Pixels, Pinceaux et Probabilités

S. Nicolay

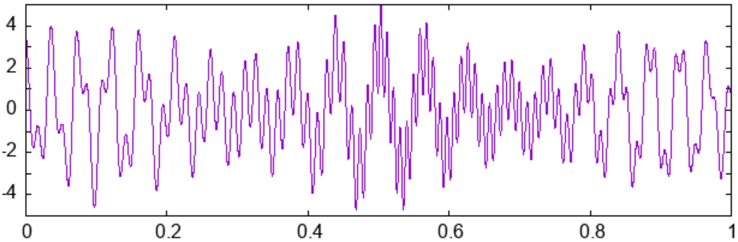
Université de Liège

L'art au service de la science, la science au service de l'art

28 novembre 2025

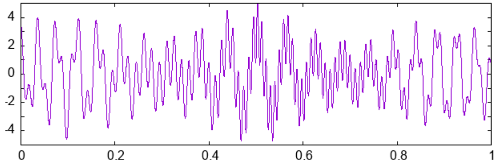
Représentation d'une image

Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



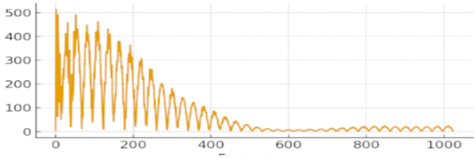
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

représentation temporelle

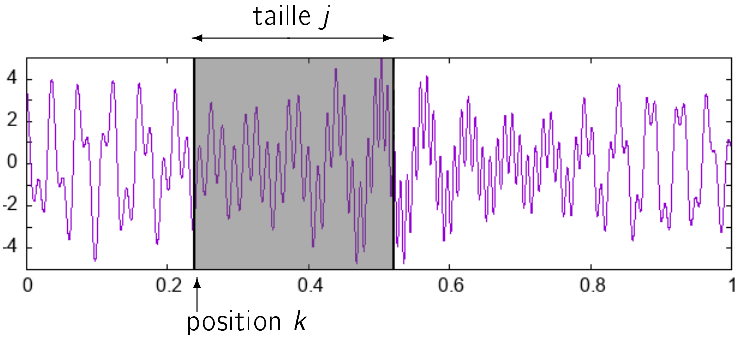


$\Leftrightarrow$

représentation fréquentielle



Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



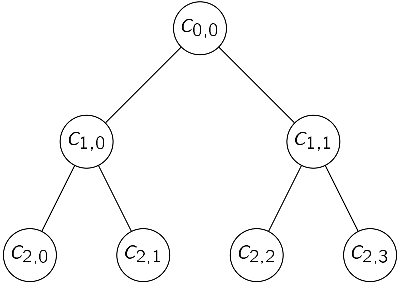
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k}\, 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k).$$

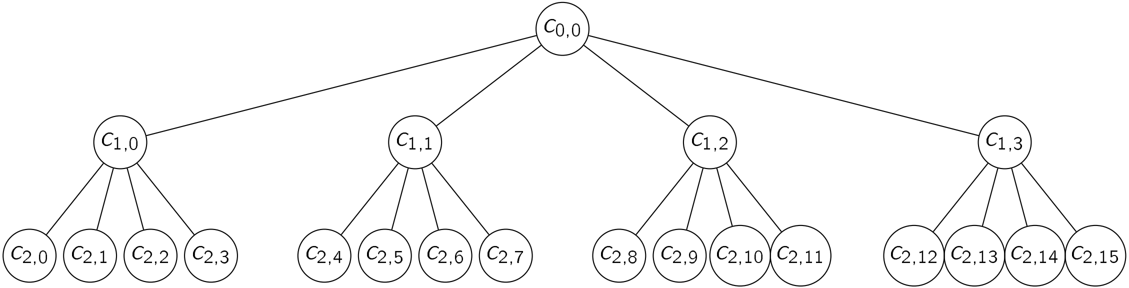
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

$$f(t) = \sum_{j,k} \underbrace{c_{j,k}}_{\text{contribution de la fenêtre}} \underbrace{2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)}_{\text{fenêtre}}.$$

