

# **La fonction guidage en micromécanique**

**Patrick Merken**

**Ingénieur électromécanicien tendance génie mécanique**

**Thèse présentée en vue de l'obtention du DEA en sciences  
appliquées**

**2006**

**© DEBONGNIE (JEAN-FRANCOIS), Liège, 2010**

**Dépôt légal : D/2010/0480/5**

**ISBN13 : 978-2-9600313-7-9**

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>COL CIRCULAIRE</b>	<b>6</b>
INTRODUCTION	6
MODÉLISATION	7
<i>Formes asymptotiques</i>	8
Rigidité en flexion	8
Rigidité en torsion	12
Rigidité en extension	13
Rigidité en flexion transverse	14
Rigidité en translation ou cisaillement technologique d'axe y	15
Rigidité en translation ou cisaillement technologique d'axe z	18
Déplacement de l'extrémité du col	20
<i>Coefficients de correction</i>	21
Rigidité en flexion	21
Rigidité en torsion	23
Rigidité en extension	23
Rigidité en flexion transverse	24
Rigidité en cisaillement technologique d'axe y	25
Rigidité en cisaillement technologique d'axe z	26
Déplacement de l'extrémité du col	26
Coefficient d'état de surface	28
COMPARAISON AVEC LES SOLUTIONS EXISTANTES	28
APPLICATION NUMÉRIQUE	32
VALIDATION EXPÉRIMENTALE	35
CONCLUSION	42
<b>MEMBRANE FLEXIBLE</b>	<b>43</b>
INTRODUCTION	43
MODÉLISATION	43
<i>Formes Asymptotiques</i>	45
Membrane non fendue	45
Membrane fendue	48
<i>Coefficients de correction</i>	51
Membrane non fendue	51
Membrane fendue	53
COMPARAISON DES DEUX TYPES DE MEMBRANE	55
ASPECTS DE FABRICATION	56
CONCLUSION	57
<b>CONCLUSION</b>	<b>58</b>
<b>NOMENCLATURE</b>	<b>59</b>
<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>61</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>63</b>
MESURES SUR LES COLS CIRCULAIRES	63
FORMULAIRE	64
Col circulaire	64
Membrane	64

# Introduction

La miniaturisation et l'intégration de fonctions (mécanique, capteur, commande, calcul, etc) dans des espaces confinés deviennent de plus en plus importantes dans les systèmes modernes. De nombreux exemples de la vie courante illustrent ce fait. Parmi ceux-ci, nous trouvons les mobilophones, les systèmes portables audio et vidéo, les organisateurs numériques, etc. Les domaines faisant appel aux hautes technologies en sont les plus demandeuses, citons, entre autres, les endoscopes de robot, les micropompes pour des applications médicales, l'équipement aérospatial, etc...

Dans un microsystème, beaucoup de fonctions classiques doivent être fondamentalement reconsidérées. Les lois d'échelle rendent quelques principes physiques inutilisables pour des microsystèmes, alors que d'autres principes, bien que sans intérêt pour les macrosystèmes, peuvent être extrêmement utiles pour les systèmes miniaturisés. C'est le cas des fonctions *articulation* et *guidage*.

Avant d'aller plus loin, il est utile de définir ce que l'on entend par *Micromécanique*. En effet, la mécanique est la branche qui s'occupe de tout ce qui transmet un mouvement et/ou une force. Le terme *Micro* fait clairement référence à une échelle miniature. Ainsi, on peut définir la micromécanique comme étant la science qui traite des systèmes mécaniques dont l'ordre de grandeur des dimensions est égal ou inférieur au millimètre. L'échelle envisagée est donc plus petite que celle rencontrée en mécanique classique. Il s'agit alors, si possible, de miniaturiser les systèmes mécanique connus ou d'en imaginer d'autres permettant de remplir les fonctions requises.

Dans le cas particulier de la fonction guidage, à l'échelle de la micromécanique, il peut être difficile de fabriquer les roulements classiques tels que les roulements à billes, paliers lisses et autres pivots. En effet, il est malaisé et très coûteux de fabriquer de petites pièces avec de bonnes tolérances (c'est-à-dire inférieure à un pourcentage de la cote), la précision de guidage résultante peut être insuffisante pour une application particulière. Il y a donc lieu de reconsidérer entièrement cette fonction.

Une autre raison de cette étude concerne les forces en jeu. En effet, dans les micromachines, le frottement peut devenir très important comparé à d'autres forces. La force de frottement est une force de contact et donc de surface tandis que la gravité ou la force électromagnétique sont, elles, des forces de volume. Il est assez aisé de comprendre pourquoi le frottement devient si important. Imaginons un cube de côté  $a$ . Son volume est donc égale à  $a^3$  tandis que

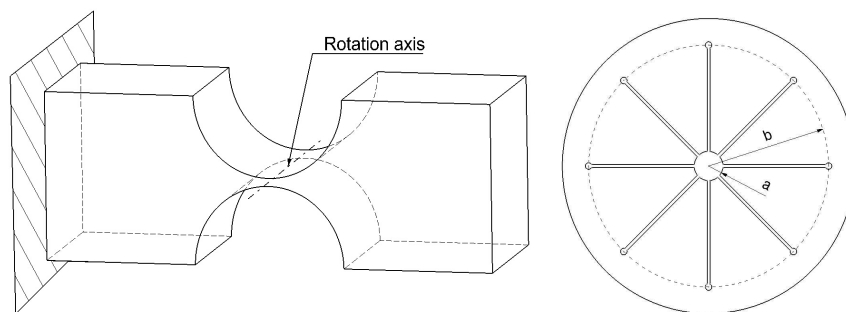
la surface d'un côté vaut  $a^2$ . Le rapport entre la surface et le volume vaut donc  $1/a$ . Ce qui veut dire que si les dimensions du cube diminuent, ce rapport tend à augmenter et donc que le volume prend une importance relative moindre lorsque les dimensions diminuent. Les forces de volume auront donc un impact de moins en moins important. Or, en règle générale, ce sont ces forces qui constituent la force motrice d'une machine, tandis que les forces de frottement constituent une force résistante, responsable d'une grande partie de perte d'énergie. On se rend compte alors qu'il est intéressant de pouvoir diminuer au maximum ces dernières.

Nous pouvons également envisager l'application de ces guidages. Dans certaines applications, par exemple dans des dispositifs médicaux, les exigences de propreté interdisent pratiquement l'utilisation des lubrifiants graisseux. Les particules d'usure sont également prohibées en général. En conséquence, il y a un besoin important de développer des miniguidages sans friction.

Finalement, l'assemblage de petits composants peut devenir très difficile, et un dispositif composé d'un nombre minimal de composants devient indispensable.

Parmi toutes les solutions possibles, le col circulaire et le spider ou membrane élastique, voir Figure 1, semblent être très attrayants : pas de frottement, pas de lubrifiant, encombrement minimal, une seule pièce fabriquée, pas d'assemblage, etc. Ce dernier avantage est décisif. En effet, la meilleure manière de simplifier l'assemblage est de limiter le nombre de pièces.

Il faut cependant être conscient que ces systèmes fonctionnent par déformation élastique, ce qui implique une augmentation de sa raideur et, par conséquence, une diminution du débattement du guidage. Ce n'est qu'au prix de cet inconvénient que nous parvenons à développer un guidage sans frottement.



**Figure 1 : col circulaire et membrane**

Dans ce travail, nous nous proposons de compiler et compléter les études déjà réalisées permettant d'utiliser de façon fonctionnelle les 2 systèmes de guidage précités, en permettant un dimensionnement rapide en fonction de l'application envisagée. Il fait suite à un projet visant à développer une micro-pompe permettant de délivrer des débits de l'ordre du  $\mu\text{l}/\text{min}$ . Ces 2 systèmes de guidage ont été envisagés tour à tour afin de permettre aux éléments mobiles de se mouvoir avec tous les avantages cités plus haut.

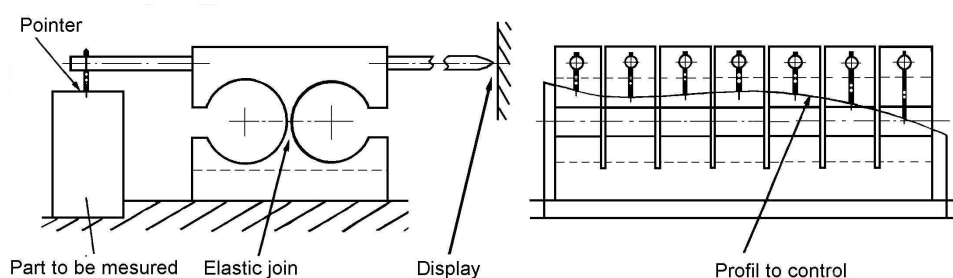
# Col circulaire

## Introduction

Le col circulaire est une construction monolithique, ce qui en fait un composant tout indiqué en micromécanique. Cependant, il ne sera préféré à d'autres articulations que dans le cas où l'angle de rotation peut être limité.

En effet, la limitation principale de la solution présentée concerne l'angle de rotation possible permis. Chaque application sera adaptée afin de respecter cet angle limite sous peine de causer la ruine complète et irréversible de l'articulation. Cet angle dépend essentiellement du matériau employé et de la géométrie.

Le col circulaire est connu depuis de nombreuses années. Il a déjà été employé, par exemple, dans un support de contrôle de profil, voir figure 2, par R. Pazot [3]. Ce support s'appelle un montage à aiguille indicatrice et Pazot ajoute que cette articulation évite l'emploi de ressorts de rappel, évite la création d'un axe, élimine le problème des jeux et simplifie le montage.

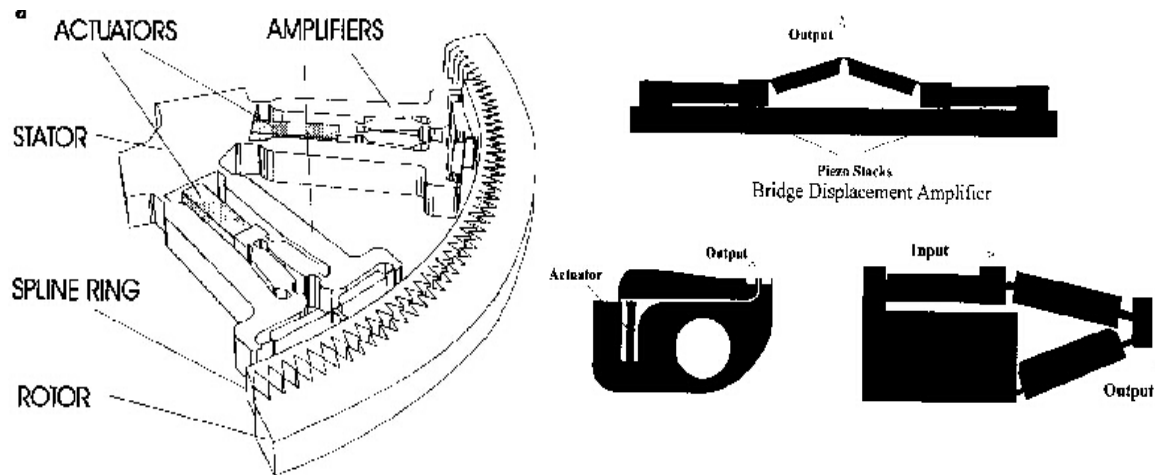


**Figure 2 : montage à aiguille indicatrice**

Beaucoup d'applications peuvent être trouvées dans la littérature quant à l'utilisation d'une telle articulation. Entre autres exemples, Xu et Ryu l'ont employé dans leurs amplificateurs de déplacement basé sur des piézoactuateurs [10], voir figure 3, Ryu, Gweon et Moon ont conçu une table XY $\theta$  basée sur un col circulaire [12]. Il est évident que, même si le col agit comme un pivot dans les cas précités, la raideur du col a de l'importance afin de dimensionner les

actuateurs permettant de créer le mouvement. Le lecteur pourra encore trouver beaucoup d'autres exemples d'applications dans [6] et [11].

La description du col circulaire et de sa modélisation a été réalisée en 1965 par Paros et Weisbord [5]. Depuis, il a été l'objet de plusieurs études, par exemple, Smith et Chetwynd [18]-[19], Zhang et Fasse [15], Koster [14], Heinen [6], Lobontiu [11] etc...



W. Xu, T. King (1996), *Flexures hinges for piezoactuator displacement amplifiers: flexibility, accuracy and stress considerations*, in *Prec. Eng.*, vol. 19, 4-10.

**Figure 3 : amplificateurs de déplacement**

Le col circulaire joue un rôle très important dans une pièce qui inclut beaucoup d'autres fonctions. Ainsi, il est nécessaire de modéliser le col circulaire afin de comprendre son fonctionnement. On trouvera dans ce texte un nouveau modèle analytique simplifié pour la prévision de l'écart angulaire maximum et la rigidité angulaire du col circulaire. L'avantage de ce modèle, comparé aux autres, est qu'il est possible de déterminer, pratiquement directement, les paramètres géométriques permettant d'obtenir une raideur donnée, et inversement.

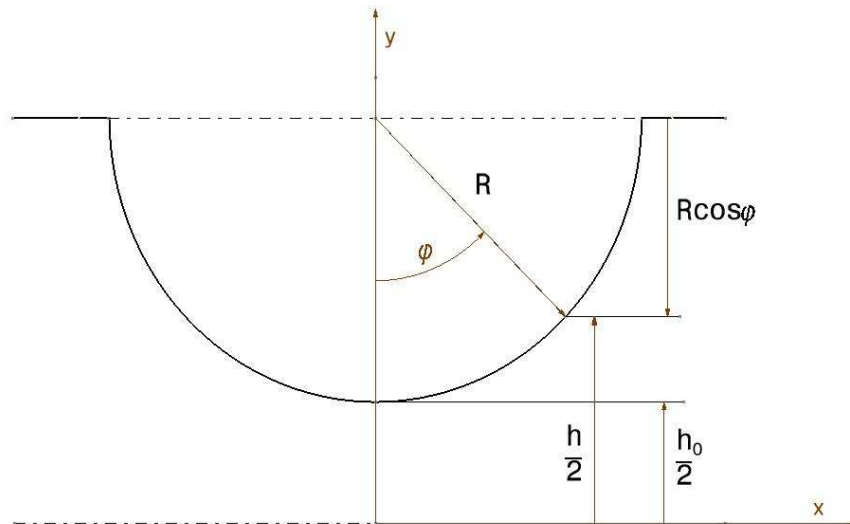
Ce modèle sera ensuite comparé aux résultats fournis par une série de tests effectués sur des cols usinés par électro-érosion à fil et finalement confronté à des expressions déterminées par d'autres scientifiques.

## Modélisation

La modélisation du col circulaire est basée sur la résolution des équations de la mécanique des matériaux appliquée aux poutres à géométrie variable (section continûment variable).

Afin d'étudier le col, nous fixerons des axes de référence : l'axe  $x$  correspond à l'axe de symétrie du col et l'axe  $y$  relie les centres des arcs de cercle définissant le col. Nous introduirons également 2 variables supplémentaires : l'azimut  $\varphi$  et l'épaisseur du col,  $b$ , perpendiculairement au plan  $xy$ .

La géométrie du col est représentée sur la Figure 4 ci-dessous.



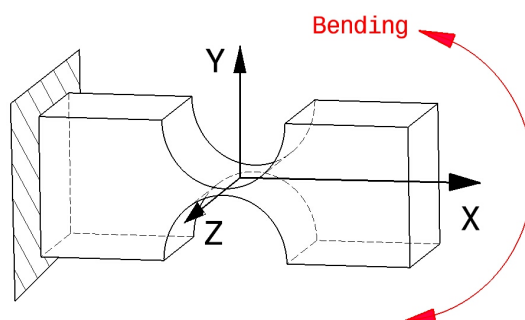
**Figure 4 : géométrie du col circulaire**

Il est clair que le mouvement désiré est une rotation autour de l'axe  $z$  et que tout autre mouvement est un mouvement parasite. Nous verrons par la suite que ces mouvements parasites peuvent avoir des conséquences inattendues et indésirables.

## Formes asymptotiques

### Rigidité en flexion

Nous appelons flexion (simple) la rotation d'une partie par rapport à l'autre, autour de l'axe  $z$ , voir figure 5.



**Figure 5 : flexion autour de l'axe  $z$**

Il s'agit bien ici du mouvement souhaité, la raideur en flexion selon  $z$  doit donc être la plus réduite possible. L'angle de flexion varie avec la coordonnée du point où on le calcule. Cet angle vaut,

$$\alpha_f = \int_{-R}^R \frac{12M_f}{Eb h^3} dx = \frac{12M_f}{Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} \quad (0.1)$$



On considère que seule la zone du col (qui s'étend de  $-R$  à  $R$ ) est soumise à l'action du moment de flexion et que le reste de la poutre est infiniment rigide. Nous verrons par la suite que cette hypothèse est bien vérifiée et est d'ailleurs encore trop large.

Calculons la dernière intégrale. La géométrie du col nous donne,

$$\begin{aligned} h &= h_0 + 2R(1 - \cos \varphi) = 2R \left[ \left( 1 + \frac{h_0}{2R} \right) - \cos \varphi \right] \\ &= 2R \left( 1 + \frac{h_0}{2R} \right) (1 - \varepsilon \cos \varphi) \\ &= \frac{2R}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \cos \varphi) \end{aligned} \quad (0.2)$$

où l'on a posé,

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + h_0/2R} \quad (0.3)$$

Sachant que,

$$x = R \sin \varphi, \quad dx = R \cos \varphi d\varphi, \quad (0.4)$$

On transforme l'intégrale sous la forme,

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^3 R \cos \varphi d\varphi}{8R^3 (1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{\varepsilon^3}{4R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{\varepsilon^3}{4R^2} \text{I} \quad (0.5)$$

L'intégrale à évaluer ne diffère des intégrales apparaissant en théorie de la lubrification [2], que par le signe de la variable  $\varepsilon$  et peut donc être résolue par le célèbre changement de variable de Sommerfeld [1] qui devient ici,

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \quad (0.6)$$

On en déduit successivement,

$$1 - \varepsilon \cos \varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \quad (0.7)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 \alpha}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^2} \quad (0.8)$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \quad (0.9)$$

$$d(\cos \varphi) = -\sin \varphi d\varphi = -\frac{(1 - \varepsilon^2) \sin \alpha}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^2} d\alpha \quad (0.10)$$

Ce qui donne,

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha \quad (0.11)$$

En ce qui concerne les bornes d'intégration,

$$\begin{cases} \varphi = 0, \cos \varphi = 1 \Rightarrow \cos \alpha + \varepsilon = 1 + \varepsilon \cos \alpha, \cos \alpha(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon, \alpha = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \alpha + \varepsilon = 0, \cos \alpha = -\varepsilon, \alpha^* = \arccos(-\varepsilon) \end{cases} \quad (0.12)$$

L'intégrale I se ramène ainsi à,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \int_0^{\alpha^*} \frac{\cos \alpha + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \frac{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^3}{(1 - \varepsilon^2)^3} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \int_0^{\alpha^*} (\cos \alpha + \varepsilon)(1 + \varepsilon \cos \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \int_0^{\alpha^*} \left[ (1 + \varepsilon^2) \cos \alpha + \frac{\varepsilon}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \varepsilon \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left\{ (1 + \varepsilon^2) \sin \alpha^* + \frac{3\varepsilon}{2} \alpha^* + \frac{\varepsilon}{4} \sin 2\alpha^* \right\} \end{aligned} \quad (0.13)$$

Tenant compte de la valeur ci-dessus de la limite  $\alpha^*$ , on a,

$$\begin{aligned} \sin \alpha^* &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha^*} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ \sin 2\alpha^* &= 2 \sin \alpha^* \cos \alpha^* = -2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (0.14)$$

Ce qui ramène finalement l'équation cherchée à,

$$I = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left\{ (1 + \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{3\varepsilon}{2} \arccos(-\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right\} \quad (0.15)$$

Nous nous limiterons au cas où le rapport  $\frac{h_0}{R}$  est petit devant 1. Nous obtenons alors,

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{h_0}{2R}} \approx 1 - \frac{h_0}{2R} \approx 1 \quad (0.16)$$

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{1 + \frac{h_0}{R} + \frac{h_0^2}{4R^2} - 1}{\left(1 + \frac{h_0}{2R}\right)^2} = \frac{\frac{h_0}{R} \left(1 + \frac{h_0}{4R}\right)}{\left(1 + \frac{h_0}{2R}\right)^2} \approx \frac{h_0}{R} \quad (0.17)$$

$$\alpha^* \approx \arccos(-1) = \pi \quad (0.18)$$

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 + \varepsilon^2) \approx 2 \frac{h_0}{R} \quad (0.19)$$

$$\frac{3\varepsilon}{2} \arccos(-\varepsilon) \approx \frac{3}{2} \pi \quad (0.20)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{h_0}{R} \quad (0.21)$$

En remplaçant les différents termes dans l'intégrale, nous obtenons,

$$I = \left( \frac{R}{h_0} \right)^{5/2} \left[ \frac{3}{2} \pi + O\left( \frac{h_0}{R} \right) \right] \approx \frac{3}{2} \pi \left( \frac{R}{h_0} \right)^{5/2} \quad (0.22)$$

Et,

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} = \frac{\varepsilon^3}{4R^2} \frac{3}{2} \pi \left( \frac{R}{h_0} \right)^{5/2} \approx \frac{3}{8} \pi \frac{\sqrt{R}}{h_0^{5/2}} \quad (0.23)$$

L'angle de flexion s'écrit finalement,

$$\alpha_f = \int_{-R}^R \frac{12M_f}{Eb h^3} dx = \frac{9\pi}{2Eb} M_f \frac{\sqrt{R}}{h_0^{5/2}} \quad (0.24)$$

Ce qui revient à dire,

$$\boxed{\frac{M_f}{\alpha_f} = \frac{2Eb}{9} \frac{h_0^{5/2}}{\pi \sqrt{R}}} \quad (0.25)$$

Cette expression mesure la raideur en flexion.

