

94213

ÉTUDE THÉORIQUE
DE LA
RÉPARTITION ÉNERGÉTIQUE
AU SEIN DU HALO DE 22°

PAR

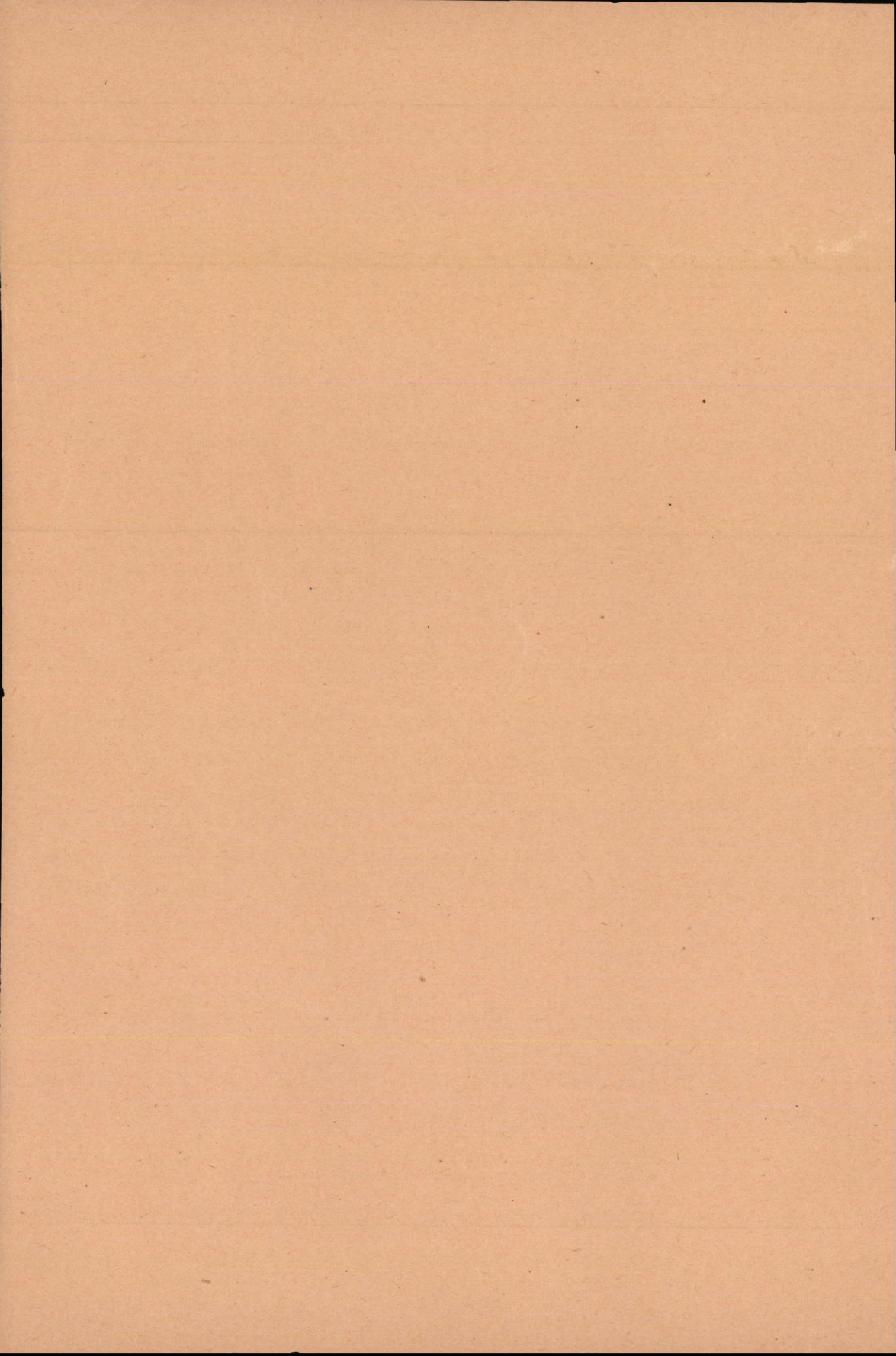
H. SAUVENIER

LICENCIÉ EN SCIENCES MATHÉMATIQUES,
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES,
ASSISTANT À L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.
LAURÉAT DU PRIX SCIENTIFIQUE INTERFACULTAIRE LOUIS EMPAIN.

EXTRAIT DES MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE
4^e SÉRIE, TOME VIII, 1948

BRUXELLES
M. HAYEZ. IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

—
1949



ÉTUDE THÉORIQUE
DE LA
RÉPARTITION ÉNERGÉTIQUE
AU SEIN DU HALO DE 22°

PAR

H. SAUVENIER

LICENCIÉ EN SCIENCES MATHÉMATIQUES,
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES,
ASSISTANT À L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.
LAURÉAT DU PRIX SCIENTIFIQUE INTERFACULTAIRE LOUIS EMPAIN.

EXTRAIT DES MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE
4^e SÉRIE, TOME VIII, 1948

BRUXELLES

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

—
1949

PRELIMINAIRES.

Les différentes réflexions ou réfractions sur ou à travers les faces planes des cristaux de glace contenus dans les cirrostratus et certains cirrus donnent lieu aux phénomènes connus sous le nom de « Halos ». On observe le plus souvent les « halos de 22° et de 46° » constitués par des anneaux jointifs, colorés aux

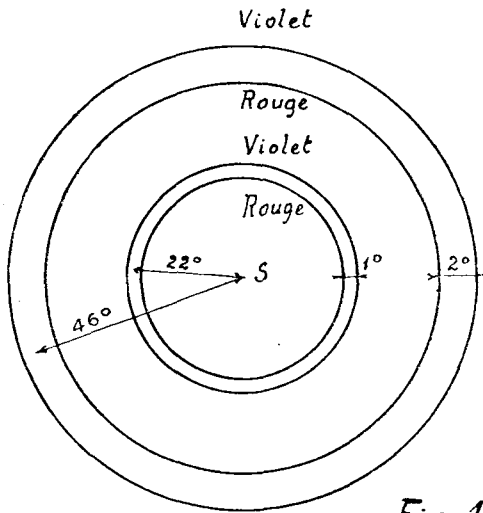


Fig. 1.

couleurs du prisme, centrés sur le soleil ou la lune. Ils semblent être tracés sur des cônes de $2 \times 22^\circ$ — ou $2 \times 46^\circ$ — d'ouverture, dont l'axe est la droite observateur-centre de l'astre. Leur largeur vaut environ $1/20$ du rayon (fig. 1).

Coulomb et Loisel ⁽¹⁾ décrivent le halo de **22°** de la façon suivante :

« Le bord interne, seul tranché, est teinté de roux, auquel succèdent du jaune, puis un blanc légèrement violacé qui s'estompe progressivement. A l'intérieur, le ciel paraît relativement sombre. »

Quant au halo de **46°**, il se présente comme le halo de **22°**. Mais son intensité est beaucoup plus faible, au point que, sous nos latitudes, il est rarement observable.

Le but de ce travail est d'étudier la répartition spectrale de l'énergie au sein du halo de **22°** et d'expliquer, par suite, l'apparence colorée du phénomène.

(1) COULOMB et LOISEL, *La Physique des Nuages*

ÉTUDE THÉORIQUE
DE LA
RÉPARTITION ÉNERGÉTIQUE
AU SEIN DU HALO DE 22°

CHAPITRE PREMIER.

Trajet de la lumière dans la section droite d'un prisme hexagonal, équiangle, homogène, présentant, par rapport à l'air et pour une longueur d'onde déterminée, les indices de réfraction n_o et n_e .

1. RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS D'OPTIQUE CRISTALLINE. — La glace cristallise dans le système hexagonal. Les cristaux de ce système sont biréfringents uniaxes. Ils présentent, par rapport à chaque longueur d'onde, deux indices de réfraction; l'un, l'indice ordinaire n_o , suit les lois de Descartes; l'autre, l'indice extraordinaire n_e , n'obéit à ces lois que dans un cas bien déterminé : celui où la lame cristalline dans laquelle s'opère la réfraction est taillée parallèlement à l'axe de symétrie, le plan d'incidence étant perpendiculaire à l'axe.

Ci-après les valeurs des indices pour quelques longueurs d'onde réparties dans le visible.

Les vibrations ordinaire et extraordinaire sont polarisées dans des plans différents, rectangulaires entre

eux. La vibration ordinaire est perpendiculaire à l'axe. Si le milieu est également transparent pour les deux rayons et si la lumière incidente n'est pas polarisée, les rayons ordinaire et extraordinaire ont la même intensité.

λ en Å	n_o	n_e	Couleur
4047	1,31844	1,31994	Violet
4861	1,31335	1,31473	Bleu
5350	1,31098	1,31242	Vert
5893	1,30911	1,31041	Orangé
6563	1,30715	1,30861	Rouge
6907	1,30665	1,30794	Rouge

2. DÉTERMINATION DU PLAN DU PHÉNOMÈNE. — Nous allons montrer que, seuls, les rayons incidents se trouvant dans un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie peuvent donner lieu à un phénomène coloré.

Soit AN la normale à une face d'un prisme en un point A de cette face.

Considérons d'abord un plan d'incidence ω_1 , perpendiculaire à l'axe optique et passant par A. Un rayon incident donne lieu à 2 rayons réfractés qui obéissent tous deux aux lois de Descartes. Les indices de réfraction n_o et n_e sont indépendants de l'angle d'incidence.

Considérons ensuite un plan d'incidence ω_2 , passant par A et parallèle à l'axe optique. Ce plan constitue donc une section principale du cristal. Un rayon incident donne encore lieu à 2 rayons réfractés. Mais le rayon extraordinaire ne suit plus les lois de Descartes. L'indice extraordinaire dépend de l'angle

d'incidence et peut prendre toutes les valeurs entre n_0 et n_e .

Pour tout plan ω_3 passant par A N et compris entre les deux plans particuliers considérés ci-dessus, le cristal possède encore deux indices de réfraction. Ici aussi, l'indice extraordinaire varie avec l'angle d'incidence et est compris entre n_0 et n_e .

Les prismes de glace sont rencontrés par les rayons solaires sous une incidence quelconque. Pour chaque prisme, on se trouve donc dans l'un ou l'autre des cas précédents. Chaque cristal fournit un phénomène coloré. Mais la superposition, dans l'œil de l'observateur, de ces spectres incohérents donne la sensation du blanc. Ce n'est que pour des incidences voisines de ω_1 , où les indices de réfraction sont indépendants de l'angle d'incidence, que l'on peut espérer observer un phénomène coloré. Dans ce cas, la face d'incidence est parallèle à l'axe de symétrie du cristal; le plan d'incidence est perpendiculaire à cet axe. Nous nous trouvons donc dans les conditions du paragraphe 1 où les indices n_0 et n_e sont bien déterminés et où, par suite, les lois de Descartes sont applicables.

3. La section droite d'un cristal de glace est un hexagone équiangle dont les côtés ne sont cependant pas égaux. Numérotons les côtés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 2).

a) I. — Il peut se faire qu'un rayon monochromatique AB tombant sur la face 1, sous l'incidence i , se réfléchisse totalement sur la face 2 et sorte par la face 3, dévié d'un angle

$$d = 2i - 60^\circ. \quad (1)$$

II. — Il peut aussi se faire que ce rayon ne ren-

contre pas la face 2, mais sorte par la face 3, sous l'angle d'émergence i' ; il est alors dévié de

$$\alpha = i + i' - 60^\circ. \quad (2)$$

b) Supposons que AB se compose de plusieurs radiations. On n'observera une dispersion que dans le cas II, puisque l'indice de réfraction n'intervient que dans (2).

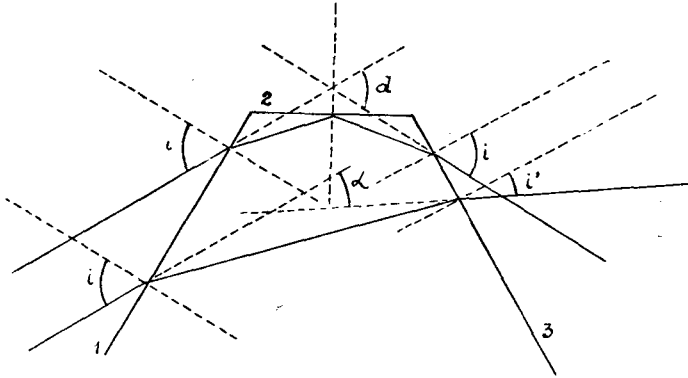


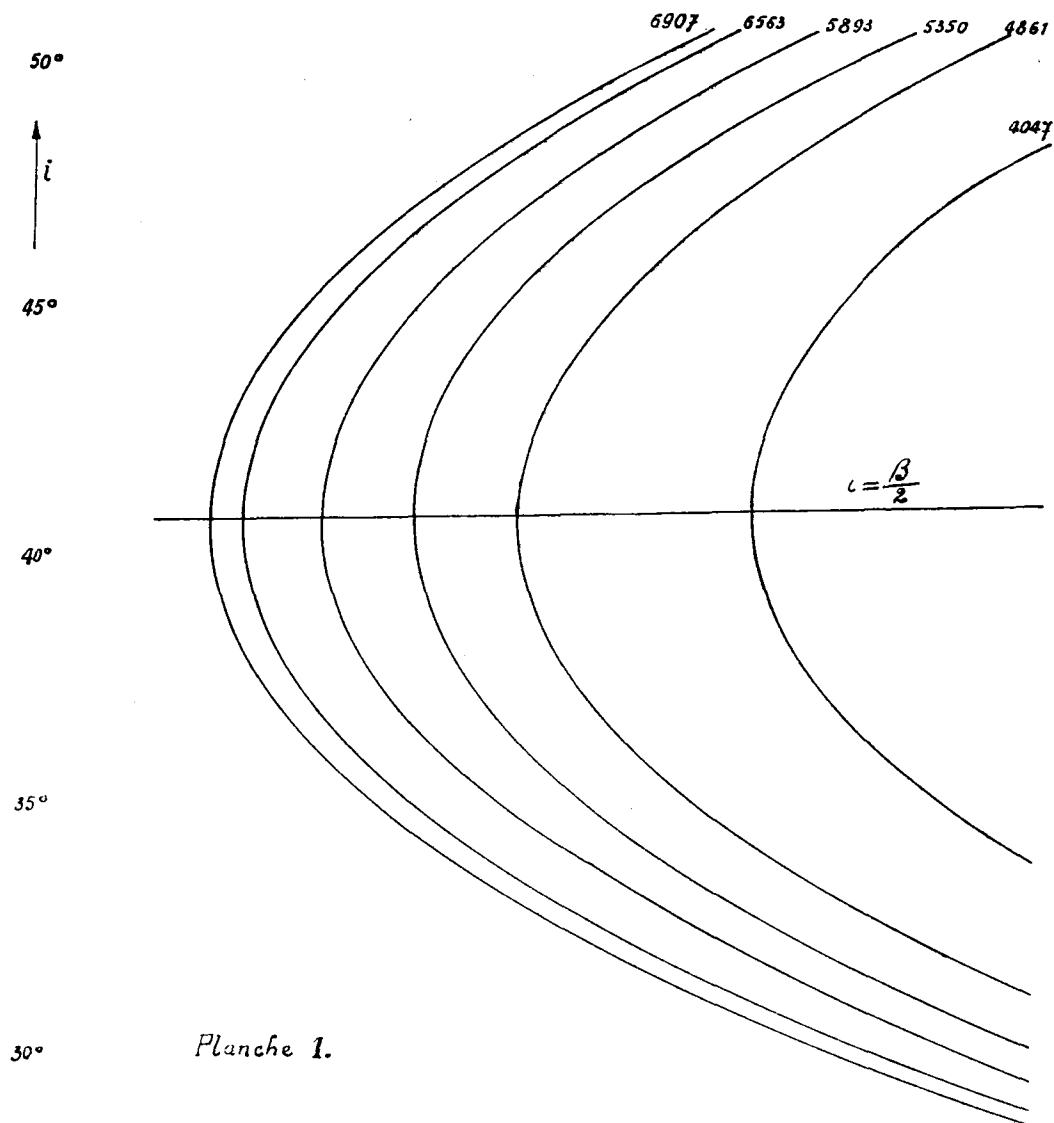
Fig. 2.

c) Considérons un champ de prismes éclairés par une source non ponctuelle, mais de diamètre apparent faible. Dans un angle de $1'$ (angle minimum sous lequel l'œil distingue deux objets), on trouvera des prismes répondant aux cas I et II. Dans un angle de $1'$ l'observateur verra donc deux séries d'images qu'il ne pourra d'ailleurs distinguer l'une de l'autre : la première, provenant des prismes de 120° (cas I), a la couleur de la source; la seconde, provenant des prismes de 60° (cas II), est irisée. Il en résulte que les différentes couleurs émergeant des prismes de cette dernière série seront

constamment « lavées » par la lumière provenant des prismes de la première série et par suite apparaîtront moins nettement. Cette raison ne suffit pas à elle

TABLEAU NUMERIQUE 1.

λ en Å	4047	4861	5350	5893	6563	6907
$i \setminus \begin{matrix} n_0 \\ n_e \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,31844 \\ 1,31994 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,31335 \\ 1,31473 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,31098 \\ 1,31242 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,30911 \\ 1,31041 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,30715 \\ 1,30861 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,30655 \\ 1,30794 \end{matrix}$
13°11'35"	—	—	—	—	—	43°11'35"
13°18'07"	—	—	—	—	—	43°18'05"
13°14'40"	—	—	—	—	43°14'40"	—
13°21'18"	—	—	—	—	43°21'20"	—
13°24'10"	—	—	—	43°24'10"	—	—
13°29'53"	—	—	—	43°29'55"	—	—
13°32'30"	—	—	43°32'30"	—	—	—
13°39'21"	—	—	43°39'20"	—	—	—
13°44'40"	—	43°44'40"	—	—	—	—
13°50'18"	—	43°50'20"	—	—	—	—
14°07'45"	44°07'45"	—	—	—	—	—
14°14'34"	44°14'35"	—	—	—	—	—
40°47'18"	—	—	—	—	—	21°34'36"
40°50'30"	—	—	—	—	—	21°41'00"
40°48'41"	—	—	—	—	21°37'22"	—
40°52'00"	—	—	—	—	21°44'00"	—
40°53'13"	—	—	—	21°46'26"	—	—
40°56'08"	—	—	—	21°52'16"	—	—
40°57'23"	—	—	21°54'46"	—	—	—
41°00'40"	—	—	22°01'20"	—	—	—
41°02'47"	—	22°05'34"	—	—	—	—
41°06'00"	—	22°12'00"	—	—	—	—
41°14'27"	22°28'54"	—	—	—	—	—
41°17'48"	22°35'36"	—	—	—	—	—
60°	25°20'10"	24°58'45"	24°47'35"	24°39'50"	24°30'15"	24°28'15"
	25°26'40"	25°04'00"	24°53'50"	24°45'10"	24°37'10"	24°34'30"
90°	44°07'45"	43°44'40"	43°22'10"	43°24'40"	43°14'40"	43°11'35"
	44°14'35"	43°50'20"	43°39'20"	43°29'55"	43°21'20"	43°18'05"

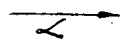


21° 30'

$i' = 2 \text{ mm}$

22°

22° 30'



23°

Blanc		
22°28'54"		44°07'45"
22°35'36"		44°14'35"
22°05'34"		43°44'40"
22°12'00"		43°50'20"
21°54'46"		43°32'30"
22°01'20"		43°39'20"
21°46'26"		43°24'10"
21°52'16"		43°29'55"
21°37'22"		43°14'40"
21°44'00"		43°21'20"
21°34'36"		43°11'35"
21°41'00"		43°18'05"

Planche 2.

seule à expliquer le manque de netteté des couleurs au sein du halo. Nous verrons, dans la suite, quelle en est la cause primordiale.

4. La formule (2) permet de calculer les déviations subies dans la traversée d'un prisme de glace lorsque le plan d'incidence coïncide avec le plan de la section droite.

Le résultat du calcul pour quelques valeurs de i est reproduit dans le tableau numérique 1. Les angles relatifs au minimum de déviation sont soulignés. Ceux ayant trait à l'indice ordinaire sont indiqués en italique.

La planche 1 représente les courbes

$$i = f(\alpha, n),$$

pour différentes valeurs du paramètre n , au voisinage du minimum de déviation.

CHAPITRE II.

Le halo produit par une source ponctuelle.

A. — LE POINT DE VUE DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

1. Supposons qu'une source ponctuelle S , située à l'infini, éclaire un nuage formé de cristaux de glace. Soit P l'un des prismes de glace (fig. 3) qui, dans les conditions du chapitre premier, dévie le rayon inci-

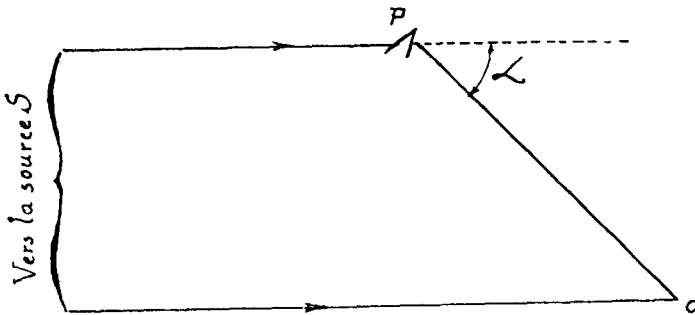


Fig. 3.

dent d'un angle α . Pour un observateur O , le prisme brille dans une direction OP faisant avec la direction œil-source un angle α (nous appellerons dorénavant, pour abréger, cette direction : direction α).

Recherchons, parmi les cristaux du nuage, ceux qui sont susceptibles de dévier la lumière, d'un

angle α , vers l'œil de l'observateur. Ils doivent répondre aux conditions suivantes :

1° Le plan de leur section droite doit contenir l'œil de l'observateur et la source.

2° Ils doivent se trouver sur un cône de sommet O, d'axe SO et d'ouverture 2α . Nous conviendrons d'appeler « anneau de rayon angulaire α » l'anneau situé sur la surface latérale du cône d'ouverture 2α , de sommet O, perpendiculairement à l'axe SO.

2. Portons en graphique les parties extrêmes des courbes de déviation relatives à n_e , dont les valeurs numériques sont rassemblées au tableau 1, de la manière suivante :

Chaque ligne horizontale du graphique est consacrée à une longueur d'onde. Sur chaque ligne horizontale, nous marquons les angles extrêmes entre lesquels la radiation considérée est déviée. Nous obtenons ainsi la planche 2.

L'examen du tableau numérique 1 et de la planche 2 montre qu'un observateur verra dans toute direction comprise entre $22^{\circ}35'36''$ et $43^{\circ}11'35''$ la superposition de radiations comprises entre $\lambda = 4047 \text{ \AA}$ et $\lambda = 6907 \text{ \AA}$, dues soit au rayon ordinaire, soit au rayon extraordinaire. Par suite, entre 2 cônes ayant comme axe la direction œil-source et comme ouverture $2 \times 22^{\circ}35'36'' = 45^{\circ}11'12''$ et $2 \times 43^{\circ}11'35'' = 86^{\circ}23'10''$, tous les prismes seront vus blancs et contribueront à augmenter la luminosité du ciel dans un anneau circulaire, centré sur le soleil et dont le grand rayon est de $43^{\circ}11'35''$, tandis que le petit est de $22^{\circ}35'36''$. Mais aux déviations comprises entre $22^{\circ}35'36''$ et $21^{\circ}34'36''$, l'observateur verra des cercles colorés : rouge dans la direction de $21^{\circ}34'36''$ et violet

dans la direction de $22^{\circ}35'36''$; intermédiairement, il verra des cercles colorés aux couleurs du spectre.