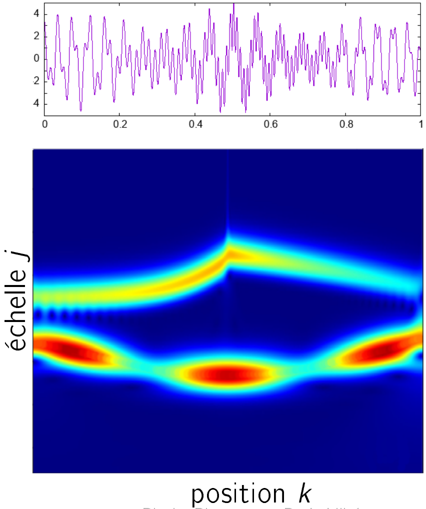
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



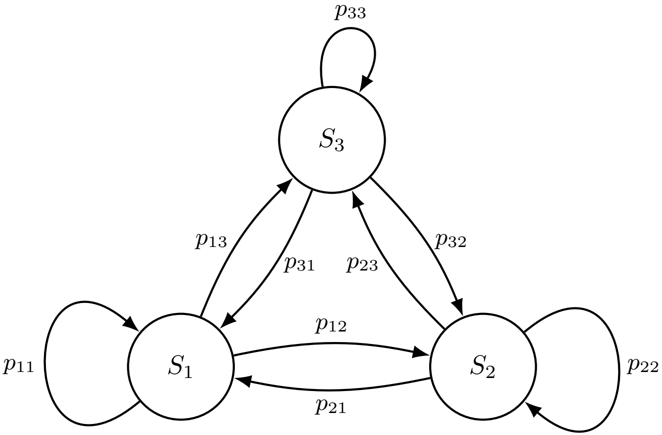
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



Arbre de Markov caché

Une chaîne de Markov classique décrit un système qui évolue entre plusieurs états $S_1, \ldots, S_n$ avec la propriété de Markov :

$$P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i, X_{t-1} = S_{l_{t-1}}, \ldots, X_1 = S_{l_1}) = P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i) = p_{ij}$$



Dans une chaîne de Markov cachée, les états X_t ne sont pas observables directement.

On observe à la place des symboles ou mesures Y_t, dont la distribution dépend de l'état caché.

Chaque état caché S_i émet une observation avec une certaine probabilité d'émission : $P(Y_t = y|X_t = S_i)$.

Pour les ondelettes :

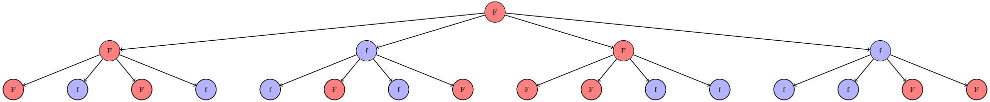
- Chaque coefficient à l'échelle $j+1$ est le parent de plusieurs coefficients à l'échelle suivante j.
- Les coefficients sont corrélés entre échelles $(j+1 \to j)$: un gros coefficient à une échelle fine tend à être sous un gros coefficient à l'échelle immédiatement supérieure (propriété de persistence).

L'idée : introduire un état caché pour chaque coefficient qui détermine sa « nature » (Fort/faible).

Vu nos hypothèses, si le parent est fort le fils a plus de chance d'être fort (persistence) : F-F-F-F est plus probable que F-F-f-F.

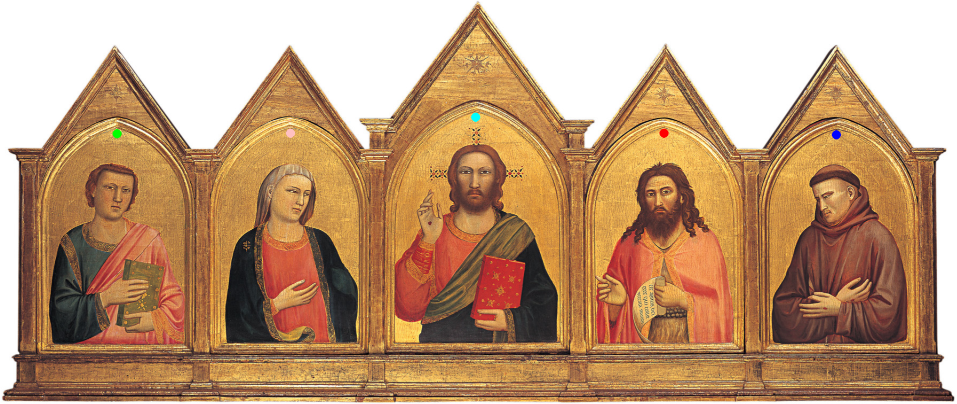
L'algorithme « arbre de Markov caché » (HMT) capture la dépendance d'échelle.