En ce qui concerne la contrainte maximum au niveau du col,

$$\sigma = \frac{6M_f}{bh_0^2} = \frac{6}{bh_0^2} \frac{2Eb}{9} \frac{h_0^{5/2}}{\pi \sqrt{R}} \alpha_f = \frac{4}{3\pi} E \alpha_f \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (0.26)$$

Soit,

$$\boxed{\alpha_f = \frac{3\pi}{4} \frac{\sigma}{E} \sqrt{\frac{R}{h_0}}} \quad (0.27)$$

Cette dernière expression est importante, elle permet de déterminer l'angle de rotation maximum possible, en fonction du matériau et pour une géométrie donnée.

Afin d'obtenir l'angle de rotation le plus élevé possible, la première opération consiste à choisir les valeurs de  $R$  et  $h_0$ . Il faut cependant tenir compte des contraintes technologiques. On ne peut pas diminuer indéfiniment la valeur de  $h_0$ , l'usinage ne permettant d'atteindre que des valeurs de l'ordre de 0,1 mm<sup>1</sup>. Dans le même ordre d'idée, il faut limiter supérieurement le rayon  $R$ . En effet, plus celui-ci est grand, plus le col circulaire tend à se rapprocher d'une lame flexible. L'axe de rotation devient alors un axe instantané de rotation et le mouvement n'est plus exactement circulaire.

<sup>1</sup> Il est possible d'obtenir une épaisseur inférieure mais en prenant une série de précautions qui font rapidement augmenter le coût de la pièce. Nous estimons donc qu'une épaisseur de 0,1 mm est une limite raisonnable à ne pas franchir, sauf pour des applications bien particulières pour lesquelles le coût importe peu.

Si l'angle est encore trop petit, il faut changer de matériau, si cela est possible, l'application envisagée pouvant imposer le choix d'un matériau. Le tableau I donne une idée de l'ordre de grandeur du rapport  $\sigma/E$ , pour 4 matériaux différents. Citons finalement que la limite élastique peut encore être modulée en fonction de l'état thermique du matériau.

TABLEAU I  
CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

Matériau		$E$ (MPa)	$\sigma$ (Mpa)	$\sigma/E$
Acier inoxydable	X20Cr3	210 000	500	$2,4 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	7020 T5	71 500	320	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Titane	TiAl6V4	115 000	800	$7 \cdot 10^{-3}$
Acier à ressort	45SCD6	210 000	1500	$7,1 \cdot 10^{-3}$

### Rigidité en torsion

La torsion correspond à un mouvement de rotation de la pièce autour de l'axe  $x$ , comme illustré sur la figure 6.

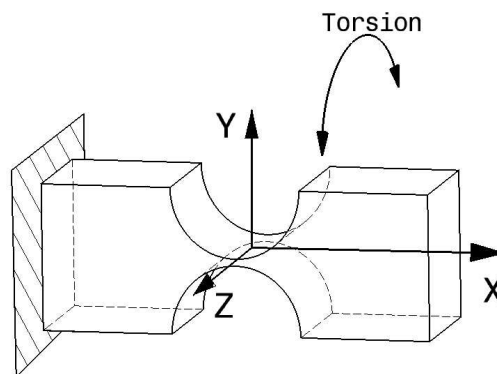


Figure 6 : torsion autour de l'axe  $x$

L'angle de torsion varie de nouveau avec la coordonnée  $x$  car la section n'est pas constante, nous avons alors,

$$\frac{d\alpha_i}{dx} = \frac{M_i}{Gc_1bh^3} = \frac{M_i}{G\frac{bh^3}{3}} = \frac{3M_i}{Gb h^3} \quad (0.28)$$

En effet, le coefficient  $c_1$  est donné dans des tables, il dépend du rapport  $b/h$ . Ce rapport est, dans notre cas, toujours beaucoup plus grand que 4,  $c_1$  tend alors vers  $1/3$ .

Calculons l'angle de torsion total, en considérant que la partie de la poutre non entamée est toujours infiniment rigide,

$$\alpha_t = \frac{3M_t}{Gb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} = \frac{9}{8} \pi \frac{M_t}{Gb} \frac{\sqrt{R}}{h_0^{5/2}} \quad (0.29)$$

La raideur en torsion vaut,

$$\boxed{\frac{M_t}{\alpha_t} = \frac{8}{9\pi} Gb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}}} \quad (0.30)$$

### Rigidité en extension

L'extension se mesure le long de l'axe  $x$ , voir figure 7.

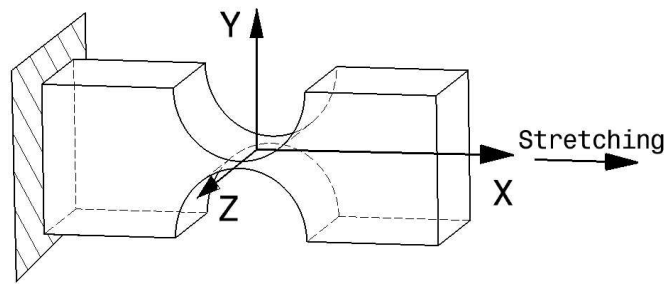


Figure 7 : extension selon l'axe  $x$

Le déplacement d'une section infinitésimale de la poutre soumise à un effort de traction vaut,

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{Ebh} \quad (0.31)$$

$$u = \frac{N}{Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} \quad (0.32)$$

Remplaçons  $h$  par sa valeur calculée dans la partie flexion,

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi = \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi = I \quad (0.33)$$

On a,

$$\frac{\varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\varepsilon \cos \varphi - 1}{1 - \varepsilon \cos \varphi} + \frac{1}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -1 + \frac{1}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (0.34)$$

Et

$$I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -\frac{\pi}{2} + \Gamma \quad (0.35)$$

En utilisant encore le même changement de variable,

$$\Gamma = \int_0^{\alpha^*} \frac{1 + \varepsilon \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \alpha^* \quad (0.36)$$

On a donc,

$$I = -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha^*}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \approx -\frac{\pi}{2} + \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \approx \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.37)$$

Il vient ainsi,

$$u = \frac{N}{Eb} \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.38)$$

Et

$$\boxed{\frac{N}{u} = \frac{1}{\pi} Eb \sqrt{\frac{h_0}{R}}} \quad (0.39)$$

### Rigidité en flexion transverse

Voyons ce qu'il se passe lorsque le col est soumis à un moment de flexion transverse, c'est-à-dire un moment de flexion autour de l'axe y, voir figure 8.

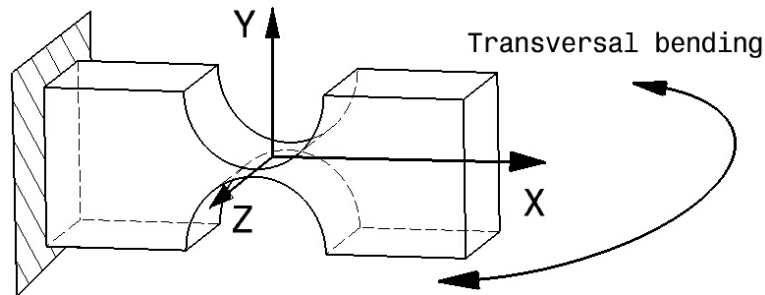


Figure 8 : flexion autour de l'axe y

$$\frac{d\alpha_{ft}}{dx} = \frac{12M_{ft}}{Ehb^3} \quad (0.40)$$

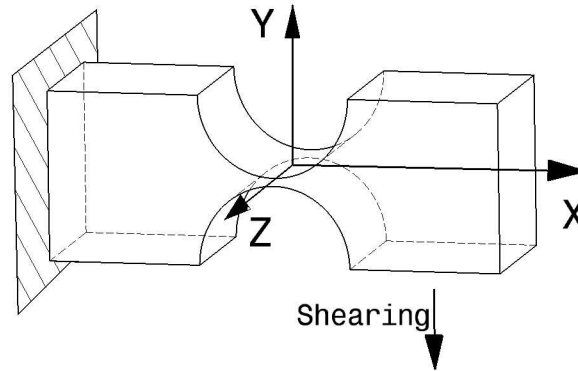
$$\alpha_{ft} = \frac{12M_{ft}}{Eb^3} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{12M_{ft}}{Eb^3} \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.41)$$

La raideur angulaire transverse vaut donc,

$$\boxed{\frac{M_{ft}}{\alpha_{ft}} = \frac{Eb^3}{12\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}}} \quad (0.42)$$

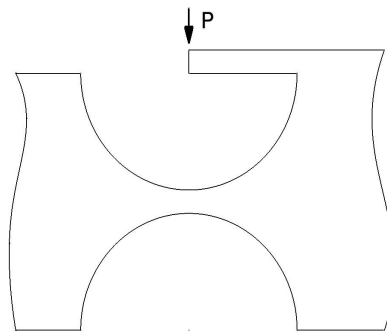
## Rigidité en translation ou cisaillement technologique d'axe y

Par translation, on entend la translation de l'un des côtés de la poutre par rapport à l'autre côté, le col circulaire délimitant les côtés.



**Figure 9 : cisaillement d'axe y**

Afin de pouvoir effectuer une translation sans avoir de rotation parasite, on doit appliquer une charge au droit du col. Cela sera réalisé grâce à un artifice illustré sur la figure 10.



**Figure 10 : application de la charge**

Dans le cas où la charge est excentrée, il apparaît un mouvement de flexion supplémentaire dont nous devons tenir compte.

a) Contribution de la flexion

Le moment vaut  $Ox$ . La rotation vérifie,

$$-\frac{d\alpha_f}{dx} = \frac{12M_f}{Ebh^3} = \frac{12Ox}{Ebh^3} \quad (0.43)$$

Et le déplacement total dû à la flexion s'exprime par,

$$v = \int_{-R}^R \alpha_f dx \quad (0.44)$$

Intégrons par partie,

$$\begin{cases} a = \alpha_f, & db = dx \\ da = \frac{d\alpha_f}{dx} dx, & b = x \end{cases} \quad (0.45)$$

$$v = \left[ x\alpha_f \right]_{-R}^R - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha_f}{dx} dx \quad (0.46)$$

On notera que,

$$\alpha_f(R) = - \int_{-R}^R \frac{12Ox}{Ebh^3} dx = 0 \quad (0.47)$$

Car l'intégrand est impair. Donc  $\alpha_f(0) = 0$ .

Il reste à calculer,

$$\begin{aligned} v &= - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha_f}{dx} dx = \frac{12O}{Eb} \int_{-R}^R \frac{x^2}{h^3} dx = \frac{12O}{Eb} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{8R^3 \varepsilon^3 (1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} R \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{3O\varepsilon^3}{Eb} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi = \frac{3O\varepsilon^3}{Eb} I \end{aligned} \quad (0.48)$$

En utilisant toujours le même changement de variable, nous obtenons,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\alpha^*} \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 \alpha}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^2} \frac{\cos \alpha + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \frac{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^3}{(1 - \varepsilon^2)^3} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \int_0^{\alpha^*} \frac{\sin^2 \alpha (\cos \alpha + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \Gamma \end{aligned} \quad (0.49)$$

Transformons ce dernier intégrand,

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha (\cos \alpha + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha \left( \cos \alpha + \frac{1}{\varepsilon} \right) + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \sin^2 \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \alpha + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \\ \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{1 + \varepsilon \cos \alpha - \varepsilon \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha \frac{\varepsilon + \cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \\ \frac{\cos \alpha (\varepsilon + \cos \alpha)}{1 + \varepsilon \cos \alpha} &= \frac{\cos \alpha \left( \frac{1}{\varepsilon} + \cos \alpha \right) + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \cos \alpha + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \\ \frac{\cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} &= \frac{\left( \cos \alpha + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon}}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \right) \end{aligned} \quad (0.50)$$



Intégrons chacun des termes, nous obtenons,

$$\int_0^{\alpha^*} \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2\varepsilon} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \Big|_0^{\alpha^*} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \alpha^* - \frac{\sin 2\alpha^*}{2} \right) \quad (0.51)$$

$$\int_0^{\alpha^*} \frac{1}{\varepsilon} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \sin \alpha \Big|_0^{\alpha^*} = \frac{1}{\varepsilon} \sin \alpha^* \quad (0.52)$$

Pour calculer la dernière intégrale, effectuons le changement de variable de Sommerfeld classique,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \beta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \beta} \quad (0.53)$$

$$d\alpha = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \beta} d\beta \quad (0.54)$$

$$1 + \varepsilon \cos \alpha = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \beta} \quad (0.55)$$

Concernant les bornes d'intégration,

$$\begin{cases} \alpha = 0, \cos \alpha = 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon \cos \beta = \cos \beta - \varepsilon, \cos \beta (1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon, \cos \beta = 1, \beta = 0 \\ \alpha^* = \arccos(-\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon = \frac{\cos \beta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \beta}, -\varepsilon + \varepsilon^2 \cos \beta = \cos \beta - \varepsilon, \cos \beta = 0, \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (0.56)$$

$$\int_0^{\alpha^*} \frac{d\alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \varepsilon \cos \beta}{1 - \varepsilon^2} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \beta} d\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \beta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (0.57)$$

Rassemblons chacun des termes, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \alpha^* - \frac{\sin 2\alpha^*}{2} \right) + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left\{ \alpha^* - \frac{1}{\varepsilon} \sin \alpha^* - \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\alpha^*}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \alpha^* - \frac{\sin 2\alpha^*}{2} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\alpha^*}{\varepsilon} - \sin \alpha^* \right) + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\pi}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \pi + \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) \left( \frac{\pi}{\varepsilon} - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2)^2 \frac{\pi}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \pi + \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) \left( \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\pi}{2\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2} - \frac{\pi}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \pi + \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right) + \frac{h_0}{R} \left( \sqrt{\frac{h_0}{R}} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) - \pi \right) \\ &\approx \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (0.58)$$

Finalement,

$$I \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{R}{h_0} \right)^{3/2} \quad (0.59)$$

Et,

$$v \approx \frac{3\pi}{2} \frac{P}{Eb} \left( \frac{R}{h_0} \right)^{3/2} \quad (0.60)$$

Cette dernière expression mesure la contribution de la flexion.

b) Contribution de l'effort tranchant

Le déplacement localisé vaut,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{O}{\frac{5}{6}Eb} = \frac{6O}{5Eb} \quad (0.61)$$

Et le déplacement total,

$$v = \frac{6O}{5Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{6\pi}{5} \frac{O}{Eb} \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.62)$$

Ce déplacement est équivalent à la contribution de l'effort tranchant.

c) Au total

La flexion est largement prépondérante et nous négligerons donc l'effet de l'effort tranchant. La rigidité en cisaillement technologique se ramène alors à,

$$\boxed{\frac{O}{v} \approx \frac{2}{3\pi} Eb \left( \frac{h_0}{R} \right)^{3/2}} \quad (0.63)$$

### Rigidité en translation ou cisaillement technologique d'axe z

Nous pouvons effectuer le même traitement suivant l'axe z.

De nouveau, nous aurons une contribution en flexion et une contribution en cisaillement.

a) Contribution de la flexion

Ici, la charge est orientée à 90° par rapport au cas précédent. Le moment d'inertie de la section droite change. Nous avons alors,

$$-\frac{d\alpha_{fi}}{dx} = \frac{12M_{fi}}{Eb^3h} = \frac{12Px}{Eb^3h} \quad (0.64)$$

Avec, de nouveau,

$$w = \int_{-R}^R \alpha_{fi} dx \quad (0.65)$$

On intègre de nouveau par partie, pour trouver,

$$w = \left[ x \alpha_{fi} \right]_{-R}^R - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha_{fi}}{dx} dx \quad (0.66)$$

On notera encore que,

$$\alpha_{fi}(R) = - \int_{-R}^R \frac{12Px}{Eb^3 h} dx = 0 \quad (0.67)$$

Car l'intégrand est impair. Donc  $\alpha_{fi}(0) = 0$ .

Il reste donc, en effectuant le premier changement de variable,

$$\begin{aligned} w &= - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha_{fi}}{dx} dx = \frac{12P}{Eb^3} \int_{-R}^R \frac{x^2}{h} dx = \frac{12Q}{Eb^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon R^2 \sin^2 \varphi}{2R(1 - \varepsilon \cos \varphi)} R \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{12PR^2}{Eb^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon \sin^2 \varphi \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} d\varphi = \frac{12PR^2}{Eb^3} I \end{aligned} \quad (0.68)$$

Transformons l'intégrand, nous avons successivement,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \sin^2 \varphi \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} &= \frac{\varepsilon \sin^2 \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -\sin^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \\ \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} &= \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{1 - \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = 1 + \frac{\cos \varphi (\varepsilon - \cos \varphi)}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \\ \frac{\cos \varphi (\varepsilon - \cos \varphi)}{1 - \varepsilon \cos \varphi} &= \frac{\cos \varphi \left( \frac{1}{\varepsilon} - \cos \varphi \right) + \cos \varphi \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right)}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\varepsilon} + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \\ \frac{\cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} &= \frac{\cos \varphi - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \right) \end{aligned} \quad (0.69)$$

Calculons la première intégrale, les autres étant évidentes.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \left( \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4} \quad (0.70)$$

La dernière intégrale a été calculée précédemment. Au total, nous avons,

$$I = \left( -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2\varepsilon} + \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \right) = \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) + \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \right) \approx \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.71)$$

Et,

$$w = \frac{12PR^2}{Eb^3} \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.72)$$

b) Contribution de l'effort tranchant

Le même calcul que pour le cisaillement selon l'axe y mène à,

$$w = \frac{6P}{5Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{6\pi}{5} \frac{P}{Eb} \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.73)$$

c) Au total

De nouveau, la flexion est largement prépondérante. Nous aurons donc,

$$\boxed{\frac{P}{w} = \frac{1}{12\pi} \frac{Eb^3}{R^2} \sqrt{\frac{h_0}{R}}} \quad (0.74)$$

### Déplacement de l'extrémité du col

On se propose, ici, de calculer le déplacement de l'extrémité du col sous l'influence d'un moment de flexion. Ceci permettra d'obtenir des informations sur la position du centre de rotation du col.

On a le gradient de l'angle de rotation dans la direction  $x$ ,

$$\frac{d\alpha_f}{dx} = \frac{12M_f}{Eb h^3} \quad (0.75)$$

Et le déplacement global,

$$v = \int_{-R}^R \alpha_f dx = \left[ \alpha_f x \right]_{-R}^R - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha_f}{dx} dx = R\alpha_f(R) - \int_{-R}^R \alpha_f \frac{d\alpha_f}{dx} dx \quad (0.76)$$

Réolvons cette équation. On connaît,

$$R\alpha_f(R) = \frac{9\pi}{2Eb} M_f \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \quad (0.77)$$

Calculons,

$$\int_{-R}^R \alpha_f \frac{d\alpha_f}{dx} dx = \frac{12M_f}{Eb} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi R \cos \varphi d\varphi}{\frac{8R^3}{\varepsilon^3} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{3M_f \varepsilon^3}{EbR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi = \frac{3M_f \varepsilon^3}{EbR} I \quad (0.78)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\alpha^*} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \frac{\cos \alpha + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \frac{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^3}{(1 - \varepsilon^2)^3} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \int_0^{\alpha^*} \sin \alpha (\cos \alpha + \varepsilon) d\alpha = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \int_0^{\alpha^*} (\sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left[ \frac{\sin^2 \alpha^*}{2} + \varepsilon (1 - \cos \alpha^*) \right] \\
&= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left[ \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) + \varepsilon + \varepsilon^2 \right] = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left[ \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) + \varepsilon \right] \approx 2 \frac{R^2}{h_0^2}
\end{aligned} \tag{0.79}$$

On a donc,

$$\int_{-R}^R \alpha_f \frac{d\alpha_f}{dx} dx = \frac{6M_f \varepsilon^3}{EbR} \frac{R^2}{h_0^2} \approx \frac{6M_f}{Eb} \frac{R}{h_0^2} \tag{0.80}$$

Au total,

$$v = \frac{M_f}{Eb} \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \left[ \frac{9\pi}{2} - 6\sqrt{\frac{h_0}{R}} \right] \tag{0.81}$$

On constate que le grand terme est  $\alpha(R)$ , c'est-à-dire que la rotation se fait à  $O\left(\sqrt{\frac{h_0}{R}}\right)$  près autour du centre du col.