De $\alpha = 43^{\circ}11'35''$ à $\alpha = 44^{\circ}14'34''$, les couleurs disparaissent successivement en commençant par le rouge. On doit donc observer un halo concentrique au précédent, de rayon intérieur $43^{\circ}11'35''$. En réalité, l'intensité de ce halo est, ainsi que nous le montrons, extrêmement faible et, par suite, inobservable.

Résumons les considérations que nous venons d'exposer.

Lorsque les conditions de formation du halo de 22° sont réalisées, on observe :

1° Un anneau circulaire, coloré aux couleurs du spectre, de 22° environ de rayon moyen, et de 1° environ de largeur, le rouge correspondant au plus petit rayon ($21^{\circ}34'36''$ pour $\lambda = 6907 \text{ \AA}$) et le violet au plus grand rayon ($22^{\circ}35'36''$ pour $\lambda = 4047 \text{ \AA}$). C'est le halo de 22° .

2° Une couronne circulaire blanche dont les rayons valent respectivement $22^{\circ}35'36''$ et $43^{\circ}11'35''$.

Dans le cas d'une source ponctuelle, la région située à l'intérieur du halo de 22° paraît plus sombre que la région blanche annulaire, puisque la luminosité propre de celle-ci est augmentée par la lumière blanche réfractée par les cristaux de glace.

**B. — LE POINT DE VUE DE L'OPTIQUE PHYSIQUE.
RECHERCHE DE LA RÉPARTITION
DE L'INTENSITÉ LUMINEUSE DES DIFFÉRENTES LONGUEURS
D'ONDE EN TRAVERS DU HALO DE 22° .**

3. CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES. — Nous avons, jusqu'à présent, supposé implicitement que l'observateur pouvait observer dans une direction α telle

qu'elle a été définie au paragraphe 1 de ce chapitre. En réalité, l'œil humain n'observe pas dans une direction déterminée, mais bien dans un angle solide dont l'ouverture mesure le pouvoir séparateur de l'œil. Cette grandeur, variable d'un œil à l'autre, vaut en moyenne $1'$.

D'autre part, les nuages donnant lieu au halo sont situés à des altitudes variant entre 6 et 10 km. Si l'on tient compte, en plus, de l'inclinaison de la droite OP (fig. 3) sur la verticale, on conçoit que, dans le volume découpé dans le nuage par un angle solide de $1'$ d'ouverture, se trouvent un très grand nombre de cristaux de glace. Un certain nombre d'entre eux sont orientés de telle façon que le plan de leur section droite contient la source et l'œil de l'observateur. Ils sont d'ailleurs orientés au hasard autour de leur axe. De plus, dans un volume donné, on peut admettre que leur nombre est statistiquement constant, quels que soient leurs mouvements au sein du nuage.

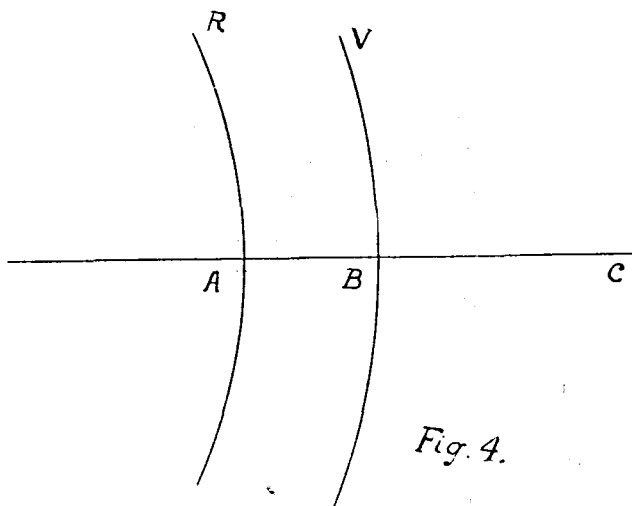
Chacun de ces cristaux reçoit la lumière de la source sous une incidence déterminée comprise entre 0° et 90° . Bien que « mathématiquement » la suite de ces angles d'incidence soit discontinue, on peut, étant donné le grand nombre de cristaux, la supposer « physiquement » continue.

En résumé, l'œil humain, observant dans une direction, recevra, à la fois, toutes les radiations déviées d'angles compris entre $(\alpha - \frac{1}{2})'$ et $(\alpha + \frac{1}{2})'$ provenant de prismes éclairés sous des incidences variant entre 0° et 90° .

4. POSITION DU PROBLÈME ET HYPOTHÈSES RESTRICTIVES. — Considérons (fig. 4) une portion du halo et

soient R et V des portions des cercles rouges ($\lambda = 6907 \text{ \AA}$) et violet ($\lambda = 4047 \text{ \AA}$).

Les considérations du paragraphe 2 du présent chapitre montrent que, si l'on déplaçait la fente d'un spectrographe le long d'un rayon ABC du halo, on reconnaîtrait la présence de la radiation rouge $\lambda = 6907 \text{ \AA}$, par exemple, entre $21^\circ 41'$ et $43^\circ 22' 36''$. Le but de ce sous-chapitre est de rechercher l'intensité de chaque radiation, le long du rayon ABC.



Le cône qui définit le pouvoir séparateur de l'œil découpe, dans le halo, un cercle dont la parallaxe par rapport à l'œil est de $1'$. L'énergie émise par ce cercle, quelle que soit sa position sur ABC, est reçue en bloc par l'œil.

Nous calculerons d'abord l'intensité de la radiation $\lambda = 6907 \text{ \AA}$ le long de ABC, puis nous en déduirons l'intensité des autres radiations.

Ce calcul ne peut être mené à bonne fin que moyennant certaines hypothèses sur la répartition et

les dimensions des cristaux dont on comprendra tout de suite la nécessité.

a) Si 2 rayons monochromatiques de même longueur d'onde rencontrent sous un même angle d'incidence la face 1 (fig. 2) de 2 prismes de dimensions différentes, il est possible, lorsque la face 3 de l'un des prismes n'est pas suffisamment développée, que le rayon ne sorte pas par la face 3, mais par la face 4. On ne peut donc décider *a priori* quelle est la face de sortie si l'on ne fait l'hypothèse que tous les prismes sont identiques.

b) Puisque la largeur du faisceau lumineux tombant sur un prisme dépend non seulement de l'angle d'incidence, mais aussi de la surface des faces d'incidence et d'émergence, nous sommes contraint de faire une hypothèse sur la grandeur de ces faces. L'hypothèse précédente nous amène à supposer que les cristaux de glace ont la forme de prismes hexagonaux réguliers.

c) Afin de pouvoir comparer les intensités émises par 2 cercles, il est nécessaire de se donner une loi de répartition des cristaux au sein du nuage. La symétrie observée généralement dans le halo solaire nous conduit à admettre la répartition uniforme.

d) Pour pouvoir parler de continuité physique, il faut que nous supposions qu'un cône de 1' d'ouverture contient un grand nombre de cristaux.

En résumé, nous étudierons le halo produit par un champ de prismes hexagonaux réguliers, serrés et uniformément répartis.

5. CALCUL DE LA PORTION DE L'ÉNERGIE QUI, ENTRANT DANS UN PRISME, PEUT, À LA SORTIE, DONNER LIEU AU HALO. — Considérons (fig. 5) la section droite CEFB

d'un prisme hexagonal régulier dont le côté vaut a .

Soit 1 la face d'entrée des rayons lumineux. Nous avons vu (chap. I) que le halo de 22° est produit par les rayons émergeant par la face 3.

Appelons, comme précédemment, i et r les angles d'incidence et de réfraction. La figure 5 montre que si $r > 30^\circ$, une partie du faisceau (celle tombant sur DE) se réfléchira totalement sur 2. Nous avons vu, au chapitre premier, qu'elle sortira par 3, déviée de $2i - 60^\circ$.

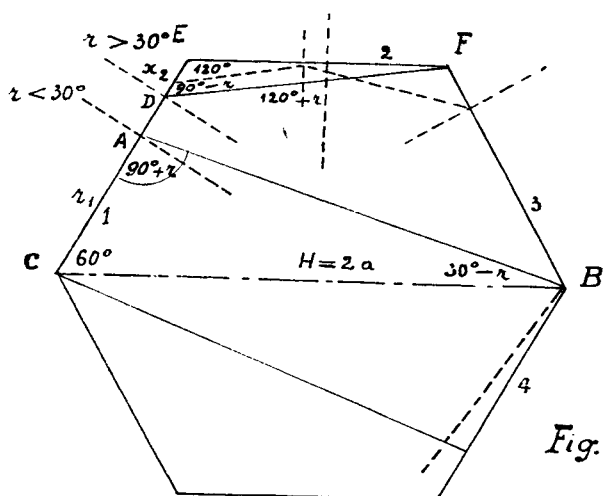


Fig. 5.

Si $r < 30^\circ$, une partie du faisceau, celle tombant sur AC, sortira par la face 4 sans être déviée.

Calculons, dans ces deux cas, la portion x du faisceau qui ne subit pas de dispersion. Les valeurs des angles inscrits sur la figure 5 se déduisent immédiatement de simples considérations géométriques.

a) $r > 30^\circ$. Tous les rayons tombant sur DE se

réfléchiront totalement sur EF et sortiront par 3. Dans le triangle DEF,

$$\frac{x_2}{\sin(r - 30^\circ)} = \frac{a}{\sin(90^\circ - r)};$$

d'où

$$x_2 = \frac{a}{2} \left[\sqrt{3} \operatorname{tg} r - 1 \right].$$

b) $r < 30^\circ$. Tous les rayons tombant sur CA sortiront par 4 sans être déviés. Dans le triangle CAB,

$$\frac{x_1}{\sin(30^\circ - r)} = \frac{2a}{\sin(90^\circ + r)};$$

d'où

$$x_1 = a \left[1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} r \right].$$

La portion du faisceau qui subit la dispersion est donc :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{si } r < 30^\circ, & f_1(r) = a \sqrt{3} \operatorname{tg} r; \\ \text{si } r > 30^\circ, & f_2(r) = \frac{a}{2} (3 - \sqrt{3} \operatorname{tg} r); \\ \text{si } r = 30^\circ, & f_3(r) = a; \end{array} \right\} \quad (3)$$

ou, puisque $\sin i = n \sin r$,

$$\text{si } r < 30^\circ, \quad f_1(r) = a \sqrt{3} \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}; \quad (4)$$

$$\text{si } r > 30^\circ, \quad f_2(r) = \frac{a}{2} (3 - \sqrt{3} \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}). \quad (5)$$

Si $A(i)$ est la surface de la section droite du faisceau qui tombe sur la face 1, sous l'incidence i , la surface du faisceau qui peut donner lieu au halo est, suivant les cas,

$$A(i) f_j(r) \quad j = 1, 2, 3.$$

Il reste à calculer $A(i)$. Soit A_0 la surface de la

section droite du faisceau tombant sur une face sous l'incidence normale.

La section droite du faisceau tombant sur cette face sous l'incidence i est

$$A_0 \cos i.$$

Par suite, la portion du faisceau incident qui contribue au halo est proportionnelle à

$$F_1(i) \equiv \frac{\sqrt{3} \sin i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}, \quad \text{si } i' < 30^\circ \quad (6)$$

et à

$$F_2(i) \equiv \frac{1}{2} \left(3 \cos i - \frac{\sqrt{3} \sin i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right), \quad \text{si } i' > 30^\circ \quad (7)$$

6. ÉTUDE ET CONSTRUCTION DES FONCTIONS F_1 ET F_2 .

Posons

$$g(i) = \frac{\sqrt{3} \sin 2i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \quad (8)$$

Il vient

$$(i' < 30^\circ) \quad F_1(i) = \frac{1}{2} g(i), \quad (9)$$

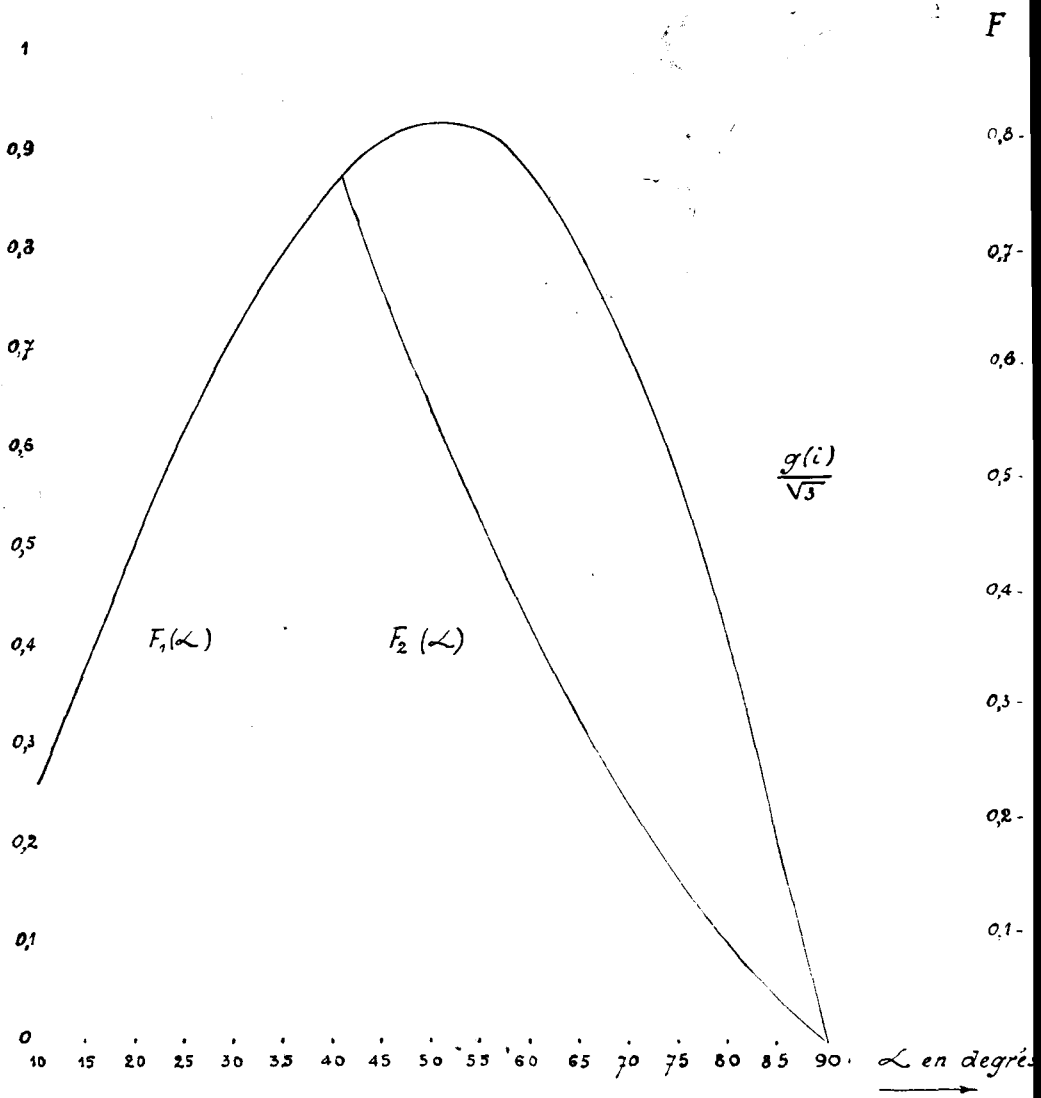
$$(i' > 30^\circ) \quad F_2(i) = \frac{1}{2} \left[3 \cos i - \frac{1}{2} g(i) \right]. \quad (10)$$

a) *Construction de la fonction $\frac{1}{\sqrt{3}} g(i)$ pour $n_c = 1,30794$.*

Nous avons calculé les valeurs de la fonction $\frac{1}{\sqrt{3}} g(i)$ pour $n_c = 1,30794$ et pour des valeurs de i espacées de 5° en 5° , excepté dans le voisinage du maximum où nous avons resserré l'intervalle. Les valeurs obtenues sont rassemblées dans le tableau numérique 2.

Planche 3.

$\frac{2}{\sqrt{3}} g(i)$



La planche 3 est la transposition graphique de ce tableau.

TABLEAU NUMERIQUE 2.

i	$\frac{1}{\sqrt{3}} g(i)$	i	$\frac{1}{\sqrt{3}} g(i)$
13°18'05''	0,349	51°14'	0,931
15°	0,391	52°	0,929
20°	0,508	55°	0,921
25°	0,619	60°	0,883
30°	0,717	65°	0,812
35°	0,800	70°	0,707
40°	0,861	75°	0,566
40°50'30''	0,874	80°	0,390
45°	0,908	85°	0,205
50°	0,928	90°	0

TABLEAU NUMERIQUE 3.

i	$F_1(i)$	i	$F_2(i)$
13°18'05	0,303	45°	0,668
15°	0,338	50°	0,564
20°	0,440	51°14'	0,539
25°	0,537	52°	0,523
30°	0,622	55°	0,461
35°	0,694	60°	0,367
40°	0,745	65°	0,282
40°50'30''	0,758	70°	0,204
		75°	0,142
		80°	0,094
		85°	0,042
		90°	0

b) *Construction des fonctions F_1 et F_2 pour $n_e=1,30794$.*

Le tableau numérique 3 rassemble les valeurs de F_1 et F_2 calculées à partir du tableau numérique 2, à l'aide de (9) et (10).

Ces valeurs sont portées en graphique sur la planche 3.

c) *Transposition aux autres indices.*

Au lieu de construire les courbes F_1 et F_2 pour chaque valeur de n , nous calculerons la quantité à ajouter algébriquement aux courbes de la planche 3, lorsque, pour un angle i donné, n varie de Δn . Si l'on se reporte à (9) et (10), cette quantité vaut

$$\frac{\Delta F_1(i)}{\Delta n} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{\Delta n}, \quad (11)$$

$$\frac{\Delta F_2(i)}{\Delta n} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta g}{\Delta n}, \quad (12)$$

avec

$$\frac{\Delta g}{\Delta n} = -\frac{ng}{n^2 - \sin^2 i} = -\frac{\sqrt{3} n}{\sin^2 2i} \left(\frac{g}{3}\right)^3. \quad (13)$$

Vérifions sur un exemple l'approximation de la formule (13). Plaçons-nous dans le cas défavorable où Δn est le plus grand possible, c'est-à-dire lorsqu'on passe de $n_1=1,30794$ à $n_2=1,31994$ — soit $n=+0,012$ — et où l'angle d'incidence i est voisin du minimum de déviation. Prenons, par exemple, $i=40^\circ$. La formule (8) fournit directement la valeur de g sur n_2 , soit $g_2=1,479$. Le tableau numérique 3 fournit pour $i=40^\circ$, $g_1=1,492$. Prenons pour n la valeur moyenne $\frac{n_1+n_2}{2} \cong 1,314$. De la formule (13) on déduit alors $\Delta g=-0,0135$. D'où $g_2=1,4785$,

c'est-à-dire, presque exactement, la valeur fournie directement par (8).

7. INTENSITÉ D'UNE RADIATION DE LONGUEUR D'ONDE λ EN TRAVERS DU HALO DE 22° , DANS UN INTERVALLE DE LONGUEUR D'ONDE $d\lambda$. — Nous nous sommes limité jusqu'à présent à l'étude du trajet de la lumière dans un cristal unique et nous avons vérifié que la lumière incidente pouvait être déviée d'angles compris entre 21° et 44° (environ). Il se pourrait cependant que des systèmes de prismes rencontrés successivement par les rayons incidents pussent aussi produire des déviations voisines des précédentes.

Un calcul simple, basé sur les lois de l'optique géométrique élémentaire, montre qu'il faut utiliser des systèmes d'au moins quatre prismes pour obtenir un minimum de déviation voisin de 22° . Mais la probabilité qu'un rayon lumineux traverse de tels systèmes est extrêmement faible. En effet, des rayons qui rencontrent successivement deux prismes placés au minimum de déviation produiraient un halo de $2 \times 22^\circ = 44^\circ$ de rayon. Or, on n'observe pas ce halo. Il est donc infiniment moins probable que les systèmes de quatre prismes placés dans les conditions nécessaires à l'apparition du halo de 22° soient suffisamment nombreux pour rendre le phénomène observable.

Nous pouvons donc admettre que les cristaux qui donnent lieu au halo sont ceux qui sont éclairés directement par la source et réfractent directement la lumière vers l'observateur.

Dès lors, il revient au même, pour le calcul de l'intensité réfractée, de supposer que tous les prismes utiles ont subi une translation le long du rayon réfracté, de sorte que leurs centres de gravités vien-

nent occuper un même plan du nuage. La partie utile du nuage se trouve être ainsi ramenée à un parallélépipède dont une dimension est très petite par rapport aux deux autres. C'est ce parallélépipède que nous appellerons dorénavant le nuage.

L'énergie renvoyée par 1 prisme, dans un intervalle de longueur d'onde $d\lambda$ est proportionnelle à :

1. L'intervalle de longueur d'onde $d\lambda$.

2. L'intensité I_λ du rayonnement de la source pour la longueur d'onde λ .

Cette grandeur sera explicitée plus loin.

3. La portion utile du faisceau incident, soit à F_1 ou à F_2 .

L'énergie cherchée vaut donc :

$$\text{si } r < 30^\circ, \quad e_1 = k' I_\lambda d\lambda F_1(i) \quad (14)$$

$$\text{si } r > 30^\circ, \quad e_2 = k' I_\lambda d\lambda F_2(i). \quad (15)$$

Nous conviendrons de choisir pour toutes les longueurs d'onde le même intervalle $d\lambda$. Dans ces conditions, nous pouvons faire rentrer $d\lambda$ dans le coefficient de proportionnalité. Les formules (14) et (15) deviennent alors :

$$e_1 = k I_\lambda F_1(i) \quad (16)$$

et

$$e_2 = k I_\lambda F_2(i). \quad (17)$$

Soit D la distance de l'observateur O au nuage. Considérons (fig. 6) une direction α_0 suivant laquelle l'observateur voit un anneau coloré. Celui-ci lui paraît être l'intersection du nuage par la surface latérale d'un cône de sommet O et d'ouverture $2\alpha_0$. Tous les rayons engendrant la surface latérale de ce cône ont été déviés d'un angle α_0 par des prismes qu'ils ont rencontrés sous l'angle i_0 . Leur intersection par

le plan du nuage est ce que nous avons appelé au § 1, « l'anneau de rayon angulaire α_0 ». Le pouvoir séparateur de l'œil de l'observateur ne lui permet de séparer que des points distants d'un angle $p=1'$. Il en résulte que l'œil collecte « en bloc » toute l'énergie contenue dans un cône C_1 dont l'axe est la direction α_0 et dont l'ouverture vaut $1'$. Les prismes donnant lieu au halo dans la direction α_0 sont ceux contenus dans l'ellipse dont le grand axe est AB , section par le nuage du cône C_1 . Nous nous proposons de calculer l'énergie que l'ensemble de ces prismes envoie à l'observateur.

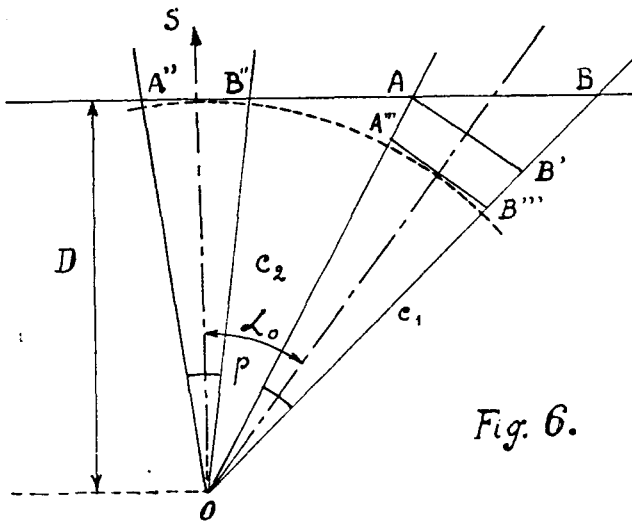


Fig. 6.

