

Johannes Képler :

un « mathematicus » infinicole

par Jacques Bair

En souvenir de François Jongmans

Résumé. L'article met en lumière la manière dont Kepler, en s'appuyant sur des méthodes géométriques utilisées par Archimède, anticipa certains fondements de l'analyse non standard en explorant des volumes (célestes ou de tonneaux) et les lois du mouvement planétaire. Cette filiation intellectuelle révèle une continuité dans la réflexion sur l'infini, bien avant l'émergence formelle du calcul infinitésimal ; elle souligne le rôle visionnaire de Kepler dans l'histoire des mathématiques.

Mots-clés : Kepler ; *mathematicus* ; infinitésimal ; infinicole , infinifuge ; précurseur intuitif ; Archimède.

0. Introduction

J'ai eu l'immense privilège d'être un élève, puis un collaborateur et enfin un successeur de François Jongmans (voir [1]). Celui-ci m'a constamment transmis de ses connaissances et expériences ; il m'a guidé dans mes études, mes recherches et mes enseignements ; il a toujours été pour moi un modèle à suivre et m'a sans cesse encouragé et poussé vers l'excellence. Bref, pour résumer ma pensée à son sujet, il s'est comporté envers moi comme un véritable père spirituel et je lui en suis infiniment reconnaissant.

Lorsqu'il fut admis à l'éméritat, mon ancien Patron garda contact avec moi, soit en me téléphonant régulièrement soit en venant me saluer dans mon bureau ou encore en m'invitant à le rencontrer dans son domicile (d'abord à Fléron, puis à Mortier), puis, quand il s'installa en France, par courrier (postal ou électronique) : nous évoquions principalement nos recherches respectives et mes enseignements. Il était alors fort actif au niveau de ses travaux historiques (qu'il menait surtout en collaboration avec l'australien Eugene Seneta ¹ qui a rédigé, à propos de ceux-ci, une revue détaillée (voir [15]) ; il me sollicitait de temps à autre pour encoder des parties de son livre sur Catalan ² ou certains de ses articles sur le jaugeage de tonneaux ou sur Tchebycheff ³. Lors de ces échanges, je l'avais évidemment informé que

¹ Eugene Seneta est un statisticien australien né en 1941, reconnu pour ses contributions majeures en probabilité et en statistique, notamment dans la théorie des chaînes de Markov et des matrices non négatives, ainsi que pour ses travaux historiques en collaboration, notamment avec F. Jongmans. Il est professeur émérite de l'Université de Sydney.

² Eugène Charles Catalan (1814–1894) était un prolifique mathématicien franco-belge, connu pour ses travaux en théorie des nombres, analyse et géométrie. Il est notamment célèbre pour la suite et la conjecture qui portent son nom. Il fut professeur à l'Université de Liège. Le livre en question, intitulé « Eugène Catalan. Géomètre sans patrie. Républicain sans république » (223 pages) a été publié par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française en 1996.

³ Pafnouti Lvovitch Tchebycheff (1821–1894) était un mathématicien russe majeur du XIX^e siècle, connu pour ses travaux en théorie des nombres, probabilités, approximation et mécanique. Son nom apparaît sous différentes formes : Tchebychev, Tchebychef, Chebyshev, ou encore Čebyšëv.

je menais, en collaboration avec Valérie Henry, une étude épistémologique sur les débuts de l'analyse mathématique, en particulier sur l'Analyse Non Standard (ANS en abrégé) (voir [3]) ; ces recherches nous avaient amenés à remonter le cours de l'histoire avant la création de l'Analyse par les fondateurs Newton et Leibniz ⁴, et, plus particulièrement, de nous intéresser aux travaux de Fermat ⁵ pour trouver le maximum (ou minimum) d'une fonction (voir [4]) ; en effet, la méthode d'adégalité du toulousain nous semblait, d'un point de vue procédural, annoncer (certes, bien plus tard) l'émergence de l'ANS. F. Jongmans conseilla de remonter encore au-delà de Fermat et d'aller regarder du côté de Kepler ⁶. Cet avis était donné à une époque où F. Jongmans travaillait sur la recherche du volume d'un tonneau de vin (voir [10] et [11]), ce qui lui avait permis d'étudier en profondeur l'œuvre de Kepler. Cette recommandation de mon ancien Patron pouvait a priori surprendre dans la mesure où le rôle qu'a tenu Kepler dans les fondements de l'Analyse ne me semblait mentionné que timidement dans la littérature ⁷. Mais, sachant par expérience que les avis que donnait F. Jongmans en matière de recherches étaient toujours extrêmement pertinents et prometteurs, je me suis décidé, à mon rythme ⁸, à récolter de la documentation historique sur le sujet.