Cette constatation est confirmée par Chau [20]. Dans son travail, il a tenté de prédire la trajectoire exacte de l'extrémité du col. Ses calculs théoriques ont été confrontés à une batterie de tests et les trajectoires mesurées ne permettaient pas de conclure quant à l'écart par rapport à la trajectoire idéale qui serait l'arc de cercle, les mesures se trouvant toutes à l'intérieur de l'intervalle d'erreurs cumulées.

## Coefficients de correction

Les équations obtenues précédemment sont valables tant que le rapport  $h_0/R$  reste proche de zéro. Ce qui signifie que, soit l'épaisseur  $h_0$  doit être très petite, soit le rayon  $R$  doit être très grand. En pratique, cependant, l'épaisseur  $h_0$  peut atteindre des valeurs significatives par rapport au rayon. Ceci peut arriver pour des questions de fabrication ( $h_0$  sera alors limité inférieurement) ou d'encombrement ( $R$  sera, lui, limité supérieurement), lorsque la fonction du col le permet. Ainsi, le rapport  $h_0/R$  pourrait atteindre des valeurs telles que 0,5.

Nous sommes alors devant un cas pour lequel les équations asymptotiques ne sont plus valables rigoureusement. Nous allons montrer que nous pouvons aisément les conserver, par l'application de coefficients correcteurs uniquement fonctions du rapport  $h_0/R$ .

Ces coefficients correcteurs seront déduits des équations de la théorie complète, avant leurs simplifications pour obtenir les formes asymptotiques. Il est bien entendu que ces coefficients doivent tendre vers un lorsque le rapport  $h_0/R$  tend vers zéro.

### Rigidité en flexion

Rappelons l'équation complète en flexion,

$$\alpha_f = \frac{12M_f}{Eb} \frac{\varepsilon^3}{4R^2} I \tag{0.82}$$

avec  $I = f\left(\frac{h_0}{R}\right)$ , donnée par l'équation (0.15).

La raideur en flexion est alors mesurée par

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = \frac{Eb}{3} \frac{R^2}{\varepsilon^3 I} \quad (0.83)$$

Le coefficient correcteur se mesure alors par le rapport entre les raideurs complète et asymptotique,

$$K_1 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon^3 I} \left(\frac{R}{h_0}\right)^{5/2} \quad (0.84)$$

La valeur du coefficient correcteur est obtenue en évaluant numériquement chacun des termes intervenant dans l'expression I. Le tableau II donne la valeur du coefficient pour différentes valeurs du rapport  $h_0/R$ .

TABLEAU II  
COEFFICIENT CORRECTEUR  $K_1$

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_1$	1,0013	1,0025	1,0064	1,0129	1,0264	1,0683

Il reste à trouver une expression simple, faisant apparaître le rapport  $h_0/R$  uniquement. La figure 11 nous montre que l'évolution du coefficient est sensiblement linéaire. La recherche d'une droite de coefficient de corrélation le meilleur possible nous amène à l'expression simple suivante,

$$K_1 = 0,137 \frac{h_0}{R} + 1 \quad (0.85)$$

La figure 11 illustre la bonne corrélation entre l'évolution du coefficient et son approximation.

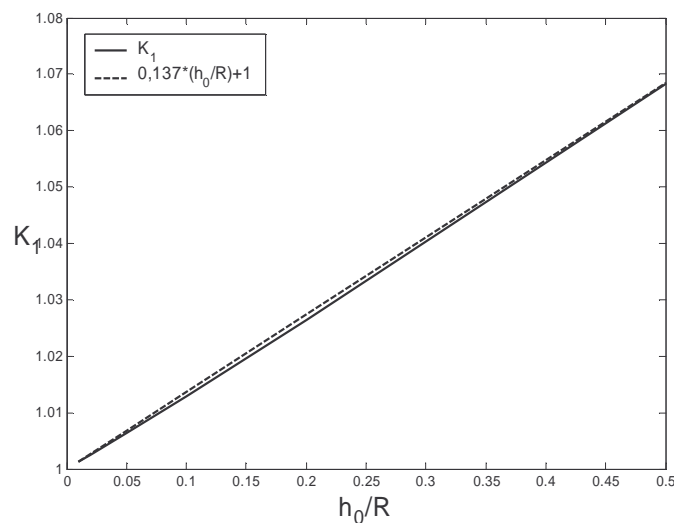


Figure 11 : Coefficient correcteur  $K_1$

L'approximation nous donne une erreur maximale de 0,1%, ce qui est tout à fait correct.

TABLEAU III  
ERREUR SUR  $K_I$

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_I$	1,0014	1,0027	1,0069	1,0137	1,0274	1,0685
Err (%)	0,01	0,02	0,05	0,08	0,1	0,02

Nous obtenons finalement l'équation corrigée suivante,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{M_f}{\alpha_f} &= K_1 \frac{2}{9\pi} Eb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}} \\ K_1 &= 0,137 \frac{h_0}{R} + 1 \end{aligned}} \quad (0.86)$$

De même, pour calculer un angle limite,

$$\boxed{\alpha_f = \frac{1}{K_1} \frac{3\pi}{4} \frac{\sigma}{E} \sqrt{\frac{R}{h_0}}} \quad (0.87)$$

### Rigidité en torsion

Il est clair que le coefficient correcteur  $K_I$  est également valable dans le cas de la torsion. En effet, l'expression mesurant le déplacement angulaire (0.29) en torsion fait intervenir la même intégrale (0.5) que dans le cas de la flexion.

### Rigidité en extension

Nous avons obtenu l'équation complète suivante, en extension,

$$u = \frac{N}{Eb} \left( \frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (0.88)$$

Le coefficient correcteur s'exprime par,

$$K_2^{-1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} \left( \frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (0.89)$$

Le tableau IV nous donne la valeur de ce coefficient correcteur. La figure 12 en donne la représentation graphique.

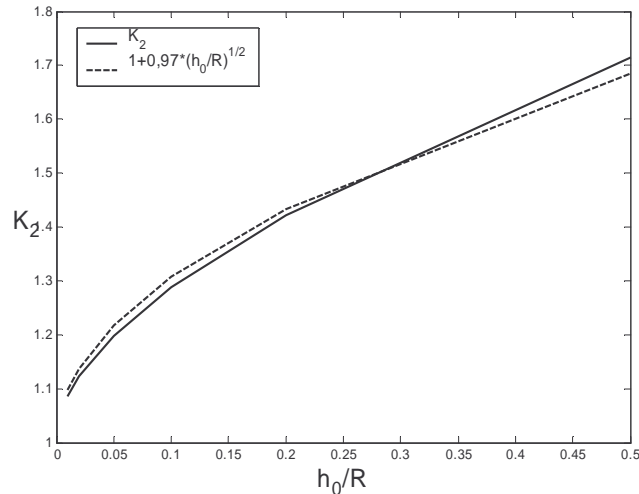
TABLEAU IV  
COEFFICIENT CORRECTEUR  $K_2$

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_2$	1,085	1,122	1,198	1,287	1,422	1,714

L'équation trouvée, qui représente ce coefficient correcteur est la suivante,

$$K_2 = 1 + 0,97 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (0.90)$$

Cette équation est également représentée sur la figure 12.



**Figure 12 : Coefficient correcteur  $K_2$**

L'erreur maximale est de 1,6 %, comme le montre le tableau V.

**TABLEAU V**  
**ERREUR SUR  $K_2$**

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_2$	1,097	1,137	1,217	1,307	1,434	1,686
Err (%)	1,1	1,4	1,6	1,5	0,8	1,6

L'expression finale de la rigidité en extension est la suivante,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{N}{u} &= K_2 \frac{1}{\pi} E b \sqrt{\frac{h_0}{R}} \\ K_2 &= 1 + 0,97 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \end{aligned}} \quad (0.91)$$

### **Rigidité en flexion transverse**

De nouveau, le coefficient correcteur  $K_2$  reste valable en flexion transverse, pour la même raison que dans le cas de la torsion par rapport à la flexion. En effet, nous retrouvons bien, dans l'expression du déplacement angulaire en flexion transverse (0.41), la même intégrale que dans le cas de l'extension (0.32).



### Rigidité en cisaillement technologique d'axe y

Il a été démontré que la flexion est largement prépondérante. Nous négligerons encore la contribution de l'effort tranchant.

L'équation complète en cisaillement technologique s'écrit,

$$v = \frac{3O}{Eb} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \Gamma \quad (0.92)$$

L'expression complète du coefficient correcteur est la suivante,

$$K_3 = \frac{\pi}{2} \frac{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{\varepsilon^3 \Gamma} \left( \frac{R}{h_0} \right)^{3/2} \quad (0.93)$$

Le tableau VI nous donne la valeur de ce coefficient correcteur. La figure 13 en donne la représentation graphique.

TABLEAU VI  
COEFFICIENT CORRECTEUR  $K_3$

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_3$	0,9829	0,9683	0,9250	0,8696	0,7760	0,5895

La meilleure équation trouvée pour coller à ces points est la suivante,

$$K_3 = \frac{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}}{1 + 2,2 \frac{h_0}{R}} \quad (0.94)$$

Également représentée sur la figure 13.

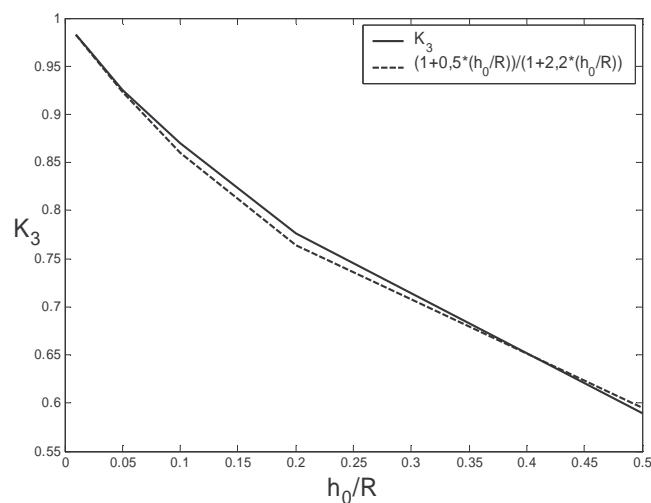


Figure 13 : Coefficient correcteur  $K_3$

L'erreur maximale est de 1,6 %, comme le montre le tableau VII.

TABLEAU VII  
ERREUR SUR  $K_3$

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_3$	0,9834	0,9674	0,9234	0,8607	0,7639	0,5952
Err (%)	0,05	0,09	0,17	1,03	1,56	0,97

L'équation est donc,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{O}{v} &= K_3 \frac{2}{3\pi} Eb \left( \frac{h_0}{R} \right)^{3/2} \\ K_3 &= \frac{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}}{1 + 2,2 \frac{h_0}{R}} \end{aligned}} \quad (0.95)$$

### Rigidité en cisaillement technologique d'axe z

L'expression mesurant le déplacement  $w$  du col lors d'un cisaillement technologique d'axe z (0.68) étant fort proche de celle mesurant le déplacement  $v$  du col soumis à un cisaillement technologique d'axe y (0.48) et tenant compte du fait qu'il a été montré que la contribution de l'effort tranchant est négligeable dans les 2 cas, il est évident que le coefficient  $K_3$  est également valable dans le cas du cisaillement technologique d'axe z.

### Déplacement de l'extrémité du col

Nous avons vu qu'à  $O\left(\sqrt{\frac{h_0}{R}}\right)$  près, la rotation du système se fait autour du col. Ici, nous ne pouvons plus négliger le second terme de l'équation (0.81). Celui-ci représente, lorsque le rapport  $h_0/R$  atteint des valeurs telles que 0,5, jusqu'à 25% du premier terme, ce qui n'est plus négligeable.

Nous devons par conséquent, calculer un coefficient correcteur pour chaque terme de la relation (0.81).

Nous connaissons le premier coefficient grâce à la relation (0.86).

Le second terme de l'expression nous a donné,

$$v_2 = \frac{3M\varepsilon^3}{EbR} I \quad (0.96)$$

Où  $I$  est donné par l'expression (0.79).

Le second coefficient se calcule donc par,

$$K_4 = \frac{\varepsilon^3}{2} \left( \frac{h_0}{R} \right)^2 I \quad (0.97)$$

Le tableau VIII nous donne la valeur de ce coefficient correcteur. La figure 14 en donne la représentation graphique.

TABLEAU VIII  
COEFFICIENT CORRECTEUR  $K_4$

$H_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_4$	0,9950	0,9901	0,9756	0,9524	0,9091	0,8000

La meilleure équation trouvée pour coller à ces points est la suivante,

$$K_4 = \frac{1}{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}} \quad (0.98)$$

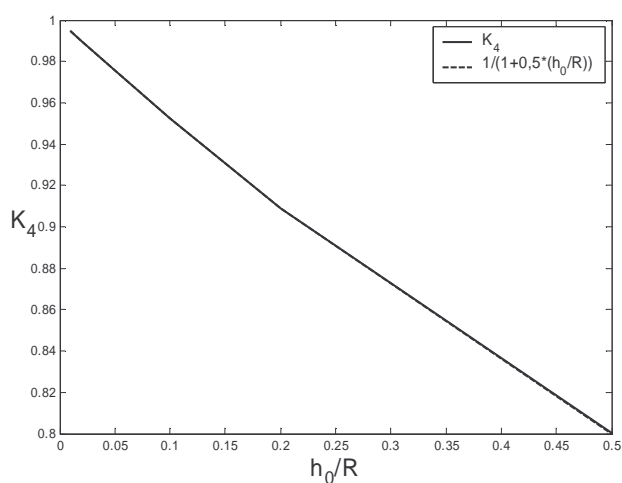


Figure 14 : Coefficient correcteur  $K_4$

L'erreur maximale est de l'ordre de  $10^{-11}\%$ , autrement dit, 0 %, comme le montre le tableau IX.

TABLEAU IX  
ERREUR SUR  $K_4$

$h_0/R$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$K_4$	0,9950	0,9901	0,9756	0,9524	0,9091	0,8000
Err (%)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

L'équation est donc,

$$\boxed{v = \frac{M_f}{Eb} \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \left[ \frac{1}{K_1} \frac{9\pi}{2} - K_4 6 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right]} \quad (0.99)$$

$$K_1 = 0,137 \frac{h_0}{R} + 1, \quad K_4 = \frac{1}{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}}$$

L'erreur maximale, comparée à la solution exacte, reste inférieure à 1,6 % pour tous les coefficients correcteurs [7].

### Coefficient d'état de surface

La méthode de fabrication influence la rugosité de la surface définissant le col. Bien que très petite par rapport aux dimensions globales, cette rugosité totale ( $R_p$ ) correspond à une diminution non-négligeable de l'épaisseur minimale,  $h_0$  (par exemple, si  $h_0 = 0,1$  mm et  $R_p = 2,75$   $\mu$ m, sur chaque face, la différence vaut environ 5,5 %). Cette différence est prise en compte comme suit.

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = K_1 K_r \frac{2}{9\pi} E b \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}}, K_r = \left(1 - 5 \frac{R_p}{h_0}\right) \quad (0.100)$$

## Comparaison avec les solutions existantes

Nous pouvons trouver, dans la littérature, beaucoup de références concernant le calcul des cols circulaires. Certaines ont pour objet la méthode d'usinage la plus adéquate de cols circulaires [17]-[8], d'autres essayent de prévoir la rigidité des cols [5]-[7] et [18]-[19], principalement pour la conception de tels guidages. Tous les auteurs donnent la même relation pour la forme asymptotique de la rigidité à la flexion, équation (0.25), ci-après appelée la solution de Heinen, car c'est la seule qu'il a publiée [6]. Si nous négligeons cette limite et nous focalisons sur les formes utilisables en pratique, les solutions données sont presque toutes différentes. Les diverses solutions peuvent alors être comparées et discutées.

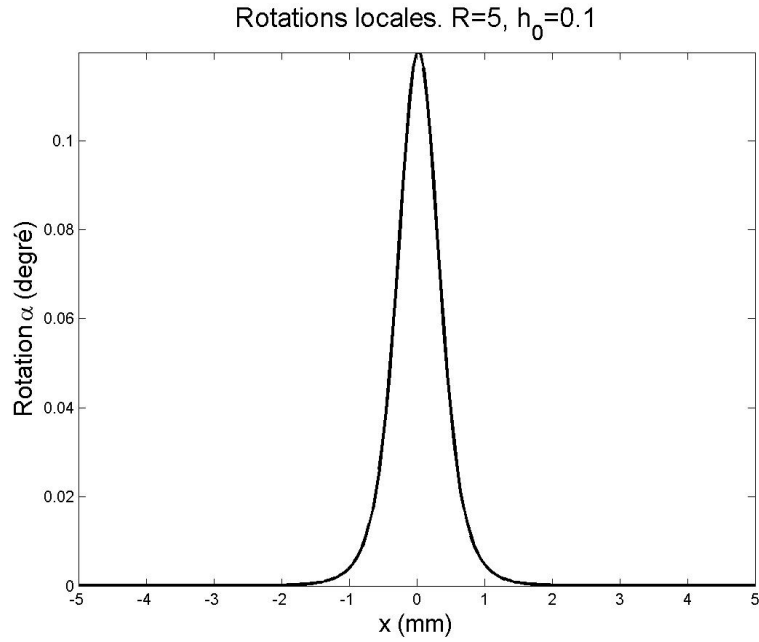
En 1965, Paros et Weisbord [5] ont donné la solution suivante, bien connue. Si  $\beta = h_0/2R$ , pour un col circulaire complet, ils donnent,

$$\frac{\alpha_f}{M_f} = \frac{3}{2EbR^2} \left[ \frac{1}{2\beta + \beta^2} \right] \left\{ \frac{1}{1+\beta} \frac{3+4\beta+2\beta^2}{(2\beta + \beta^2)} + \frac{6(1+\beta)}{(2\beta + \beta^2)^{3/2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2+\beta}{\beta}} \right\} \quad (0.101)$$

$$\frac{\alpha_{fi}}{M_{fi}} = 24 \left\{ \frac{1+\beta}{\sqrt{2\beta + \beta^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2+\beta}{\beta}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad (0.102)$$

Cette solution semble être une solution exacte du système des équations différentielles mais est contestée comme étant la meilleure solution pour le col circulaire par Zangh et Fasse [15] car Paros et Weisbord ont employé la théorie linéaire des poutres, dont les hypothèses impliquent qu'elle n'est valable que pour de longues poutres avec des sections transversales qui varient graduellement, de façon limitée.

Bien entendu, nous faisons la même hypothèse. Cependant, nous estimons qu'elle est bien respectée car la partie du col reprenant la déformation est concentrée au milieu du col, là où la section varie plus lentement, comparé aux extrémités du col. Ceci est clairement illustré sur la figure 15 qui montre les rotations locales d'une section du col par rapport à la précédente. Sur celle-ci, il est clair que la déformation a lieu principalement pour les coordonnées comprises dans l'intervalle [-1.5,1.5], le col s'étendant sur l'intervalle [-5,5]. Cette constatation est valable pour des valeurs du rapport  $h_0/R$  réalistes, c'est-à-dire limitées, comme expliqué plus loin.