Au point de vue de l'énergie transmise, nous pouvons, au lieu de considérer l'ellipse AB , considérer le cercle AB' , section droite de C_1 par un plan passant par A , en lui assignant toutefois le nombre de prismes contenus dans AB . Calculons ce nombre. Dans ce but, considérons le cône C_2 , d'ouverture

$p=1'$, d'axe SO, qui découpe dans le nuage le cercle A''B''. On a les relations :

$$\begin{aligned} & \text{Surface AB}' \cdot \cos^2 \alpha_0 = \text{Surface A''B''}, \\ \text{et} & \text{Surface AB} \cdot \cos \alpha_0 = \text{Surface A B}', \\ \text{Par suite,} & \text{Surface AB} \cdot \cos^3 \alpha_0 = \text{Surface A''B''}. \end{aligned}$$

Soit N le nombre de prismes dont le plan de la section droite contient O et S et qui se trouvent dans l'unité de surface du nuage. En vertu de la répartition uniforme, le nombre de prismes de AB susceptibles de contribuer au halo est :

$$N \cdot \text{Surface AB} = N \frac{\text{Surface A''B''}}{\cos^3 \alpha_0}.$$

Tel est donc le nombre de prismes à assigner à AB'.

Faisons glisser AB parallèlement à elle-même jusqu'à ce que sa distance à O soit égale à D. Elle vient occuper la position A'''B'''. On a la relation :

$$\text{Surface A'''B'''} = \text{Surface A''B''}.$$

L'énergie émise par les prismes de AB qui contribuent au halo est toute entière contenue dans C₁. Il revient donc au même, pour le calcul de l'énergie, de supposer qu'elle est émise par la surface A'''B''' à laquelle on a assigné le nombre de prismes contenus dans AB, soit

$$N \frac{\text{Surface A'''B'''}}{\cos^3 \alpha_0}.$$

Tangentielllement à AB, en A et en B passent deux anneaux colorés de rayons angulaires

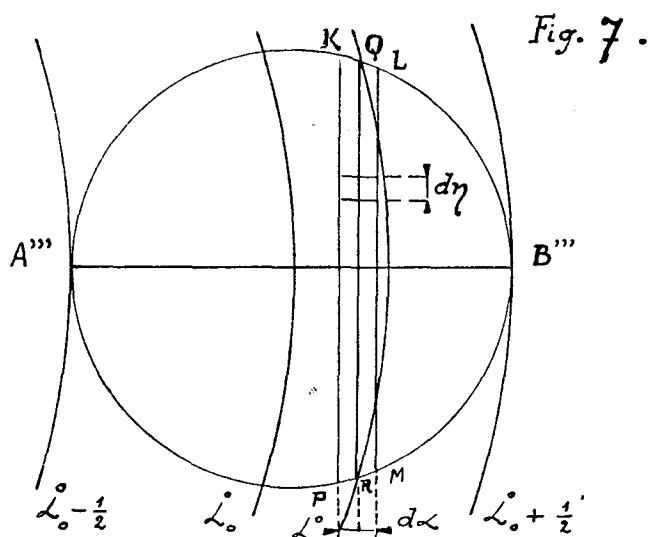
$$\left(\alpha_0 - \frac{1'}{2} \right) \text{ et } \left(\alpha_0 + \frac{1'}{2} \right).$$

La projection de ces anneaux sur le plan A'''B''' est tangente en A''' et B''' au cercle A'''B''' (fig. 7).

Soit un anneau de rayon angulaire α^0 (1). Nous pouvons assimiler la portion d'arc que le cercle $A'''B'''$ y découpe à la corde QR , car $\alpha^0 > 21^\circ$. Considérons un accroissement $\frac{d\alpha}{2}$ de part et d'autre de α . Comme ci-dessus, nous pouvons assimiler les arcs que les anneaux de rayons angulaires

$$\alpha - \frac{d\alpha}{2} \text{ et } \alpha + \frac{d\alpha}{2}$$

découpent dans le cercle, aux cordes KP et LM .



Entre $d\alpha$ et $d\eta$ existe une relation que l'on obtient en différentiant (2) :

$$d\eta = d\alpha - d\eta'$$

(1) $\alpha_0^0 - \frac{1'}{2} < \alpha^0 < \alpha_0^0 + \frac{1'}{2}$.

ou, en utilisant la loi de Descartes :

$$di' = \frac{n \cos r'}{\cos i'} \times dr' = - \frac{n \cos r'}{\cos i'} dr,$$

sous la condition que $i' \neq 90^\circ$.

On a aussi

$$dr' = \frac{\cos i}{n \cos r'} di;$$

d'où

$$di' = - \frac{\cos r'}{\cos i'} \frac{\cos i}{\cos r'} di = - \frac{\cos (60^\circ - r') \cos i}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (60^\circ - r')} \cos r'} di;$$

d'où

$$di = d\alpha + \frac{\cos (60^\circ - r')}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (60^\circ - r')}} \frac{\cos i}{\cos r'} di;$$

et finalement

$$di = \frac{d\alpha}{1 - \frac{\cos i}{\cos r'} \frac{\cos (60^\circ - r')}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (60^\circ - r')}}}. \quad (18)$$

Pour un accroissement $d\alpha \approx u_0$, unité de mesure de $d\alpha$, l'accroissement di a pour mesure

$$(di)_i = \varphi(i), \quad (19)$$

avec

$$\varphi(i) = \frac{1}{1 - \frac{\cos i}{\cos r'} \frac{\cos (60^\circ - r')}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (60^\circ - r')}}}. \quad (20)$$

où i et r ont les valeurs particulières à l'intervalle u_0 .

Divisons la surface KPLM en éléments de surface rectangulaires dont les dimensions linéaires sont $Dd\alpha$ et $Dd\eta$ (fig. 7). Considérons en particulier l'élément de surface $D^2(u_0, d\eta)$. Le nombre de pris-

mes contenus dans cette surface et susceptibles de contribuer au halo est

$$\frac{u_0 d\eta}{\cos^3 \alpha_0} ND^2.$$

Parmi ces prismes, un certain nombre seulement contribuent au halo. Ce sont ceux qui, rencontrés sous une incidence comprise entre

$$i + \left(\frac{di}{2}\right)_1 \text{ et } i - \left(\frac{di}{2}\right)_1,$$

dévient la lumière d'angles compris entre $\alpha - \frac{u_0}{2}$ et $\alpha + \frac{u_0}{2}$. Étant données la répartition uniforme et l'orientation quelconque des prismes, ils sont en proportion $(di)_1$ dans le nombre des prismes susceptibles de contribuer au halo. Par suite, le nombre de prismes de la surface $D^2 u_0 d\eta$ qui contribuent au halo dans la direction α_0 est, par (19),

$$\frac{\varphi(i)}{\cos^3 \alpha_0} u_0 d\eta ND^2.$$

Pour un angle de $d\alpha$ unités de mesure, le nombre de prismes de la surface $D^2 d\alpha d\eta$ qui contribuent au halo est

$$\frac{\varphi(i)}{\cos^3 \alpha} d\alpha d\eta ND^2. \quad (21)$$

Or, à toute déviation α peut correspondre un angle i qui donne lieu à un angle $r < 30^\circ$ ou un angle i' qui donne lieu à un angle $r > 30^\circ$. L'énergie renvoyée par un prisme placé dans ces conditions est respectivement e_1 ou e_2 , donnés par (16) ou (17). Cette énergie est la même pour tous les prismes de la surface KLMP lorsque $d\alpha$ et $d\eta$ sont suffisamment petits. Par suite, l'énergie transmise par les prismes

de la surface $d\alpha d\eta$ dans la direction α_0 est, en combinant (16), (17) et (21),

$$\frac{kND^2}{\cos^3 \alpha_0} I_\lambda [F_1(i) \varphi(i) + F_2(i') \varphi(i')] d\alpha d\eta.$$

L'énergie transmise par les prismes du cercle est alors

$$2 \frac{kND^2}{\cos^3 \alpha_0} I_\lambda \int_{\alpha_0 - \frac{1}{2}}^{\alpha_0 + \frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\sqrt{R^2 - (\alpha - \alpha_0)^2}} [F_1(i) \varphi(i) + F_2(i') \varphi(i')] d\eta \right\} d\alpha;$$

en appelant R le rayon de $A'''B'''$, mesuré dans les mêmes unités que α ; ou, en intégrant par rapport à η ,

$$2 \frac{kND^2}{\cos^3 \alpha_0} I_\lambda \int_{\alpha_0 - \frac{1}{2}}^{\alpha_0 + \frac{1}{2}} [F_1(i) \varphi(i) + F_2(i') \varphi(i')] \sqrt{R^2 - (\alpha - \alpha_0)^2} d\alpha;$$

ou, en faisant rentrer tous les termes constants dans le facteur de proportionnalité, l'énergie cherchée est proportionnelle à

$$E_\lambda \equiv I_\lambda L_\lambda, \quad (22)$$

avec

$$L_\lambda \equiv \frac{1}{\cos^3 \alpha_0} \int_{\alpha_0 - \frac{1}{2}}^{\alpha_0 + \frac{1}{2}} [F_1(i) \varphi(i) + F_2(i') \varphi(i')] \sqrt{R^2 - (\alpha - \alpha_0)^2} d\alpha. \quad (23)$$

8. CALCUL DE L_λ . — Nous calculerons graphiquement la valeur de L_λ . Les formules (9), (10) et (20) nous permettent de calculer les fonctions $F_1(i)$, $F_2(i')$ et $\varphi(i)$. Nous les représenterons graphiquement non en fonction de i , mais en fonction de α . Nous formerons ensuite les produits $F_1(i) \varphi(i)$; $F_2(i') \varphi(i')$ d'où nous déduisons la courbe

$$\Phi(\alpha) = F_1(i) \varphi(i) + F_2(i') \varphi(i') \quad (24)$$

Pour calculer l'intégrale, remarquons que la grandeur $\sqrt{R^2 - (\alpha - \alpha_0)^2}$ représente la demi-corde que le cercle de rayon angulaire α_0 découpe dans le cercle de rayon $R = \left(\frac{1}{2}\right)'$. Le calcul de L_λ se fera donc comme suit :

Nous choisirons quelques points correspondant à des déviations α_0 croissantes. En ces points, nous tracerons des demi-cercles de $1'$ de diamètre (fig. 8).

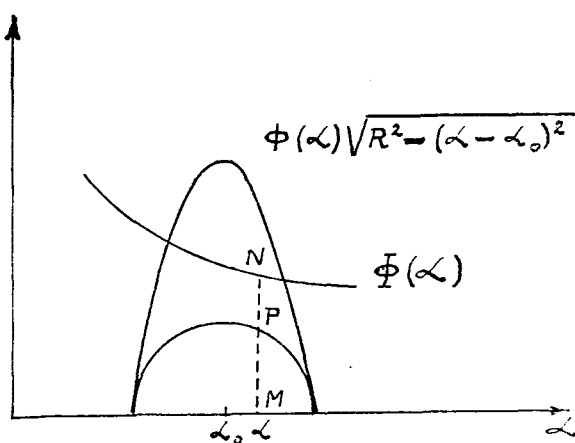


Fig. 8 .

En un point M , la valeur de $\Phi(\alpha)$ est l'ordonnée MN , la demi-corde du cercle est MP . Le produit de ces deux grandeurs nous permet de construire, à une certaine échelle, la courbe $\Phi(\alpha) \sqrt{R^2 - (\alpha - \alpha_0)^2}$ relative à la direction α_0 . La surface du diagramme ainsi obtenu, divisée par $\cos^3 \alpha_0$, est proportionnelle à L_λ .

Remarques. — 1. Pour des directions α_0 inférieures au minimum de déviation α_m , tous les prismes dont

le plan de la section droite contient O et S ne contribuent pas au halo, puisque certains d'entre eux sont situés dans des directions $\alpha < \alpha_m$. Il en résulte qu'une portion seulement de la surface A''' B''' est utile, celle pour laquelle $\alpha \geq \alpha_m$.

2. Puisque le rayon de A''' B''' vaut $\frac{1'}{2}$, la valeur de L_λ est nulle pour $\alpha \leq \alpha_m - \frac{1'}{2}$.

Le tableau numérique 4 rassemble les valeurs de L_λ pour les différents indices étudiés; les valeurs se rapportant à l'indice ordinaire sont indiquées en italique. On remarque que L_λ varie peu d'un indice à l'autre.

10. RÉPARTITION SPECTRALE DE L'ÉNERGIE DE LA SOURCE. — Il reste à expliciter le facteur I_λ , intensité du rayonnement de la source pour la radiation λ . Nous supposerons que la lumière de la source n'est pas polarisée. Par suite les rayons ordinaire et extraordinaire ont même intensité.

Afin de pouvoir chiffrer I_λ , il est nécessaire de se donner l'intensité de chacune des composantes de la source ponctuelle. Nous supposerons que la composition spectrale de la source ponctuelle est identique à celle du soleil. On sait que la radiation solaire, aux confins de l'atmosphère, a, dans le visible, une répartition spectrale assez semblable à celle du rayonnement du corps noir vers 6500° K ⁽¹⁾. A mesure que le rayonnement solaire traverse l'atmosphère, il subit une absorption sélective qui modifie sa composition.

⁽¹⁾ CH. MAURAIN, *Étude pratique des rayonnements*, Gauthier-Villars, 1937.

en A

n

TABLEAU NUMÉRIQUE 4.

5907	1,30655	α_0	21°34'06"	21°34'36"	21°35'06"	21°35'36"	21°36'06"	21°37'06"	21°38'06"	21°40'36"	21°43'36"	21°48'36"	21°53'36"	22°13'36"	22°33'36"	22°53'36"	43°11'35"
		L_λ	0	740	998	719	626	499	442	339	266	205	169	111	83,6	68,7	0
	1,30794	α_0	21°40'30"	21°41'00"	21°41'30"	21°42'00"	21°42'30"	21°43'30"	21°44'30"	21°47'00"	21°50'00"	21°55'00"	22°00'00"	22°20'00"	22°40'00"	23°00'00"	43°18'05"
		L_λ	0	739	998	718	625	498	441	339	266	205	169	111	83,7	68,8	0
5563	1,30715	α_0	21°36'52"	21°37'22"	21°37'52"	21°38'22"	21°38'52"	21°39'52"	21°40'52"	21°43'22"	21°46'22"	21°51'22"	21°56'22"	22°16'22"	22°36'22"	22°56'22"	43°14'40"
		L_λ	0	739	998	718	625	498	441	339	266	205	169	111	83,7	68,8	0
	1,30861	α_0	21°43'30"	21°44'00"	21°44'30"	21°45'00"	21°45'30"	21°46'30"	21°47'30"	21°50'00"	21°53'00"	21°58'00"	22°03'00"	22°23'00"	22°43'00"	23°03'00"	43°21'20"
		L_λ	0	738	997	717	624	497	441	339	266	205	169	111	83,7	68,8	0
5583	1,30911	α_0	21°45'56"	21°46'26"	21°46'56"	21°47'26"	21°47'56"	21°48'56"	21°49'56"	21°52'26"	21°55'26"	22°00'26"	22°05'26"	22°25'26"	22°45'26"	23°05'26"	43°24'40"
		L_λ	0	738	996	717	624	496	440	338	266	205	169	111	83,8	70,0	0
	1,31041	α_0	21°51'46"	21°52'16"	21°52'46"	21°53'16"	21°53'46"	21°54'46"	21°55'46"	21°58'16"	22°01'16"	22°06'16"	22°11'16"	22°31'16"	22°51'16"	23°11'16"	43°29'55"
		L_λ	0	737	995	716	623	496	440	338	266	205	169	111	83,9	70,0	0
5350	1,31098	α_0	21°54'46"	21°54'46"	21°55'46"	21°55'46"	21°56'46"	21°57'46"	21°58'46"	22°00'46"	22°03'46"	22°08'46"	22°13'46"	22°33'46"	22°53'46"	23°13'46"	43°32'30"
		L_λ	0	737	995	716	623	495	440	338	266	205	169	111	84,0	70,0	0
	1,31042	α_0	22°00'50"	22°01'20"	22°01'50"	22°02'20"	22°02'50"	22°03'50"	22°04'50"	22°07'20"	22°10'20"	22°15'20"	22°20'20"	22°40'20"	23°00'20"	23°20'20"	43°39'20"
		L_λ	0	735	994	715	622	495	440	338	266	205	169	111	84,0	70,1	0
4861	1,31335	α_0	22°05'04"	22°05'34"	22°06'04"	22°06'34"	22°07'04"	22°08'04"	22°09'04"	22°11'34"	22°14'34"	22°19'34"	22°24'34"	22°44'34"	23°04'34"	—	43°44'40"
		L_λ	0	735	993	715	622	495	439	337	265	205	170	112	84,1	—	0
	1,31473	α_0	22°11'30"	22°12'00"	22°12'30"	22°13'00"	22°13'30"	22°14'30"	22°15'30"	22°18'00"	22°21'00"	22°26'00"	22°31'00"	23°01'00"	23°21'00"	—	43°50'20"
		L_λ	0	734	992	714	621	495	439	337	265	205	170	112	84,2	—	0
4047	1,31844	α_0	22°28'44"	22°28'54"	22°29'24"	22°29'54"	22°30'24"	22°31'34"	22°32'24"	22°34'54"	22°37'54"	22°42'54"	22°47'54"	27°07'54"	—	—	44°07'45"
		L_λ	0	732	990	712	619	494	438	336	265	205	170	112	—	—	0
	1,31994	α_0	22°35'06"	22°35'36"	22°36'06"	22°36'36"	22°37'06"	22°38'06"	22°39'06"	22°41'36"	22°44'36"	22°49'36"	22°54'36"	23°14'36"	—	—	44°14'35"
		L_λ	0	731	989	711	618	493	438	336	265	205	170	112	—	—	0

Le maximum d'intensité énergétique se déplace vers les grandes longueurs d'onde. Plus l'épaisseur de l'atmosphère traversée est grande, plus la proportion de rayons rouges qui parvient au sol augmente. C'est ce qui explique l'apparence rougeâtre du soleil au début et à la fin de la journée. Maurain donne la répartition spectrale de l'intensité énergétique, en un point de la terre (Washington) par ciel bleu moyen, pour différentes hauteurs du soleil. Nous choisirons une hauteur du soleil de 65° . Nous reproduisons, au tableau numérique 5, les valeurs des intensités relatives de la radiation solaire directe,

TABLEAU NUMÉRIQUE 5.

λ en $\text{\AA}$	Radiation solaire directe.	Radiation du ciel.
3970	151	135
4130	235	125
4310	249	113
4520	305	97
4750	333	84
5030	338	73
5350	322	62
5560	322	53
5740	322	49
5910	325	46
6240	316	38
6530	310	33
6860	304	27
7200	277	25

selon Maurain, qui nous permettent de tracer la planche 4. Dans ce tableau figurent aussi les intensités de la radiation du ciel dont nous nous servirons au chapitre suivant. Les intensités sont données en unités arbitraires, mais correspondantes.

Du graphique 4 nous déduisons, par une interpolation linéaire ⁽¹⁾, les intensités m_1 et m_2 des radiations que nous étudions, soit :

TABLEAU NUMERIQUE 6.

λ en Å	4047	4861	5350	5893	6563	6907
Rad. solaire directe m_1	198	336	322	320	309	305
Rad. du ciel m_2	129	79	62	46	32	28

Si l'on se rapporte à la définition de I_λ , on voit que les nombres de la deuxième ligne du tableau numérique 6 sont proportionnels à I_λ .

En multipliant les valeurs du tableau numérique 5 relatives à la longueur d'onde λ , par le coefficient I_λ correspondant, nous obtiendrons une grandeur proportionnelle à l'intensité énergétique de cette longueur d'onde, telle qu'elle parvient à l'œil après réfraction dans les cristaux de glace. Par exemple, l'intensité du maximum du rayon ordinaire de $\lambda = 5350$ Å est donc proportionnelle à $I_\lambda \times L_\lambda = 322 \times 995$. Puisque, jusqu'à présent, nous avons effectué tous les calculs avec des unités arbitraires,

(1) Dans certaines régions du graphique, l'interpolation linéaire peut paraître illusoire. Nous pourrions cependant l'utiliser sans inconvénient, car, par la suite, nous nous bornerons à comparer les intensités lumineuses relatives à une même longueur d'onde en prenant comme commune mesure la valeur obtenue par interpolation linéaire. Faire une interpolation non linéaire reviendrait à changer l'unité de mesure.

Planche 4.