Cet article est le résultat de ces investigations. J'y présente d'abord sommairement le personnage de Kepler, avant de m'attarder quelque peu sur ses lois célestes qui lui ont procuré

⁴ Isaac Newton est né le 25 décembre 1642 (calendrier julien) et mort le 20 mars 1727. Gottfried Wilhelm Leibniz est né le 1^{er} juillet 1646 et décédé le 14 novembre 1716. Newton et Leibniz sont tous deux reconnus comme les cofondateurs du calcul infinitésimal, une branche fondamentale de l'analyse mathématique. Newton a développé sa méthode des fluxions, tandis que Leibniz a introduit une notation plus intuitive (comme le symbole $\int$ pour l'intégrale et d pour les différentielles), qui est encore utilisée aujourd'hui. Leur querelle sur la priorité de cette découverte a marqué l'histoire des mathématiques, bien que de nombreux historiens modernes reconnaissent que chacun a contribué de manière indépendante et complémentaire.

⁵ Pierre de Fermat (vers 1601 – 1665) était un magistrat et mathématicien français, célèbre pour ses travaux en théorie des nombres (il fut à l'origine du célèbre *dernier théorème de Fermat*, énoncé en marge d'un livre, resté sans démonstration pendant plus de 300 ans jusqu'à Andrew Wiles en 1994), en géométrie analytique (il a découvert les principes de cette discipline indépendamment de Descartes), en calcul des probabilités (il a collaboré avec Pascal pour poser les bases du calcul des probabilités), en optique (il a formulé le *principe de Fermat*, selon lequel la lumière suit le chemin qui minimise le temps de parcours) et en calcul infinitésimal (ses idées sur les tangentes et les maxima/minima ont influencé Newton). Il est à noter que Fermat n'a publié aucun ouvrage complet : ses idées circulaient sous forme de lettres et de manuscrits. Malgré cela, il est considéré comme l'un des fondateurs des mathématiques modernes. Sa maison natale à Beaumont-de-Lomagne (près de Toulouse) est aujourd'hui un musée.

⁶ Kepler est le personnage principal de ce texte.

⁷ Un survol de la littérature spécialisée semble indiquer qu'il existe relativement peu d'études monographiques focalisées exclusivement sur l'apport de Kepler à l'analyse mathématique et à la notion d'infiniment petits ; de fait, la plupart des histoires du calcul infinitésimal mettent l'accent essentiellement sur les travaux d'Archimède, de Fermat, de Pascal, de Newton et de Leibniz, sans développer de volet spécifique sur Kepler. Cette impression est quelque peu confirmée par un extrait de la préface (datée de mars 1955 – février 1958) du livre « Les Somnambules » (par A. Koestler) consacré principalement à Kepler « dont les livres, le journal, la correspondance sont restés jusqu'ici inaccessibles au lecteur anglais (de même qu'au lecteur français d'après une note en bas de page ajoutée par le traducteur Georges Fradier), et dont il n'existe aucune biographie sérieuse en anglais » ([12], p. 9). Néanmoins, le nom de Kepler se retrouve (évidemment) dans la littérature spécialisée moderne. Par exemple, mentionnons les multiples références à Kepler mentionnées par O. Toeplitz dans son approche génétique du *calculus* [17].

⁸ Le conseil fut donné il y a une quinzaine d'années, et tout ce temps fut mis à profit pour rassembler des informations sur le sujet. Récemment, le recours (récent) à Copilot (une Intelligence Artificielle) fut une assistance efficace pour la construction du présent texte.

une solide réputation. Puis, je dégage des rapports majeurs laissés par le savant dans les mathématiques en général ; enfin, plus spécifiquement, je m'attarde sur la voie qu'il a ouverte intuitivement en vue de l'élaboration ultérieure de l'ANS, qui sera formalisée seulement durant la seconde moitié du siècle précédent.

1. Johannes Kepler : astronome et mathématicien du XVII^e siècle

Johannes Kepler est né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt ⁹, dans le duché de Wurtemberg ¹⁰ (Saint-Empire romain germanique), et est décédé le 15 novembre 1630 à Ratisbonne ¹¹. Issu d'une famille protestante, il étudia à l'université de Tübingen ¹², où il s'enthousiasma pour l'héliocentrisme de Copernic ¹³ en rejetant donc, tout comme son contemporain Galilée ¹⁴, le modèle géocentrique de Claude Ptolémée ¹⁵. Il fut nommé « *Mathematicus* » ¹⁶ à Graz ¹⁷. Ecrire que Johannes Kepler était "mathematicus" signifie bien plus que simplement "mathématicien" au sens moderne. Ce terme ancien désignait un savant spécialisé dans les mathématiques appliquées à l'astronomie, l'astrologie, et parfois même à la physique et la philosophie naturelle. En réalité, le titre de "mathematicus" à l'époque de Kepler avait plusieurs implications :

- Un rôle officiel qui conférait diverses responsabilités comme établir des calendriers et almanachs astrologiques, réaliser des prédictions astronomiques, conseiller sur des questions scientifiques et astrologiques.
- Un savant polyvalent : Le "mathematicus" n'était pas cloisonné dans les mathématiques abstraites.
- Un penseur cosmique : Kepler croyait que les mathématiques étaient le langage divin de l'univers. Pour lui, comprendre les lois mathématiques du cosmos revenait à déchiffrer la pensée divine.