- un coefficient d'ondelette est une observation Y_t,
- l'état caché est la nature du coefficient $X_t \in \{\text{Fort}, \text{faible}\}$,
- la transition est la probabilité qu'un enfant soit fort sachant que le parent l'est.



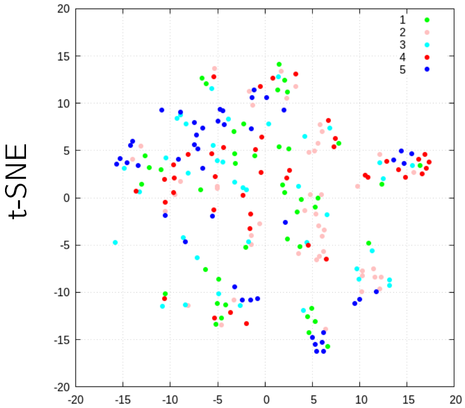
Le Polyptyque Peruzzi de Giotto

Le Polyptyque Peruzzi de Giotto



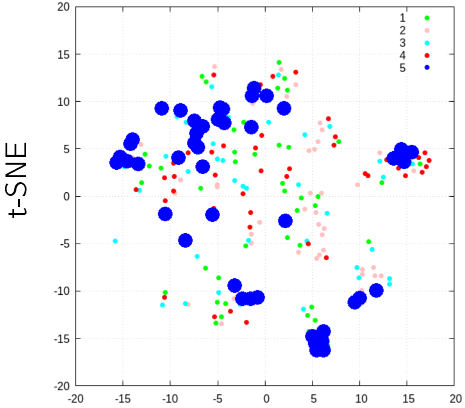
L'analyse en HMT des coefficients d'ondelettes, peuvent être interprétées comme une signature numérique de l'artiste, reflétant son style propre de manière objective et reproductible.

Dans le polyptique, Saint François (●) se distingue des autres figures par une modélisation plus sculpturale et des contours plus affirmés.



L'analyse en HMT des coefficients d'ondelettes, peuvent être interprétées comme une signature numérique de l'artiste, reflétant son style propre de manière objective et reproductible.

Dans le polyptique, Saint François (•) se distingue des autres figures par une modélisation plus sculpturale et des contours plus affirmés.

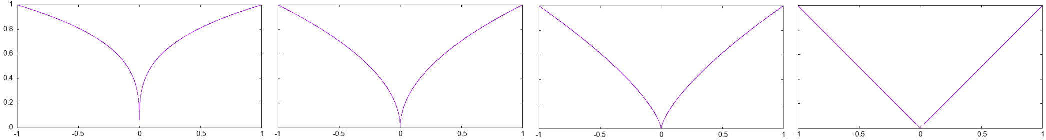


La régularité au sens de Hölder

Une autre manière d'aborder le style d'un artiste consiste à analyser la régularité de ses œuvres.

L'exposant de Hölder associe à un point x_0 un nombre $h_f(x_0)$ qui reflète la régularité de la fonction f en x_0. C'est une généralisation de la notion « être p fois continûment dérivable ».

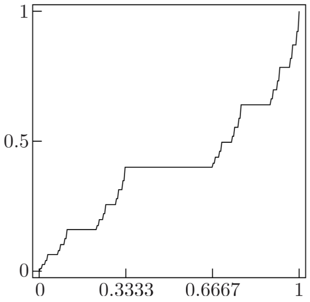
$|x|^{1/3}$ $\sqrt{|x|}$ $|x|^{2/3}$ $|x|$