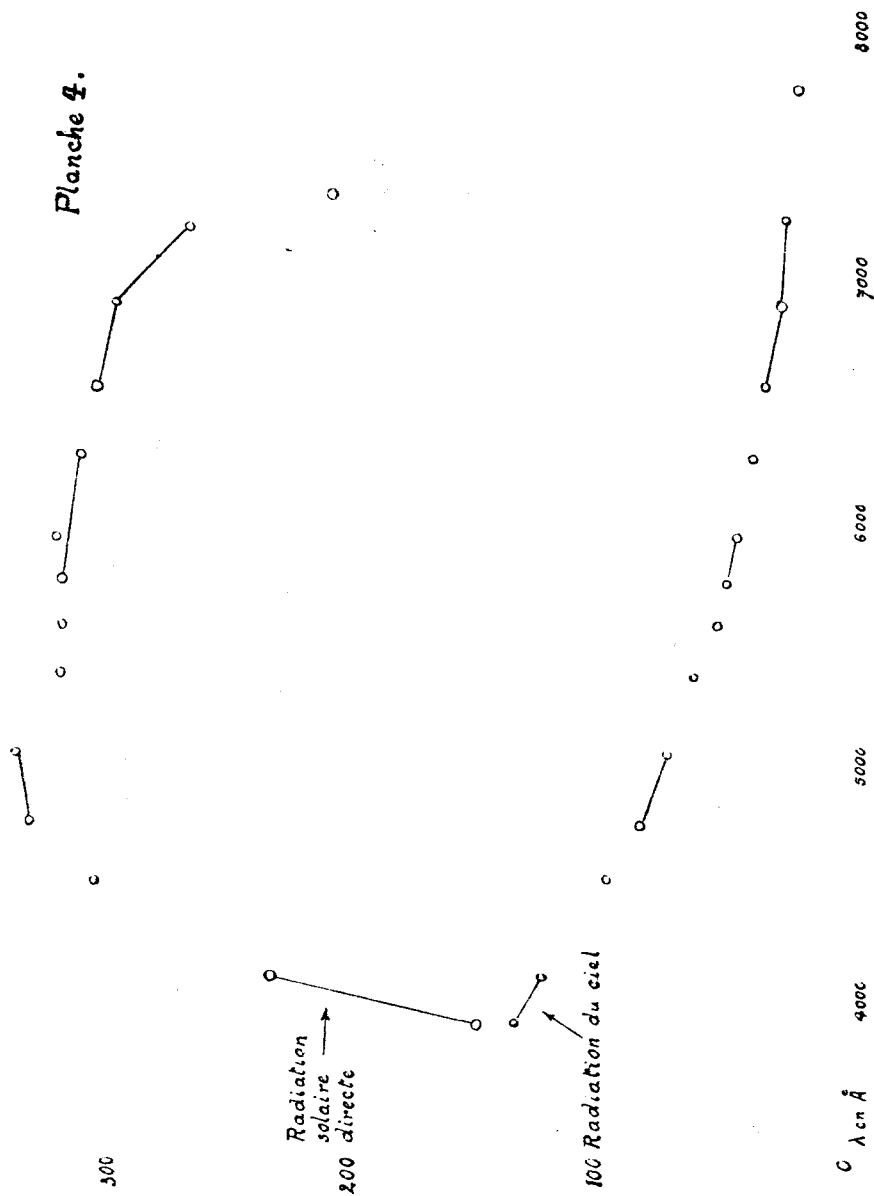
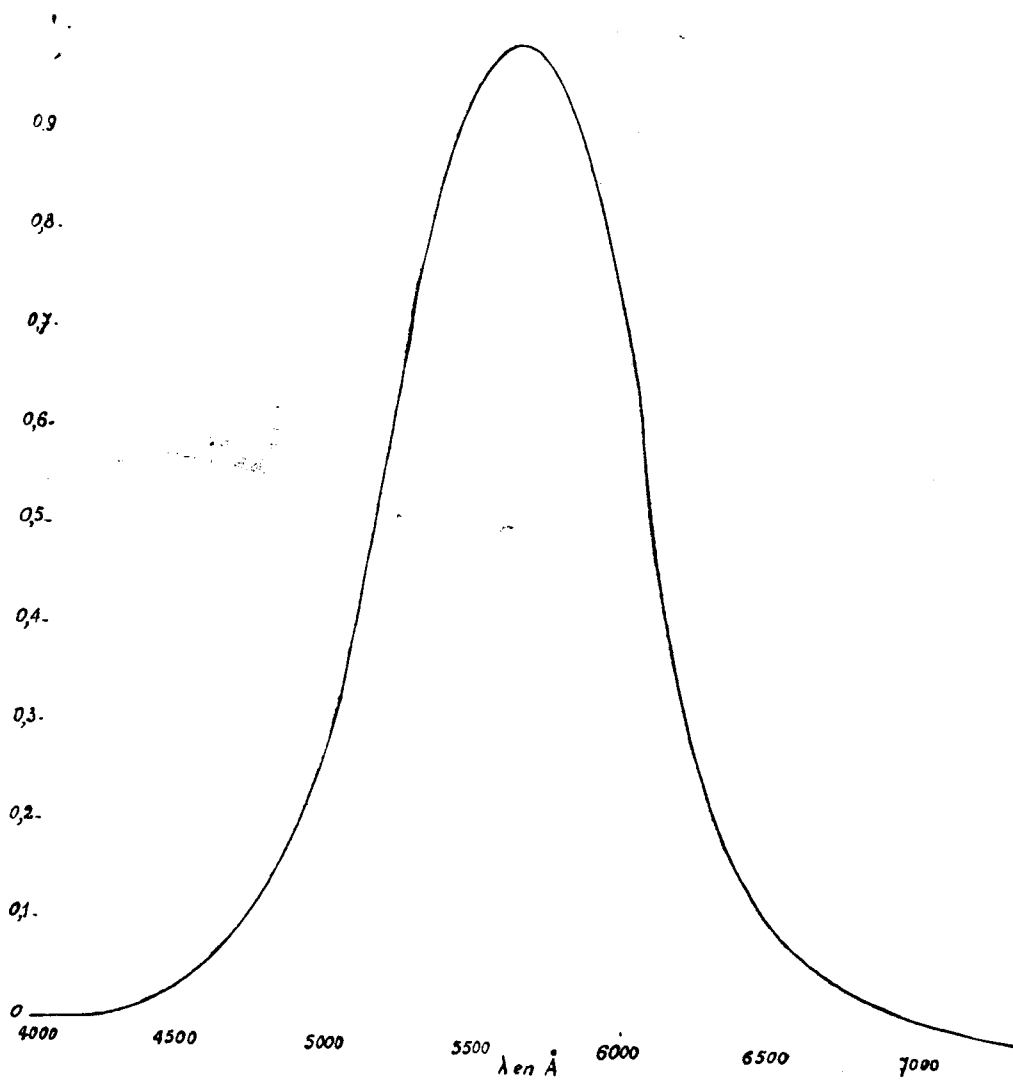


Planche 5.



il nous est loisible de prendre, comme valeur maximum de l'intensité de $\lambda = 5350 \text{ \AA}$, la valeur 322. Cela revient à diviser toutes les valeurs du tableau numérique 4 par 995. Nous conservons ainsi le système d'unités des tableaux numériques 5 et 6. Par exemple, pour $\alpha = 21^\circ 42' 30''$, l'énergie lumineuse du rayon extraordinaire de $6907 \text{ \AA}$ vaut

$$305 \times \frac{998}{995}.$$

11. VISIBILITÉ DE L'ÉNERGIE RADIANTE. — L'œil humain n'est sensible qu'à une gamme étroite de radiations dont la largeur varie d'ailleurs avec les individus. On admet que les radiations sensibles à l'œil humain — qui constituent ce qu'on appelle la partie visible du spectre — sont comprises entre $4000 \text{ \AA}$ et $7300 \text{ \AA}$ environ. A l'extérieur de ces limites, la sensibilité de l'œil est pratiquement nulle. Elle est maximum dans le voisinage de $5550 \text{ \AA}$.

La comparaison des intensités lumineuses des radiations de diverses longueurs d'onde rencontre non seulement les difficultés inhérentes à toute photométrie hétérochrome, mais est rendue plus difficile encore par le fait que la sensibilité de l'œil aux différentes couleurs varie avec les individus. De mesures effectuées sur un grand nombre d'observateurs, on a déduit (Maurain, *loc. cit.*) une courbe de sensibilité moyenne, dite courbe de visibilité. Elle est reproduite sur la planche 5, où l'on a pris l'ordonnée maximum comme unité. Nous en tirons les coefficients de visibilité V_λ des radiations que nous étudions, soit :

λ en $\text{\AA}$	4047	4861	5350	5893	6563	6907
Intensité relative	0,0007	0,177	0,915	0,765	0,078	0,008

En multipliant par ces valeurs les quantités calculées au paragraphe précédent, on obtient les intensités relatives L'_λ des radiations réfractées par les cristaux de glace, telles que l'œil les voit. L'intensité relative de $\lambda = 6907 \text{ \AA}$ est

$$L'_\lambda = 305 \frac{998}{995} 0,008.$$

Le tableau numérique 7 résume les résultats des calculs indiqués aux paragraphes 9, 10, 11. Pour chaque déviation, il donne l'intensité lumineuse de chaque radiation. Les valeurs relatives à l'indice ordinaire sont indiquées en italique.

12. LA LOI DE FECHNER. — Les énergies que nous avons calculées au paragraphe précédent agissent sur le nerf optique, par l'intermédiaire des bâtonnets et des cônes, et font apparaître, dans la conscience, une sensation, pour autant toutefois qu'elles atteignent une intensité minimum qui définit le seuil de la sensation. La loi de Fechner régit le rapport entre ces sensations et les excitations qui leur donnent naissance :

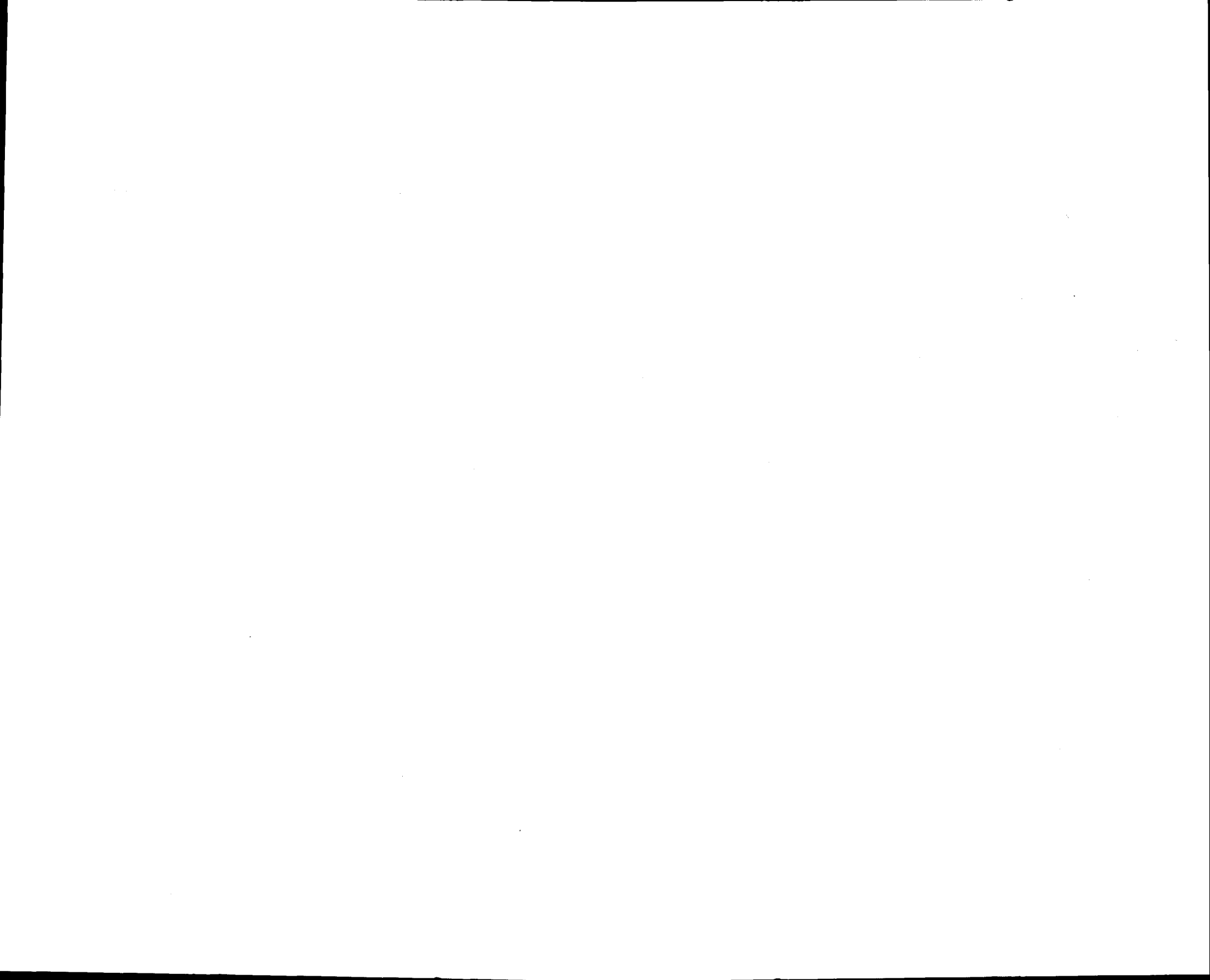
« La sensation croît comme le logarithme de l'excitation. »

Cette loi se vérifie expérimentalement tout au moins pour les intensités moyennes d'excitation qui sont d'ailleurs les plus usuelles.

Dans le cas qui nous occupe, les grandeurs L' sont proportionnelles à l'énergie d'excitation, le facteur de proportionnalité k étant le même pour toutes les longueurs d'onde. Deux énergies $k(L'_\lambda)_1$ et $k(L'_\lambda)_2$ éveilleront dans la conscience des sensations

TABLEAU NUMERIQUE 7.

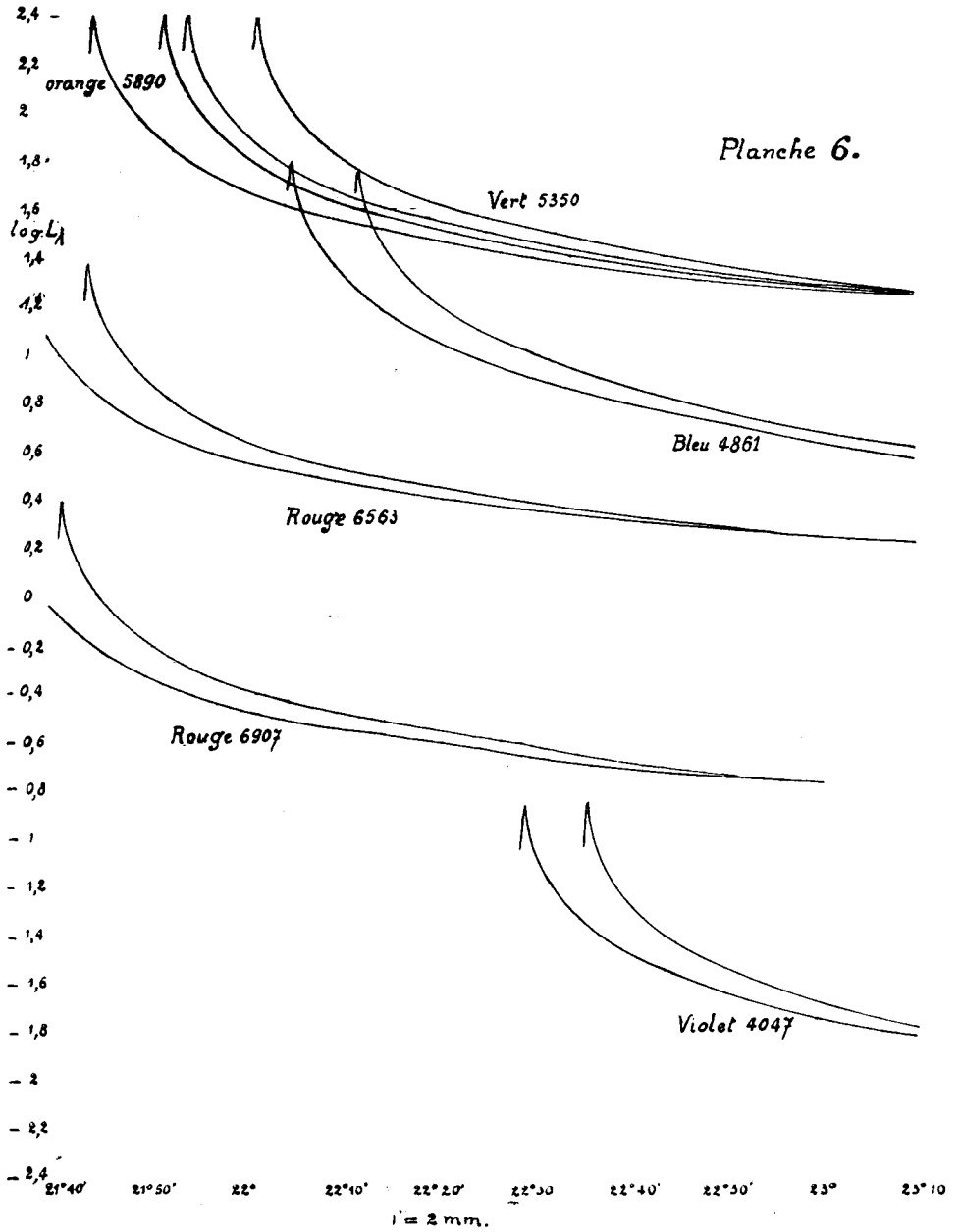
λ en Å	n															
6907	1,90655	α_0	21°34'06"	21°34'36"	21°35'06"	21°35'36"	21°36'06"	21°37'06"	21°38'06"	21°40'36"	21°43'36"	21°48'36"	21°53'36"	22°13'36"	22°33'36"	22°53'36"
		$10^{-2} L'_\lambda$	0	183	247	174	155	123,5	108,5	84	65,8	50,8	41,8	27,5	20,8	17,0
	1,90794	α_0	21°40'30"	21°41'00"	21°41'30"	21°42'00"	21°42'30"	21°43'30"	21°44'30"	21°47'00"	21°50'00"	21°55'00"	22°00'00"	22°20'00"	22°40'00"	23°00'00"
		$10^{-2} L'_\lambda$	0	183	247	174	155	123,5	108,2	84	65,8	50,8	41,8	27,5	20,85	17,05
6563	1,90745	α_0	21°36'52"	21°37'22"	21°37'52"	21°38'22"	21°38'52"	21°39'52"	21°40'52"	21°43'22"	21°46'22"	21°51'22"	21°56'22"	22°16'22"	22°36'22"	22°56'22"
		$10^{-4} L'_\lambda$	0	180	243,5	171	152,6	121,6	107,9	82,8	65	50,1	41,2	27,1	20,5	16,9
	1,90861	α_0	21°43'30"	21°44'00"	21°44'30"	21°45'00"	21°45'30"	21°46'30"	21°47'30"	21°50'00"	21°53'00"	21°58'00"	22°03'00"	22°23'00"	22°43'00"	23°03'00"
		$10^{-4} L'_\lambda$	0	180	243,5	171	152,5	121,5	107,8	82,75	65	50,1	41,2	27,1	20,45	16,8
5893	1,90944	α_0	21°45'56"	21°46'26"	21°46'56"	21°47'26"	21°47'56"	21°48'56"	21°49'56"	21°52'26"	21°55'26"	22°00'26"	22°05'26"	22°25'26"	22°45'26"	23°05'26"
		L'_λ	0	181	244,9	171,3	153,6	122	108,5	83,3	68,6	50,6	41,6	27,7	20,6	17,2
	1,91041	α_0	21°51'46"	21°52'16"	21°52'46"	21°53'16"	21°53'46"	21°54'46"	21°55'46"	21°58'16"	22°01'16"	22°06'16"	22°11'16"	22°31'16"	22°51'16"	23°11'16"
		L'_λ	0	181	244,8	171,2	153,5	122	108,2	83,2	68,5	50,5	41,6	27,73	20,62	17,2
5350	1,91098	α_0	21°54'46"	21°54'46"	21°55'46"	21°55'46"	21°56'46"	21°57'46"	21°58'46"	22°00'46"	22°03'46"	22°08'46"	22°13'46"	22°33'46"	22°53'46"	---
		L'_λ	0	218	295	212	184,6	147	130,8	100,6	79,0	60,8	50,1	32,95	24,95	---
	1,91242	α_0	22°00'50"	22°01'20"	22°01'50"	22°02'20"	22°02'50"	22°03'50"	22°04'50"	22°07'20"	22°10'20"	22°15'20"	22°20'20"	22°40'20"	23°00'20"	---
		L'_λ	0	218	295	212	184,5	147	130,7	100,5	78,9	60,8	50,1	32,95	24,95	---
4861	1,91335	α_0	22°05'04"	22°05'34"	22°06'04"	22°06'34"	22°07'04"	22°08'04"	22°09'04"	22°11'34"	22°14'34"	22°19'34"	22°24'34"	22°44'34"	---	---
		L'_λ	0	43,8	59,3	42,6	37	29,4	26,1	20	15,8	12,2	10,1	5	---	---
	1,91473	α_0	22°11'30"	22°12'00"	22°12'30"	22°13'00"	22°13'30"	22°14'30"	22°15'30"	22°18'00"	22°21'00"	22°26'00"	22°31'00"	23°01'00"	---	---
		L'_λ	0	43,7	59,2	42,5	37	29,4	26,1	20	15,8	12,2	10,1	5	---	---
4047	1,91844	α_0	22°28'24"	22°28'54"	22°29'24"	22°29'54"	22°30'24"	22°31'24"	22°32'24"	22°34'54"	22°37'54"	22°42'54"	22°47'54"	---	---	---
		$10^{-3} L'_\lambda$	0	101,3	137	98,5	85,6	68,3	60,5	46,4	36,6	28,3	24,45	---	---	---
	1,91994	α_0	22°35'06"	22°35'36"	22°36'06"	22°36'36"	22°37'06"	22°38'06"	22°39'06"	22°41'36"	22°44'36"	22°49'36"	22°54'36"	---	---	---
		$10^{-3} L'_\lambda$	0	101,2	137	98,4	85,5	68,2	60,5	46,4	36,5	28,3	24,45	---	---	---



$\log k + \log (L'_\lambda)_1$ et $\log k + \log (L'_\lambda)_2$. En traçant un graphique, où nous portons en abscisses les déviations et en ordonnées les $\log L'_\lambda$, nous obtiendrons donc des courbes, aux ordonnées desquelles il suffirait d'ajouter le facteur constant $\log k$ pour représenter les sensations de la conscience. C'est la planche 6.

13. DESCRIPTION DU HALO, À PARTIR DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS. — Si nous considérons comme limites du spectre visible les longueurs d'onde extrêmes dont nous nous sommes occupé (soit $\lambda\lambda$ 6907 Å et 4047 Å), l'examen de la planche 6 et du tableau numérique 7 nous montre qu'en parcourant le halo du bord intérieur vers l'extérieur, le spectre s'enrichit successivement de radiations de longueurs d'onde de plus en plus courtes. Pour $\alpha = 21^\circ 34' 06''$, la longueur d'onde 6907 Å commence à apparaître et atteint très rapidement son maximum, en $\alpha = 21^\circ 35' 06''$. Elle décroît d'abord rapidement, puis plus lentement. L'intensité des autres radiations se répartit sensiblement de la même manière, exception faite de l'ordre de grandeur. En $\alpha = 22^\circ 28' 24''$, toutes les radiations visibles sont présentes.

A partir de la planche 6 il est possible de déterminer, *a priori*, la couleur que l'œil voit dans une direction déterminée. Plaçons-nous, par exemple, en $\alpha = 21^\circ 52' 46''$, où la radiation orange $\lambda = 5893$ Å atteint son maximum d'intensité. Toutes les radiations de longueur d'onde supérieure à 5893 Å sont présentes à cette déviation. Leur intensité pour l'un



et l'autre indice est donnée par la planche 6, qui fournit les valeurs suivantes :

λ (en Å)	6907	6563	5893
$I'_\lambda \begin{cases} n_e \\ n_o \end{cases}$	0,576	661	244,8
	0,437	4,58	72,5

La radiation extraordinaire 5893 Å est beaucoup plus intense que les autres. L'œil verra donc dans la direction considérée de l'orangé teinté de rouge, par la présence des radiations de longueur d'onde plus grande.

On vérifierait de même que pour $\alpha \leq 22^\circ 35' 06''$ l'intensité de la radiation, qui atteint son maximum d'intensité (ou son minimum de déviation) pour la direction considérée, est de loin prédominante. Mais toutes les radiations de longueur d'onde plus grande viennent teinter cette radiation avec une intensité qui diminue lorsque la longueur d'onde de la radiation « perturbatrice » augmente.

Examinons maintenant ce qui se passe en dehors du halo coloré, par exemple dans la direction $\alpha = 23^\circ$. Nous savons que toutes les radiations sont présentes, mais avec quelle intensité ? Le graphique 6 fournit les valeurs suivantes de L'_λ pour l'un et l'autre indice :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
$I'_\lambda \begin{cases} n_e \\ n_o \end{cases}$	0,17	1,74	18,2	25,0	4,88	0,0209
	0,166	1,66	17,8	22,0	4,58	0,0178

Puisque la lumière incidente n'est pas polarisée, les valeurs de L'_λ résultant de la superposition des

rayons ordinaire et extraordinaire est la somme des précédentes, soit

0,336	3,4	36,0	47,0	9,46	0,0387
-------	-----	------	------	------	--------

Or, la lumière blanche a, par définition, la composition du spectre solaire. L'intensité de chaque radiation est donnée par les valeurs du tableau numé-rique 6. Compte tenu de la visibilité de l'énergie radiante, chaque radiation apparaîtra avec l'intensité B_λ donnée ci-dessous :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
B_λ	2,44	24,1	245	294	59,5	0,139

Toute répartition dont l'intensité est proportion-nelle à ces valeurs donne du blanc. En ramenant à une même valeur les valeurs L'_λ et B_λ de l'intensité de $\lambda=6907$ Å, on trouve les nombres suivants L''_λ proportionnels à L'_λ :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
L''_λ	2,44	24,75	262	342	68,8	0,282

Le rapport $\frac{L''_\lambda}{B_\lambda}$ vaut :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
L''_λ/B_λ	1	1,02	1,07	1,16	1,16	2,03

Au fur et à mesure que la longueur d'onde dimi-nue, son intensité augmente par rapport à l'intensité qu'elle aurait dans la lumière blanche. Pour $\alpha=23^\circ$, l'œil verra donc du blanc, puisque toutes les radia-tions sont présentes. Mais ce blanc sera teinté de toutes les radiations du visible en proportion d'autant plus grande que leur longueur d'onde est plus

courte. Le résultat sera du blanc teinté principalement de violet.