⁹ Weil der Stadt est une ville allemande située dans le Land de Bade-Wurtemberg, à environ 28 kilomètres à l'ouest de Stuttgart, la capitale régionale.

¹⁰ Le Duché de Wurtemberg était un État du sud-ouest de l'Allemagne, membre du Saint-Empire romain germanique, qui a existé de 1495 à 1803.

¹¹ Ratisbonne, connue en allemand sous le nom de *Regensburg*, est une ville située dans le sud-est de l'Allemagne, dans le Land de Bavière. Elle se trouve sur les rives du Danube, à la confluence avec la Regen et la Naab, à environ 100 km au nord-est de Munich.

¹² Tübingen est une ville universitaire située dans le sud-ouest de l'Allemagne, dans le Land de Bade-Wurtemberg, à environ 30 km au sud de Stuttgart.

¹³ Copernic (en latin *Nicolaus Copernicus*) était un astronome, mathématicien et chanoine polonais, né le 19 février 1473 à Toruń (en Prusse royale, aujourd'hui en Pologne) et mort le 24 mai 1543 à Frauenburg (Frombork). Il est célèbre pour avoir formulé le modèle héliocentrique de l'univers. Notons encore que *Kopernik* est la forme polonaise moderne du nom, mais elle est rarement utilisée en français sauf dans des contextes spécifiques liés à la Pologne ou à des noms propres (comme des marques ou des lieux).

¹⁴ Galilée (nom francisé mis pour l'appellation originale *Galileo Galilei*) est né le 15 février 1564 à Pise, en Italie.

¹⁵ Claude Ptolémée était un astronome et mathématicien grec du II^e siècle. Son système géocentrique est exposé dans son ouvrage majeur, l'*Almageste*.

¹⁶ Le terme *mathematicus* remonte à l'Antiquité et désignait à l'origine une personne versée dans les savoirs scientifiques, en particulier les mathématiques, mais aussi l'astronomie et parfois la musique. Le mot *mathematicus* vient du latin, lui-même issu du grec ancien *μαθηματικός* (*mathēmatikós*), qui signifie « relatif au savoir » ou « savant ». Il est dérivé de *μάθημα* (*mathēma*), qui signifie « science », « connaissance » ou « ce qui peut être appris ». Ce terme était utilisé pour désigner les *initiés* dans l'école pythagoricienne, par opposition aux simples auditeurs (*akousmatikoi*).

¹⁷ Ville située au sud-est de l'Autriche.

En somme, être "mathematicus", à l'époque de Kepler, consistait à être un architecte du ciel, un interprète des astres, et un passeur entre science et mystique. Ce titre reflète à la fois son génie scientifique et sa vision profondément spirituelle du monde.

Kepler enseigna l'astrologie avant de devenir assistant, puis successeur de Tycho Brahe¹⁸ à la cour de l'empereur Rodolphe II¹⁹.

2. Les trois lois de Kepler

Kepler est surtout connu pour avoir formulé trois lois, devenues éponymes, relatives au mouvement planétaire. En 1609, il exposa ses deux premières lois dans son ouvrage *Astronomia Nova*. Dix ans plus tard, il énonça la troisième loi dans *Harmonice Mundi*.

- Première loi ou loi des orbites. Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques, l'un des foyers étant occupé par le Soleil.
- Deuxième loi ou loi des aires. Le rayon-vecteur reliant une planète au Soleil balaie des aires égales en des durées égales.
- Troisième loi ou loi des périodes. La période orbitale d'une planète est reliée à sa distance moyenne au Soleil ; en effet, le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube de son demi-grand axe.

L'établissement de ces lois fut laborieux, il est aisé de l'imaginer. Les recherches de Kepler se basèrent sur des données nombreuses et précises dues à son Maître Tycho Brahe ; elles furent menées de façon parfois chaotique avec des calculs très nombreux et plusieurs erreurs qui, presque miraculeusement, se compensèrent. Cette épopée extraordinaire est présentée en détail dans l'ouvrage « les somnambules » [12] d'Arthur Koestler dont le titre semble particulièrement bien choisi en ce qui concerne le travail accompli par Kepler.

Quoi qu'il en soit, les lois de Kepler ont profondément transformé la compréhension du système solaire et fondé la physique céleste moderne. En démontrant la réalité des orbites elliptiques, Kepler a permis à Newton de bâtir une théorie unifiée du mouvement et de la gravitation ; il reste ainsi un pilier de l'astronomie, dont les travaux ont ouvert la voie à l'ère scientifique moderne.

3. Apports mathématiques de Kepler

L'héritage de Johannes Kepler ne se résume pas à ces trois lois. En particulier, ses apports furent déterminants dans le développement des mathématiques ; en voici les plus marquants :

1. Renforcement de la géométrie déductive

Dans « *Astronomia nova* » (1609), Kepler adopta une démarche rigoureusement déductive inspirée d'Euclide : chaque proposition est étayée par des axiomes et des démonstrations géométriques. Cette exigence de preuves deductives a conforté la place de la géométrie comme outil central pour modéliser les phénomènes naturels.