**Figure 15 : Rotations locales**

Zangh et Fasse ont, eux, calculé les raideurs du col circulaire en le modélisant comme système élastique par des éléments finis tridimensionnels soumis aux charges appliquées. Les déplacements observés permettent de calculer la rigidité correspondante. En adaptant l'ensemble de points obtenus, ils ont déterminé les fonctions suivantes, avec  $\gamma = b/2R$ .

$$\frac{N}{u} = Eb(0,145\beta + 0,357\beta^{0,5}) \quad (0.103)$$

$$\frac{O}{v} = Eb^3(0,109\beta^2 - 0,102\beta^{1,5} + 0,388\beta - 0,005\beta^{0,5})(0,230\gamma^2 - 1,396\gamma + 2,583) \quad (0.104)$$

$$\frac{P}{w} = Eb(-0,067\beta^{1,5} + 0,283\beta - 0,034\beta^{0,5}) \quad (0.105)$$

$$\frac{M_t}{\alpha_t} = Gb^3(0,052\beta^{1,5} + 0,047\beta - 0,0082\beta^{0,5})(0,274\gamma^2 - 1,397\gamma + 2,496) \quad (0.106)$$

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = Ebh_0^2(-0,035\beta + 0,111\beta^{0,5}) \quad (0.107)$$

$$\frac{M_{ft}}{\alpha_{ft}} = Eb^3(0,013\beta + 0,030\beta^{0,5}) \quad (0.108)$$

Koster [14] donne aussi des approximations fonctionnelles pour les raideurs, dans l'intervalle qu'il appelle le "régime réaliste", c'est-à-dire,  $0 < h_0/2R < 0,5$ .

$$\frac{N}{u} = 0,48Eb\beta^{0,5} \quad (0.109)$$

$$\frac{P}{w} = 0,56Eb \frac{\beta^{0,5}}{1,2 + 1/\beta} \quad (0.110)$$

$$\frac{M_t}{\alpha_t} = 0,0467 \frac{E}{G} b \frac{\beta^{0,5}}{1,2 + 1/\beta} \quad (0.111)$$

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = 0,093Eb h_0^2 \beta^{0,5} \quad (0.112)$$

$$\frac{M_{ft}}{\alpha_{ft}} = 0,04Eb^3 \beta^{0,5} \quad (0.113)$$

Dans notre cas, nous limitons le rapport  $h_0/R$  à 0,5. Nous pensons en effet qu'il n'est pas réaliste d'avoir une épaisseur  $h_0$  égale au rayon  $R$  parce que la rigidité du col circulaire doit être limitée (équation(0.25)). De la même manière, l'équation (0.26) montre que pour réduire la contrainte pour un déplacement donné, le rapport sera maintenu sous une limite calculée par la même équation. Finalement, une dernière raison, et non des moindres, est que la concentration de contrainte demeure en dessous de 9 % (Peterson, [13] p 56, fig. 37) quand le rapport reste limité à un maximum de 0,5.

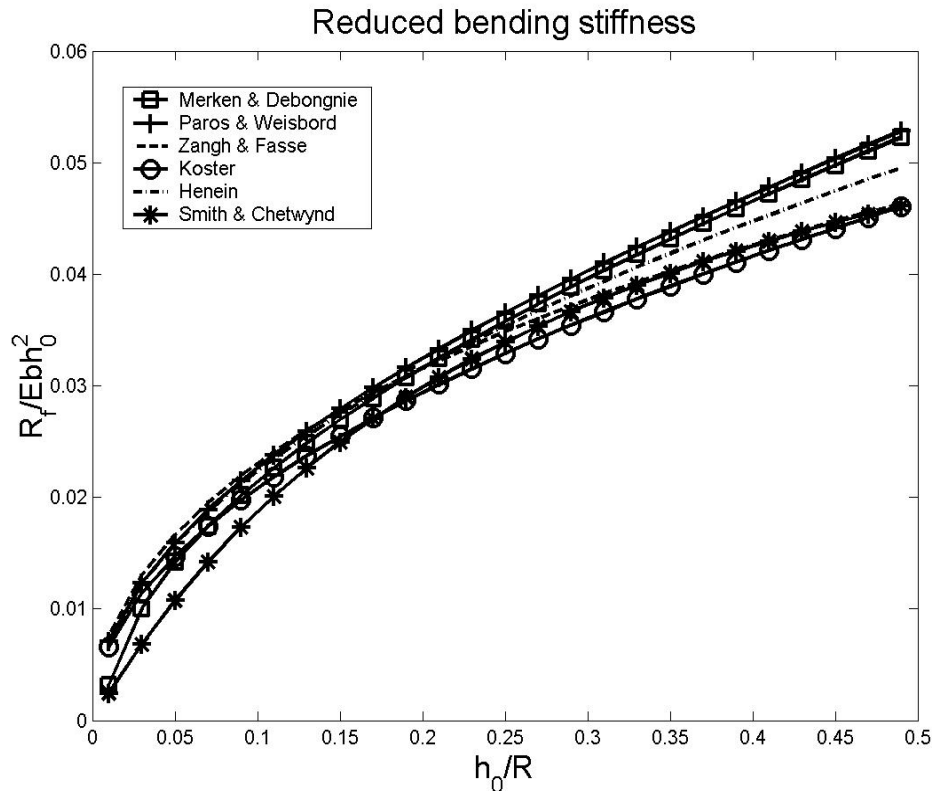
Auparavant, Smith & Chetwynd [18]-[19] ont obtenu une formule empirique semblable à celle pour une poutre en porte-à-faux simple, également basé sur une méthode des éléments fini. La relation est,

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = \frac{EI}{2KR} \quad (0.114)$$

$I$  est le moment d'inertie de la plus petite section du col circulaire,  $K$  est déterminé par éléments finis et peut-être exprimé par  $K = 0,565 \frac{h_0}{R} + 0,166$ . Finalement, l'expression est équivalente à,

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = Ebh_0^2 \frac{\beta}{1,992 + 13,56\beta} \quad (0.115)$$

Toutes les expressions de la raideur en flexion sont représentées sur la figure 16. On y peut voir que les solutions de Koster, Zhang & Fasse et Smith & Chetwynd s'éloignent de la nôtre quand le rapport  $h_0/R$  augmente. Nous pouvons ainsi identifier 2 familles de courbes. La différence entre ces 2 familles est, au maximum, de 20 %, ce qui est déjà important.



**Figure 16 : comparaison entre 5 modèles**

Pour un rapport  $h_0/R$  s'étendant entre 0.025 et 0.07, notre expression de la rigidité en flexion semble bien coller aux mesures (pour le détail des mesures, voir un chapitre ultérieur : validation expérimentale). Pour trois cols circulaires, c'est la meilleure solution, avec Koster pour deux d'entre eux.

Le choix de la meilleure solution devrait alors être fait en accord avec les valeurs les plus élevées de ce rapport. Ainsi, d'autres essais avec des épaisseurs de cols couvrant la gamme complète du régime réaliste doivent encore être effectués.

L'expérience se composerait d'essais avec un nombre important de points de mesure pour chaque col, afin d'avoir une approximation acceptable de la rigidité. Il est cependant difficile de réaliser la même analyse pour un grand nombre de cols et le résultat peut, dès lors, ne pas être complet. Ceci illustre encore d'autres essais à effectuer, avec la détermination de la rigidité en torsion, en flexion transversale, etc. Cependant, la rigidité importante est celle en flexion. Les autres seront évaluées et le col sera dimensionné pour que ces dernières soient d'un ordre de grandeur supérieur.

On pourrait se demander quel est l'intérêt de chercher une solution du col, alors que celle-ci est connue depuis 1965 et est donnée par Paros & Weisbord. En réalité, cette dernière est difficilement utilisable en pratique, surtout lorsqu'il s'agit de dimensionner rapidement un col. La solution de Zhang & Fasse paraît également un peu trop compliquée. Celle de Smith & Chetwynd ne donne une solution que pour la rigidité à la flexion. Ce modèle est donc relativement simple et ne permet pas de définir complètement le col circulaire. En effet, pour certaines valeurs de la largeur  $b$ , il se peut que les rigidités en torsion, flexion transversale et flexion soient comparables, ce qui serait gênant. Le résultat de Koster paraît alors être la solution la meilleure.

Ce que nous apportons, c'est la possibilité de déterminer l'épaisseur minimum du col, en fonction de tous les paramètres géométriques et structuraux, pour un angle de débattement désiré. Il nous semble que c'est cette possibilité offerte qui est le plus important pour une application pratique. Nous allons voir dans l'exemple suivant comment notre théorie s'applique pour le dimensionnement du col.

## Application numérique

Imaginons que nous désirions concevoir une pompe à balancier, à petit débit, donc une micropompe. Il peut être envisagé, pour l'axe du balancier, d'utiliser un col circulaire, pour autant que le mouvement du balancier puisse être limité en amplitude. Comme il s'agit d'une pompe, la force exercée sur le col sera la résultante d'une force de pression, transmise par l'intermédiaire du balancier. Nous aurons alors un couple de rappel,  $C_{rp}$ , comme illustré sur la figure 17.

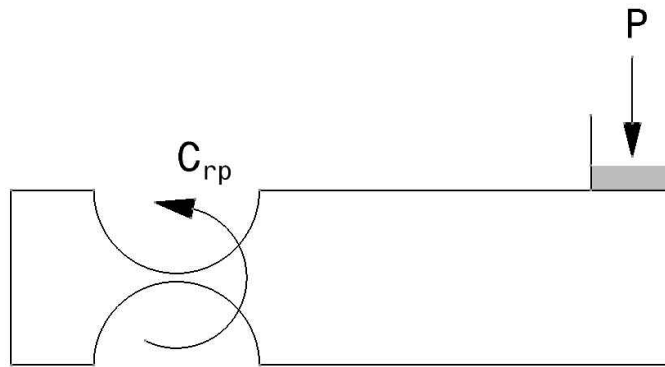


Figure 17 : transmission de la pression P au col

Nous traiterons l'exemple d'un balancier en alliage de titane (TiAl6V4). Nous désirons, par exemple, que l'épaisseur du balancier soit de 4 mm et que le rayon du col soit de 1 mm, le débattement angulaire maximal du balancier sera de  $3^\circ$ , soit 0,05 rad. Les caractéristiques du titane sont les suivantes :

- module de flexion,  $E = 115\,000\text{ Mpa}$ ,
- module de torsion,  $G = 45\,000\text{ Mpa}$ ,
- limite élastique,  $\sigma = 800\text{ Mpa}$ .

Calculons d'abord l'épaisseur  $h_0$  minimale admissible au niveau du col, pour conserver une caractéristique élastique du col. Les équations (0.86) et (0.87) nous donnent,

$$\alpha_f = \frac{1}{0,137 \frac{h_0}{R} + 1} \frac{3\pi}{4} \frac{\sigma}{E} \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (0.116)$$

Posant

$$\beta^2 = \frac{h_0}{R} \text{ et } K = \frac{3\pi}{4} \frac{\sigma}{E} \quad (0.117)$$

L'équation se réduit à

$$\beta^3 + p\beta - q = 0, \quad p = 0,137^{-1}, \quad q = pK\alpha_f^{-1} \quad (0.118)$$



Il s'agit d'une équation du 3<sup>ème</sup> degré dont la solution est donnée par les formules de Cardan,

$$\frac{h_0}{R} = \left( \sqrt[3]{\frac{pK}{2\alpha_f} + \sqrt{\left(\frac{pK}{2\alpha_f}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{pK}{2\alpha_f} - \sqrt{\left(\frac{pK}{2\alpha_f}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right)^2$$

$$= 0,105$$
(0.119)

Appliquons un coefficient de sécurité de 1,5 afin de se situer sous la limite élastique. Ainsi, l'épaisseur  $h_0$  sera de 0,07 mm (le rayon  $R$  vaut 1).

Cette dernière caractéristique géométrique du col définie, déterminons les différentes raideurs du col.

Raideur en flexion :

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = K_1 \frac{2Eb}{9\pi} \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}} = 1,01 \frac{2 \cdot 115000 \cdot 4}{9\pi} \frac{0,07^{5/2}}{\sqrt{1}} = 42,6 \text{ Nmm / rad}$$
(0.120)

Le moment de flexion à appliquer pour atteindre le débattement de 3° demandé est,

$$M_f = \frac{42,6}{20} = 2,13 \text{ Nmm}$$
(0.121)

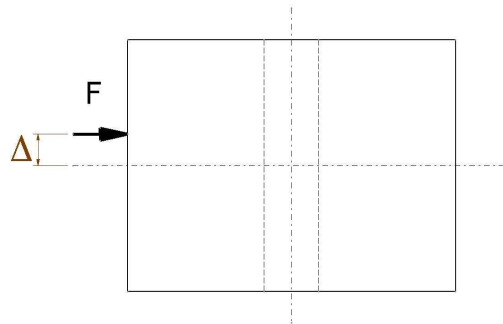
Il est alors possible de calculer, grâce à cette valeur maximale du couple et connaissant les caractéristiques géométriques de la pompe, la pression maximale que la pompe pourra donner.

Raideur en torsion :

$$\frac{M_t}{\alpha_t} = K_1 \frac{8}{9\pi} Gb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}} = 1,01 \frac{8}{9\pi} 45000 \cdot 4 \frac{0,07^{5/2}}{\sqrt{1}} = 66,7 \text{ Nmm / rad}$$
(0.122)

Cette raideur en torsion nous permet d'évaluer l'influence qu'aurait un excentrement de la résultante de la force de pression sur le jeu qui doit exister entre le balancier et les parties fixes de la pompe (les flasques). Admettons que cet excentrement est de 0,1 mm, que la longueur du balancier est de 10 mm et que la pression vaut 0,1 bar. Le couple de torsion agissant sur la poutre vaut,

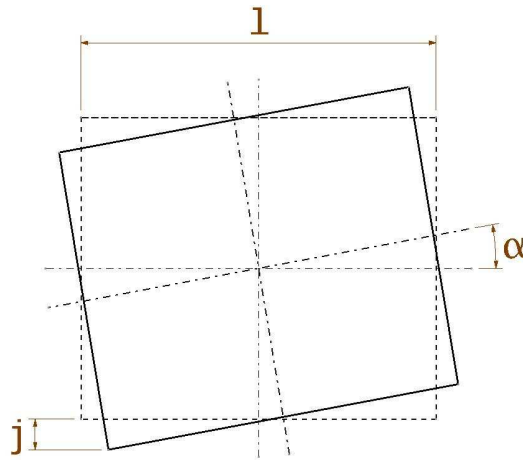
$$C_t = F \cdot \Delta = \Delta P \cdot S \cdot \Delta = 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-1} = 0,4 \text{ Nmm}$$
(0.123)



**Figure 18 : excentricité de la force**

L'angle dont tournera la poutre est  $\alpha_t = \frac{C_t}{66,7} = \frac{0,4}{66,7} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ .

Cette rotation aura une influence au niveau des jeux. Afin que la poutre ne touche pas les flasques, le jeu minimum de chaque côté de la poutre devra être, en supposant que le balancier ait une largeur  $l = 2 \text{ mm}$ ,  $j = \frac{l}{2} \alpha = 1 \cdot 610^{-3} = 610^{-3} \text{ mm} = 6 \mu\text{m}$ .



**Figure 19 : jeu minimum**

Raideur en extension,

$$\frac{N}{u} = K_2 \frac{1}{\pi} Eb \sqrt{\frac{h_0}{R}} = 1,257 \frac{1}{\pi} 115000 \cdot 4 \sqrt{0,07} = 48695 \text{ N/mm}$$

Raideur en flexion transverse,

$$\frac{M_{ft}}{\alpha_{ft}} = K_2 \frac{Eb^3}{12\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} = 1,257 \frac{115000 \cdot 4^3}{12\pi} \sqrt{0,07} = 64928 \text{ Nmm/rad}$$

Raideur en cisaillement technologique (axe y),

$$\frac{O}{v} \approx K_3 \frac{2}{3\pi} Eb \left( \frac{h_0}{R} \right)^{3/2} = 0,897 \frac{2}{3\pi} 115000 \cdot 4 (0,07)^{3/2} = 1622 \text{ N/mm}$$

Raideur en cisaillement technologique (axe z),

$$\frac{P}{w} = K_3 \frac{1}{12\pi} \frac{Eb^3}{R^2} \sqrt{\frac{h_0}{R}} = 0,897 \frac{115000 \cdot 4^3}{12\pi} \sqrt{0,07} = 46333 \text{ N/mm}$$

Le déplacement de l'extrémité du col sous l'effet du moment de flexion nécessaire pour atteindre un débattement de  $3^\circ$  est,

$$\begin{aligned} w &= \frac{M_f}{Eb} \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \left[ \frac{1}{K_1} \frac{9\pi}{2} - K_4 6 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right] \\ &= \frac{2,13}{115000 \cdot 4} \frac{1^{3/2}}{0,07^{5/2}} \left[ \frac{1}{1,01} \frac{9\pi}{2} - 0,966 \cdot 6 \sqrt{0,07} \right] = 7,510^{-8} \text{ mm} \end{aligned}$$

## Validation expérimentale

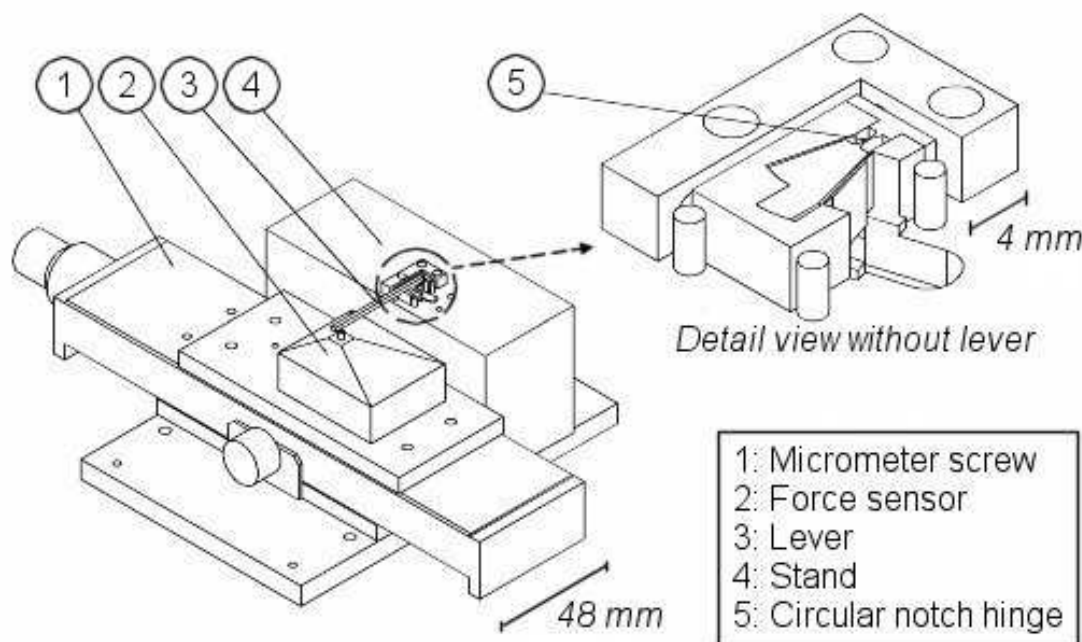
Des cols circulaires en acier inoxydable dont l'épaisseur varie de 66 à 175  $\mu\text{m}$  ont été usinés par électro-érosion à fil (WEDM). Dans ce procédé de mise à forme, la pièce à usiner est placée dans une solution diélectrique et une différence de tension entre une partie conductrice de la pièce et le fil produit un arc électrique formant des zones fondues et vaporisant le matériel localement.

Comme Ryu et Gweon [8] l'ont expliqué, l'électro-érosion à fil est le meilleur processus pour usiner des cols circulaires sans impact sérieux sur le mouvement induit par les erreurs d'usinage. La seule erreur est une erreur de forme globale. Tosun, Cogun et Inan [9] ont déterminé une relation entre la rugosité arithmétique  $R_a$  obtenue et les deux paramètres importants dans l'usinage par électro-érosion à fil : la durée d'impulsion,  $t_i(\mu\text{s})$ , et la tension de circuit ouvert,  $u_i(\text{V})$ . La relation qu'ils ont obtenue est la suivante,

$$R_a = 0,048 t_i^{0,3613} u_i^{0,3213} (\mu\text{m}) \quad (0.124)$$

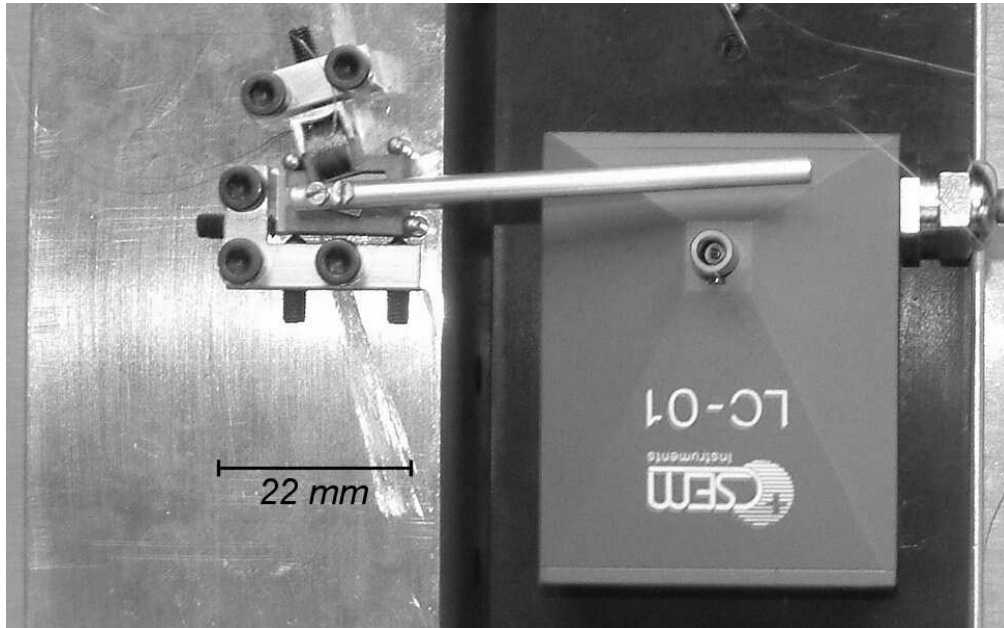
Le rapport entre la rugosité arithmétique  $R_a$  et la rugosité totale  $R_p$  est déterminé à partir de mesures effectuées sur quelques échantillons et vaut 0,43.