Si l'on fait le même calcul pour $\alpha = 33^\circ$, c'est-à-dire au milieu de la couronne blanche, on trouve successivement :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
$(L_\lambda)_{n_0+n_e}$	$0,612.10^{-2}$	$0,608.10^{-1}$	0,612	0,759	0,153	0,633
$(L''_\lambda)_{n_0+n_e}$	2,44	24,3	247	302	607	0,253
L''_λ/B_λ	1	1,01	1,01	1,03	1,04	1,82

Ici aussi, l'œil verra du blanc teinté de violet. La proportion d'excès de violet a cependant diminué de 2,03 à 1,82.

Voyons enfin ce qui se passe à l'extrémité de la couronne blanche. Les rayons extraordinaires de longueur d'onde 6907 Å qui sont déviés de l'angle maximum $43^\circ 18' 05''$ sont entrés, ainsi que le montre le tableau numérique 1, sous des incidences $i = 13^\circ 18' 07''$ et $i' = 90^\circ$.

Pour $i' = 90^\circ$, la planche 3 montre que

$$F_2 = 0.$$

De (20) on tire

$$\varphi(i) = 0.$$

Puisque $F_1(i)$ conserve une valeur finie, on a finalement

$$\Phi(\alpha) = 0.$$

L'intensité de λ 6907 Å est donc nulle en $\alpha = 43^\circ 18' 05''$. Mais, ainsi que le montre la planche 2, il subsiste à cette déviation d'autres longueurs d'onde. Leur intensité est extrêmement faible, puisque, d'une part, l'angle d'incidence est voisin de 90° (et alors $F_2(i') \cong 0$ et $\varphi(i') \cong 1$) et, d'autre part, $\varphi(i) \cong 0$.

L'intensité du spectre que l'on devrait apercevoir dans cette région se trouve vraisemblablement au-dessous du seuil de sensibilité de l'œil.

14. EN RÉSUMÉ. — De toutes les couleurs du spectre, seules les couleurs rouge et violette seront plus pures que les autres; la première, parce qu'au bord interne du halo elle se trouve seule en cause et que, de plus, l'œil voit du rouge dans un domaine très étendu de longueur d'onde; la seconde, parce que, lorsqu'elle apparaît, toutes les autres couleurs présentes se recombinent avec elle pour donner du blanc; son rôle est alors de teinter le blanc. De plus, comme la couronne blanche est aussi teintée de violet, cette circonstance contribue à prolonger, vers l'extérieur du halo, la sensation de violet ressentie par l'œil.

Les autres couleurs du spectre sont toutes plus ou moins mélangées d'autres couleurs de longueur d'onde plus grande et, par suite, n'apparaissent pas pures. De plus, comme les rayons ordinaire et extraordinaire atteignent leur maximum d'intensité à des déviations différant l'une de l'autre de $6,5'$ environ, les halos résultant de l'une ou l'autre radiation sont décalés l'un par rapport à l'autre de cette valeur. La superposition des deux halos donne lieu à un halo unique dont les couleurs manquent de pureté. Enfin, la lumière émergeant des prismes pour lesquels le plan d'incidence ne coïncide pas avec la section droite vient aussi se superposer au halo.

Au mélange des couleurs dû aux trois causes ci-dessus, il faut ajouter le blanchiment des teintes dû aux prismes de 120° , ainsi qu'il a été exposé au

§ 3 du chapitre premier. De plus, le phénomène, lui-même peu lumineux, apparaît sur le fond blanchâtre du nuage, ce qui diminue encore sa visibilité.

CHAPITRE III.

Le halo solaire.

1. CARACTÉRISTIQUES DE LA SOURCE ⁽¹⁾.

a) *Diamètre*. — Le soleil nous apparaît comme un disque lumineux dont le diamètre apparent varie d'une saison à l'autre : ses valeurs extrêmes sont 31'32" et 32'36". Le diamètre apparent moyen 2R du soleil vaut 32', à une ou deux secondes près.

b) *Brillance*. — L'éclairement produit sur un écran, au niveau de la mer, par le soleil au zénith est de 100.000 lux. A titre de comparaison, celui produit, dans les mêmes conditions, par la pleine lune est de 0,25 lux. Les photographies du soleil mettent en évidence un assombrissement des bords, ce qui montre que sa brillance n'est pas uniforme : elle va en diminuant depuis le centre jusqu'au bord. L'obscurcissement des bords est lié à l'absorption par la matière gazeuse qui constitue le soleil et dépend, comme cette absorption, de la radiation étudiée. L'absorption est d'autant plus forte et l'obscurcissement des bords d'autant plus marqué que la longueur d'onde est plus courte. Les résultats des mesures de l'assombrissement, effectuées par Abbot, par voie

(1) G. BRUHAT, *Le Soleil*, Félix Alcan, Paris, 1931.

spectrobolométrique, sont consignés dans le tableau numérique 8. La première ligne donne les distances apparentes au centre exprimées en fraction du rayon solaire R (ρ et R sont donc exprimés en valeurs angulaires); les lignes suivantes donnent, pour diverses longueurs d'onde, les intensités observées, exprimées en centièmes de l'intensité centrale. L'intensité en un point quelconque du soleil étant fonction de la longueur d'onde et de la distance au centre, nous la désignerons par une fonction $\Theta\left(\lambda, \frac{\rho}{R}\right)$ de ces deux quantités.

TABLEAU NUMERIQUE 8.

λ en $\text{\AA}$	$\tau \equiv \frac{\rho}{R}$	0,40	0,75	0,875	0,95
3860		92,6	71,0	55,4	41,8
5010		94,5	77,7	65,0	51,7
6700		96,1	83,8	74,0	62,9

TABLEAU NUMERIQUE 9.

λ en $\text{\AA}$	$\tau \equiv \frac{\rho}{R}$	0,40	0,75	0,875	0,95	0,99
4047		92,9	72,3	57,0	43,5	25
4861		94,1	76,9	63,7	50,2	25
5350		94,8	78,6	66,9	54,0	25
5893		95,7	80,9	69,9	57,8	25
6563		96,0	83,2	73,1	61,9	25
6907		96,2	84,1	74,8	63,8	25

Les mesures d'Abbot s'arrêtent à une distance $R/20$ du bord solaire. Divers auteurs ont essayé de les prolonger jusqu'au bord même du soleil, mais sans qu'on puisse considérer leurs résultats comme définitifs. On peut cependant admettre qu'à $0,99 R$ le rayonnement visible vaut environ 25 % du rayonnement du centre.

Le tableau numérique 8 nous permet de tracer les

familles de courbes $\Theta(\lambda, \tau)$ et τ joue le rôle de paramètre (nous déduisons les valeurs de Θ , pour les valeurs de τ figurant au tableau numérique sont consignées dans le tableau numérique

Un nouveau graphique, le graphique 8, nous fournit les courbes $\Theta(\lambda, \tau)$ en fonction de τ pour différentes valeurs du paramètre λ .

c) *Répartition spectrale de l'énergie*. — Nous avons donné, au § 10 du chapitre II, la répartition spectrale de l'énergie que le soleil envoie en un point de la ligne du ciel. Ce sont les nombres de la table numérique (6).

d) *État de polarisation*. — La lumière solaire, excepté celle qui provient des taches solaires, n'est pas polarisée.

Néanmoins, étant donnée la faible intensité de la lumière des taches et de la couronne, on peut considérer que la lumière solaire tout entière est pas polarisée.

En résumé, le soleil nous apparaît comme un disque lumineux de 32' de diamètre apparent dont la brillance varie d'un point à un autre, suivant les différentes longueurs d'onde, suivant les courbes de la planche X. Nous pouvons considérer que la lumière qu'il nous envoie n'est pas polarisée.

2. CALCUL DE L'ÉNERGIE ÉMISE PAR LE SOLEIL. — Limitons-nous d'abord à une longueur d'onde λ , soit, pour fixer les idées, prenons un rayon extraordinaire de longueur d'onde $\lambda = 4000$ Å, et à un intervalle $d\lambda$ de longueur d'onde. To

tion de λ , où $d\lambda$ est la longueur d'onde (voir fig. 7). Nous en déduisons les valeurs de τ pour les valeurs de λ sont consignées dans le tableau numérique

8, nous fournit les courbes $\Theta(\lambda, \tau)$ en fonction de τ pour différentes valeurs du paramètre λ .

Nous avons donné, au § 10 du chapitre II, la répartition spectrale de l'énergie que le soleil envoie en un point de la ligne du ciel. Ce sont les nombres de la table numérique (6).

La lumière solaire, excepté celle qui provient des taches solaires, n'est pas polarisée.

Néanmoins, étant donnée la faible intensité de la lumière des taches et de la couronne, on peut considérer que la lumière solaire tout entière est pas polarisée.

En résumé, le soleil nous apparaît comme un disque lumineux de 32' de diamètre apparent dont la brillance varie d'un point à un autre, suivant les différentes longueurs d'onde, suivant les courbes de la planche X. Nous pouvons considérer que la lumière qu'il nous envoie n'est pas polarisée.

Limitons-nous d'abord à une longueur d'onde λ , soit, pour fixer les idées, prenons un rayon extraordinaire de longueur d'onde $\lambda = 4000$ Å, et à un intervalle $d\lambda$ de longueur d'onde. To

Planche 8.

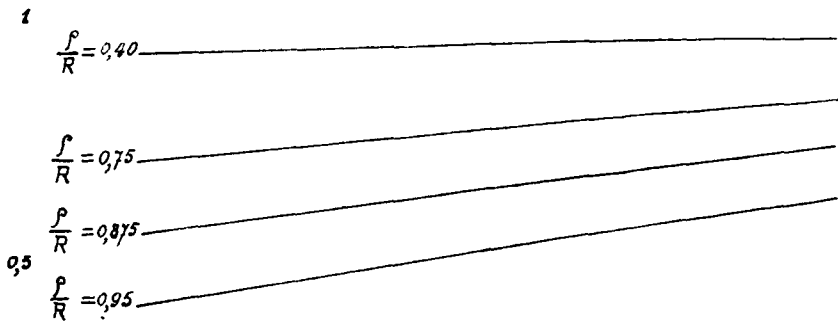
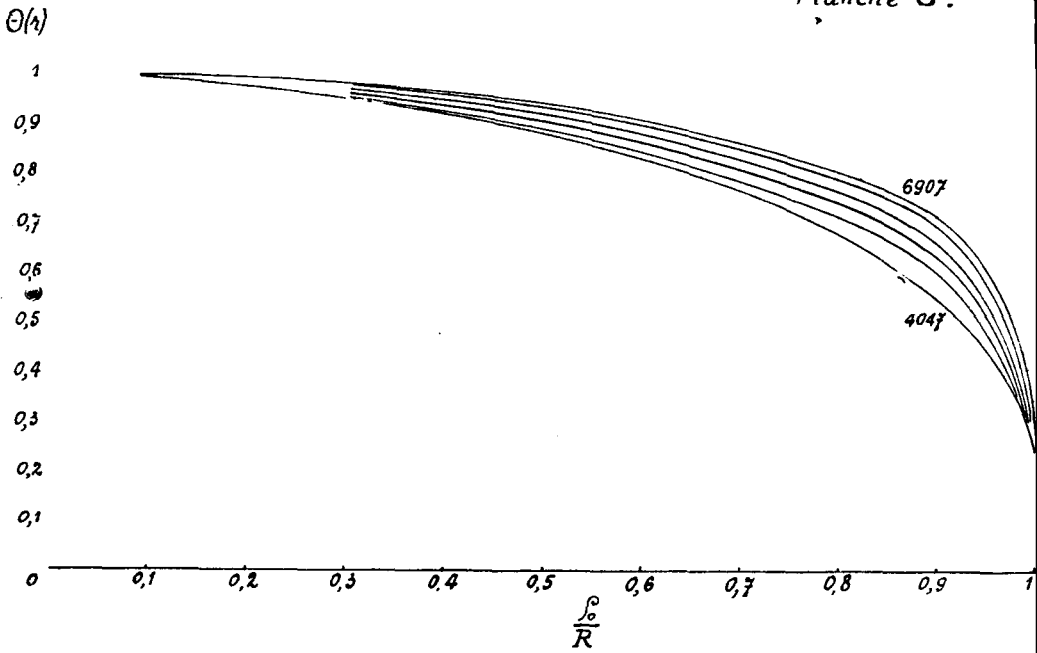


Planche 7.

du disque solaire est une source ponctuelle qui donne lieu, lorsque sont remplies les conditions du chapitre II, à un halo monochromatique, centré sur le point considéré du disque. Considérons, en particulier, la source ponctuelle constituée par le centre C du soleil et un observateur terrestre regardant, dans une direction α_0 (au sens du § 1 du chapitre II), un point du halo situé à droite du soleil. Dans le cône de $1'$ d'ouverture, ayant son sommet O dans l'œil de l'observateur, se trouvent un grand nombre de cristaux, orientés d'une manière quelconque. Les cristaux donnant lieu au halo dans la direction α_0 sont tels que le plan π de leur section droite contient C et O; ils dévient la lumière d'un angle α_0 .

Imaginons maintenant que nous fassions tourner ces cristaux autour de leur axe de symétrie d'un angle égal à $\frac{32'}{2} = 16'$, de part et d'autre de leur position. Ils dévient, dans la direction de l'observateur, la lumière provenant du diamètre DD' du soleil (fig. 9), d'angles compris entre $(\alpha_0 + 16')$ et $(\alpha_0 - 16')$. Considérons, en particulier, un point C', situé sur ce diamètre à une distance angulaire α' du centre du soleil et à gauche de celui-ci (ou, ce qui revient au même, à une distance φ_0 de C). La lumière qu'il envoie à l'observateur est réfractée d'un angle $\alpha_0 + \alpha'$. Si la brillance de C' était égale à celle de C, l'énergie rayonnée par la source ponctuelle C' dans la direction α_0 vaudrait, suivant la formule (22) :

$$I_\lambda L_\lambda(\alpha_0 + \alpha').$$

En réalité, la brillance de C' est celle d'un point situé à une distance relative τ_0 de C. Elle vaut donc $\Theta(\lambda, \tau_0)$ si l'on attribue à C la brillance 100. L'éner-

Parc $BC'B'$ avec le segment TT' de la tangente au sommet, intercepté par le disque solaire. Si ρ est la distance angulaire de C à un point quelconque TT' , la contribution de ce point à l'énergie rayonnée dans la direction α_0 par les prismes du cône d'observation d'axe α_0 est, d'après (25),

$$\mathfrak{H}(\lambda, \tau) I_\lambda L_\lambda (\alpha_0 + \alpha'). \quad (26)$$

Considérons (fig. 9) un accroissement $\frac{d\alpha'}{2}$ de α' de part et d'autre de α' . Comme ci-dessus, nous pouvons assimiler les arcs que le disque solaire découpe dans les circonférences de rayons angulaires

$$\alpha' - \frac{d\alpha'}{2} \quad \text{et} \quad \alpha' + \frac{d\alpha'}{2}$$

aux cordes interceptées KP et LM . Si $d\alpha'$ est suffisamment petit, la lumière envoyée par la tranche $KPLM$ est réfractée, dans la direction de l'observateur, d'un angle $\alpha_0 + \alpha'$ par les prismes du cône d'observation d'axe α_0 . Divisons la tranche $KPLM$ en éléments de surface rectangulaire dont les dimensions linéaires sont $D_1 d\alpha'$ et $D_1 d\zeta$, où D_1 est la distance de la terre au soleil. Soit N , de coordonnées (α', ζ) , le centre de gravité d'un élément de surface. Posons $NC C' = \psi$ et $NC = \rho$. Si $d\alpha'$ et $d\zeta$ sont suffisamment petits, la contribution au halo, dans la direction α_0 d'un point quelconque de la surface élémentaire, est donnée par (26). Par suite, la contribution de la surface élémentaire dans la direction α_0 est

$$\mathfrak{H}(\lambda, \tau) I_\lambda L_\lambda (\alpha_0 + \alpha') D_1^2 d\alpha' d\zeta. \quad (27)$$

La contribution de la tranche $KLMP$ vaut donc, en

vertu de la symétrie des demi-disques situés de part et d'autre de DD' ,

$$2 D_1^2 \int_0^{\zeta^*} \theta(\lambda, \tau) I_\lambda L_\lambda(\alpha_0 + \alpha') d\alpha' d\zeta, \quad (28)$$

où ζ^* est l'ordonnée de T, pour lequel $\rho = R$ (ou $\tau = 1$).

Exprimant τ et ζ en fonction de l'angle ψ , on a

$$\zeta = \rho \sin \psi;$$

d'où

$$d\zeta = \rho \cos \psi d\psi + \sin \psi d\rho.$$

Or

$$\rho_0 = \rho \cos \psi;$$

d'où

$$d\rho = \rho \operatorname{tg} \psi d\psi$$

et

$$d\zeta = \rho \cos \psi d\psi + \rho \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} d\psi = \frac{\rho}{\cos \psi} d\psi = \frac{\rho_0}{\cos^2 \psi} d\psi.$$

L'intégrale devient

$$2 D_1^2 R \left[\int_0^{\arccos \frac{\rho_0}{R}} \frac{\rho_0}{R} \theta \left(\lambda, \frac{\rho_0}{R \cos \psi} \right) \frac{1}{\cos^2 \psi} d\psi \right] I_\lambda L_\lambda(\alpha_0 + \alpha') d\alpha',$$

c'est-à-dire une fonction de α' , puisque $\rho_0 = \alpha'$.

Le raisonnement que nous venons de faire est valable pour les tranches KLMP situées dans le demi-disque EDE'. Pour l'appliquer aux tranches situées dans le demi-disque ED'E', il suffit de changer α' en $-\alpha'$. Par suite, l'intensité réfractée dans la direction α_0 , par le disque solaire tout entier, vaut

$$S_\lambda(\alpha_0) \equiv 2 I_\lambda D_1^2 R \int_{-46'}^{+46'} I_\lambda(\alpha_0 + \alpha') \Theta \left(\frac{\rho_0}{R}, \lambda \right) d\alpha', \quad (29)$$

avec

$$\frac{\rho_0}{R}, \lambda) \equiv \int_0^{\arccos \frac{\rho_0}{R}} \frac{\rho_0}{R} \frac{1}{\cos^2 \psi} \theta \left(\lambda, \frac{\rho_0}{R} \frac{1}{\cos \psi} \right) d\psi = \frac{1}{R} \int_0^{\varphi^*} \theta(\lambda, \tau) d\varphi. \quad (30)$$

Remarques. — 1. Dans l'intégrale Θ ne figure pas α_0 . Cette expression a donc la même valeur, quelle que soit la direction d'observation, et pourra être calculée une fois pour toutes pour une longueur d'onde et une valeur de τ_0 (ou de α') déterminées.

2. Si le soleil ne présentait pas d'assombrissement des bords, la brillance de tout point du disque serait égale à celle du centre; par suite, la fonction Θ serait constante et égale à 1, quel que soit τ . En se rapportant à (30) et à (28), on voit que dans ce cas l'intégrale sur ψ (ou sur ζ) se réduirait à ζ^* , c'est-à-dire à l'ordonnée de la circonférence au point α' considéré. L'ordonnée $\zeta(\alpha')$ apparaît ainsi comme le poids dont il faudrait affecter $L_\lambda(\alpha_0 + \alpha')$ pour calculer S_{α_0} . En particulier, si $\alpha' = 0$, le poids $\zeta(0)$ est maximum et vaut R . Avec cette convention, l'intégrale Θ est exprimée directement en fraction décimale.

La signification physique de ce poids est immédiate. En effet, la proportion $L_\lambda(\alpha_0 + \alpha')$ de l'énergie, envoyée par un point quelconque d'une corde perpendiculaire au diamètre DD' qui est réfractée vers l'observateur dans la direction α_0 , est la même, quel que soit le point de la corde, puisque L_λ ne dépend que de α_0 et de l'abscisse α' du point considéré. D'autre part, l'énergie émise par un point de la branche $KLMP$ et réfractée dans la direction α_0 vaut $L_\lambda(\alpha_0 + \alpha')$, tandis que l'énergie émise par la tranche $KLMP$ et réfractée dans la direction α_0 vaut

$$2 D_1^2 I_\lambda \zeta^* L_\lambda(\alpha_0 + \alpha') d\alpha'.$$

Par suite, l'ordonnée ζ^* représente une grandeur proportionnelle au nombre de points (au sens physique) de la tranche KLMP qui contribuent au halo avec une intensité donnée

$$I_{\lambda} I_{\lambda}(\alpha_0 + \alpha').$$

3. La signification physique de la fonction Θ découle des considérations suivantes :

Imaginons de remplacer le disque solaire, circulaire, de brillance non uniforme, par un disque non circulaire, de brillance uniforme égale à la brillance au centre du disque solaire et tel que l'intensité qu'il émet soit égale à l'intensité émise par le disque solaire. Recherchons la forme de ce disque.

Remarquons tout d'abord qu'il sera symétrique par rapport au diamètre DD' du soleil, situé dans le plan déterminé par le centre C du soleil et l'axe d'observation.

En reprenant les notations de la figure 9 l'intensité émise par la tranche KLMP du disque solaire est donnée par (28). Si $\varphi(\alpha', \lambda) = 0$ est l'équation de la courbe qui, pour une longueur d'onde λ , limite le disque cherché, l'intensité émise par la portion de ce disque comprise entre les cordes KP et LM est

$$2 D_1^2 I_{\lambda} \varphi(\alpha', \lambda) L_{\lambda}(\alpha_0 + \alpha') d\alpha' \quad (31)$$

si $d\alpha'$ est suffisamment petit.

En comparant (28) et (31), il vient

$$\varphi(\alpha', \lambda) = \int_0^{\zeta^*} \theta(\lambda, \tau) d\zeta;$$

ou, par (30),

$$\varphi(\alpha', \lambda) = R \Theta\left(\frac{\rho_0}{R}, \lambda\right).$$

L'équation $\Theta=0$ représente donc, à une certaine échelle, la courbe qui limite le disque défini ci-dessus comme susceptible de remplacer le disque solaire.

Remarquons que l'ordonnée de la circonférence qui limite le disque solaire vaut, au point α' ,

$$\sqrt{R^2 - \alpha'^2} = R \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha'}{R}\right)^2}.$$

Pour obtenir l'ordonnée de la courbe qui limite le disque cherché, nous devons réduire l'ordonnée de la circonférence limitant le disque solaire, dans le rapport

$$\frac{\Theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha'}{R}\right)^2}}.$$

4. Le calcul précédent est applicable à toute direction d'observation α_0 . Mais à chaque direction α_0 correspond un diamètre DD' , intersection du disque solaire et du plan de la section droite du cristal. Par suite, à chaque direction α_0 correspond un disque de brillance uniforme qui ne se distingue du disque correspondant à une autre direction d'observation, que par l'orientation de son axe de symétrie DD' .

5. Dans le paragraphe 2, nous avons défini D_1 comme étant la distance de l'observateur au soleil. Il est bien évident que D_1 pourrait être pris égal à toute autre longueur D_2 , pourvu qu'elle soit supérieure à la distance de l'observateur au point le plus éloigné du nuage. Cette modification n'introduirait dans (29) qu'un facteur de proportionnalité et reviendrait, en somme, à projeter le disque solaire sur une

sphère de rayon D_2 ayant l'observateur comme centre; son diamètre apparent $2R$ ne varierait pas.