2. Géométrie des coniques et formes elliptiques

En établissant que les planètes décrivent des orbites elliptiques, effaçant l'idée ancienne des cercles parfaits, Kepler a relancé l'étude des coniques (ellipse, parabole, hyperbole) et posé les bases de la géométrie analytique moderne.

¹⁸ Tycho Brahé (né Tyge Ottesen Brahe en 1546, mort en 1601) était un astronome danois considéré comme l'un des plus grands observateurs du ciel avant l'invention de la lunette astronomique. Il a été le mentor de Kepler. Il incarne la transition entre l'astronomie ancienne fondée sur la spéculation et la science moderne fondée sur l'observation rigoureuse.

¹⁹ Rodolphe II (1552–1612) fut un empereur du Saint-Empire romain germanique au destin aussi fascinant qu'énigmatique. Membre de la puissante maison de Habsbourg, il régna de 1576 jusqu'à sa mort en 1612, tout en étant roi de Bohême, de Hongrie et de Croatie.

3. Pionnier de l'analyse infinitésimale

Dans son œuvre « *Nova stereometria doliorum vinariorum* » (1615), il préfigura la naissance du calcul intégral, puis de l'analyse non standard du XX^e siècle. Nous approfondirons ce point ultérieurement.

4. Fondation de la physique mathématique

Les trois lois de Kepler ont établi, pour la première fois, des relations quantitatives entre des grandeurs a priori hétérogènes (à savoir le temps et la distance). En formulant ces lois, Kepler a jeté les bases d'une physique mathématique où les équations deviennent l'instrument privilégié de la compréhension du réel.

5. Précurseur des équations différentielles en mécanique céleste

Découvertes empiriquement, les lois de Kepler ont été théoriquement justifiées par Newton dans les « *Principia* », ouvrant la voie à l'étude systématique des équations différentielles pour décrire tout mouvement sous l'effet d'une force. Ce passage du constat à la loi dynamique est un jalon crucial vers le calcul différentiel et ses multiples applications.

6. Héritage dans les méthodes numériques et trigonométriques

Pour vérifier ses lois, Kepler s'appuya sur des calculs laborieux de positions planétaires, accélérant le développement de tables trigonométriques et de méthodes d'interpolation. Ces progrès ont durablement influencé les pratiques numériques jusqu'à l'ère informatique.

7. Contributions en optique et projection géométrique

Dans ses ouvrages « *Astronomiae Pars Optica* » (1604) et « *Dioptrique* » (1611), Kepler appliqua les coniques à la réfraction et à la formation d'images, jetant les bases de l'optique géométrique moderne. Il a ainsi formalisé le dessin des lentilles et la notion de « rayon lumineux » telle qu'on la retrouve aujourd'hui en conception optique et en infographie.

8. Origines de la géométrie discrète et la conjecture de l'empilement

Kepler énonça, en 1611, une supposition, appelée ultérieurement la « conjecture de Kepler », sur l'arrangement optimal de sphères : une question centrale en géométrie discrète, en théorie des nombres et en sciences des matériaux. Cette conjecture stipule que l'empilement le plus dense possible de sphères identiques dans l'espace tridimensionnel est celui de type cubique à faces centrées, comme celui qui peut être observé dans les étals de fruits sur les marchés ou lors d'empilements de boulets de canon. Cette question a stimulé des recherches pendant plus de quatre siècles ; elle a été menée à son terme seulement au XXI^e siècle avec les travaux de T. Hales²⁰. Ce dernier annonça d'abord, en 1998, avoir démontré la conjecture à l'aide d'une preuve combinant des méthodes classiques et des calculs intensifs par ordinateur et impliquant plus de 100 000 problèmes d'optimisation linéaire. En 2003, après cinq ans de vérification par un groupe de douze experts, la communauté mathématique estima la preuve valide à 99 %. En 2014, une version entièrement vérifiée par ordinateur via le projet Flyspeck²¹ confirma définitivement la validité de la démonstration. Ceci fut une étape historique importante

²⁰ Thomas Callister Hales est un mathématicien américain né le 4 juin 1958 à San Antonio (Texas). Il a obtenu son doctorat à l'Université de Princeton, et fut professeur à l'Université du Michigan, puis à l'Université de Pittsburgh, où il est aujourd'hui professeur émérite. Il est surtout connu pour avoir démontré la célèbre conjecture de Kepler sur l'empilement optimal de sphères, ce qui lui a valu l'obtention de plusieurs distinctions scientifiques, à savoir le Prix Fulkerson (2009), le Prix Robbins (2007), partagé avec Samuel P. Ferguson, et le Prix Berwick senior (2020). Hales est désormais reconnu pour avoir repoussé les limites de la rigueur mathématique en intégrant l'informatique dans la validation formelle des théorèmes.