Finalement, les paramètres utilisés en usinant le col circulaire,  $t_i = 0,7 \mu\text{s}$  et  $u_i = 80 \text{ V}$ , mènent à  $R_p = 4,86 \mu\text{m}$ . Après l'usinage, un traitement par microbillage est appliqué à la surface, qui permet à  $R_p$  de diminuer jusque environ 2.75  $\mu\text{m}$ .



**Figure 20 : installation expérimentale**

L'installation expérimentale est illustrée sur les figures 20 et 21. Le col circulaire est fixé à une extrémité. Une tige (3) est fixée à l'autre extrémité et la force est appliquée par l'intermédiaire d'une vis micrométrique (1). Un capteur de force (2), construit par CSEM est utilisé pour mesurer la force appliquée. Les caractéristiques principales de ce capteur sont décrites dans le Tableau X.



**Figure 21 : vue du dessus du banc d'essai**

**TABLEAU X**  
**CARACTÉRISTIQUES DU CAPTEUR**

Type	LC-01
Charge Nominale	$\pm 0,1\text{N}$
Résolution Theorique	$< 10 \mu\text{N}$
Erreur de linéarité	0,5 %
Hystérésis	$< 0,2 \%$
Rigidité	0,2 mm / 0,1 N
Alimentation	5 V / 5 kHz

La figure 23 présente les résultats d'une série de mesures concernant un col particulier (0.066 millimètres d'épaisseur). Pour chaque position angulaire du col, trois mesures du couple de retour ont été effectuées. Le graphique présente seulement les valeurs moyennes pour chaque position, la déviance standard étant en dessous de 0.01 Nmm. Ces mesures sont alors comparées au couple évalué en utilisant le modèle corrigé ("modèle 1").

On peut facilement voir que l'accord entre les mesures et le modèle est bon pour de petits déplacements angulaires, inférieurs à  $0,2^\circ$ . Cependant pour de grands déplacements, le modèle surestime les données expérimentales. Trois raisons peuvent expliquer la différence.

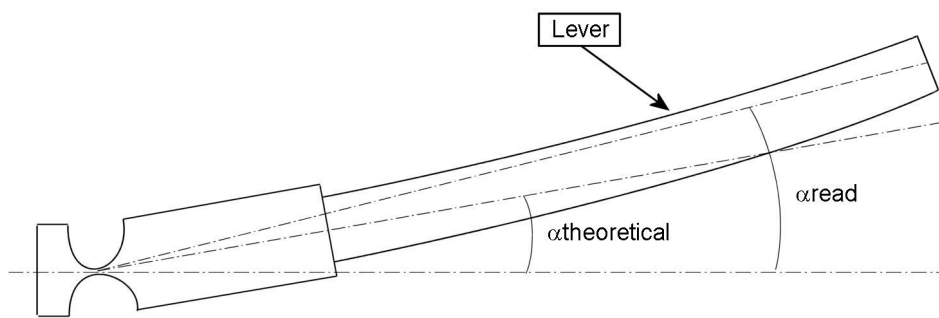
Premièrement, la tige utilisée pour appliquer la force au col peut fléchir sous l'effort appliqué. Le débattement pour une tige droite fixée à une extrémité et libre à l'autre est, pour une charge  $P$ , une longueur de tige  $l$  et  $I$  le moment d'inertie de la section droite,

$$v = -Pl^3/3EI \quad (0.125)$$

Ensuite, la force n'est pas appliquée à l'axe du col et celui-ci peut présenter un moment de torsion et donc un déplacement qui peut être évalué par

$$v_t = \frac{\theta_r (b+d)(l_1+l_2)}{2l_2} \quad (0.126)$$

Avec  $\theta_r = M_t/R_t$ ,  $M_t = P(b+d)/2$ ,  $d$  le diamètre de tige,  $R_t$  la rigidité en torsion du col,  $l_1$  la longueur de la tige et  $l_2$  la distance entre le centre du col et le point d'attache de la tige.



**Figure 22 : flexion de la tige**

Par conséquent, le déplacement a trois composants : une résultant de la déformation du col circulaire (celui-ci est intéressant), une seconde de la flexion de la tige et la troisième de la torsion du col. Le déplacement réel est maintenant

$$v_{read} = v_t + v_f + v_{theo} \quad (0.127)$$

La dernière étape consiste à transformer le déplacement linéaire déterminé en un déplacement angulaire en utilisant la relation

$$\alpha_f = a \tan(v/(l_1+l_2)) \quad (0.128)$$

Afin de comparer les mesures au modèle, le couple mesuré doit être tracé en fonction du déplacement du col, c'est-à-dire,

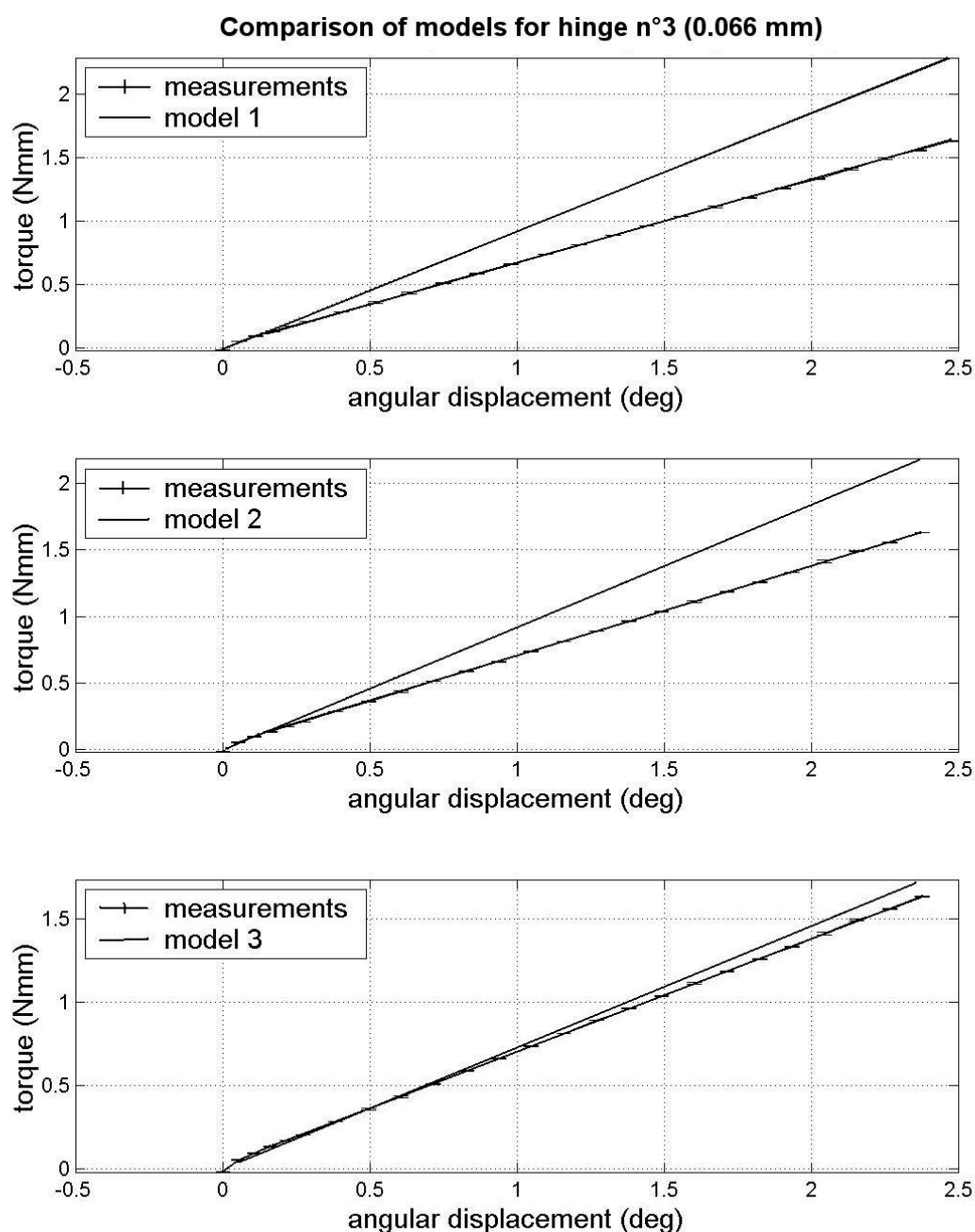
$$v_{theo} = v_{read} - v_t - v_f \quad (0.129)$$

Le même procédé peut être employé pour des écarts angulaires. La figure 22 montre la différence entre l'écart angulaire mesuré à l'extrémité de la tige et l'écart angulaire effectif du col.

Le « model 2 » de la 23 tient compte de ces 2 modifications (flexion de la tige et torsion du col).

Finalement, le dernier effet qui se fait sentir est du à l'état de surface au niveau du col. En effet, le fini de surface du col n'est pas parfait. La rugosité doit être prise en considération (elle n'est pas négligeable comparée à l'épaisseur du col). Ainsi la formule théorique doit être modifiée et mène à une limite différente pour les mesures. Retournant à la formule (0.100), un autre coefficient de correction a été introduit,  $K_r$ , avec  $R_p = 2,75\mu\text{m}$ .

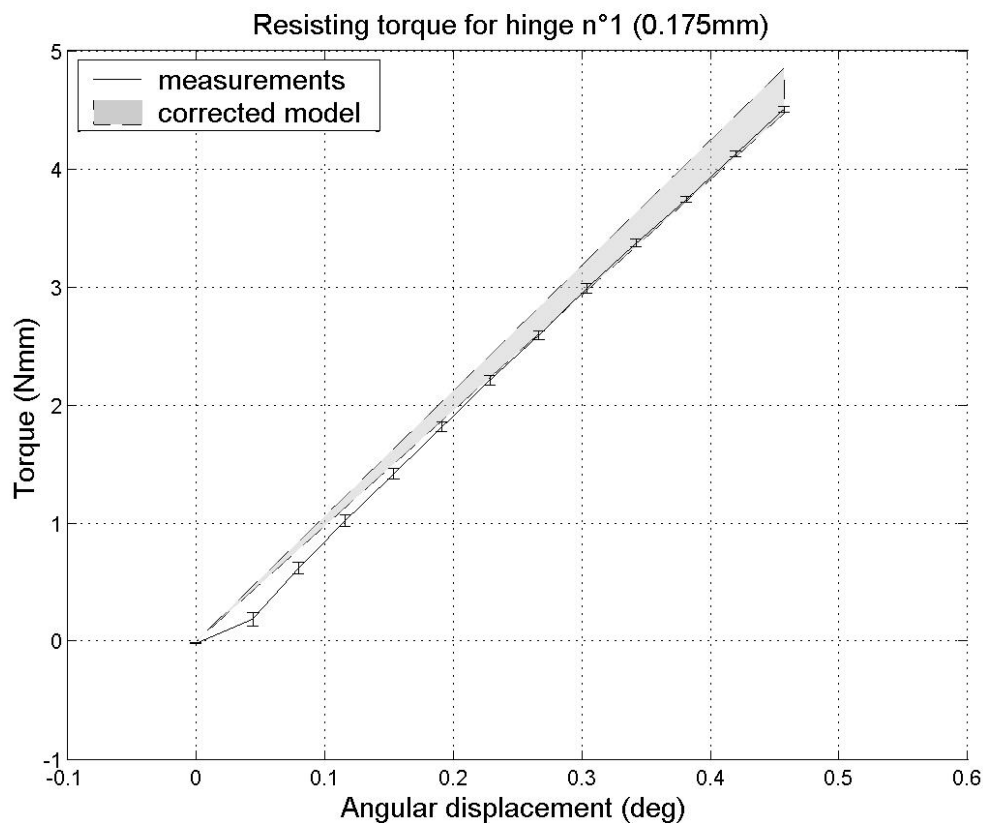
Dans le “model 3”, c'est l'expression complète du couple (0.100) qui est considéré. Le résultat de cette méthode globale est illustré sur la figure 23.



**Figure 23 : Evolution du modèle**

L'influence de la rugosité est particulièrement intéressante. Plus l'épaisseur du col est petite, plus l'influence de la rugosité est importante. Cette influence peut être considérée comme une réduction de l'épaisseur du col et donc induit une réduction du couple de rappel. Cependant, il est particulièrement difficile de déterminer la valeur exacte de la rugosité du col. Nous privilégierons alors l'affirmation suivante qui consiste à admettre que le couple de retour réel se trouve entre le couple évalué par le modèle qui ne tient pas compte de la rugosité et celui calculé en utilisant le coefficient correcteur  $K_r$ .

Les figures 24 à 27 illustrent cette comparaison de couple (modélisation comparée aux mesures) pour les 4 différents col qui ont été fabriqués. Comme il a été mentionné plus haut, afin de valider le modèle, les mesures doivent se trouver dans l'intervalle défini par les 2 différents modèles. Cet intervalle est le plus petit pour le col ayant la plus grande épaisseur. En effet, dans ce cas, la valeur relative de  $h_0$ , par rapport à  $R_p$  est plus grande et donc l'influence de la rugosité est beaucoup moins importante.



**Figure 24**



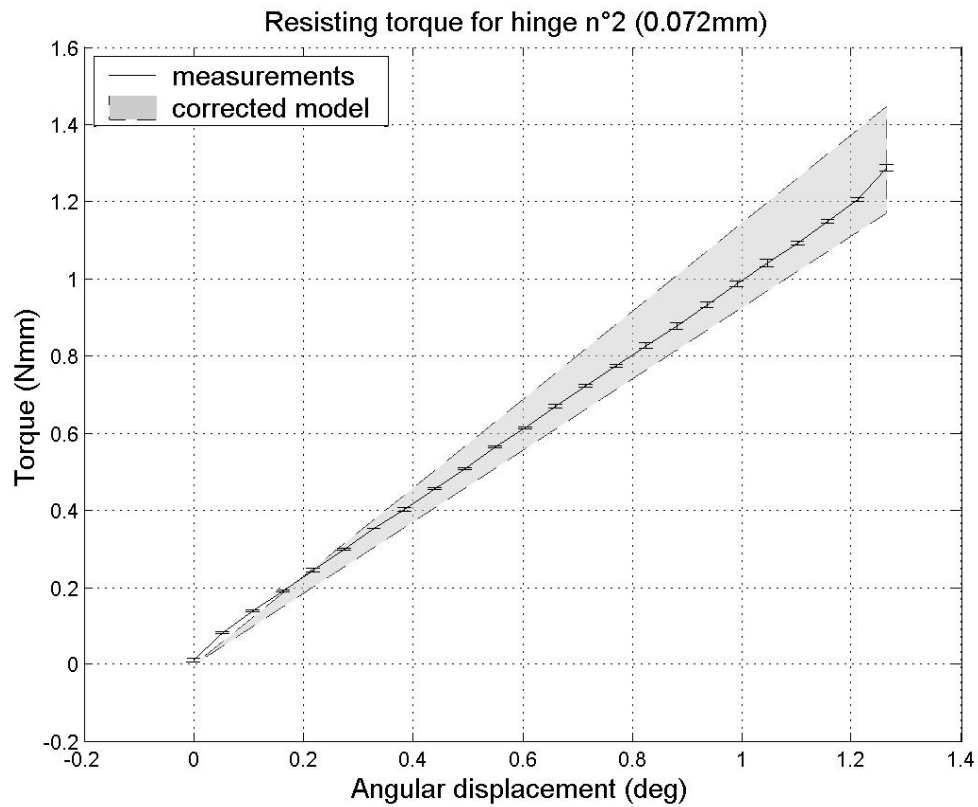


Figure 25

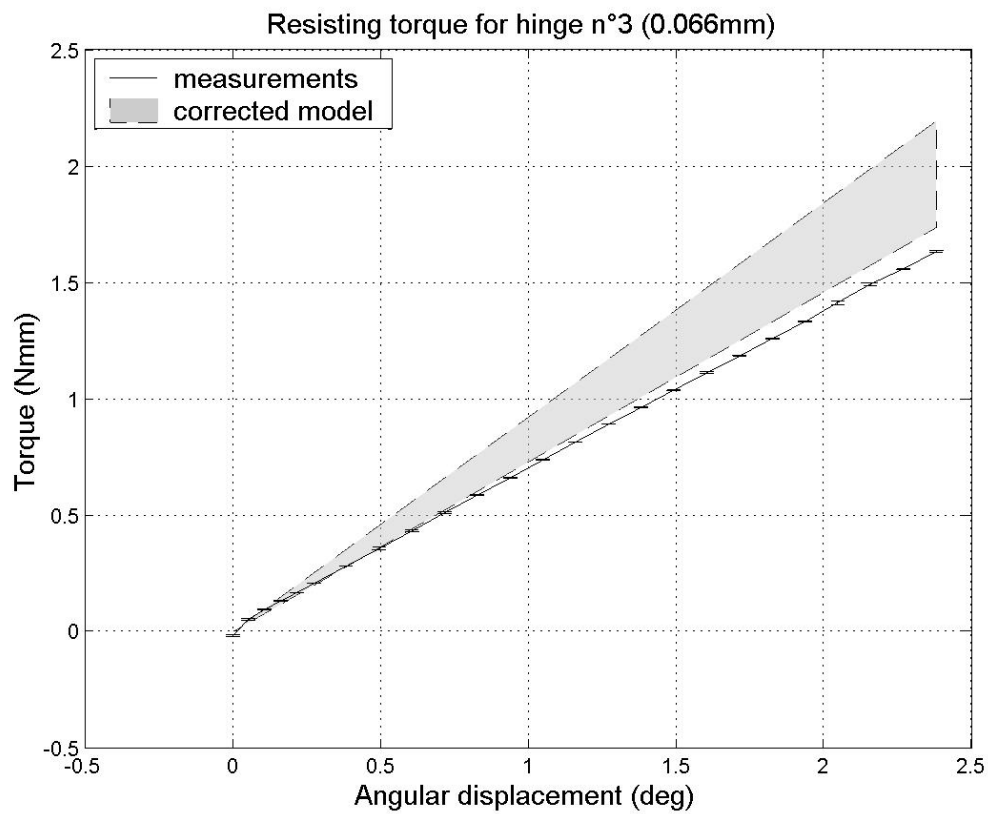
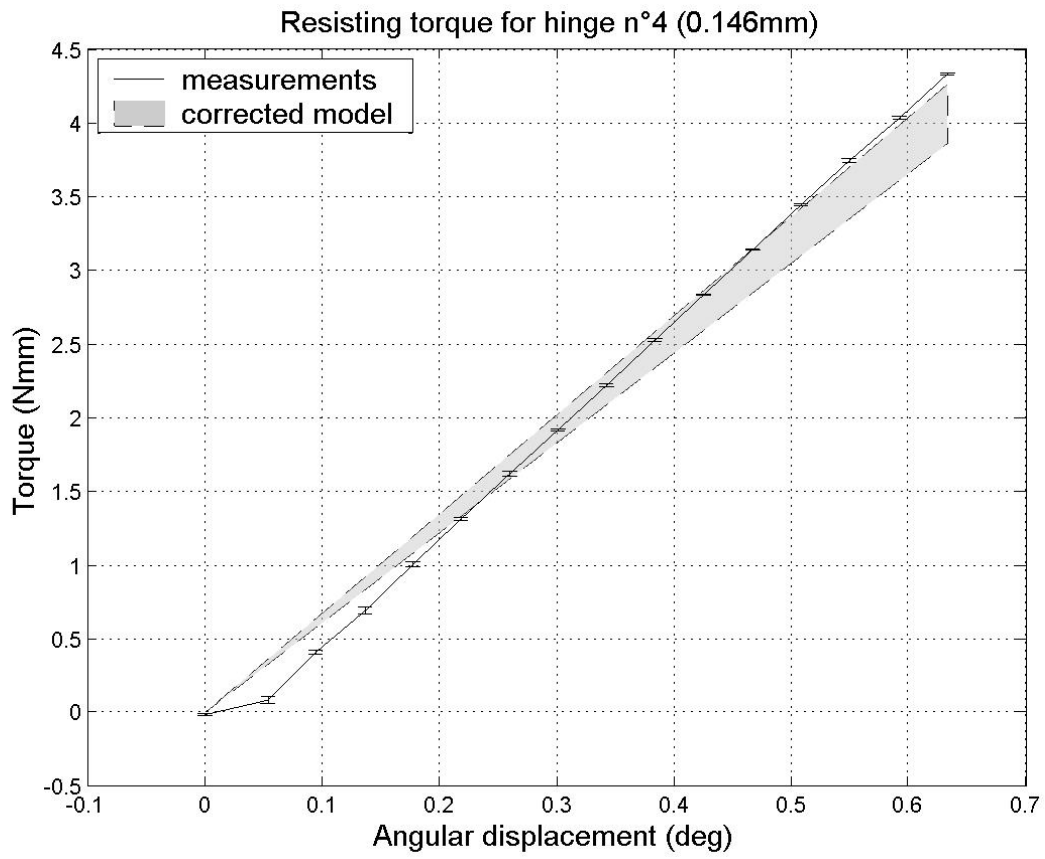


Figure 26





**Figure 27**

## Conclusion

Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir, dans le cas du col circulaire, des expressions analytiques décrivant son comportement en tant que système élastique. Ceci grâce au célèbre changement de variable de Sommerfeld.