6. Lorsque nous remplaçons le disque solaire par le disque de densité lumineuse uniforme, il nous est loisible d'appeler I_λ , non l'intensité lumineuse en un point, comme nous l'avons fait jusqu'ici, mais l'intensité lumineuse de l'unité de surface. Ce changement est licite, puisque les valeurs du tableau numérique 6 sont relatives et non absolues. C'est dans ce sens que nous entendrons I_λ dans la suite.

3. CALCUL DE LA FONCTION Θ . — Le calcul de la fonction Θ peut se faire par intégration numérique ou graphique. Nous calculerons d'abord, en utilisant le graphique 8, la fonction

$$\frac{\rho_0}{R} \frac{1}{\cos^2 \psi} \theta \left(\lambda, \frac{\rho_0}{R} \frac{1}{\cos \psi} \right)$$

pour différentes valeurs de ψ . Une intégration numérique nous fournit, alors, la valeur de Θ pour différentes valeurs de $\frac{\rho_0}{R}$.

TABEAU NUMERIQUE 10.

$\rho_0/R \lambda$	4047	4861	5350	5893	6563	6907
1	0	0	0	0	0	0
0,9	0,190	0,209	0,222	0,230	0,245	0,259
0,8	0,330	0,361	0,380	0,395	0,412	0,420
0,7	0,443	0,481	0,496	0,512	0,530	0,538
0,6	0,548	0,528	0,592	0,611	0,618	0,642
0,4	0,701	0,714	0,742	0,759	0,772	0,784
0,2	0,793	0,813	0,837	0,848	0,873	0,882
0	0,822	0,842	0,852	0,864	0,876	0,886

Le tableau numérique 10 rassemble les valeurs trouvées pour les longueurs d'onde étudiées. Ainsi

qu'il résulte de la remarque 2, Θ est exprimé en fraction décimale.

La planche 9 représente, pour des valeurs de α' variant de $-16'$ à $+16'$, et pour les longueurs d'onde étudiées, la fonction Θ et la circonférence solaire. Ainsi qu'il a été dit à la remarque 3, la courbe $\Theta=0$ limite le disque de brillance uniforme qui peut remplacer le disque solaire pour une longueur d'onde déterminée.

4. CALCUL DE $S_\lambda(\alpha_0)$. — Nous effectuerons le calcul pour des directions α_0 réparties dans la partie colorée du halo. Pour chacune de ces directions α_0 , nous construirons la fonction

$$L_\lambda(\alpha_0 + \alpha') \Theta \left(\frac{\rho_0}{R} \right)$$

pour des valeurs de α' variant de $-16'$ à $+16'$. L'aire du diagramme ainsi constitué fournit la valeur de l'intégrale figurant dans (29).

La courbe résultant de l'intégration est représentée sur la planche 10 (pour $\lambda=4047 \text{ \AA}$).

Le tableau numérique 11 réunit les valeurs de l'intégrale pour différentes valeurs de α_0 et pour les longueurs d'onde étudiées.

Pour achever le calcul de $S_\lambda(\alpha_0)$, il faut encore multiplier les nombres de ce tableau par $2I_\lambda R D^2$. Nous effectuerons cette opération au chapitre V.

Remarques. — 1. Recherchons la direction α_0 pour laquelle $S_{4047}(\alpha_0)=0$. Comme les fonctions L_λ et Θ ne sont pas négatives, $S_{4047}(\alpha_0)$ ne peut s'annuler que lorsque $L_{4047}(\alpha_0 + \alpha')$ est constamment nul, quel que soit α' , ce qui se produit pour $\alpha_0 + \alpha' < 22^\circ 35' 06''$,

Planche 9.

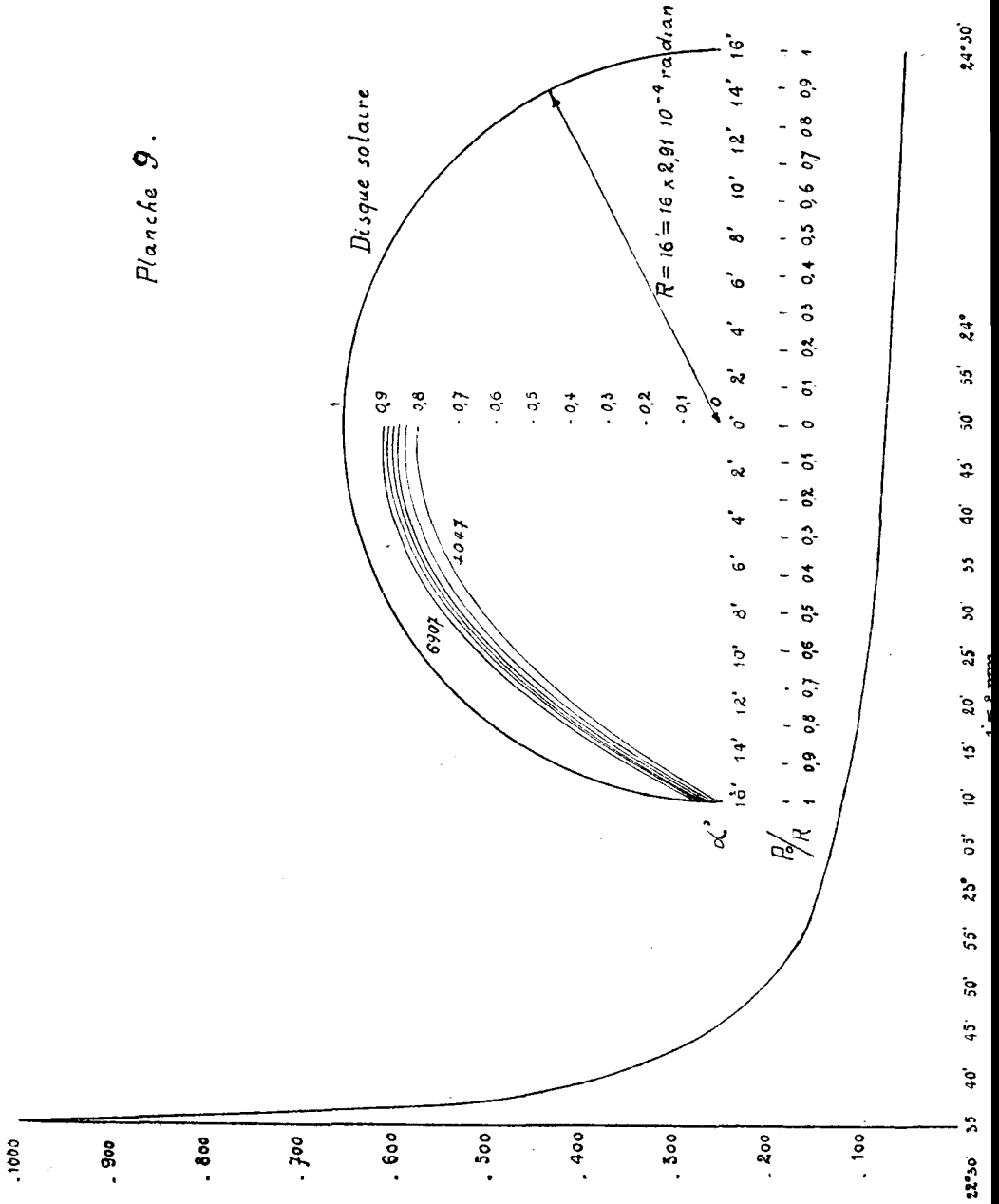
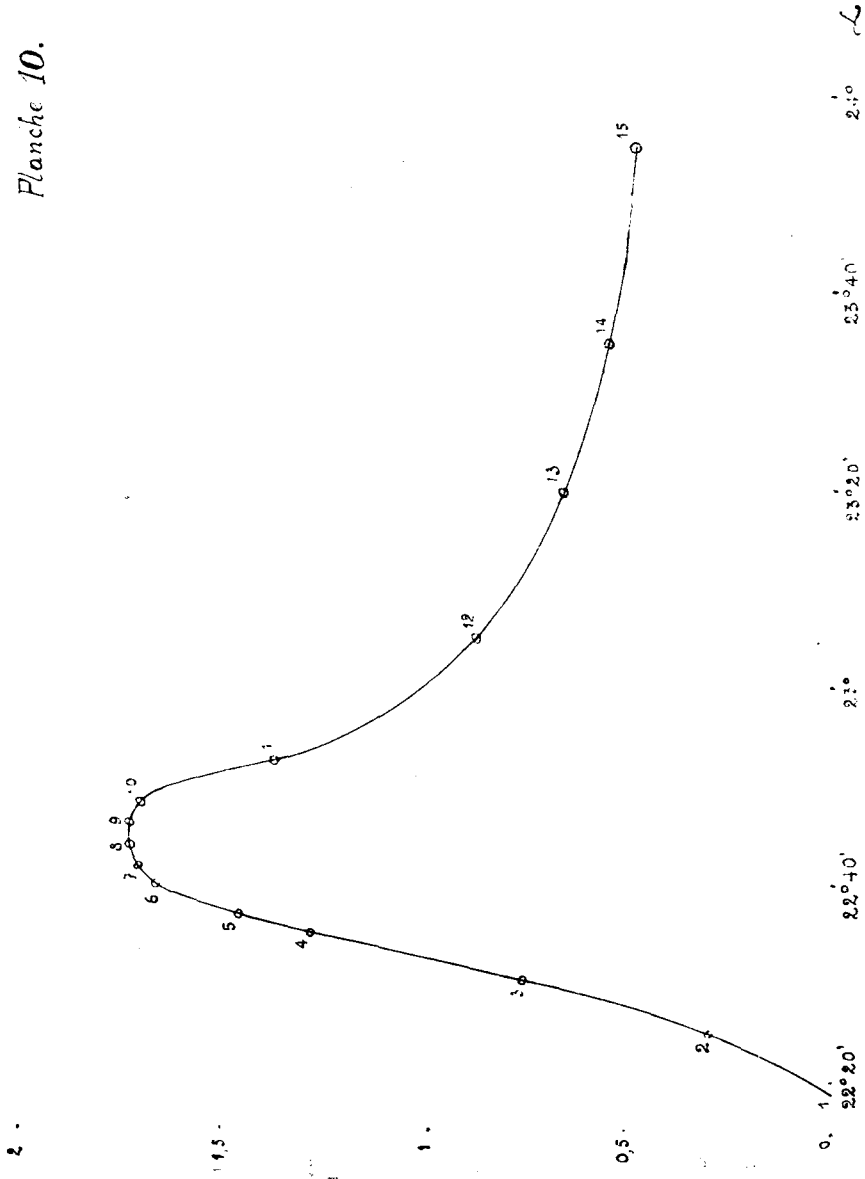


TABLEAU NUMÉRIQUE 11.

λ en A	n															
6907	1,30655	21°17'36"	21°23'36"	21°28'36"	21°33'36"	21°35'36"	21°38'36"	21°40'36"	21°42'36"	21°44'36"	21°46'36"	21°50'36"	22°03'36"	22°18'36"	22°33'36"	22°53'36"
		0	0,349	0,815	1,40	1,56	1,73	1,75	1,80	1,80	1,775	1,48	0,973	0,734	0,600	0,402
	1,30794	21°24'00"	21°30'00"	21°35'00"	21°40'00"	21°42'00"	21°45'00"	21°47'00"	21°49'00"	21°51'00"	21°53'00"	21°57'00"	22°10'00"	22°25'00"	22°40'00"	23°00'00"
		0	0,349	0,815	1,40	1,56	1,73	1,75	1,80	1,775	1,775	1,48	0,973	0,734	0,600	0,402
6563	1,30715	21°20'52"	21°26'52"	21°31'52"	21°36'52"	21°38'52"	21°41'52"	21°43'52"	21°45'52"	21°47'52"	21°49'52"	21°53'52"	22°06'52"	22°21'52"	22°36'52"	22°56'52"
		0	0,342	0,805	1,375	1,54	1,72	1,74	1,78	1,78	1,755	1,46	0,955	0,724	0,590	0,395
	1,30861	21°27'00"	21°33'00"	21°38'00"	21°43'00"	21°45'00"	21°48'00"	21°50'00"	21°52'00"	21°54'00"	21°56'00"	22°00'00"	22°13'00"	22°28'00"	22°43'00"	23°03'00"
		0	0,342	0,805	1,375	1,54	1,72	1,74	1,78	1,78	1,755	1,46	0,955	0,724	0,590	0,395
5893	1,30911	21°29'26"	21°35'26"	21°40'26"	21°45'26"	21°47'26"	21°50'26"	21°52'26"	21°54'26"	21°56'26"	21°58'26"	22°02'26"	22°15'26"	22°30'26"	22°45'26"	23°05'26"
		0	0,328	0,788	1,34	1,505	1,68	1,715	1,74	1,74	1,72	1,42	0,925	0,708	0,572	0,384
	1,31041	21°35'16"	21°41'16"	21°46'16"	21°51'16"	21°53'16"	21°56'16"	21°58'16"	22°00'16"	22°02'16"	22°04'16"	22°08'16"	22°21'16"	22°36'16"	22°51'16"	23°11'16"
		0	0,328	0,788	1,34	1,505	1,68	1,715	1,74	1,74	1,72	1,42	0,925	0,708	0,572	0,384
5350	1,31098	21°37'46"	21°43'46"	21°48'46"	21°53'46"	21°55'46"	21°58'46"	22°00'46"	22°02'46"	22°04'46"	22°06'46"	22°10'46"	22°23'46"	22°38'46"	22°53'46"	23°13'46"
		0	0,317	0,775	1,31	1,47	1,66	1,69	1,715	1,715	1,69	1,39	0,903	0,694	0,557	0,372
	1,31242	21°44'20"	21°50'20"	21°55'20"	22°00'20"	22°02'20"	22°05'20"	22°07'20"	22°09'20"	22°11'20"	22°13'20"	22°17'20"	22°30'20"	22°45'20"	23°00'20"	23°20'20"
		0	0,317	0,775	1,31	1,47	1,66	1,69	1,715	1,715	1,69	1,39	0,903	0,694	0,557	0,372
4861	1,31355	21°48'34"	21°54'34"	21°59'34"	22°04'34"	22°06'34"	22°09'34"	22°11'34"	22°13'34"	22°15'34"	22°17'34"	22°21'34"	22°34'34"	22°49'34"	23°04'34"	23°24'34"
		0	0,308	0,763	1,285	1,44	1,63	1,67	1,69	1,69	1,665	1,36	0,882	0,683	0,547	0,361
	1,31473	21°55'00"	22°01'00"	22°06'00"	22°11'00"	22°13'00"	22°16'00"	22°18'00"	22°20'00"	22°22'00"	22°24'00"	22°28'00"	22°41'00"	22°56'00"	23°11'00"	23°31'00"
		0	0,308	0,763	1,285	1,44	1,63	1,67	1,69	1,69	1,665	1,36	0,882	0,683	0,547	0,361
4047	1,31844	22°11'54"	22°17'54"	22°22'54"	22°27'54"	22°29'54"	22°32'54"	22°34'54"	22°36'54"	22°38'54"	22°40'54"	22°44'54"	22°57'54"	23°12'54"	23°27'54"	23°47'54"
		0	0,291	0,742	1,26	1,39	1,59	1,635	1,65	1,65	1,62	1,315	0,845	0,661	0,526	0,345
	1,31994	22°18'36"	22°24'36"	22°29'36"	22°34'36"	22°36'36"	22°39'36"	22°41'36"	22°43'36"	22°45'36"	22°47'36"	22°51'36"	23°04'36"	23°19'36"	23°34'36"	23°54'36"
		0	0,291	0,742	1,26	1,39	1,59	1,635	1,65	1,65	1,62	1,315	0,845	0,661	0,526	0,345

Planche 10.

— 209 —



ainsi qu'il ressort du tableau numérique 4. La valeur α_0 cherchée est fournie par la plus grande valeur de α' , soit $\alpha' = +16'$. Elle vaut donc $22^\circ 35' 06'' - 16' = 22^\circ 19' 06''$. En se rappelant que le minimum de déviation de $\lambda = 4047 \text{ \AA}$ est pour le rayon extraordinaire $22^\circ 35' 36''$, et en transposant le raisonnement ci-dessus aux autres longueurs d'onde, on voit que, pour une longueur d'onde donnée, le halo commence à apparaître à $-16^\circ 30'$ de la direction pour laquelle a lieu le minimum de déviation de cette longueur d'onde. Cette valeur de $16^\circ 30'$ correspond à la somme du rayon apparent du soleil et de la demi-ouverture du cône d'observation. Le point du soleil qui concourt au halo dans cette direction est le point pour lequel $\alpha' = +16'$, c'est-à-dire le point D' (fig. 10).

2. A partir de cette valeur l'intensité du halo croît, pour atteindre son maximum à environ $+9'$ de la direction correspondant au minimum de déviation (voir tableau numérique 11).

CHAPITRE IV.

Le bleu du ciel.

1. DIFFUSION PAR UN MILIEU TROUBLE. — Rappelons les lois théoriques de Lord Rayleigh, applicables à la diffusion de la lumière par de nombreuses sphères isotropes, n'agissant pas les unes sur les autres et de diamètre beaucoup plus petit que la plus petite longueur d'onde du faisceau incident.

1° Les rayons envoyés par diffusion dans une direction perpendiculaire à celle du faisceau incident

sont polarisés rectilignement d'une manière complète. La direction de la vibration est normale au plan du rayon incident et du rayon diffusé.

2° La masse de gaz qui diffuse se comporte comme une source dont l'intensité I est donnée par l'équation

$$I = k(1 + \cos^2 \theta), \quad (32)$$

où θ est l'angle des rayons incidents et diffusés; k dépend notamment de la nature du gaz diffusant, de son volume et de la quatrième puissance de l'inverse de la longueur d'onde.

2. APPLICATION AU BLEU DU CIEL. — La lumière solaire, diffusée par les molécules de l'air, obéit d'une manière satisfaisante aux deux lois précédentes :

1° La lumière venant de la région du ciel située dans le vertical du soleil et à 90° de celui-ci renferme une forte proportion de lumière polarisée, vibrant normalement au plan des rayons incident et diffusé. La proportion de lumière polarisée dépasse souvent 70 %. Nous ne possédons pas de données expérimentales sur la proportion de lumière polarisée dans d'autres directions.

2° La loi de diffusion en λ^{-4} n'est pas vérifiée rigoureusement, ainsi qu'il ressort des valeurs de la troisième ligne du tableau numérique 6. Les intensités relatives des radiations λ 4047 et 6097 Å devraient être dans le rapport $\left(\frac{6097}{4047}\right)^4 = 8,1$, alors que l'expérience fournit $\frac{129}{28} = 4,6$.

3. POSITION DU PROBLÈME. — Tout point du ciel est susceptible de constituer une source ponctuelle dont le rayonnement est réfracté par les cristaux de glace d'un cirrus suivant les lois étudiées aux § 5, 6, 7 et 8 du chapitre II. La lumière provenant de certains points du ciel est réfractée dans la direction α_0 où l'on observe le halo et, par suite, se superpose à lui.

Le but de ce chapitre est de rechercher :

1° Les régions du ciel pouvant donner lieu au phénomène;

2° Les intensités relatives des composantes dues à la source solaire et à la lumière du ciel.

Pour ce faire, il est nécessaire de préciser davantage les caractéristiques de la source. En l'absence de données numériques sur la composition spectrale de la lumière du ciel à l'altitude des cirrus et sur son état de polarisation sur des cercles centrés sur le soleil, nous serons forcé de faire quelques hypothèses sur la lumière de la source.

4. LA LUMIÈRE DU CIEL.

a) *État de polarisation.* — Montrons d'abord l'influence de l'état de polarisation de la source sur le phénomène.

Nous avons rappelé au § 1 du chapitre premier que le cristal de glace est un cristal uniaxe positif ($n_e > n_o$). Puisque le phénomène se passe dans la section droite du prisme, l'axe de symétrie du cristal est perpendiculaire au plan d'incidence. Celui-ci est donc perpendiculaire à tout plan parallèle à l'axe de symétrie, c'est-à-dire à toute section principale du cristal.

Par rapport à la lumière du ciel, le cristal de glace joue le rôle d'analyseur. Examinons comment il se comporte vis-à-vis de la lumière du ciel.

La fraction de lumière naturelle qu'elle contient se partage également entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire.

La fraction de lumière polarisée passe toute entière dans le rayon extraordinaire. En effet, nous avons vu que le plan de polarisation de la lumière du ciel est le plan du rayon incident et du rayon diffusé. Il est donc perpendiculaire à la section principale du cristal. Puisque le rayon ordinaire est polarisé dans le plan de la section principale et le rayon extraordinaire dans le plan de la section droite, il s'ensuit qu'après réfraction le rayon ordinaire est éteint et que le rayon extraordinaire subsiste seul; il a d'ailleurs l'intensité du rayon incident, si l'on néglige l'absorption au sein du cristal.

Que la lumière incidente soit naturelle ou polarisée, l'énergie émergente est égale à l'énergie incidente s'il n'y a pas d'absorption. Comme nous n'avons en vue que de rendre compte du phénomène tel que l'œil le voit, sans l'interposition d'un nicol, il est indifférent de savoir si l'énergie émergente est portée par le rayon extraordinaire ou par le rayon ordinaire, ou en partie par l'un et l'autre. Il n'y a donc pas d'inconvénient à supposer que la lumière du ciel n'est pas polarisée.

b) *Intensité de la lumière diffusée.* — Maurain (*loc. cit.*) donne les valeurs, en un point de la terre, des intensités du rayonnement solaire lorsque la hauteur du soleil est de 65° . Ce sont les valeurs du tableau numérique 5, illustrées par la courbe infé-

rière de la planche 4. Nous en déduisons, par interpolation linéaire, les valeurs m_2 relatives aux longueurs d'onde dont nous nous occupons, valeurs reproduites au tableau numérique 6.

Imaginons une sphère diffusante de rayon D_2 englobant le nuage et centrée sur l'œil de l'observateur O. Des grandeurs m_2 mesurées en un point de la terre, nous pouvons déduire, pour chaque longueur d'onde, la valeur du coefficient k figurant dans (32).

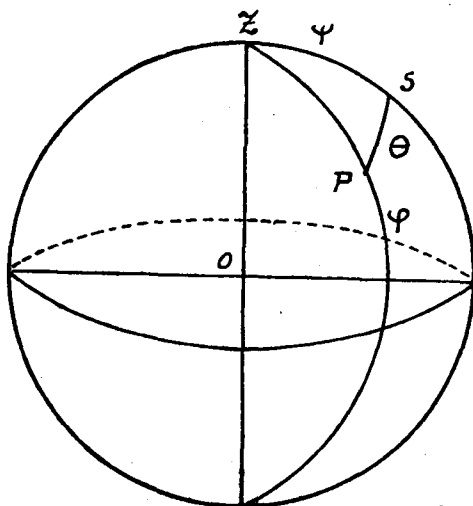


Fig 10.

Considérons une sphère (r), concentrique à (D_2), de rayon r suffisamment petit pour qu'on puisse admettre que toute l'énergie qui la traverse parvient en O. Soit A l'énergie qui traverse (D_2). De cette énergie, une partie seulement, m_2 , parvient en O. La quantité $A - m_2$ est diffusée. Supposons maintenant qu'entre les sphères (r) et (D_2) n'existe pas de milieu diffusant. L'énergie m_2 arrivant en O est alors

celle qui traverse (D_2). Il en résulte qu'au lieu de considérer la répartition énergétique du rayonnement du ciel sur une sphère (D_2), il suffit, au point de vue de ses effets en O, de supposer que la sphère (D_2) est traversée par une énergie m_2 et qu'entre (D_2) et O n'existe aucun milieu diffusant.