²¹ Le projet Flyspeck (acronyme de *Formal Proof of the Kepler Conjecture*, en abrégé F – P – K) est une initiative lancée par Thomas Hales pour formaliser entièrement sa démonstration de la conjecture de Kepler. Le nom provient de l'expression anglaise *flyspeck*, qui signifie littéralement « petite tache de mouche » ou « marque insignifiante », ce qui est une touche d'humour ironique vu l'ampleur du projet (avec plus de 500 000 lignes de preuve formelle).

montrant que des preuves mathématiques complexes peuvent être entièrement validées par des machines, ce qui est évidemment un pas vers une rigueur absolue en mathématiques. Le projet Flyspeck a d'ailleurs inspiré d'autres projets de formalisation, comme ceux sur le théorème des quatre couleurs ou les fondements de la théorie des ensembles.

En définitive, Kepler a instillé dans les mathématiques un nouveau paradigme : relier étroitement formalisme, observation et expérimentation. Son héritage perdure dans les équations décrivant la nature et dans les domaines qui reposent aujourd'hui sur l'analyse, la géométrie et la logique mathématique.

Son œuvre reste donc un pont entre l'Antiquité euclidienne et l'essor des mathématiques contemporaines, éclairant encore de nos jours la démarche mathématique.

4. En piste vers l'ANS

Revenons sur l'influence spécifique qu'eut Kepler sur le développement de l'analyse mathématique, question dont F. Jongmans m'avait suggéré l'examen par le passé.

Pour bien étudier la problématique, remontons aux racines des mathématiques, plus précisément à l'époque antique.

Les premiers mathématiciens grecs s'intéressaient à l'infini en le concevant de deux manières : l'infini actuel et l'infini potentiel.

Le point de vue qui prédominait alors était celui d'Aristote²² ; il était explicitement partisan d'un infini « en puissance », encore qualifié de « potentiel », qui consiste en une possibilité de prolongation indéfinie, comme la suite des entiers ou la division continue d'un segment et il refusait l'existence d'un infini achevé ou « en acte », réservant cet infini absolu à la pensée divine. La pratique mathématique grecque classique (illustrée notamment par les célèbres « Éléments d'Euclide »²³) s'appuyait aussi sur cette conception potentielle, en traitant l'infini comme un procédé ou une série jamais atteinte plutôt que comme un tout effectivement constitué.

Par contre, l'infini actuel était très rarement affirmé dans l'Antiquité même si l'on trouve bien quelques évocations d'un principe « illimité » (*apeiron*) chez certains présocratiques comme Anaximandre²⁴, et chez quelques auteurs néoplatoniciens ou platoniciens qui, de façon plus métaphysique, admettaient des totalités infinies.

Toutefois, le cas d'Archimède²⁵ est intéressant. Il utilisait surtout l'infini potentiel à travers la méthode d'exhaustion qui compare des aires ou des volumes par des suites de polygones ou de solides inscrits et circonscrits qui s'approchent indéfiniment de la grandeur cherchée, sans postuler un « tout achevé » infini. Mais ses textes montrent aussi des usages heuristiques

²² Aristote est né en 384 av. J.-C. en Macédoine, et est décédé en 322 av. J.-C. sur l'île d'Eubée.

²³ Les *Éléments* d'Euclide sont une œuvre mathématique fondatrice, rédigée au III^e siècle avant J.-C., qui a structuré la géométrie de manière rigoureuse et logique. Composée de treize livres, elle expose les principes de la géométrie, de l'arithmétique et de la théorie des proportions, en partant de définitions, axiomes et postulats pour construire des démonstrations. Ce traité a influencé la pensée scientifique pendant plus de deux millénaires et reste un modèle de raisonnement déductif.

²⁴ Anaximandre était un philosophe grec présocratique du VI^e siècle av. J.-C., pionnier de la pensée scientifique et cosmologique. Il est notamment connu pour avoir introduit le concept de l'*apeiron*, principe infini et indéfini à l'origine de toutes choses.

²⁵ Archimède est né vers 287 av. J.-C. à Syracuse, en Sicile. Il est mort en 212 av. J.-C. à Syracuse, lors de la prise de la ville par les Romains.

proches de l'infini actuel. En effet, la redécouverte du Codex ²⁶ d'Archimède, notamment avec les travaux de Reviel Netz ²⁷, a révélé des passages de la « Méthode » où Archimède utilisait déjà des concepts proches de l'infini actuel. En fait, dans *La Méthode*, Netz a montré qu'Archimède utilisait des bijections (ou correspondances biunivoques) entre ensembles infinis, une idée qui préfigure les travaux de Cantor au XIX^e siècle et qu'il comparait des figures géométriques en les décomposant en une infinité de segments, montrant ainsi que deux figures avaient des volumes égaux si leurs segments pouvaient être mis en correspondance. Ceci suggère qu'il concevait une forme d'infini actuel, ce qui était une révolution pour son époque. En pratique, sur le plan démonstratif strict, Archimède est resté, en théorie, un adepte de l'infini potentiel ; mais sur le plan heuristique et méthodologique, certains de ses passages montrent une familiarité et une utilisation occasionnelle d'intuitions assimilables à l'infini actuel.