Ces expressions analytiques ne sont pas commodes pour une étude de mécanisme comportant un certain nombre de ces cols. Nous avons alors recherché des expressions simples permettant ce genre d'étude, les expressions asymptotiques. Nous avons montré que celles-ci ne sont pas encore suffisantes dans certains cas et les avons corrigées pour tenir compte de leurs imperfections. Enfin, nous avons montré que les expressions déduites pour les coefficients correcteurs approchent de façon précise la correction idéale à apporter.

Ainsi, dans tout le domaine de variation du rapport épaisseur sur rayon, nous disposons maintenant d'un modèle simple du col circulaire, déduit analytiquement.

Une série de tests a été effectuée afin de valider les relations trouvées. La comparaison des valeurs mesurées confirme l'exactitude des relations déduites, dans la gamme des rapports  $h_0/R$  des cols fabriqués. Il est nécessaire de compléter ces tests par des tests complémentaires qui pourraient faire l'objet d'un travail ultérieur. L'expérience se composerait d'essais avec un nombre important de points de mesure pour chaque col, afin d'avoir une approximation acceptable de la rigidité.

Nous pouvons donner, ici, encore d'autres pistes à explorer, pour pousser l'étude plus loin. La détermination de la rigidité en torsion, en flexion transversale, en extension et cisaillement reste encore inexplorée. Cependant, la rigidité importante est celle de flexion. Nous estimons que les autres peuvent être évaluées analytiquement et le col pourra être dimensionné pour que ces dernières soient d'un ordre de grandeur supérieur.

Une étude comparative du modèle développé avec un certain nombre de solutions existantes a été effectuée. Il a été montré, grâce aux tests, que le modèle donnait une excellente approximation de la réalité pour les cols utilisés. L'étendue des valeurs du rapport  $h_0/R$  des cols utilisés pour les tests ne permet pas de conclure, comme il a été mentionné, sur la validité de la relation sur la gamme complète des valeurs possible du rapport  $h_0/R$ .

Finalement, nous mettrons l'accent sur ce que nous apportons dans ce travail. Il s'agit, comme on l'a vu dans l'exemple traité, de la possibilité de déterminer l'épaisseur minimum du col, en fonction de tous les paramètres géométriques et structuraux, pour un angle de débattement désiré. Il nous semble que c'est cette possibilité offerte qui est le plus important pour une application pratique.

# Membrane flexible

## Introduction

La membrane flexible est une structure monolithique qui permet un mouvement rectiligne par déformation.

Comme pour le cas du col circulaire, les membranes flexibles ont des applications dans des domaines variés, que ce soit dans l'évaluation de la déformation des miroirs de télescope soumis à leur propre poids [27] ou pour un guidage en translation, de type court, comme développé par Van Daele [21]. Le lecteur pourra encore trouver quelques applications dans l'ouvrage de Heinen [6].

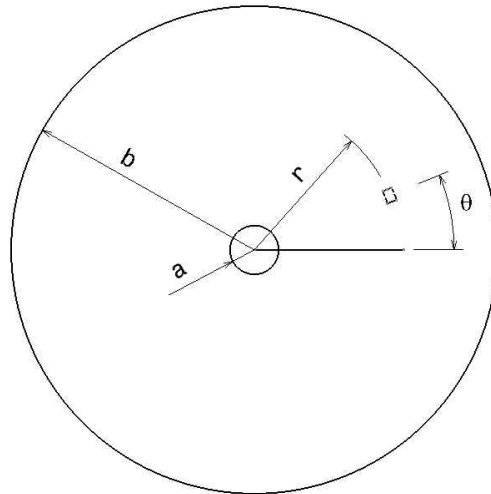
Nous donnerons, ici, les principes généraux régissant l'emploi de telles membranes. Une étude plus poussée a déjà été effectuées par Vincent Van Daele [21] et renvoyons par conséquent le lecteur à son travail pour de plus amples informations.

## Modélisation

La modélisation est tirée de la résistance des matériaux appliquée aux plaques circulaires soumises à des efforts normaux symétriques (donc de flexion).

De nouveau, afin de développer les équations, nous devons fixer un système d'axes de référence. Ce système d'axes est illustré sur la figure 28. L'origine des coordonnées polaires sera prise au centre de la plaque. Par symétrie, le chargement ne dépend que du rayon  $r$ . De plus, dans notre cas, les conditions aux limites ne dépendent également que de  $r$ . Les équations utilisées seront donc les équations simplifiées des plaques circulaires (0.130), ne faisant plus intervenir la coordonnées angulaire  $\theta$ .

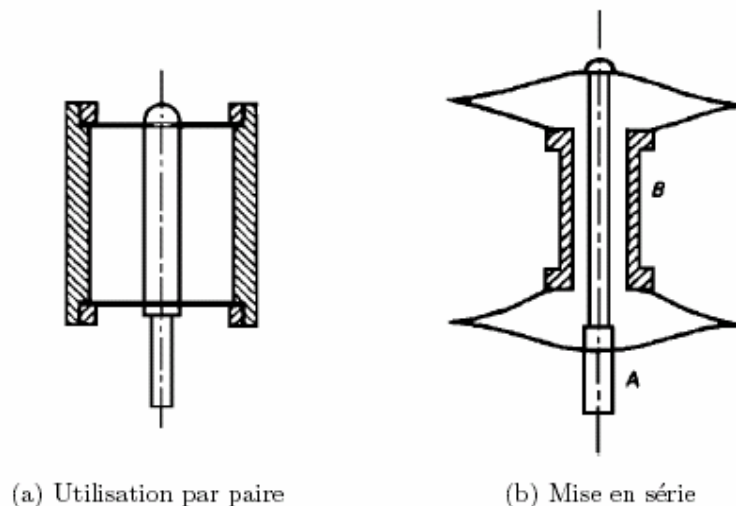
Le mouvement désiré est un mouvement suivant la normale à la membrane. Celui-ci sera noté  $v$ .



**Figure 28 : paramètres géométriques de la membrane**

Afin de permettre au lecteur de comprendre l'orientation donnée à la résolution des équations différentielles des plaques, il est utile d'illustrer la façon dont les membranes peuvent être utilisées afin de constituer un guidage linéaire.

Le guidage linéaire, par définition, est un guidage qui permet le mouvement selon une seule direction. La membrane ne remplira ce rôle que si elle est utilisée, au minimum, par paire, en ayant soin de prévoir une distance raisonnable entre celles-ci, comme dans tout guidage linéaire. La figure 29 illustre 2 façons différentes d'assurer le guidage par membrane. Dans un cas, on utilise seulement 2 membranes et dans l'autre, 4, ce qui permet un débattement plus important, au prix d'une précision moindre du guidage.



**Figure 29 : utilisation par paire de membranes pour le guidage linéaire**

## Formes Asymptotiques

### Membrane non fendue

La déformation d'une plaque circulaire soumise à un chargement symétrique est régie par l'équation différentielle suivante [26].

$$\frac{d^4 v}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 v}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dv}{dr} = -\frac{p(r)}{D} \quad (0.130)$$

On peut encore l'écrire sous la forme,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \right] \right\} = -\frac{p(r)}{D} \quad (0.131)$$

La résolution de cette équation amène 4 constantes d'intégration, qui seront déterminées par les conditions d'appui et le chargement.

Le cas qui nous intéresse est celui où le bord extérieur est encasté, tandis que le bord intérieur est simplement appuyé. Pour des bords se trouvant à un rayon  $a$  pour l'intérieur et  $b$  pour l'extérieur, nous avons,

$$v(r=b)=0 \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dr}(r=b)=0 \quad (2) \quad (0.132)$$

$$M_r(r=a)=0 \quad (3)$$

La troisième condition peut encore être mise sous la forme,

$$\left. \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dv}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (3') \quad (0.133)$$

En ce qui concerne le chargement, celui-ci étant transmis par l'intermédiaire d'un axe sur tout le contour de rayon  $a$ , nous pouvons dire que nous avons une force par unité de longueur égale à  $P/2\pi a$ , si  $P$  est la force exercée par l'actuateur. L'effort tranchant par unité de longueur sur une circonférence de rayon  $r$  est

$$T(r) = \frac{P}{2\pi r} = \frac{K_1}{r} \quad (0.134)$$

L'effort tranchant s'exprime aussi par l'équation différentielle,

$$T = D \frac{d(\Delta v)}{dr} \quad (0.135)$$

où  $D$  est la rigidité à la flexion de la plaque, définie par

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (0.136)$$

En combinant les expressions (0.134) et (0.135), nous obtenons,

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \right] = \frac{K_1}{Dr} = \frac{K}{r} \quad (0.137)$$

En intégrant, nous obtenons,

$$v = K \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + A_1 \frac{r^2}{4} + A_2 \ln r + A_3 \quad (0.138)$$

Nous déduisons alors les dérivées intervenant dans (0.133),

$$\frac{dv}{dr} = K \frac{r}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) + A_1 \frac{r}{2} + \frac{A_2}{r} \quad (0.139)$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{K}{2} \left( \ln r + \frac{1}{2} \right) + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{r^2} \quad (0.140)$$

D'où la condition (3') s'écrit,

$$\frac{(1+v)}{2} (K \ln r + A_1) + (1-v) \left( \frac{K}{4} - \frac{A_2}{r^2} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (0.141)$$

Les conditions limites (2) de (0.132) et (3') nous permettent de déduire  $A_2$ . Après quelques calculs, nous obtenons,

$$A_2 = \frac{Ka^2}{4} \frac{1 + \gamma + 2 \ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \quad (0.142)$$

si nous appelons respectivement  $\rho$  et  $\gamma$  les rapports suivants,

$$\rho = \frac{a}{b} \quad (0.143)$$

$$\gamma = \frac{1-v}{1+v} \quad (0.144)$$

En réinjectant cette valeur de la constante  $A_2$  dans la condition (2) du système d'équations (0.132), nous obtenons la valeur de  $A_1$ ,

$$A_1 = K \left( \frac{1}{2} - \ln b - \frac{\rho^2}{2} \frac{1 + \gamma + 2 \ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \right) \quad (0.145)$$

Finalement, la condition (1) nous permet d'obtenir  $A_3$ . Après de nombreuses simplifications, nous obtenons,

$$A_3 = \frac{Kb^2}{8} + \frac{Ka^2}{4} \frac{1 + \gamma + 2 \ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \left( \frac{1}{2} - \ln b \right) \quad (0.146)$$

Nous pouvons dès lors calculer la raideur de la membrane,

$$R = \frac{P}{v|_{r=a}} = \frac{2\pi hDK}{v|_{r=a}} \quad (0.147)$$

Avec,

$$v|_{r=a} = \frac{Kb^2}{8} \left[ 2\rho^2 \ln \rho + (1 - \rho^2) + \left( \frac{1 + \gamma + 2 \ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \right) (2\rho^2 \ln \rho + \rho^2 (1 - \rho^2)) \right] \quad (0.148)$$

Ce résultat est bien confirmé par Roark et Young [28], qui donnent, pour une plaque circulaire encastree-appuyée, le résultats suivant,

$$v|_{r=a} = -\frac{wb^3}{D} \left( \frac{C_1 L_6}{C_4} - L_3 \right) \quad (0.149)$$

avec,

$$\begin{aligned} w &= \frac{K_1}{r} \Big|_{r=a} \\ C_1 &= \frac{1+\nu}{2} \frac{a}{b} \ln \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{4} \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \\ C_4 &= \frac{1+\nu}{2} \frac{a}{b} + \frac{1-\nu}{2} \frac{b}{a} \\ L_3 &= \frac{a}{4b} \left\{ \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right] \ln \frac{b}{a} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right\} \\ L_6 &= \frac{a}{4b} \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right\} \end{aligned} \quad (0.150)$$

Le lecteur vérifiera aisément l'équivalence des 2 résultats.

Finalement, la raideur de la plaque encastree-appuyee est donnee par l'expression,

$$R_{NF} = \frac{16\pi D}{b^2} \frac{1}{2\rho^2 \ln \rho + (1-\rho^2) + \left( \frac{1+\gamma+2\ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \right) (2\rho^2 \ln \rho + \rho^2 (1-\rho^2))} \quad (0.151)$$

Cette relation nous permet de determiner la raideur d'une membrane encastree à l'exterieur et simplement appuyee à l'interieur, dont le rapport entre les rayons interieur et exterieur est  $\rho$ .

Nous pouvons calculer la raideur asymptotique de la membrane, c'est-à-dire lorsque le parametre  $\rho$  tend vers 0. En effet, nous avons, successivement,

$$\begin{aligned} 1-\rho^2 &= 1 \\ \rho^2 (1-\rho^2) &= 0 \\ \rho^2 \ln \rho &= 0 \end{aligned} \quad (0.152)$$

Et donc,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ 2\rho^2 \ln \rho + (1-\rho^2) + \left( \frac{1+\gamma+2\ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \right) (2\rho^2 \ln \rho + \rho^2 (1-\rho^2)) \right] = 1 \quad (0.153)$$

Nous obtenons donc, finalement, pour la raideur asymptotique de la membrane non fendue encastree-appuyee,

$$R_{NF} = \frac{16\pi D}{b^2} \quad (0.154)$$

Nous pouvons encore faire ressortir le terme matieriau et le terme geometrie de l'expression de la raideur, en exprimant la valeur de  $D$ .

$$\boxed{R_{NF} = \frac{4\pi}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{h^3}{b^2}} \quad (0.155)$$

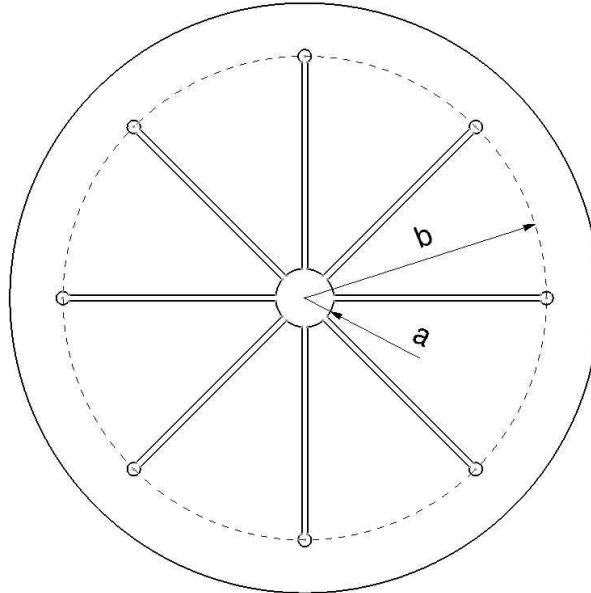
Cette raideur asymptotique correspond à la raideur de la membrane non percée. Nous constatons d'ailleurs que la dimension  $a$ , le diamètre du trou intérieur, n'intervient plus.

L'expression nous montre clairement que, le paramètre matériau étant déterminé, il est plus intéressant de diminuer l'épaisseur de la membrane que d'augmenter son encombrement. C'est intéressant dans le cas de la micromécanique étant donné que l'on ne peut augmenter indéfiniment les dimensions. Cependant, il est clair qu'il existe une limite inférieure à l'épaisseur que l'on peut donner à la membrane, pour des raisons technologiques et pour éviter le déchirement de la membrane sous charge ou lors du montage.

### Membrane fendue

Une méthode possible afin de diminuer un peu plus la raideur membranaire est de fendre radialement la membrane, comme illustré à la figure 31.

Dans ce cas, pour le calcul, il faut distinguer les parties fendues et non fendues. Comme la partie fendue est moins rigide, elle va reprendre quasiment l'ensemble de la déformation. Nous pouvons alors négliger la partie non-fendue dans la modélisation.



**Figure 30 : géométrie de la membrane découpée**

Soit  $n$  le nombre de fentes, pour autant qu'il soit suffisamment grand, nous pouvons assimiler la membrane à  $n$  poutres consoles dont la largeur est linéairement croissante avec le rayon.

La membrane étant chargée par un effort  $P$ , une section de rayon  $r$ , mesuré à partir du centre, subira un moment donné par,

$$M(r) = \frac{P}{n}(r - a) \quad (0.156)$$

L'inertie de la poutre variera avec le rayon,

$$I(r) = \frac{2\pi r h^3}{12n} \quad (0.157)$$



Le déplacement total de la poutre est donné par,

$$\alpha = \int_a^b \frac{M}{EI} dr = \int_a^b \frac{P(r-a)}{n} \frac{12n}{2\pi r h^3 E} dr = \frac{6P}{\pi h^3 E} \int_a^b \frac{a-r}{r} dr \quad (0.158)$$

En utilisant le rapport  $\rho$  défini précédemment, nous obtenons,

$$\alpha = \frac{6Pb}{\pi h^3 E} (1 - \rho + \rho \ln \rho) \quad (0.159)$$

La raideur en rotation est alors,

$$R = \frac{M|_{r=b}}{\alpha} = \frac{P}{n} (b-a) \frac{\pi h^3 E}{6Pb(1 - \rho + \rho \ln \rho)} = \frac{\pi h^3 E}{6n} \frac{1 - \rho}{(1 - \rho + \rho \ln \rho)} \quad (0.160)$$

La raideur totale est  $nR$ . Elle est donc indépendante du nombre de fentes.

Cependant, c'est la raideur en translation qui nous intéresse. Pour la déterminer, nous partons de l'expression de la courbure d'une poutre console soumise à un moment de flexion  $M$ .

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{M}{EI} \quad (0.161)$$

Une première intégration nous donne l'angle de rotation  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{6P}{\pi h^3 E} (r - a \ln r) + A_1 \quad (0.162)$$

La constante  $A_1$  est déterminée par la condition  $\alpha(r=b)=0$ . Nous obtenons alors

$$\alpha = \frac{6P}{\pi h^3 E} \left( (r-b) - a \ln \frac{r}{b} \right) \quad (0.163)$$

Une seconde intégration nous donne le déplacement  $v$ . La constante d'intégration  $A_2$  est déterminée par la condition  $v(r=b)=0$ .

$$v = \frac{6Pb^2}{\pi E h^3} \left( ar \left( 1 - \ln \frac{r}{b} \right) + r \left( \frac{r}{2} - b \right) + b \left( \frac{b}{2} - a \right) \right) \quad (0.164)$$

On calcule alors la raideur comme auparavant.

$$R = \frac{P/n}{v|_{r=a}} = \frac{\pi E h^3}{3nb^2} \frac{1}{1 - 4\rho + \rho^2 (3 - 2 \ln \rho)} \quad (0.165)$$

Et, pour l'entièreté de la membrane,

$$R_F = nR = \frac{\pi E h^3}{3b^2} \frac{1}{1 - 4\rho + \rho^2 (3 - 2 \ln \rho)} \quad (0.166)$$

Celle-ci peut être retrouvée en utilisant l'énergie de déformation. En effet,

$$U_{tot} = n \frac{1}{2} \int_a^b \frac{M^2}{EI} dr \quad (0.167)$$

Et

$$\frac{dU_{tot}}{dP} = v \quad (0.168)$$

Finalement,

$$R = \frac{P}{v} \quad (0.169)$$

On retrouve bien la même expression.