Pour calculer k , considérons la sphère (D_2) (fig. 10) et, sur cette sphère, le point de percée S de la droite observateur-soleil, le zénith Z et un point P quelconque de la sphère. Soit φ la hauteur de P au-dessus de l'horizon et ψ l'angle PZS compté à partir du grand cercle ZS. L'arc de grand cercle SP vaut θ et, dans les conditions d'expérience de Maurain, $ZS = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

Dans le triangle ZSP on a

$$\cos \theta = \sin \varphi \cos 25^\circ + \cos \varphi \sin 25^\circ \cos \psi;$$

d'où

$$1 + \cos^2 \theta = 1 + \sin^2 \varphi \cos^2 25^\circ + \cos^2 \varphi \sin^2 25^\circ \cos^2 \psi \\ + \sin \varphi \sin 50^\circ.$$

Une surface élémentaire $D_2^2 \cos \varphi d\varphi d\psi$ de la demi-sphère située au-dessus de l'horizon envoie en O l'énergie

$$k (1 + \cos^2 \theta) D_2^2 \cos \varphi d\varphi d\psi.$$

La demi-sphère entière envoie en O l'énergie m_2 . Par suite,

$$m_2 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} k D_2^2 (1 + \cos^2 \theta) \cos \varphi d\psi d\varphi \\ = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} k D_2^2 [\cos \varphi + \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos^2 25^\circ \\ + \cos^3 \varphi \sin^2 25^\circ \cos^2 \psi + \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin 50^\circ \cos \psi] d\psi d\varphi, \quad (33)$$

ou, après intégration,

$$k D_2^2 \frac{8\pi}{3} = m_2. \quad (34)$$

La valeur de l'intégrale (33) est indépendante de la hauteur du soleil.

Remarques. — 1. Ce résultat peut être prévu géométriquement.

Soit la sphère céleste de centre O, le plan de l'horizon H et le soleil S (fig. 11). Le grand cercle perpendiculaire à SO découpe dans le plan de l'horizon le

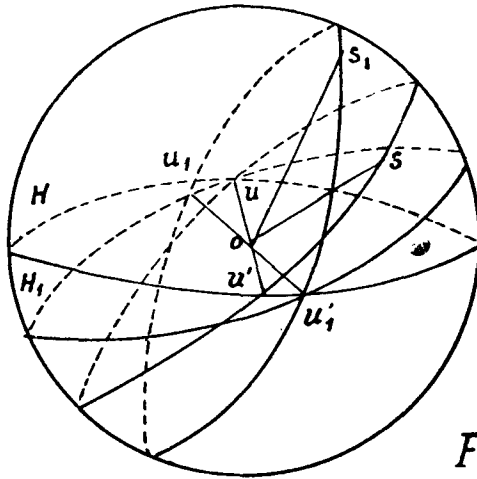


Fig. 11.

diamètre UU' . Considérons une autre position S_1 du soleil. Le grand cercle perpendiculaire à S_1O découpe dans le plan de l'horizon le diamètre $U_1U'_1$. Quelle que soit la position du soleil, la partie de la sphère qui envoie de la lumière en O est celle qui se trouve au-dessus de H.

Voyons comment varie la fonction

$$\int_{\Sigma} (1 + \cos^2 \theta) d\sigma$$

étendue à la demi-sphère agissante Σ .

Considérons la droite Δ , intersection des grands cercles perpendiculaires à SO et S_1O . Faisons pivoter, autour de Δ comme axe, l'ensemble S, UU', H , de manière que S vienne en S_1 . UU' viendra en $U_1U'_1$ et H en H_1 . Par suite, lorsque le soleil passe de S en S_1 , le quartier $U_1U'U'_1$ compris entre H et H_1 s'enfonce sous l'horizon et n'envoie plus de lumière en O , tandis que le quartier $U_1UU'_1$ apparaît au-dessus de l'horizon et envoie de la lumière en O . Ces deux quartiers sont égaux. A tout point de $U_1UU'_1$, distant de S de θ , il est possible d'associer un point de $U_1U'U'_1$ qui lui est diamétralement opposé et dont la distance à S est $\pi - \theta$. Pour chacun de ces couples de points, la fonction $(1 + \cos^2 \theta)$ a même valeur.

Il en résulte que, lorsque le soleil passe de S en S_1 , la fonction

$$\int_{\Sigma} (1 + \cos^2 \theta) d\sigma$$

reste constante.

2. L'observateur O reçoit du soleil, pour une longueur d'onde déterminée, une énergie m_1 . Cette énergie passe toute entière au travers de la surface découpée sur (D_2) par le cône de sommet O , d'axe OS et d'ouverture $2R$. De même que ci-dessus, nous pouvons rechercher la densité d'énergie à attribuer à cette surface, pour que l'énergie reçue en O soit égale à m_1 .

En raison de l'assombrissement des bords, cette densité n'est pas constante. Cependant, si nous remplaçons le disque solaire par le disque de densité uniforme défini au § 2 du chapitre précédent, nous pouvons attribuer à la surface découpée sur (D_2) par le cône de sommet O, d'axe OS, dont la section droite est le nouveau disque, une densité d'énergie constante K. En appelant σ_λ le rapport des surfaces de ce disque au disque solaire, pour une longueur d'onde déterminée, on a immédiatement

$$2 R \sigma_\lambda D_2^2 K = m_1. \quad (35)$$

La planche 11 fournit les valeurs suivantes de σ_λ :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
σ_λ	0,84	0,82	0,79	0,77	0,75	0,71

En comparant (34) et (35), on obtient

$$\frac{K}{h} = \frac{1}{\sigma_\lambda} \frac{4}{3 R} \frac{m_1}{m_2} = 0,898 \frac{m_1 10^3}{m_2 \sigma_\lambda}. \quad (36)$$

En utilisant le tableau numérique 6, on obtient le rapport $\frac{K}{h}$ pour les longueurs d'onde étudiées :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
$10^{-3} \frac{K}{h}$	12,98	11,77	8,79	6,73	5,66	2,16

5. CALCUL DE L'INTENSITÉ DU RAYONNEMENT DU CIEL RÉFRACTÉ PAR LE NUAGE.

a) *Détermination de la région utile du ciel.* — Recherchons d'abord quels sont les points du ciel dont la lumière, réfractée par les cristaux de glace situés dans le cône d'observation, vient se superposer au halo. Considérons, pour simplifier l'exposé, une

longueur d'onde déterminée, soit $\lambda = 4047 \text{ \AA}$. Le tableau numérique 1 montre que les rayons extraordinaires de cette longueur d'onde peuvent être déviés d'angles compris entre $22^\circ 35' 36''$ et $44^\circ 14' 35''$. Par suite, un observateur regardant dans une direction déterminée où se trouvent des cristaux de glace, reçoit la lumière du ciel réfractée d'angles compris entre ces deux valeurs. Étant donné le désordre idéal des prismes, on en conclut que la lumière du ciel qui peut venir se superposer au halo est comprise entre 2 cônes dont les axes coïncident avec la direction d'observation, dont les ouvertures valent respectivement $2 \times 22^\circ 35' 36''$ et $2 \times 44^\circ 14' 35''$ et dont les sommets se trouvent au point de percée de l'axe et du nuage.

b) *Contribution du bleu du ciel.* — Nous avons montré, au § 4, qu'au point de vue de l'intensité lumineuse envoyée en un point de la terre par l'atmosphère terrestre, il revenait au même de supposer que cette énergie est répartie sur une sphère de rayon D_2 suffisamment grand, avec une densité non uniforme $k(1 + \cos^2 \theta)$ (32) où k a la valeur donnée par (34) et où θ est la distance angulaire du soleil au point considéré de (D_2) . Cette densité d'énergie est la même pour tous les points d'un même cercle centré sur le soleil.

Reprenons la sphère (D_2) (fig. 12) et les points de percée sur cette sphère des droites joignant l'observateur O au soleil S et à un point du halo P. Les deux cônes définis au littéra a) découpent, sur (D_2) , une zone dont les rayons angulaires valent $22^\circ 35' 36''$ et $44^\circ 14' 35''$. Soit Q un point de cette zone. Appelons respectivement α_0 , α'' et θ les arcs de grands cercles

SP, PQ et SQ. Soit χ l'angle SPQ. La densité d'énergie diffusée par le point Q est donnée par (32). L'énergie émise par une surface élémentaire

$$D_2^2 \sin \alpha'' dx'' d\chi,$$

est donnée par

$$k D_2^2 (1 + \cos^2 \theta) \sin \alpha'' dx'' d\chi.$$

Lorsque cette énergie rencontre les prismes situés sur la droite OP, une partie seulement est réfractée vers l'observateur dans le cône d'observation. Cette por-

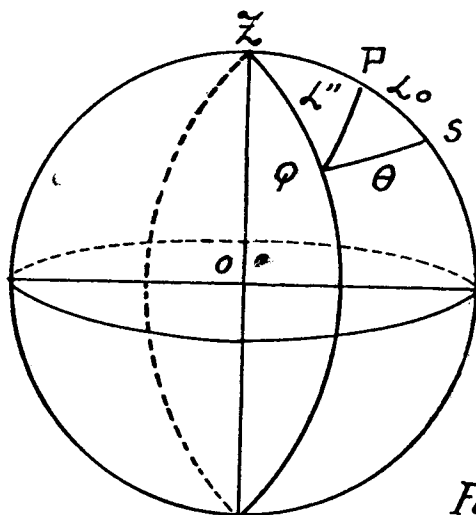


Fig. 12.

tion de l'énergie, réfractée d'un angle α'' , vaut $L_\lambda(\alpha'')$ suivant la formule (22). Par suite, la portion de la lumière du ciel qui parvient à l'observateur, après réfraction par les cristaux, vaut

$$k D_2^2 (1 + \cos^2 \theta) L_\lambda(\alpha'') \sin \alpha'' dx'' d\chi.$$

La contribution de la partie utile de l'atmosphère est obtenue en faisant la somme de ces énergies partielles

lorsque χ varie de 0 à 2π et α'' de $22^\circ 35' 36''$ et $44^\circ 14' 35''$, soit

$$B_\lambda(\alpha_0) \equiv \int_{\chi=0}^{\chi=2\pi} \int_{\alpha''=22^\circ 35' 36''}^{\alpha''=44^\circ 14' 35''} k D_2^2 (1 + \cos^2 \theta) L_\lambda(\alpha'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\chi. \quad (37)$$

Évaluons $\cos \theta$ en fonction de α_0 , α'' et χ .

Dans le triangle SPQ on a

$$\cos \theta = \cos \alpha_0 \cos \alpha'' + \sin \alpha_0 \sin \alpha'' \cos \chi;$$

d'où

$$(1 + \cos^2 \theta) = 1 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha'' + \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha'' \cos^2 \chi + \sin^2 \alpha_0 \sin \alpha'' \cos \alpha'' \cos \chi.$$

L'intégrale (37) s'écrit

$$B_\lambda(\alpha_0) = \int_0^{2\pi} \int_{22^\circ 35' 36''}^{44^\circ 14' 35''} k D_2^2 (1 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha'' + \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha'' \cos^2 \chi + \sin 2\alpha_0 \sin \alpha'' \cos \alpha'' \cos \chi) L_\lambda(\alpha'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\chi \quad (38)$$

En intégrant par rapport à χ il vient

$$B_\lambda(\alpha_0) = \int_{\alpha''=22^\circ 35' 36''}^{\alpha''=44^\circ 14' 35''} k D_2^2 \pi [2 + 2 \cos^2 \alpha'' \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha'' \sin^2 \alpha_0] L_\lambda(\alpha'') \sin \alpha'' d\alpha'' \quad (39)$$

6. ÉTUDE DE LA FONCTION $B_\lambda(\alpha_0)$. — Avant de calculer $B_\lambda(\alpha_0)$, nous allons étudier l'allure de la fonction pour des directions α_0 où l'on observe le halo, c'est-à-dire pour $21^\circ 30' < \alpha_0 < 45^\circ$.

En dérivant (39) par rapport à α_0 , on trouve

$$\frac{dB_\lambda(\alpha_0)}{d\alpha_0} = \sin 2\alpha_0 \int_{\alpha''=22^\circ 35' 36''}^{44^\circ 14' 35''} k D_2^2 \pi [-2 \cos^2 \alpha'' + \sin^2 \alpha''] L_\lambda(\alpha'') \sin \alpha'' d\alpha'' \quad (40)$$

$$\frac{d^2 B_\lambda(\alpha_0^2)}{d\alpha_0^2} = 2 \cos 2\alpha_0 \int_{\alpha''=22^\circ 35' 36''}^{\alpha''=44^\circ 14' 35''} k D_2^2 \pi [-2 \cos^2 \alpha'' + \sin^2 \alpha''] L_\lambda(\alpha'') \sin \alpha'' d\alpha''. \quad (41)$$

La fonction $\frac{dB_\lambda}{d\alpha_0}$ s'annule pour $\alpha_0=0$ et $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$.

Puisque $L_\lambda(\alpha'')$ et $\sin \alpha''$ sont positives dans l'intervalle de variation de α'' , le signe de l'intégrale est donné par le signe de la fonction

$$-2 \cos^2 \alpha'' + \sin^2 \alpha'',$$

qui est négative si

$$\operatorname{tg} \alpha'' < \sqrt{2}$$

ou

$$\alpha'' < 54^{\circ}40'.$$

Il en résulte que $\frac{d^2 B_\lambda(\alpha_0)}{d\alpha_0^2}$ est négative pour $\alpha_0=0$ et positive pour $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$.

$B_\lambda(\alpha_0)$ présente donc un maximum pour $\alpha_0=0$ et un minimum pour $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$.

(41) montre aussi que, puisque

$$\frac{d^3 B_\lambda(\alpha_0)}{d\alpha_0^3} \neq 0,$$

$B_\lambda(\alpha_0)$ présente un point d'inflexion pour $\alpha_0=\frac{\pi}{4}$.

On en conclut que dans le domaine de variation de α_0 , la fonction $B_\lambda(\alpha_0)$ est positive et décroissante; de plus, sa courbure ne change pas de sens dans l'intervalle considéré.

7. CALCUL DE $B_\lambda(\alpha_0)$. — Nous calculerons numériquement la fonction $B_\lambda(\alpha_0)$ en trois points numérotés 1, 2, 3, correspondant respectivement à :

1. la plus petite direction α_0 , où $S_\lambda(\alpha_0)=0$ (valeur de la première colonne du tableau numérique 11);

2. $\alpha_0=33^{\circ}$;

3. la plus grande direction α_0 , où $S_\lambda(\alpha_0)=0$.

Quand on passe d'une longueur d'onde à la suivante, les limites de l'intégrale (39) changent ainsi que le facteur k , donné par (34), et la fonction L_λ , définie par (23).

Les valeurs de $\frac{B_\lambda(\alpha_0)}{k D_2^2 \pi}$ sont consignées dans le tableau numérique 12.

On voit que la variation de $B^\wedge(\alpha_0)$ est relativement faible (environ 13 % de la valeur maximum) lorsqu'on passe d'une extrémité à l'autre du halo.

Remarque. — Pour des directions $\alpha_0 < 21^\circ 30'$, la fonction $B_\lambda(\alpha_0)$ conserve un sens physique. Elle représente l'énergie réfractée par les cristaux de glace dans un cône dont l'axe est la droite observateur-centre du soleil et dont l'ouverture est inférieure au plus petit rayon angulaire du halo.

TABLEAU NUMÉRIQUE 12.

		1	2	3
6907	n_o	10,98	9,88	9,58
	n_e	11,12	9,99	9,69
6563	n_o	11,05	9,93	9,65
	n_e	11,18	10,05	9,74
5893	n_o	11,23	10,09	9,78
	n_e	11,36	10,20	9,89
5350	n_o	11,41	10,24	9,93
	n_e	11,57	10,35	10,03
4861	n_o	11,65	10,44	10,12
	n_e	11,76	10,55	10,22
4047	n_o	12,12	10,86	10,43
	n_e	12,27	10,98	10,53

CHAPITRE V.

Description du halo solaire.

1. CALCUL DE $S_\lambda(\alpha_0)$ ET DE $B_\lambda(\alpha_0)$. — Nous avons calculé au chapitre précédent l'intensité de la lumière du ciel qui, réfractée par les cristaux du cirrus, sert de « fond » au halo. Elle est donnée par la formule (39).

D'autre part, la fonction $S_\lambda(\alpha_0)$ [formule (29)] fournit l'intensité du halo dans une direction α_0 . Dans cette formule, D_1 représente la distance observateur-soleil et I_λ l'intensité de la lumière émise par le soleil pour une longueur d'onde déterminée. En vertu de la remarque 5, nous pouvons, au lieu de la sphère D_1 , considérer toute autre sphère concentrique et, en particulier la sphère D_2 . Mais alors, au lieu de l'intensité I_λ , nous devons considérer l'intensité de la lumière solaire sur (D_2), ou, ce qui revient au même, la densité d'énergie K donnée par (35). Entre K et I existe la relation

$$K D_2^2 = I_\lambda D_1^2.$$

Par suite, $S_\lambda(\alpha_0)$ devient

$$S_\lambda(\alpha_0) = 2K D_2^2 R \int_{-16'}^{+16'} I_\lambda(\alpha_0 + \alpha') \Theta\left(\frac{\alpha_0}{R}, \lambda\right) d\alpha'.$$

Puisque le rayon de la sphère (D_2) ne doit obéir qu'à la condition d'être suffisamment grand pour englober le nuage, nous pouvons, en particulier, choisir l'unité de longueur telle que $D_2 = 1$. En tenant

compte de (34) et (35), $S_\lambda(\alpha_0)$ et $B_\lambda(\alpha_0)$ deviennent respectivement

$$S_\lambda(\alpha_0) = \frac{m_1}{\sigma_\lambda} \int_{-16'}^{+16'} L_\lambda(\alpha_0 + \alpha') \Theta\left(\frac{\rho_0}{R}, \lambda\right) d\alpha' \quad (42)$$

et

$$B_\lambda(\alpha_0) = \frac{3m_2}{8} \int_{\alpha''_1}^{\alpha''_2} [2 + 2\cos^2\alpha'' \cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha'' \sin^2\alpha_0] L_\lambda(\alpha'') \sin\alpha'' d\alpha'', \quad (43)$$

où m_1 et m_2 sont donnés par le tableau numérique 6. L'intégrale figurant dans $S_\lambda(\alpha_0)$ est fournie par le tableau numérique 11; celle figurant dans B_λ , par le tableau numérique 12.

2. LE HALO SOLAIRE MONOCHROMATIQUE. — Considérons une longueur d'onde particulière, soit $\lambda = 4047 \text{ \AA}$. Nous avons vu qu'après réfraction par les cristaux, l'énergie lumineuse du soleil, tout comme celle du ciel, supposée non polarisée, est portée également par le rayon extraordinaire et le rayon ordinaire. Mais les radiations ordinaire et extraordinaire sont déviées d'angles différents. De plus, dans une direction déterminée, leurs intensités sont différentes, ainsi que le montrent les tableaux numériques 11 et 12. Il en résulte que, pour décider de ce que l'œil voit dans une direction, on doit composer les intensités lumineuses du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire.

Nous calculerons donc $S_\lambda(\alpha_0)$ et $B_\lambda(\alpha_0)$ donnés par (42) et (43), pour le rayon ordinaire n_o et le rayon extraordinaire n_e . Nous tracerons ensuite, pour chacune de ces radiations, les fonctions $S_\lambda(\alpha_0) + B_\lambda(\alpha_0)$ et nous composerons les deux courbes obtenues. La

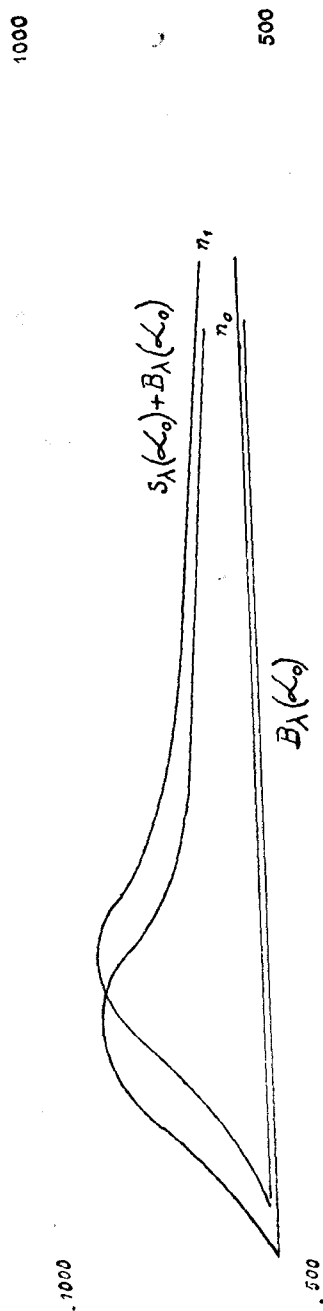
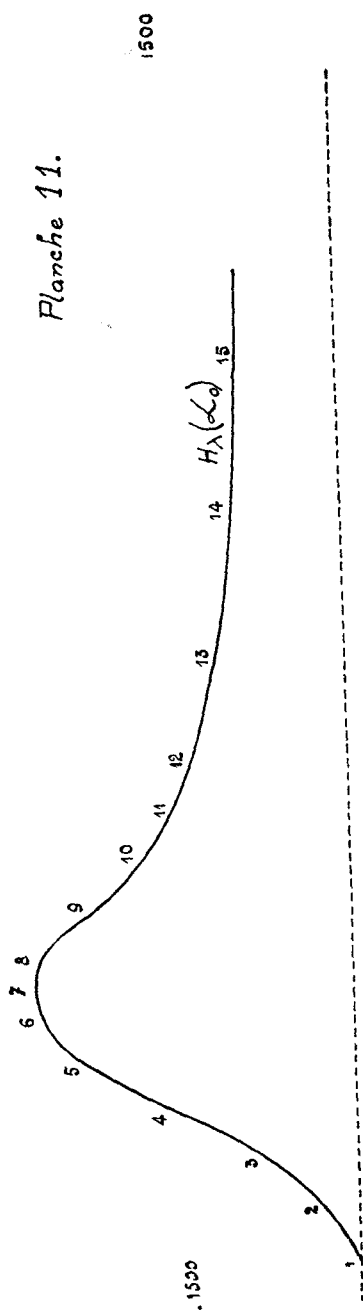
fonction $H_{\lambda}(\alpha_0)$ ainsi obtenue représente la variation de l'intensité lumineuse en travers du halo monochromatique. Les opérations que nous venons d'indiquer sont effectuées sur la planche 11. Le numérotage des points choisis pour construire les courbes $S_{\lambda}(\alpha_0) + B_{\lambda}(\alpha_0)$ est celui de la planche 10. Dans le tableau ci-dessous, nous avons rassemblé les valeurs de $H_{\lambda}(\alpha_0)$ pour différentes valeurs de α_0 .

α_0	$H_{\lambda}(\alpha_0)$	α_0	$H_{\lambda}(\alpha_0)$
22°11'54"	1180	22°42'54"	1785
22°17'54"	1245	22°47'54"	1708
22°22'54"	1356	22°52'54"	1600
22°27'54"	1535	22°57'54"	1525
22°32'54"	1700	23°02'54"	1480
22°37'54"	1790	23°12'54"	1445
22°40'54"	1800	23°27'54"	1390
		23°42'54"	1355

Le graphique 11 illustre de façon frappante l'importance relative de la lumière du ciel et de la lumière solaire dans leur contribution au halo : la lumière du ciel fournit un fond continu, représenté par le trait en pointillé dont l'intensité atteint en moyenne 1170 dans les unités choisies. Le halo proprement dit commence à apparaître à 22°11'54" et atteint son maximum à 22°40'54" environ. Mais la valeur de ce maximum ne s'élève que de 640 au-dessus du fond continu de la lumière du ciel.