Durant le début de notre ère, la quasi-totalité des mathématiciens et philosophes du Moyen Âge s'inscrivaient dans la ligne d'Aristote et acceptaient l'infini « en puissance » plutôt qu'« en acte ». Cette position a dominé les traités scolastiques et la pratique mathématique académique jusqu'à la Renaissance : la méthode d'exhaustion et les raisonnements par approximations successives restaient la norme pour les mathématiciens.

Les partisans de l'infini actuel étaient rares avant Kepler. Signalons tout de même deux figures majeures : Nicholas of Cusa (Nicolas de Cuse, 1401–1464) qui défendait une conception théologique et cosmologique d'un infini véritable et d'un univers sans bornes, et Giordano Bruno (1548–1600) qui, affirmant explicitement l'existence d'un univers infini peuplé de mondes innombrables, se positionnait en faveur d'un infini « achevé », position héritée et radicalisée par la tradition néoplatonicienne de la Renaissance.

Bien qu'Archimède et Johannes Kepler n'aient pas vécu à la même époque ²⁸, leurs pensées étaient étonnamment proches. Kepler considérait Archimède comme l'un de ses modèles intellectuels, et plusieurs aspects de son œuvre s'inspiraient directement des méthodes archimédiennes. Kepler a cité Archimède dans plusieurs de ses ouvrages, notamment dans ses commentaires sur les volumes et les proportions. Il admirait sa capacité à combiner intuition physique et démonstration mathématique ; il l'appelait « le divin géomètre ».

²⁶ Le Codex d'Archimède, aussi appelé « *palimpseste d'Archimède* », est un manuscrit exceptionnel qui a permis de redécouvrir des textes mathématiques perdus du célèbre savant grec Archimède. Il est la seule source connue de certains traités d'Archimède, notamment « La Méthode » (un texte révolutionnaire où Archimède anticipe des idées proches du calcul intégral, utilisant des principes d'équilibre et de comparaison pour calculer des aires et volumes), « Le Stomachion » (longtemps considéré comme un simple jeu de puzzle, il est en réalité une étude combinatoire, préfigurant les mathématiques du dénombrement), ainsi que d'autres œuvres comme *Des corps flottants*, *De la sphère et du cylindre*, *Des spirales*, etc.

²⁷ Reviel Netz est un historien israélien des mathématiques né le 2 janvier 1968 à Tel Aviv. Il est titulaire d'une licence en histoire ancienne et d'une maîtrise en histoire et philosophie des sciences à l'Université de Tel Aviv, puis d'un doctorat (datant de 1995) en Études classiques au Christ College de Cambridge. Depuis 1999, il enseigne à l'Université Stanford, où il est titulaire d'une chaire en mathématiques grecques et astronomie. Il est surtout connu pour ses travaux sur les mathématiques grecques anciennes, et en particulier pour son rôle central dans l'étude du Palimpseste d'Archimède, un manuscrit redécouvert en 1998 qui a révélé des textes inédits du célèbre savant grec. Il a coécrit *The Archimedes Codex* avec William Noel, un ouvrage de vulgarisation traduit en plus de 20 langues.

²⁸ Il y a eu près de 1800 ans d'écart entre eux.

On peut constater que Kepler ne s'est pas contenté de citer Archimède : il s'est approprié ses idées d'« infiniment petits », les a clarifiées et les a déployées dans de nouveaux contextes géométriques et astronomiques. Au-delà de l'hommage, il jette donc les bases d'un raisonnement infinitésimal qui sera formalisé plus tard. Ainsi, Kepler peut être qualifié de pionnier « infinicole »²⁹ bien avant que ne se déroule une guerre entre infinicoles et infinifuges en Belgique (voir [5] et [6]) et en France (voir [2]).

Pour mettre en lumière la filiation intellectuelle entre Archimède et Kepler sur la question de l'infini, on peut isoler trois moments clés où Kepler reprend les méthodes « infiniment petites » inaugurées par Archimède.

1. Le cercle vu comme polygone à un nombre infini de côtés

Alors qu'Archimède, dans « De la mesure du cercle », a obtenu une formule (désormais classique) donnant l'aire d'un cercle en comparant celui-ci à des polygones réguliers inscrits et circonscrits, Kepler a repris explicitement cette idée : il imaginait le cercle comme un polygone ayant un nombre « infini » de côtés, chacun « infiniment petit ». Par exemple, notamment dans ses travaux pour obtenir sa deuxième loi (qu'il a d'ailleurs trouvée avant la première), il pensait en substance que si chaque côté du polygonal est réduit à une longueur infinitésimale, la somme de ces côtés coïncide exactement avec la circonférence du cercle, et l'aire de chaque « triangle » infinitésimal s'additionne pour reconstituer l'aire totale du disque. Signalons toutefois que le raisonnement initial de Kepler, qui nous paraît désormais familier, était plus tortueux. Pour l'anecdote, mais surtout parce qu'il s'agit d'un épisode important dans l'histoire des sciences, voici succinctement comment l'on peut raconter la découverte de la loi des aires. Dans son ouvrage *Astronomia Nova* [III, Cap. 40], Kepler écrit : « sachant qu'il y a un nombre infini de points sur l'orbite et par conséquent un nombre infini de distances, il me vint l'idée que la somme de ces distances est contenue dans l'aire de l'orbite. Je me rappelai en effet que de la même manière Archimède aussi divisa l'aire d'un cercle en un nombre infini de triangles ». Mais il semblerait que Kepler était conscient de commettre des erreurs en supposant circulaire l'orbite et en assimilant l'aire à une somme de longueurs ; de plus, selon Kœstler, le savant « se trompa une fois de plus dans ses justifications en s'embrouillant si bien que son raisonnement est à peu près impossible à suivre, il l'admit lui-même. Or, par trois méthodes fausses, défendues de façon encore plus fausse, il tomba sur la loi juste. Tour de force du somnambulisme, un des plus beaux de l'histoire des sciences » ([12], pp. 385-386).