Calculons la valeur de la raideur, pour un rapport  $\rho$  tendant vers 0, nous avons,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [1 - 4\rho + \rho^2 (3 - 2 \ln \rho)] = 1 \quad (0.170)$$

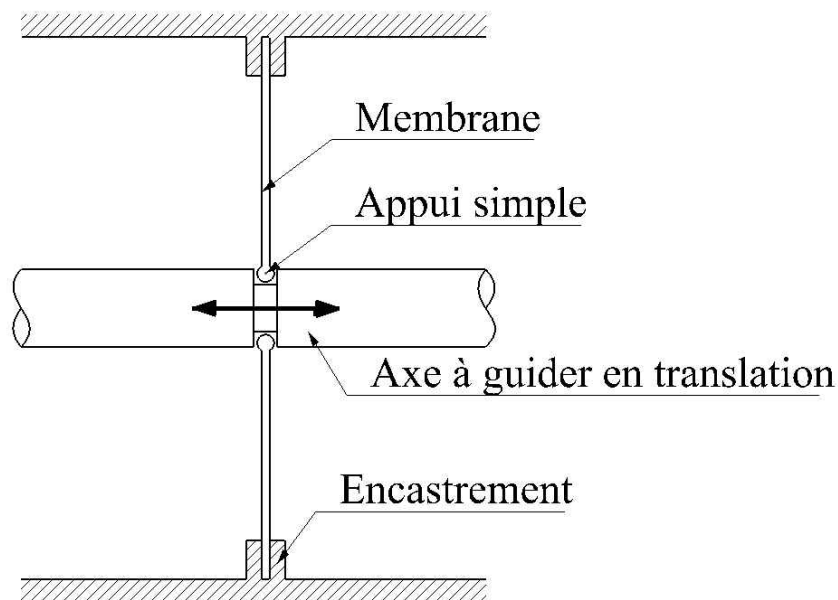
Et donc, la raideur asymptotique de la membrane fendue s'exprime par,

$$R_F = \frac{\pi E h^3}{3b^2} \quad (0.171)$$

Nous pouvons faire les mêmes constatations que dans le cas de la membrane non fendue. En effet, afin de diminuer la raideur, il faut jouer sur les paramètres matériau et géométrique, sachant qu'il est plus intéressant de diminuer l'épaisseur que d'augmenter le diamètre extérieur.

Cette raideur est de nouveau indépendante du nombre de fentes. Il est cependant nécessaire d'avoir un nombre de fente suffisant afin de garantir l'absence d'effets membranaires qui introduiraient alors un terme supplémentaire à la rigidité de la membrane.

Faisons enfin remarquer, que dans le cas du guidage, la solution de la membrane non percée, même fendue, n'a pas beaucoup d'intérêt, comme le montre bien la figure 31, sauf dans le cas où l'on peut coller la membrane à la pièce à guider.



**Figure 31 : montage d'une membrane encastree-appuyee**

## Coefficients de correction

Ainsi qu'il vient d'être fait remarqué, la solution de la membrane non percée n'a d'intérêt que dans de rares cas. En pratique, il faut tenir compte d'un trou dans la membrane, et donc le rapport  $\rho$  ne peut plus être assimilé à 0. Il est alors nécessaire de revenir aux relations complètes donnant la raideur. Comme dans le cas du col circulaire, celles-ci ne sont cependant pas facilement applicables. Nous avons donc recherché une méthode permettant de déterminer plus facilement la raideur des membranes fendues et non fendue.

La démarche est la même que dans le traitement des raideur du col circulaire. Nous multiplions la forme asymptotique par un coefficient correcteur qui est calculé à partir de la relation globale et nous recherchons une loi simple approchant ce coefficient correcteur, en fonction des paramètres principaux.

### Membrane non fendue

Reprenons la relation asymptotique (0.151) de la membrane non fendue,

$$R_{NF} = \frac{16\pi D}{b^2} \frac{1}{2\rho^2 \ln \rho + (1 - \rho^2) + \left( \frac{1 + \gamma + 2 \ln \rho}{\rho^2 + \gamma} \right) (2\rho^2 \ln \rho + \rho^2 (1 - \rho^2))} \quad (0.172)$$

Afin de simplifier la lecture, nous pouvons mettre la raideur sous la forme,

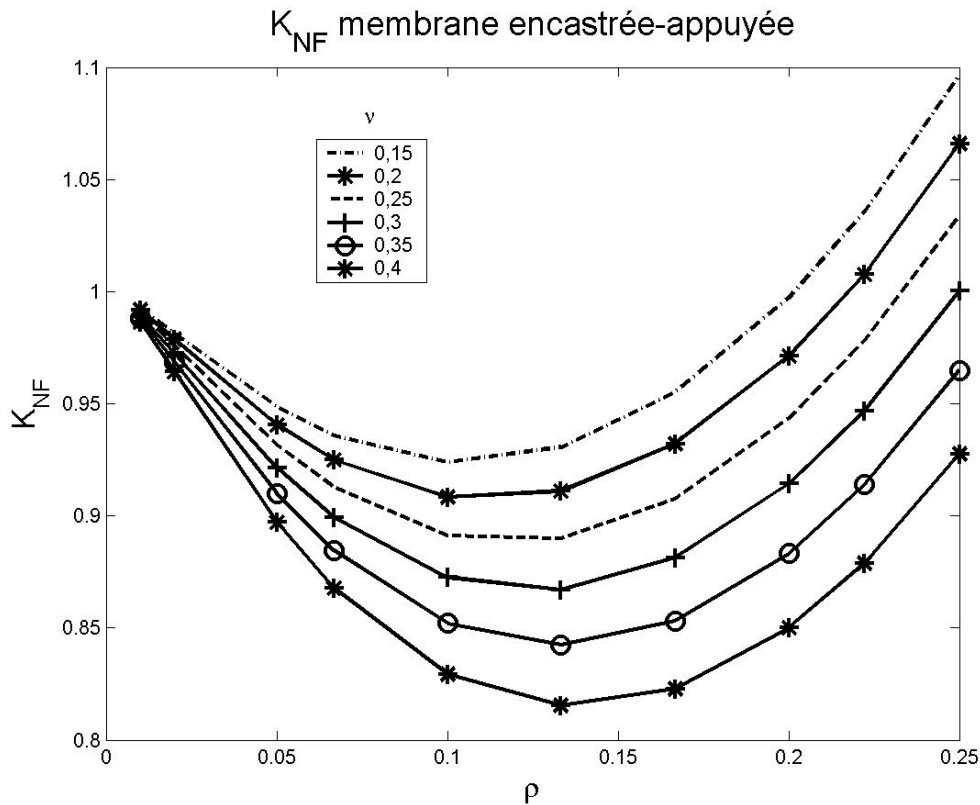
$$R_{NF} = K_{NF} \frac{4\pi}{3} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{h^3}{b^2} \quad (0.173)$$

Nous calculons alors la valeur du coefficient  $K_{NF}$ , pour différentes valeurs de  $\rho$ . Le coefficient de poisson intervient dans la valeur de  $K_{NF}$ . Nous l'avons listé dans le tableau XI, pour le cas de l'acier et du titane, dont le coefficient de poisson est 0.3 et pour le cas de l'aluminium, avec un coefficient de poisson de 0.33.

TABLEAU XI  
COEFFICIENT  $K_{NF}$

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
Acier, Titane	0,989	0,972	0,921	0,872	0,914	1
Aluminium	0,988	0,970	0,915	0,860	0,896	0,979

La figure 32 donne un aperçu de l'allure générale de la variation du coefficient  $K_{NF}$  pour différentes valeurs du coefficient de poisson, en fonction du rapport des diamètres intérieur et extérieur de la membrane. Nous limitons ce rapport à 0,25, ce qui nous semble être plus que suffisant étant donné que nous désirons de la souplesse dans la membrane. Cette souplesse étant d'autant plus grande que le rapport est faible.



**Figure 32 : Coefficient  $K_{NF}$  de la membrane encastree-appuyee**

Nous voyons sur cette figure que le coefficient  $K_{NF}$ , peut encore ˆtre exprimé sous la forme d’une relation simple du second degré en fonction de  $\rho$ , les coefficients dépendants directement de  $\nu$ ,

$$K_{NF} = (5,9\nu + 7,3)\rho^2 - (4\nu + 1,1)\rho + 1 \quad (0.174)$$

Le tableau XII donne les valeurs du coefficient  $K_{NF}$ , pour différentes valeurs du rapport  $\rho$ , dans les cas de l’acier, du titane et de l’aluminium.

TABLEAU XII  
COEFFICIENT  $K_{NF}$  ESTIMÉ

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
Acier, Titane	0,977	0,955	0,902	0,851	0,886	0,973
Aluminium	0,978	0,958	0,908	0,861	0,903	0,992

Evidement, cette relation simplifi e introduit une erreur sur la raideur, mais qui est toujours limit e, comme l’indique le tableau XIII, où l’erreur est indiqu e en calcul e en pourcentage de la valeur réelle du coefficient.

TABLEAU XIII  
ERREUR SUR LE COEFFICIENT  $K_{NF}$  ESTIMÉ (%)

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
Acier, Titane	1,20	1,54	1,38	1,16	1,11	0,64
Aluminium	1,17	1,53	1,49	1,36	1,26	0,84

Signalons enfin qu'il existe un optimum, comme le montre bien la figure 32. Nous pouvons alors calculer la valeur de  $\rho$  à l'optimum,

$$\rho_{opt} = \frac{1}{2} \frac{4\nu + 1,1}{5,9\nu + 7,3} \quad (0.175)$$

Et donc, le coefficient  $K_{NF}$ , à l'optimum,

$$K_{NFopt} = \frac{-16\nu^2 + 14,8\nu + 28}{4(5,9\nu + 7,3)} \quad (0.176)$$

Les valeurs particulières, pour l'acier, le titane et l'aluminium sont reprises dans le tableau XIV.

TABLEAU XIV  
VALEUR OPTIMALE DE  $\rho$  ET  $K_{NF}$

	$\rho_{opt}$	$K_{NFopt}$
Acier, Titane	0,127	0,854
Aluminium	0,131	0,842

### Membrane fendue

De nouveau, nous pouvons mettre l'expression (0.166) mesurant la raideur de la membrane fendue, sous une forme plus lisible qui met en évidence le coefficient de correction,

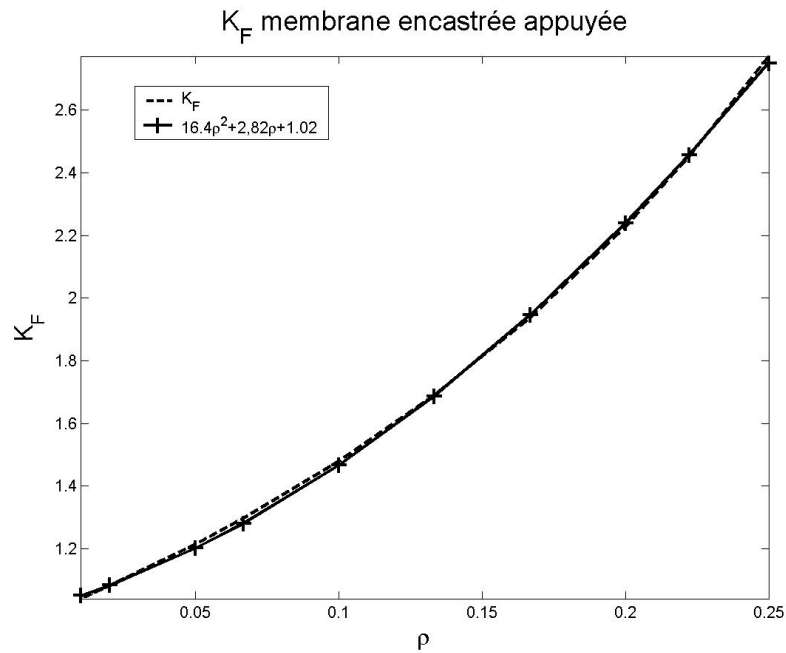
$$R_F = K_F \frac{\pi}{3} E \frac{h^3}{b^2} \quad (0.177)$$

Les valeurs du coefficient  $K_F$  sont reprises dans le tableau XV, il ne dépend plus du coefficient de poisson, nous ne distinguons donc plus le matériau.

TABLEAU XV  
COEFFICIENT  $K_F$

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
$K_F$	1,040	1,082	1,216	1,479	2,228	2,772

La figure 33 illustre l'allure de ce coefficient.



**Figure 33 : Coefficient  $K_F$  de la membrane encastree-appuyee**

Le coefficient de correction ayant une tendance quadratique, la relation trouvee sera de forme quadratique,

$$K_F = 16,4\rho^2 + 2,82\rho + 1,02 \quad (0.178)$$

Nous retrouvons, dans le tableau XVI, les valeurs du coefficient  $K_F$  donnees par cette derniere relation. La figure 33 illustre egalement la bonne concordance entre le coefficient reel et celui estime.

**TABLEAU XVI**  
COEFFICIENT  $K_F$  ESTIME

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
$K_F$	1,050	1,083	1,202	1,466	2,24	2,750

Enfin, nous avons calcule l'erreur commise par l'approximation, afin de montrer que celle-ci est valable. Le tableau XVII reprend les differentes erreurs calculees, toujours exprimees en pourcentage du coefficient reel.

**TABLEAU XVII**  
ERREUR SUR LE COEFFICIENT  $K_F$  ESTIME

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
Err (%)	0,91	0,1	1,14	0,89	0,52	0,78

## Comparaison des deux types de membrane

Nous pouvons comparer la raideur des membranes fendues et non fendues.

$$\frac{R_F}{R_{NF}} = \frac{K_F}{K_{NF}} \frac{1-\nu^2}{4} \quad (0.179)$$

Les valeurs de ce rapport sont tabulées dans le tableau XVIII.

TABLEAU XVIII  
RAPPORT DES RAIDEURS

$\rho$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25
Acier, titane	0,239	0,253	0,3	0,386	0,555	0,630
Aluminium	0,234	0,248	0,296	0,383	0,554	0,631

Ce tableau montre l'intérêt d'utiliser des membranes fendues lorsque cela est possible. En effet, l'effort à développer, pour une même course, sera moindre.

La figure 34 donne un aperçu d'autres découpes que l'on peut envisager afin de réduire de façon drastique la raideur de la membrane.

Vincent Van Daele [21] a étudié par éléments finis les déformations de la première et la quatrième membrane et les a comparées avec la membrane non découpée. Il a montré que, dans ces cas, les raideurs sont divisées par un facteur non négligeable.

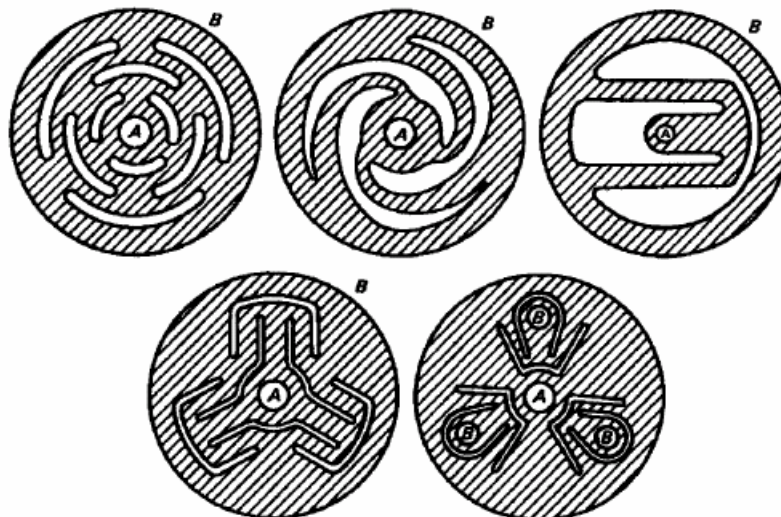


Figure 34 : types de découpes

## Aspects de fabrication

La figure précédente présente des solutions permettant de diminuer drastiquement la raideur en translation des membranes, comme Van Daele l'a montré [21].

Dans ce travail, où l'on cherche clairement à proposer des solutions pratiques permettant d'intégrer ces systèmes de guidage à des ensembles mécaniques complexes, il convient de discuter des possibilités de fabrication de ces types de membranes.

En effet, le lecteur doit garder à l'esprit que les dimensions envisagées ici sont de l'ordre du millimètre. Le diamètre extérieur d'une membrane n'excédera donc pas, dans les cas les plus larges, une dizaine de millimètre. Ainsi, comme montré dans le tableau XIV, le diamètre du trou intérieur sera d'environ 1,25 mm. Si nous prenons le cas de la première membrane de la figure, par exemple, nous pouvons compter 3 réseaux de fentes à des diamètres croissants, compris entre 1,25 et 10 mm. Van Daele [21] a optimisé la position de ces fentes afin d'obtenir la raideur la plus faible. Il a ainsi déterminé les 3 diamètres suivants (aux approximations près, le but, ici, étant d'illustrer la réflexion), 5,5 mm, 6,2 mm et 7 mm, pour une largeur de fente de 0,2 mm et une épaisseur de membrane de 0,1 mm. Il est évident que de telles découpes ne peuvent être facilement obtenues pas des procédés classiques de mise à forme.

Tentons d'imaginer le résultats obtenu avec le procédé le plus utilisé pour découper des rondelles : le poinçonnage. Cette technique exige la fabrication d'un poinçon et d'une matrice. Ceux-ci doivent nécessairement être fabriqués dans un matériau plus dur que la matière choisie pour les membranes. D'une manière générale, ils sont réalisés en acier trempé, la trempe étant effectuée après usinage des formes. Dans notre cas, le poinçon doit comporter de fines lamelles dont l'épaisseur est inférieure à 0,2 mm pour tenir compte de l'épaisseur de coupe. Ces lamelles doivent dépasser d'une longueur supérieure à l'épaisseur de membrane. Si l'on envisage d'usiner ces lamelles dans la masse et de tremper le poinçon par après, on doit ôter énormément de matière par rapport à la matière brute. L'opération de trempe risque d'induire des déformations catastrophiques pour ces fines lamelles élancées.

Nous pouvons imaginer d'inverser l'ordre des opérations, c'est-à-dire utiliser de la matière brute trempée et revenue afin d'éliminer au maximum les contraintes résiduelles. Cependant, il faut encore usiner des formes complexes très petites, dans une matière durcie à HRC 50 ou plus. Parmi les procédés d'usinage capable d'effectuer ces opérations, nous pouvons trouver l'usinage à grande vitesse, permettant d'utiliser des fraises de dimensions de l'ordre de 0,1 mm et capable d'usiner de la matière trempée à plus de HRC 50.

Une autre technique est l'électro-érosion par enfonçage, procédé qui « dissout » la matière par décharge électrique<sup>2</sup>. Ce procédé exige cependant, au préalable, le façonnage d'une électrode, négatif de la pièce à réaliser. Le procédé n'appliquant pas d'effort sur la pièce à usiner, il n'y a pas d'exigence particulière sur la dureté et la résistance de l'électrode. La seule nécessité est qu'elle soit conductrice. Généralement, les électrodes sont réalisées en cuivre ou en graphite. Il faut donc, tout de même, réaliser une électrode dont la forme est le négatif du poinçon. Cette électrode ne doit pas nécessairement être réalisée d'une seule pièce, nous pouvons donc envisager toute sorte d'inserts et de technique de maintien de ceux-ci.

Il est évident que la réflexion doit être également menée pour l'usinage de la matrice, qui est de forme inverse du poinçon. Cette remarque conduit directement au fait que la technique de

---

<sup>2</sup> Il s'agit, ici, d'une présentation trop simpliste du procédé d'usinage par électro-érosion. Cependant, le but de ce travail n'étant pas d'exposer en détails les techniques de fabrication, nous renvoyons le lecteur à la littérature spécialisée pour de plus amples explications concernant cette méthode de mise à forme.



l'électro-érosion par enfonçage permet également d'obtenir directement la membrane de forme voulue, sans passer par le poinçonnage. Ceci est plus avantageux étant donné qu'il n'y a pas, comme mentionné précédemment, d'effort appliqué sur la pièce à mettre à forme. En effet, dans le cas du poinçonnage, l'effort de découpe du matériau aurait tendance à déformer les lamelles et donc à rendre rapidement inutilisable le poinçon.