Remarques. — 1. En choisissant la longueur d'onde $\lambda = 4047 \text{ \AA}$ pour l'étude ci-dessus, nous nous sommes placé dans le cas le plus défavorable à la visibilité du halo sur le fond continu. Le tableau numérique 6 montre en effet que c'est pour cette

Planche 11.



$22^{\circ}10'$ $22^{\circ}30'$ $23^{\circ}30'$ 24° λ_0 en degrés

longueur d'onde que le rapport $\frac{m_2}{m_1}$ est le plus grand. Lorsque λ croît, le rapport diminue, tandis que l'intégrale figurant dans $S_\lambda(\alpha_0)$ croît (voir tableau numérique 11). Il en résulte que l'importance relative du halo croît par rapport à celle du fond continu.

2. Si nous avons supposé la lumière du ciel partiellement polarisée, l'importance de la courbe $B_\lambda(\alpha_0)$ relative à n_2 aurait été augmentée par rapport à celle de la même courbe relative à n_0 . Mais la courbe résultant de la superposition des deux précédentes — courbe en traits pointillés — n'aurait pas changé, puisque l'énergie émergeant du cristal est égale à l'énergie incidente.

3. APPLICATION AUX AUTRES LONGUEURS D'ONDE. — En opérant sur les autres longueurs d'onde les calculs effectués sur la longueur d'onde $\lambda = 4047 \text{ \AA}$, nous obtenons les fonctions $H_\lambda(\alpha_0)$ relatives à ces longueurs d'onde. Leurs valeurs sont réunies dans le tableau numérique 13.

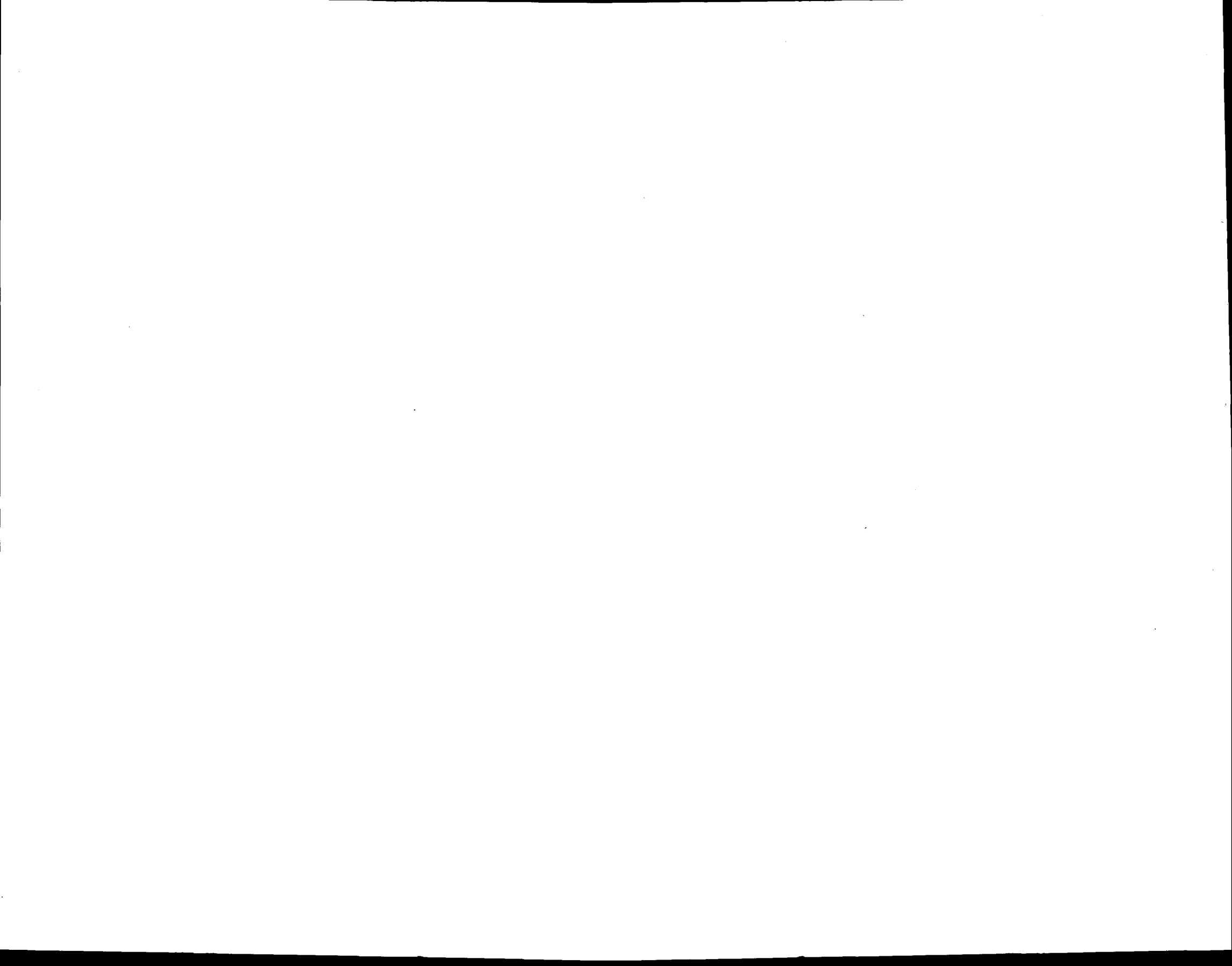
Puisque l'œil n'est pas également sensible à toutes les radiations, nous devons, pour obtenir l'intensité de chaque radiation telle que l'œil la voit, multiplier les valeurs de $H_\lambda(\alpha_0)$ par le coefficient de visibilité V_λ . Les valeurs du produit $H_\lambda(\alpha_0) V_\lambda$ sont aussi rassemblées dans le tableau numérique 13.

En portant en abscisses les déviations, et en ordonnées les logarithmes de $H_\lambda(\alpha_0) V_\lambda$, nous obtenons la planche 12, qui, tenant compte de la loi de Fechner, réalise une image des perceptions reçues par la conscience. Puisque les unités employées pour le calcul de $H_\lambda(\alpha_0)$ sont arbitraires, le graphique ne

TABLEAU NUMERIQUE 13.

en Å

4047	α_0	22°11'54"	22°17'54"	22°22'54"	22°27'54"	22°32'54"	22°37'54"	22°40'54"	22°42'54"	22°47'54"	22°52'54"	22°57'54"	23°02'54"	23°12'54"	23°27'54"	23°42'54"	—
	$H_\lambda (\alpha_0)$	1180	1245	1356	1535	1700	1790	1800	1785	1708	1600	1525	1480	1445	1390	1355	—
	$H_\lambda V_\lambda$	0,735	0,870	0,949	1,073	1,190	1,252	1,260	1,250	1,195	1,120	1,069	1,037	1,011	0,974	0,949	—
4861	α_0	21°48'34"	21°54'34"	21°59'34"	22°04'34"	22°09'34"	22°14'34"	22°17'34"	22°19'34"	22°24'34"	22°29'34"	22°34'34"	22°39'34"	22°49'34"	23°04'34"	23°19'34"	23°39'34"
	$H_\lambda (\alpha_0)$	705	855	1070	1330	1600	1790	1835	1770	1570	1420	1335	1260	1190	1140	1105	1075
	$H_\lambda V_\lambda$	125	151	188	235,5	283	317	325	314	278	252	236	223	211	202	196	190
5350	α_0	21°37'46"	21°43'46"	21°48'46"	21°53'46"	21°58'46"	22°03'46"	22°06'46"	22°08'46"	22°13'46"	22°18'46"	22°23'46"	22°28'46"	22°38'46"	22°53'46"	23°11'46"	23°31'46"
	$H_\lambda (\alpha_0)$	540	700	890	1035	1395	1615	1660	1585	1390	1235	1140	1080	1010	940	900	862
	$H_\lambda V_\lambda$	494	640	815	947	1275	1479	1520	1450	1270	1130	1042	989	924	860	824	789
5893	α_0	21°29'46"	21°35'46"	21°40'46"	21°45'46"	21°50'46"	21°55'46"	21°58'46"	22°00'46"	22°05'46"	22°10'46"	22°15'46"	22°20'46"	22°30'46"	22°45'46"	23°00'46"	23°20'46"
	$H_\lambda (\alpha_0)$	394	570	770	1020	1280	1390	1520	1445	1250	1110	1020	955	880	825	790	735
	$H_\lambda V_\lambda$	302	436	589	780	980	1062	1161	1108	956	849	780	731	673	632	604	562
6563	α_0	21°20'52"	21°26'52"	21°31'52"	21°36'52"	21°41'52"	21°46'52"	21°49'52"	21°51'52"	21°56'52"	22°01'52"	22°06'52"	22°11'52"	22°21'52"	22°36'52"	22°51'52"	23°11'52"
	$H_\lambda (\alpha_0)$	367	530	730	990	1230	1335	1460	1410	1200	1070	990	920	850	795	760	730
	$H_\lambda V_\lambda$	28,6	41,3	56,9	77,2	96,0	104	114	110	93,6	83,5	77,2	71,8	66,3	62,0	59,3	57,0
6907	α_0	21°17'36"	21°23'56"	21°28'56"	21°33'56"	21°38'56"	21°43'56"	21°46'56"	21°48'56"	21°53'56"	21°58'56"	22°03'56"	22°08'56"	22°18'56"	22°33'56"	22°48'56"	23°08'56"
	$H_\lambda (\alpha_0)$	322	470	690	920	1190	1306	1430	1370	1160	1020	930	870	800	740	705	685
	$H_\lambda V_\lambda$	2,58	3,86	5,52	7,36	9,52	10,3	11,45	10,95	9,29	8,16	7,44	6,96	6,40	5,92	5,64	5,48



nous fournit pas la valeur absolue des sensations. Nous ne pouvons donc comparer l'intensité de perception de deux longueurs d'onde.

4. DESCRIPTION DU HALO SOLAIRE. — En admettant, comme au chapitre II, que le spectre visible s'étend de 4047 Å à 6907 Å, l'examen de la planche 12 conduit aux conclusions suivantes :

De $\alpha_0 = 0^\circ$ (centre du soleil) à $\alpha_0 = 21^\circ 17' 30''$ les cristaux du cirrus ne réfractent vers l'observateur que la lumière du ciel. A partir de $\alpha_0 = 21^\circ 17' 30''$ ils réfractent, en plus, la lumière solaire, en l'occurrence la radiation $\lambda = 6907$ Å. Celle-ci atteint son maximum d'intensité à $21^\circ 46'$ environ. Au fur et à mesure qu'on s'écarte du soleil, le halo s'enrichit progressivement de toutes les couleurs du spectre. En $\alpha_0 = 22^\circ 11' 54''$ (où la radiation $\lambda = 4047$ Å commence à apparaître) toutes les radiations solaires sont présentes.

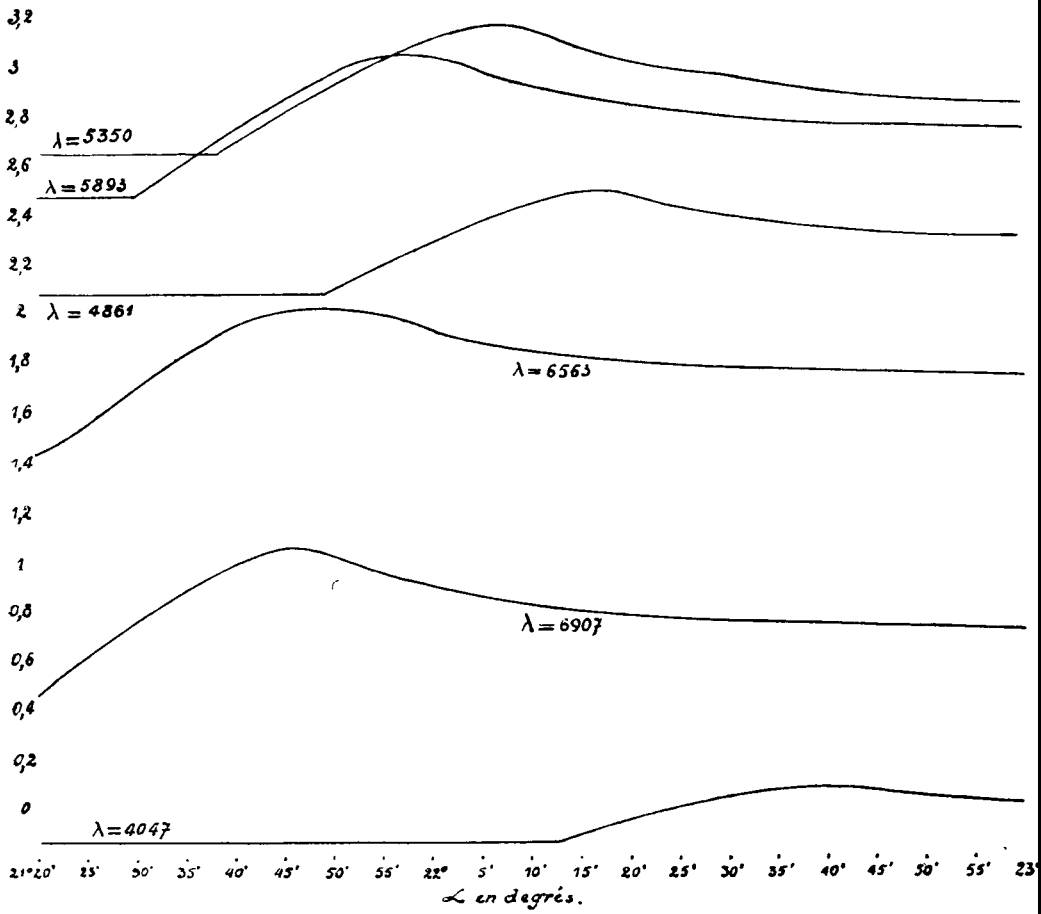
Recherchons, comme nous l'avons fait pour la source ponctuelle, la répartition des intensités, dans une direction déterminée.

Rappelons-nous que, dans le cas du halo d'une source ponctuelle, une coupe dans une direction α^* montre que les radiations de longueur d'onde inférieure à celle dont le maximum d'intensité est atteint en α^* sont absentes. La planche 12 montre, au contraire, qu'en ce qui concerne le halo solaire, toute radiation commence à apparaître bien avant d'atteindre son maximum d'intensité. Cette particularité est due à la substitution de la source large à la source ponctuelle.

Une coupe en $\alpha_0 = 22^\circ 07'$ (où la radiation $\lambda = 5893$ Å

$\text{Log. } H_{\lambda} (\angle_0) V_{\lambda}$

Planche 12.



atteint son maximum d'intensité) fournit pour $H_\lambda(\alpha_0) V_\lambda$ les valeurs suivantes :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
$H_\lambda V_\lambda$	7,08	77,64	1161	933	19,5	0,735

Pour déterminer, dans cette direction, la couleur prédominante, il faut comparer cette répartition d'intensité à celle du blanc (donnée au tableau numérique 6). En choisissant pour cette dernière des unités telles que l'intensité de λ 6907 Å, soit la même pour le halo et le blanc, on obtient

b_λ	7,08	69,3	705	848	171	0,4
-------------	------	------	-----	-----	-----	-----

On en tire le rapport $H_\lambda V_\lambda / b_\lambda$:

$\frac{H_\lambda V_\lambda}{b_\lambda}$	1	1,12	1,65	1,10	1,14	1,84
---	---	------	------	------	------	------

On voit apparaître deux maxima du rapport $\frac{H_\lambda V_\lambda}{b_\lambda}$: l'un, pour la radiation $\lambda = 5893$ Å ; l'autre, pour la radiation $\lambda = 4047$ Å. C'est donc pour ces deux longueurs d'onde que la répartition d'intensité en $\alpha_0 = 22^\circ 07'$ s'écarte le plus de celle du blanc.

La signification physique de ces deux points particuliers est immédiate :

En $\alpha_0 = 22^\circ 07'$, la radiation $\lambda = 5893$ Å atteint son maximum d'intensité.

Il est donc normal que, pour cette longueur d'onde, la répartition énergétique soit le plus différente de celle du blanc. Le second maximum en $\lambda = 4047$ Å correspond au fait que, dans la lumière du ciel limitée au domaine que nous étudions, c'est cette longueur d'onde qui est la plus intense. Dans la direction $\alpha_0 = 22^\circ 07'$, l'œil verra donc, superposées à du blanc, deux radiations prépondérantes, les

$\lambda\lambda$ 5893 Å et 4047 Å. Le mélange de ces deux couleurs donne lieu à une couleur composée.

En extrapolant ce résultat à toutes les directions, on peut dire, schématiquement, que, quelle que soit la direction d'observation, l'œil aura à composer deux couleurs avec leur intensité respective; l'une est toujours la même, la radiation $\lambda = 4047$ Å; l'autre est la radiation qui atteint son maximum d'intensité pour la direction d'observation considérée. La couleur observée est le résultat de ce mélange. Nous ne pouvons cependant prédire avec certitude quelle sera cette couleur, car, d'une part, le problème relève plutôt du domaine physiologique que physique; d'autre part, il ne s'agit pas de composer les intensités de deux longueurs d'onde ainsi que nous l'avons fait ci-dessus pour la simplicité de l'exposé, mais bien les intensités de deux domaines de longueurs d'onde dont les maxima d'intensité se situent aux deux longueurs d'onde considérées.

Si l'analogie avec la composition des pigments en peinture est fondée, on peut cependant arriver à un certain résultat.

On sait que les tons rouille sont obtenus notamment par l'addition de violet au rouge, jaune ou vert. En extrapolant aux radiations solaires, on peut vraisemblablement expliquer la teinte rousse du halo par la présence de la radiation violette de la lumière du ciel réfractée par les cristaux, radiation qui, nous l'avons vu, est très intense.

Examinons maintenant ce qui se passe dans une direction angulaire où toutes les radiations de la lumière solaire sont présentes.

Choisissons une direction assez voisine du maximum d'intensité de $\lambda = 4047$ Å, soit $\alpha_0 = 23^\circ$. En répé-

tant les calculs effectués pour $\alpha_0 = 22^\circ 07'$, on trouve successivement :

λ en Å	6907	6563	5893	5350	4861	4047
$\log H_\lambda V_\lambda$	0,722	1	2,742	2,85	2,32	0,03
$H_\lambda V_\lambda$	5,273	5,310	552,1	708	209	1,072
b_λ	5,273	52,1	530	638	129	0,3
$\frac{H_\lambda V_\lambda}{b_\lambda}$	1	1,02	1,04	1,11	1,62	3,6

Les deux maxima sont confondus en un seul qui se présente pour $\lambda = 4047$ Å. Dans cette direction, on observera donc du blanc teinté de violet.

Pour une direction située vers le milieu de la couronne blanche ($\alpha_0 = 33^\circ$), on trouve les valeurs suivantes :

$H_\lambda V_\lambda$	0,176	1,75	18,2	23,5	4,86	0,023
b_λ	0,176	1,73	17,7	21,3	4,29	0,01
$\frac{H_\lambda V_\lambda}{b_\lambda}$	1	1,01	1,03	1,09	1,13	2,3

Ici aussi, il y a superposition de blanc et de violet. Mais le violet est beaucoup moins intense.

Remarquons que, dans la couronne blanche, il y a toujours superposition de la lumière du ciel et de la lumière solaire, tandis qu'à l'intérieur du halo, seule la radiation du ciel est réfractée. La couronne blanche est donc plus lumineuse que l'intérieur du halo.

Reprenons, en la critiquant, la description du halo que nous avons rappelée dans les préliminaires.

« *Le bord interne seul tranché...* »

Nous avons montré que les limites entre lesquelles le halo s'étend sont mal définies. Il est possible de

situer aux environs de $21^{\circ}20'$ la déviation à laquelle la radiation rouge $6907 \text{ \AA}$ commence à apparaître avec une certaine intensité et de placer aux environs de $21^{\circ}47'$ le maximum de son intensité. Par contre, on ne peut fixer la déviation où le halo coloré cesse pour faire place à la couronne blanche. Nous avons vu, en effet, que celle-ci était toujours teintée de violet et d'autant moins qu'on s'éloigne du soleil. C'est donc seulement par opposition avec le passage progressif du violet au blanc violacé que l'on peut dire, avec Coulomb et Loisel, que le bord interne du halo est « tranché »,

« est teinté de roux, auquel succède du jaune... ».

Rappelons tout d'abord que nous avons eu l'occasion d'observer des halos où l'on passait progressivement du rouge au jaune et au bleu-violet, le tout teinté de roux. Parfois même le vert était visible. C'est donc ce phénomène que nous tenterons d'expliquer.

Que les couleurs soient peu apparentes, cela ressort immédiatement de la planche 12. La courbe de répartition de chaque longueur d'onde s'étend avec une intensité appréciable sur un intervalle étendu de déviations. La courbe relative à une couleur recoupe donc celle relative à une autre couleur en un endroit où elle est encore assez intense. Il en résulte qu'on ne passe pas d'une couleur pure à une autre couleur pure, mais d'un mélange de couleurs à un autre mélange. Les teintes ne sont donc pas nettes. Si l'on ajoute à cela la radiation violette du ciel, dont l'action se traduit par un virage au roux de toutes les teintes, la présence d'un fond continu dû à la lumière solaire, ainsi que les causes de « blanchiment » des teintes

que nous avons déjà signalées à propos du halo de la source ponctuelle, on comprend que la luminosité du halo soit faible comparativement à celle du ciel et que les couleurs soient peu apparentes, au point que, dans de nombreux cas, on n'observe souvent que le rouge, le jaune et le bleu-violet.

Pourquoi ces trois couleurs sont-elles les plus visibles ?

L'œil ressent une impression de *rouge* pour un domaine de longueurs d'onde qui s'étend sur plus du $\frac{1}{4}$ du spectre visible. De plus, du côté des petites déviations, la couleur rouge n'est mélangée d'aucune autre, exception faite de la radiation violette du ciel. Elle sera donc relativement pure.

Le *jaune* est aussi privilégié, car c'est à cette couleur que l'œil est le plus sensible (cfr. planche 5).

Toute coupe, faite à une déviation supérieure à celle du maximum d'intensité du bleu, présente un maximum d'intensité dans le bleu et un autre dans le violet. Quand on s'éloigne du côté des grandes déviations, le premier maximum converge vers le second, tandis que l'intensité des autres longueurs d'onde diminue. Il est donc normal d'observer du *bleu-violet* du côté des grandes déviations.

« ... puis un blanc violacé qui s'estompe progressivement... »

Lorsque toutes les radiations sont présentes, leur superposition fournit du blanc et un excès de violet. Cet excès diminue quand on s'éloigne du centre du halo. Ceci suffit à expliquer la teinte de la couronne blanche.

Nous nous en voudrions de ne pas remercier chaleureusement MM. les professeurs Guében et Germay, qui, malgré leurs travaux personnels et les rigueurs de la captivité, ont maintes fois discuté avec nous telle ou telle partie de ce travail; ces échanges de vues nous ont amené à préciser nos idées et à améliorer ce mémoire en bien des points.

Nous remercions également l'Académie royale de Belgique, qui a bien voulu nous accorder une subvention, à charge des revenus de la Fondation de Potter, pour couvrir la majeure partie des frais d'illustration de ce mémoire.

Oflag X D
Fischbeck-Hambourg.

TABLE DES MATIERES.

	Pages.
PRÉLIMINAIRES	151
CHAPITRE PREMIER. — Trajet de la lumière dans la section droite d'un prisme hexagonal, équiangle, homogène, présentant, par rapport à l'air et pour une longueur d'onde déterminée, les indices de réfraction n_o et n_e	153
CHAPITRE II. — Le halo produit par une source ponctuelle ...	161
CHAPITRE III. — Le halo solaire	195
CHAPITRE IV. — Le bleu du ciel	210
CHAPITRE V. — Description du halo solaire	224