2. Passage à la sphère : des méthodes 2D au 3D

Archimède appliquait la méthode de l'exhaustion pour décomposer la sphère en « lames » dont il comparait les aires à celles d'un cône pour trouver le volume de la sphère en fonction du rayon. Kepler a transposé cette approche : il considérait la sphère comme formée d'une infinité de disques circulaires de rayon variable et d'épaisseur infinitésimale. Il sommait ensuite, « en esprit », la contribution volumique de chaque disque pour retrouver la formule d'Archimède, suivant l'intuition selon laquelle l'empilement d'un nombre infini de tranches infiniment minces donne le volume total.

²⁹ Les mots « infinicole » et « infinifuge » désignent respectivement les partisans et les adversaires des infiniment petits ; ils sont en effet construits avec le suffixe « *cole* » qui vient du verbe latin « *colere* » (et signifie « cultiver ») ou « *fuge* » qui provient du latin « *fuga* » qui se rapporte à l'idée de « fuir, éviter ».

3. Les indivisibles appliqués aux tonneaux

Dans « *Nova stereometria doliorum vinariorum* » (1615), Kepler a calculé le volume de tonneaux (de vin) en les découpant en cylindres circulaires d'épaisseur infinitésimale³⁰. Chaque « anneau » était traité comme un solide élémentaire dont on additionne intuitivement les volumes, ce qui reflète la méthode des indivisibles exploitée par la suite par plusieurs mathématiciens du XVII^e siècle³¹. Kepler a mentionné l'idée d'un découpage en éléments infiniment petits comme fondement de son calcul de volumes, reprenant l'esprit du raisonnement archimédien même si, dans ce contexte, il n'a pas cité explicitement les traités de son ancêtre grec.

A partir des considérations précédentes, on peut trouver des arguments en faveur de la thèse selon laquelle Kepler peut être perçu comme ayant été un précurseur de l'ANS :

- Kepler a exploité des partitions infinies de solides pour en déduire des formules de volume, méthode qu'on peut lire comme un ancêtre de l'intégrale.
- Son raisonnement autorise des quantités qui, bien que non nulles, restent plus petites que tout ce que l'on peut concrètement concevoir et que l'on peut additionner à d'autres (jusqu'à une infinité de fois): c'est l'idée même d'infiniment petit qu'Abraham Robinson³² a formalisé seulement en 1961.
- Kepler s'est inscrit dans la lignée des géomètres de la Renaissance qui mirent en place une géométrie « par indivisibles », terreau intellectuel nécessaire à l'analyse ultérieure (en particulier, à l'ANS).
- Dans ses travaux sur les planètes ou sur les tonneaux, Kepler fit preuve d'une intuition puissante en observant empiriquement ce que l'on pourrait appeler de nos jours l'insensibilité des variations d'une fonction autour d'un optimum. Par exemple, après le Théorème V³³ de son ouvrage sur les tonneaux, l'auteur a écrit ce commentaire intéressant : « C'est ainsi parce qu'au voisinage d'un maximum, les diminutions de part et d'autre sont au début simplement imperceptibles. » [16, p. 53]. Selon certains histo-

³⁰ Cet épisode de l'histoire des mathématiques a souvent été présenté et commenté dans la littérature. Par exemple, voir [14], [16] et [17].

³¹ Les principaux mathématiciens du XVII^e siècle ayant adopté et développé la méthode des indivisibles sont :

- Bonaventura Cavalieri (1578–1647) : inventeur de la méthode des indivisibles, exposée dans son « *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* ».
- Gilles Personne de Roberval (1602–1675) : a généralisé la méthode de Cavalieri pour le calcul d'aires et de centres de gravité.
- Evangelista Torricelli (1608–1647) : élève de Galilée, il a appliqué les indivisibles au calcul de volumes de solides variés.
- Blaise Pascal (1623–1662) : a utilisé la méthode pour étudier les cycloïdes et les propriétés des coniques.

³² Abraham Robinson est un mathématicien, logicien et ingénieur en aérodynamique d'origine allemande, naturalisé américain. Il est surtout connu pour avoir créé l'analyse non standard en 1961, une théorie rigoureuse du calcul infinitésimal qui formalise l'usage des infiniment petits et des infiniment grands. Pour cette contribution, il reçoit la médaille Brouwer en 1973.