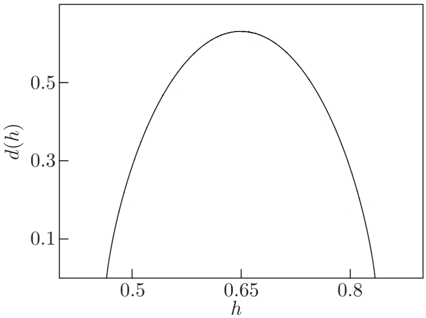


$h_{|x|^{1/3}}(0) = 1/3$ $h_{\sqrt{|x|}}(0) = 1/2$ $h_{|x|^{2/3}}(0) = 2/3$ $h_{|x|}(0) = 1$

L'exposant de Hölder est une notion ponctuelle. Pour récupérer une notion globale de la régularité, on associe à une fonction f son spectre multifractal, qui associe à H la dimension des points ayant H comme exposant de Hölder :

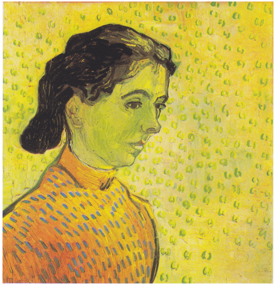
$$d : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0, n] \quad H \mapsto \dim(\{x : h_f(x) = H\}).$$



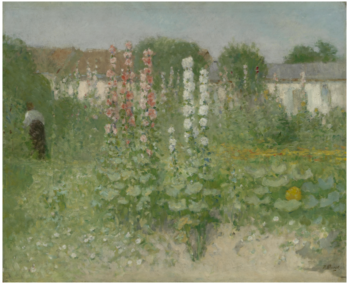


Des tableaux de Van Gogh avec d'autres tableaux impressionistes ont été mélangés. Certains ne sont pas attribués à Van Gogh avec certitude.

•$f518$

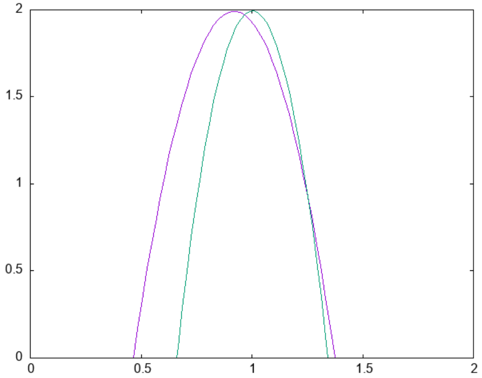


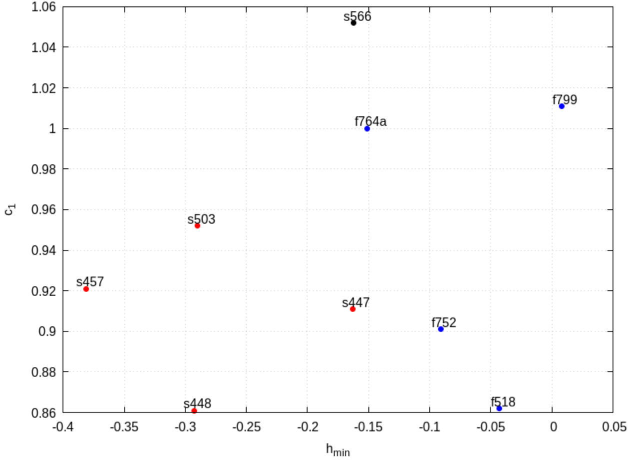
•$s457$



•$s566$

Le spectre multifractal de chaque tableau a été calculé.




1.06
1.04
1.02
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0.86
c1
-0.4
-0.35
-0.3
-0.25
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
hmin
s566
f799
f764a
s503
s457
s447
f752
s448
f518

Conclusion

Ces méthodes seront améliorées grâce :

- à la multiplication des numérisations,
- à l'entraînement de l'intelligence artificielle,
- à l'augmentation de la résolution et des puissances de calcul.


Merci

Bibliographie :

- T. Wu, G. Polatkan, D. Steel, W. Brown, I. Daubechies et R. Calderbank, Painting analysis using wavelets and probabilistic topic models, 2013 20th IEEE International Conference on Image Processing (2014).

- P. Abry, H. Wendt et S. Jaffard, When VanGogh meets Mandelbrot: Multifractalclassification of painting's texture, *Signal Processing*, 93 (2013), 554–572.