier temps qu'un seul quantificateur plutôt que deux (Job, 2011).
- « dx » et « dy » sont pensés de manière autonome, indépendamment l'un de l'autre, à la manière de « variables temporelles » (Schneider, 1988; Krynska & Schneider, 2011), ce qui conduit ainsi les élèves dans une impasse en certaines situations : comme l'impossibilité de déterminer la pente d'une tangente à une courbe, « dx » et « dy » devenant nuls « chacun de leur côté » en passant à la limite, au lieu de considérer la limite du quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Schneider, 1988).

Conclusion

Qu'ils soient d'ordre extra-mathématique ou intra-mathématique, les processus de modélisation des savoirs, les modèles qui en découlent, ainsi que les pratiques qui leur sont attachées, ne sont pas uniques mais propres aux institutions qui les mobilisent et en font usage. Ils dépendent en outre des projets et des besoins de ces institutions, et il serait dès lors vain de s'efforcer de conformer les pratiques des uns aux pratiques des autres. Toutefois, ces diverses pratiques se croisent au sein des cursus scolaires et universitaires, tantôt interdites en certaines institutions, tantôt utilisées par d'autres sans que les raisons de ces interdictions ne soient mises à plat. Au cœur de ces pratiques, constitutifs des modèles mathématiques eux-mêmes, se trouvent les ostensifs dont la sémiotique et l'instrumentalité sont intimement liées et « changent » d'une institution à l'autre, laissant libre cours aux erreurs, ainsi qu'à de multiples interprétations et conceptions erronées. Lever ces difficultés supposerait à minima

une articulation entre un travail de modélisation extra-mathématique et un travail de modélisation intra-mathématique, trop souvent négligé, dans la lignée des praxéologies « modélisation » et « déduction » au sens donné par Schneider (2008).

Bibliographie

- Balhan, K. (2016). *Le Théorème fondamental comme pierre de touche de l'enseignement et de l'apprentissage de l'analyse au secondaire* (thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), 77–123.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, 2^e partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit X*, 45–75.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–265.
- Chilov, G. (1973). *Fonctions d'une variable*, 1^{re} et 2^e parties. Moscou : Mir.
- Fermat, P. (1896). *Œuvres de Fermat* (publiées par les soins de P. Tannery et C. Henry), vol. 3. Paris : Gauthier-Villars et fils.
- Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques* (thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique.
- Krynska, M. (2014). Peut-on manipuler les notations de Leibniz en toute rigueur ? *Repères IREM*, 95, 23–47.
- Krynska, M. & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Liège : Presses universitaires de Liège.
- Rogalski, M. (2006). Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères IREM*, 64, 27–48.
- Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives* (thèse de doctorat). Université Catholique de Louvain, Belgique.
- Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques*. Liège : Les Éditions de l'Université de Liège.

Notes

- 1 Il s'agit à l'origine de construire un carré de même aire qu'une surface donnée.
- 2 Le lecteur intéressé pourra se référer à Balhan (2016) pour en connaître les détails.
- 3 Le terme d'institution n'est pas à prendre au sens classique du terme qui serait utilisé pour désigner une institution reconnue comme telle dans la société, mais plutôt comme un ensemble de personnes étant censées avoir un même rapport à un objet donné.
- 4 Augustin Louis Cauchy (1789–1857), mathématicien français.
- 5 Karl Weierstrass (1815–1897), mathématicien allemand.
- 6 Abraham Robinson (1918–1974), mathématicien américain.
- 7 En mathématique, on privilégiera plutôt l'écriture suivante :
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : |x - a| < \eta \Rightarrow \left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{x-a} \right| < \varepsilon,$$
les notions de « variable » et, à fortiori, d'« accroissement de variable » n'étant pas définies en analyse.