Une dernière technique qu'il nous paraît intéressant à investiguer est la découpe Laser. Les seuls paramètres limitant cette technique est la largeur du faisceau ainsi que son cône, qui limite le rapport largeur sur profondeur de la fente. De nouveau, cette technique n'applique aucun effort sur la pièce à usiner. Il faut cependant prendre garde à l'échauffement qui pourrait induire des déformations importantes.

## Conclusion

Nous avons, grâce à la théorie des plaques circulaires soumises à des efforts normaux symétriques, déduit des relations donnant la raideur des membranes percée et non découpées. Les membranes fendues ont été, elles, résolues par les équations classiques de la mécanique des matériaux appliquées aux poutres à largeur variable.

De nouveau, des formes asymptotiques ont d'abord été trouvées avant de leur appliquer un coefficient correcteur afin de tenir compte du fait que les cas pratiques ne sont quasiment jamais des cas dans lesquels les formes asymptotiques sont valables. Des formes simples et originales des coefficients correcteurs ont été déterminées, faisant intervenir le paramètre géométrique sans dimension principal, le rapport entre le diamètre intérieur du perçage central et le diamètre extérieur de la membrane.

Nous avons également comparé les raideurs obtenues dans les 2 cas précités, c'est-à-dire la membrane intacte et la membrane découpée, pour montrer l'intérêt de fendre radialement les membranes afin de diminuer la raideur, source de perte d'énergie.

D'autres exemples de solutions ont été succinctement présentés. Celles-ci ne sont absolument pas dénuées d'intérêt, mais leur étude sort du cadre défini pour ce travail.

Enfin, nous avons discuté rapidement sur les précautions à prendre lorsque l'on imagine une forme de découpe permettant de diminuer la raideur de la membrane. Cette découpe n'est pas nécessairement réalisable d'un point de vue pratique et il convient dès lors d'envisager une conception intégrée qui tient compte des moyens de fabrication existant. La question de la fabrication des membranes reste en grande partie ouverte, quelques essais ayant déjà été effectués pour le travail de Van Daele [21].

Cette partie concernant les membranes percées, loin d'être exhaustive, indique déjà une tendance générale permettant d'envisager l'emploi de membranes simples, avec une estimation de la force à déployer afin d'obtenir un déplacement déterminé.

# Conclusion

Le guidage d'éléments de micromécanique n'est pas une chose aisée. Au cours d'un projet de recherche, nous avons été assez tôt confronté au choix d'une méthode de guidage efficace en micromécanique. Les procédés classiques sont vite apparus difficilement applicables et nous avons dû nous tourner vers des méthodes moins conventionnelles. Les procédés de guidage élastique ont montrés de grandes qualités, pour autant que l'on se contente d'une course limitée et qu'une énergie d'actuation suffisante puisse être développée.

Nous avons ainsi investigué deux systèmes, l'un travaillant en rotation, le col circulaire, et l'autre en translation, la membrane. La littérature ne donnant pas de règles applicables directement lors d'un prédimensionnement, nous nous sommes penché sur le fonctionnement de ces systèmes afin d'en faire ressortir des lois simples d'application et originales. Celles-ci permettent de prendre une décision rapide concernant la pertinence ou non de l'un de ces systèmes de guidage. Nous pensons, en effet, que le besoin premier d'un designer n'est pas de développer de grandes équations ni d'user sans ménagement des éléments finis, mais de pouvoir faire un choix aisé parmi toutes les solutions possibles qui s'offrent à lui. Libre à lui, après, de mener toutes les études complémentaires qu'il jugera nécessaires.

Les lois simples concernant les raideurs des systèmes envisagés ont été rassemblées sur une page de formulaire située à la fin de cet ouvrage, cela illustre bien leur caractère condensé, gage de facilité d'utilisation.

Nous terminerons par rappeler que le sujet, loin d'être entièrement couvert par cette étude, mérite encore d'être développé. Un certain nombre de pistes de travail ont déjà été mentionnées, rappelons les tests à effectuer sur les cols circulaires, l'étude des découpes de membranes ou encore les moyens de fabrication de ces éléments. Le lecteur avisé ne manquera pas d'en découvrir d'autres encore. Finalement, nous pensons que ce travail constitue une contribution intéressante à l'étude des cols circulaires et des membranes employés comme système de guidage flexible, contribution permettant l'application des guidages à faible débattement et à raideur contrôlée dans un cas concret.

# Nomenclature

$\alpha_f$	Angle de rotation autour de l'axe $Z$
$\alpha_{fi}$	Angle de rotation autour de l'axe $Y$
$\alpha_i$	Angle de rotation autour de l'axe $X$
$\beta$	Rapport $h_0/2R$
$\gamma$	Rapport $b/2R$
$\varphi$	Azimuth, selon l'axe $Y$
$\theta_r$	Angle de rotation selon l'axe $X$ du à l'excentrement de la force appliquée
$\rho$	Rapport $h_0/R$ , dans les cols circulaire et rapport des diamètres intérieur et extérieur, dans les membranes trouées
$\sigma$	Contrainte dans le col circulaire
$\sigma_{max}$	Contrainte maximale dans le col circulaire
$\nu$	Coefficient de poisson
$a$	Rayon intérieur dans la théorie des membranes
$b$	Rayon extérieur dans la théorie des membranes, épaisseur dans la théorie des cols
$D$	Rigidité en flexion des plaques
$E$	Module élastique (Module de Young)
$G$	Module de torsion
$h$	Epaisseur de membrane
$h_0$	Epaisseur minimale du col circulaire
$I$	Moment d'inertie de la section transversale du col
$K$	Coefficient multiplicateur dans la théorie de Smith et Chetwynd
$K_1$	Coefficient correcteur en flexion dans la théorie de Merken et Debongnie
$K_2$	Coefficient correcteur en extension dans la théorie de Merken et Debongnie
$K_3$	Coefficient correcteur en cisaillement dans la théorie de Merken et Debongnie
$K_4$	Coefficient correcteur en déplacement dans la théorie de Merken et Debongnie
$K_F$	Coefficient correcteur pour la membrane fendue dans la théorie de Merken et Debongnie
$K_{NF}$	Coefficient correcteur pour la membrane fendue dans la théorie de Merken et Debongnie
$K_r$	Coefficient correcteur en état de surface dans la théorie de Merken et Debongnie
$M$	Couple de flexion des membranes
$M_f$	Couple de flexion autour de l'axe $Z$

$M_{ft}$	Couple de flexion autour de l'axe $Y$
$M_t$	Couple de torsion autour de l'axe $X$
$N$	Tension selon l'axe $X$
$O$	Tension de cisaillement selon l'axe $Y$
$P$	Tension de cisaillement selon l'axe $Z$
$R$	Rayon du col circulaire
$R_a$	Rugosité arithmétique
$R_p$	Rugosité totale
$R_t$	Raideur en torsion du col selon l'axe $X$
$t_i$	Durée d'impulsion en WEDM
$u$	Déplacement selon l'axe $X$
$u_i$	Tension de circuit ouvert en WEDM
$v$	Déplacement selon l'axe $Y$
$v_{read}$	Déplacement mesuré par le capteur
$w$	Déplacement selon l'axe $Z$
$X$	Axe $X$ du système de coordonnées, aligné avec l'axe de symétrie du col circulaire
$Y$	Axe $Y$ du système de coordonnées, aligné sur la ligne des centres des 2 arcs définissant le col circulaire
$Z$	Axe $Z$ du système de coordonnées, perpendiculaire aux axes $X$ et $Y$ .

# Références

- [1] Sommerfeld A., *Zur hydrodynamische Theorie des Schmiermittelreibung*, in Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 50, 1904.
- [2] Leloup L., *Etude de la lubrification et calcul des paliers*, 2ème éd., Sciences et Lettres, Liège, 1961.
- [3] Pazot R., *Montages d'usinage. Eléments d'étude*, 4ème éd., Desforges, Paris, 1978.
- [4] Massonnet Ch., Cescotto S., *Mécanique des matériaux*, 2ème éd., De Boek, Bruxelles, 1994.
- [5] Paros J.M., Weisbord L., How to design flexure hinges, *Machine Design*, pp. 151-156, nov. 1965.
- [6] Henein S., *Conception des guidages flexibles*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Collection META, 2001.
- [7] Merken P., Debongnie J.F., Le col circulaire comme articulation flexible, 6ème congrès national de mécanique théorique et appliquée, Gent, 2003.
- [8] Ryu J.W., Gweon D.G., Error analysis of a flexure hinge mechanism induced by machining imperfection, *Prec. Eng.*, 21, pp. 83-89, 1997.
- [9] Tosun N., Cogun C., Inan A., The effect of cutting parameters on workpiece surface roughness in wire EDM, *Mach. Sc. & Tech.*, 7(2), pp. 209-219, 2003.
- [10] Xu W., King T., Flexures hinges for piezoactuator displacement amplifiers: flexibility, accuracy and stress considerations, *Prec. Eng.*, 19, pp. 4-10, 1996.
- [11] Lobontiu N., *Compliant mechanisms. Design of flexures hinges*, CRC Press, 2003.
- [12] Ryu J.W., Gweon D.G., Moon K.S., Optimal design of a flexure hinge based XYθ wafer stage, *Prec. Eng.*, 21, pp. 18-28., 1997.
- [13] Peterson R.E., *Stress concentration factors*, Wiley & Sons, New-York, 1974.
- [14] Koster M., *Constructies principes voor het nauwkeurig bewegen en positioneren*, 2ème éd., Twente University Press, 1998.
- [15] Zhang S., Fasse E.D., A finite-element-based method to determine the spatial stiffness properties of a notch hinge, *Journal of Mechanical Design*, 123, pp. 141-147, 2001.
- [16] Smith S.T., 2000, *Flexure : elements of elastic mechanisms*, Gordon & Breach, Amsterdam.
- [17] Xiaowei L., Zhixin J., Jiaqi, Z., Jinchun L., A combined electrical machining process for the production of a flexure hinge, *Journal of Materials Processing Technology*, 71, pp. 373-376, 1997.

- [18] Smith S.T., Chetwynd D.G., Foundations of ultraprecision mechanism design, Gordon & Breach, Amsterdam, 1992.
- [19] Smith S.T., Chetwynd D.G., Bowen D.K., The design and assessment of high precision monolithic translation mechanisms, J. Phys. E : Sci. Instrum., 20, pp. 977-983, 1988.
- [20] Chau, A, Conception et réalisation d'un système de guidage flexible en rotation de type col circulaire, Travail de fin d'étude, ULB, 2003
- [21] Vandaele V., Conception et réalisation d'un système de guidage flexible en translation de type spider, Travail de fin d'étude, ULB, 2003
- [22] Smal O., Merken P., Croquet V., Raucent B., Debongnie J.F., Delchambre A., Design of an implantable micropump, Proc. of the International Precision Assembly Seminar (IPAS'2004), Bad Hofgastein, Austria, 12-13 February 2004.
- [23] P. Merken, O. Smal, J.F. Debongnie, B. Raucent, Design and test of a circular notch hinge, Proc. of the International Precision Assembly Seminar (IPAS'2004), Bad Hofgastein, Austria, 12-13 February 2004.
- [24] Croquet V., Merken P., Delchambre A., Debongnie J.F., Manufacturing of a circular Notch Hinge as Guiding System by Electrical Discharge Machining, First International Symposium on nanomanufacturing, Poster session, Boston, USA, 24-25 April 2003.
- [25] Madou M.J., Fundamentals of Microfabrication, second edition, CRC Press, 2002.
- [26] Techniques de l'Ingénieur, J. Courbon, Calcul des structures, Plaques minces élastiques, A311.
- [27] Marioge J.P., Flexion symétrique des disques minces et épais, Nouvelle revue d'optique appliquées, 2, n°3, pp 143-148, 1971.
- [28] Roark J.R, Young, W.C, Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill International Book Company, 11<sup>th</sup> éd., 1983.

# Annexes

## Mesures sur les cols circulaires

Résultats des mesures

Epaisseurs en mm

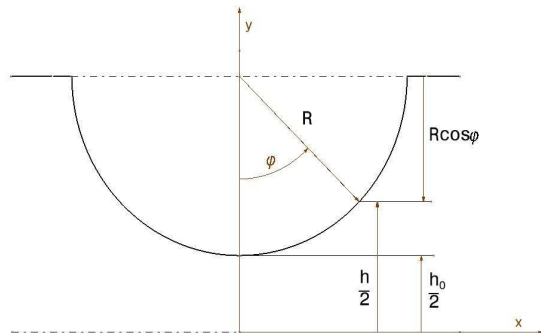
$\alpha_f$  déplacement angulaire, en degrés

$M_f$  Couple de réaction, en Nmm

col 1 : 0,066				col 2 : 0,072				col 3 : 0,146				col 4 : 0,175	
$\alpha_f$	$M_f$	$\alpha_f$	$M_f$	$\alpha_f$	$M_f$	$\alpha_f$	$M_f$	$\alpha_f$	$M_f$	$\alpha_f$	$M_f$	$\alpha_f$	$M_f$
0.0011	-0.0188	1.1660	0.8146	-0.0003	0.0094	0.7172	0.7252	0.0002	-0.0188	0.5528	3.7435	0.0001	-0.0188
0.0006	-0.0141	1.1660	0.8146	-0.0011	0.0188	0.7176	0.7204	-0.0001	-0.0141	0.5522	3.7529	-0.0004	-0.0094
0.0006	-0.0141	1.1660	0.8146	-0.0003	0.0094	0.7176	0.7204	-0.0004	-0.0094	0.5539	3.7247	-0.0001	-0.0141
0.0533	0.0518	1.2773	0.8900	0.0532	0.0848	0.7726	0.7770	0.0540	0.0800	0.5960	4.0213	0.0444	0.2543
0.0528	0.0565	1.2773	0.8900	0.0532	0.0848	0.7730	0.7722	0.0523	0.1083	0.5948	4.0402	0.0489	0.1742
0.0533	0.0518	1.2773	0.8900	0.0536	0.0800	0.7730	0.7722	0.0548	0.0659	0.5954	4.0307	0.0505	0.1460
0.1085	0.0942	1.3887	0.9653	0.1083	0.1413	0.8277	0.8335	0.0950	0.3955	0.6369	4.3368	0.0801	0.6781
0.1080	0.0989	1.3892	0.9606	0.1083	0.1413	0.8285	0.8240	0.0941	0.4097	0.6377	4.3227	0.0852	0.5886
0.1085	0.0942	1.3892	0.9606	0.1087	0.1366	0.8288	0.8193	0.0933	0.4238	0.6377	4.3227	0.0849	0.5933
0.1642	0.1318	1.5000	1.0406	0.1638	0.1931	0.8831	0.8853	0.1373	0.6875			0.1169	1.0830
0.1637	0.1366	1.5005	1.0359	0.1638	0.1931	0.8843	0.8711	0.1356	0.7157			0.1214	1.0030
0.1642	0.1318	1.5005	1.0359	0.1642	0.1884	0.8843	0.8711	0.1384	0.6686			0.1222	0.9888
0.2198	0.1695	1.6123	1.1066	0.2188	0.2496	0.9386	0.9371	0.1783	1.0030			0.1547	1.4691
0.2198	0.1695	1.6113	1.1160	0.2192	0.2449	0.9397	0.9229	0.1772	1.0218			0.1585	0.4032
0.2198	0.1695	1.6118	1.1113	0.2196	0.2401	0.9390	0.9323	0.1791	0.9888			0.1595	1.3844
0.2755	0.2072	1.7236	1.1819	0.2747	0.2967	0.9936	0.9936	0.2195	1.3138			0.1923	0.8600
0.2755	0.2072	1.7231	1.1866	0.2743	0.3014	0.9948	0.9794	0.2190	1.3232			0.1963	1.7893
0.2755	0.2072	1.7236	1.1819	0.2747	0.2967	0.9944	0.9841	0.2203	1.2996			0.1961	1.7941
0.3869	0.2825	1.8349	1.2572	0.3298	0.3532	1.0487	1.0501	0.2613	1.6151			0.2297	2.2555
0.3869	0.2825	1.8344	1.2620	0.3298	0.3532	1.0502	1.0312	0.2599	1.6387			0.2334	2.1896
0.3869	0.2825	1.8349	1.2572	0.3298	0.3532	1.0499	1.0359	0.2621	1.6010			0.2337	2.1849
0.4988	0.3532	1.9466	1.3279	0.3852	0.4050	1.1045	1.0972	0.3028	1.9212			0.2681	2.6322
0.4978	0.3626	1.9461	1.3326	0.3860	0.3955	1.1053	1.0877	0.3028	1.9212			0.2710	2.5804
0.4983	0.3579	1.9461	1.3326	0.3852	0.4050	1.1053	1.0877	0.3037	1.9071			0.2723	2.5569
0.6102	0.4285	2.0564	1.4173	0.4407	0.4568	1.1596	1.1537	0.3443	2.2273			0.3054	3.0278
0.6092	0.4379	2.0579	1.4032	0.4407	0.4568	1.1604	1.1442	0.3449	2.2178			0.3080	2.9807
0.6097	0.4332	2.0564	1.4173	0.4411	0.4520	1.1604	1.1442	0.3457	2.2037			0.3099	2.9477
0.7211	0.5086	2.1671	1.4974	0.4961	0.5086	1.2146	1.2102	0.3859	2.5333			0.3440	3.3998
0.7206	0.5133	2.1681	1.4880	0.4961	0.5086	1.2154	1.2007	0.3864	2.5239			0.3459	3.3668
0.7206	0.5133	2.1681	1.4880	0.4965	0.5038	1.2154	1.2007	0.3870	2.5145			0.3478	3.3338
0.8324	0.5839	2.2799	1.5586	0.5512	0.5651	1.2674	1.2949	0.4277	2.8347			0.3832	3.7623
0.8319	0.5886	2.2804	1.5539	0.5512	0.5651	1.2685	1.2808	0.4282	2.8253			0.3848	3.7341
0.8319	0.5886	2.2799	1.5586	0.5516	0.5603	1.2685	1.2808	0.4277	2.8347			0.3861	3.7105
0.9438	0.6592	2.3911	1.6340	0.6067	0.6169			0.4697	3.1314			0.4216	4.1390
0.9433	0.6639	2.3916	1.6292	0.6070	0.6121			0.4695	3.1361			0.4224	4.1249
0.9438	0.6592	2.3916	1.6292	0.6070	0.6121			0.4692	3.148			0.4243	4.0919
1.0052	0.7346			0.6617	0.6734			0.5112	3.4374			0.4595	4.5252
1.0547	0.7393			0.6621	0.6686			0.5107	3.4468			0.4613	4.4922
1.0547	0.7393			0.6625	0.6639			0.5112	3.4374			0.4621	4.4781

# Formulaire

## Col circulaire



$$\rho = \frac{h_0}{R}$$

$$K_1 = 0,137\rho + 1$$

$$K_2 = 1 + 0,97\sqrt{\rho}$$

$$K_3 = \frac{1 + 0,5\rho}{1 + 2,2\rho}$$

$$K_4 = \frac{1}{1 + 0,5\rho}$$

$$K_r = \left(1 - 5\frac{R_p}{h_0}\right)$$

### Flexion, axe z

$$\frac{M_f}{\alpha_f} = K_1 \frac{2}{9\pi} Eb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}}$$

## Membrane

$$\rho = \frac{a}{b}$$

$$K_{NF} = (5,9\rho + 7,3)\rho^2 - (4\rho + 1,1)\rho + 1$$

$$K_F = 16,4\rho^2 + 2,82\rho + 1,02$$

### Membrane non-fendue

$$R_{NF} = K_{NF} \frac{4\pi}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{h^3}{b^2}$$

### Membrane fendue

$$R_F = K_F \frac{\pi}{3} E \frac{h^3}{b^2}$$

$$\alpha_f = \frac{1}{K_1} \frac{3\pi}{4} \frac{\sigma}{E} \sqrt{\frac{R}{h_0}}$$

### Torsion, axe x

$$\frac{M_t}{\alpha_t} = K_1 \frac{8}{9\pi} Gb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}}$$

### Flexion transverse, axe y

$$\frac{M_{ft}}{\alpha_{ft}} = K_2 \frac{Eb^3}{12\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}}$$

### Cisaillement technologique, axe y

$$\frac{O}{v} = K_3 \frac{2}{3\pi} Eb \left(\frac{h_0}{R}\right)^{3/2}$$

### Cisaillement technologique, axe z

$$\frac{P}{w} = K_3 \frac{1}{12\pi} \frac{Eb^3}{R^2} \sqrt{\frac{h_0}{R}}$$

### Déplacement de l'extrémité du col

$$v = \frac{M_f}{Eb} \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \left[ \frac{1}{K_1} \frac{9\pi}{2} - K_4 6\sqrt{\frac{h_0}{R}} \right]$$