³³ Avec ce Théorème V, Kepler démontra l'énoncé suivant : « « Parmi tous les cylindres ayant la même diagonale, le plus grand et le plus volumineux est celui dont le rapport entre le diamètre de la base et la hauteur est égal à $\sqrt{2}$ » ([16], p. 50).

riens, notamment Montucla³⁴, Fermat s'est appuyé plus tard sur cette observation pour développer sa théorie sur l'adégalité concernant la recherche d'un maximum ou un minimum (voir [4]), ce qui deviendra ultérieurement le théorème de Fermat. Ce résultat est désormais reconnu comme fondamental en analyse classique ; il affirme essentiellement (sous certaines hypothèses assez peu contraignantes) que, la dérivée de f en a s'annule lorsque a procure un optimum à f .

Toutefois, la classification de Kepler comme ayant été un précurseur de l'ANS doit être nuancée.

En effet, Kepler ne disposait évidemment d'aucune théorie des modèles ou de l'axiomatique standard/non standard : son usage des infiniment petits restait purement heuristique, sans fondement logico-axiomatique. De plus, l'analyse non standard moderne repose sur la logique des ensembles, l'ultrapuissance et les axiomes de transferts. Kepler ignorait totalement ces constructions qui datent de la seconde moitié du siècle précédent.

En conclusion, on peut légitimement qualifier Kepler de précurseur « intuitif » de l'analyse non standard dans la mesure où il manipulait des quantités infiniment petites de façon intuitive, voire conceptuelle. Cependant, il n'a pas participé à la formalisation rigoureuse de ces objets. Son apport demeure donc historique et heuristique, non fondamental pour la théorie moderne.

Bibliographie

- [1] Bair J., A la mémoire du géomètre François Jongmans, 2015, *Orbi ULiège*, 2268/259451.
- [2] Bair J., La bataille de l'infini, dans le livre « *Augustin Louis Cauchy. Le prolifique* », Tangente Hors Série 91, 2024, pp. 34 – 36.
- [3] Bair J. – Henry V., De l'Analyse Classique à l'Analyse Non Standard, *Les cahiers de la mathématique appliquée*, Editions Ferrer et du Céfal, Bruxelles et Liège, n° 1, mars 2003, pp. 51 – 74 et n° 2, octobre 2003, pp. 75 – 96.
- [4] Bair J. – Henry V., Etude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrémums, *Mathématique et Pédagogie*, 156, 2006, pp. 49 – 61.
- [5] Bair J. - Mawhin J., Le mathématicien Jean-Nicolas Noël (1783 – 1867), *Revue des Questions Scientifiques*, 2019, 190 (1 – 2), pp. 27 – 59.
- [6] Bockstaele P., Nineteenth century discussions in Belgium on the foundation of the calculus, *Janus*, 53 (1), 1967, pp. 1 – 16.
- [7] Gaud D. – Guichard J. – Sicre J.-P. – Chrétien C., *Des tangentes aux infiniment petits*, IREM de l'Université de Poitiers, 1998, 143 pages.
- [8] Hauchart C. – Rouche N., *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, Ciaco éditeur, 1967, 371 pages.

³⁴ Jean-Étienne Montucla (1725–1799) était un historien français, dont l'œuvre majeure, intitulée *Histoire des mathématiques* (1758), est pionnière et retrace les progrès des mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à son époque. Ce travail est considéré comme l'un des premiers grands traités historiques sur les mathématiques, combinant rigueur scientifique et clarté pédagogique.

- [9] Hodgson B.R., Regard archimédien sur le cercle et sur la sphère : clin d’œil de Kepler, *Accromath*, volume 8.2, été – automne 2013.
- [10] Jongmans F., In vino veritas, in dolio calamitas, *The Mathematical Scientist*, 33, 2019, pp. 1 – 7.
- [11] Jongmans F., Le jaugeage des tonneaux : un jardin secret en mathématiques pures et appliquées, *Quadrature*, 75, 2010, pp. 23 – 34.
- [12] Kœstler A., *Les somnambules*, Le Livre de Poche, Calman – Lévy, 1960, 692 pages.
- [13] Noël G. – Trompler S., *Vers les infiniment petits*, Commission Pédagogique de la SBPMef, 2003, 128 pages.
- [14] Rouvière F., Histoire de maxima et minima, *Séminaire d’épistémologie et d’histoire des sciences*, 2006, <https://math.univ-cotedazur.fr/~frou/extremums/MaxMin.pdf>.
- [15] Seneta E., In memoriam : François Jongmans (1921 – 2014), mathematical historian, *Mathematical Scientist*, 40, 2015, pp. 67 – 79.
- [16] Tikhomirov V.M., Kepler’s Problem, 6^{ème} histoire dans *Stories about Maxima and Minima*, American Mathematical Society – Mathematical Association of America, Mathematical World, Volume 1, 1990, pp. 47 – 53.
- [17] Toeplitz O., *The calculus, a genetic approach*, The University of Chicago Press, 1963, 191 pages.

Adresse électronique de l’auteur : J.Bair@uliege.be