Polynômes, Additivité et Structures Théoriques : Interactions et Solutions

S. Nicolay

Probability and Analysis Seminar for the Teams and Invited Scholars
Le 22 octobre 2025

1 L'équation de Cauchy

Définition 1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *additive* si elle vérifie l'*équation fonctionnelle de Cauchy* :

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposition 2. *Une fonction additive est $\mathbb{Q}$-linéaire : $f(rx) = rf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. On doit avoir $f(0) = 0$ et, par récurrence, $f(nx) = nf(x)$ pour tout entier n. De même, on a $f(x/n) = f(x)/n$ pour tout entier n non nul. □

Proposition 3 (A. Cauchy)**.** *Une fonction additive est soit linéaire, soit discontinue en chaque point.*

Démonstration. Nous savons déjà que toute fonction additive continue doit être linéaire. Si une fonction additive est continue en x_0, on a

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) + f(x) - f(x_0) = f(x),$$

pour tout x, ce qui suffit. □

Proposition 4. *Le graphe d'une fonction additive non continue est dense dans $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Si une fonction additive n'est pas linéaire, on doit avoir $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$ pour deux nombres réels non nuls. Dès lors les vecteurs $v_1 = (x_1, f(x_1))$ et $v_2 = (x_2, f(x_2))$ ne sont pas colinéaires. Puisque f est $\mathbb{Q}$-linéaire, sont graphe contient $\mathbb{Q}v_1 \oplus \mathbb{Q}v_2$, qui est dense dans $\mathbb{R}^2$. □

Proposition 5. *Une fonction additive majorée sur un ensemble de mesure positive est linéaire.*

Démonstration. Supposons avoir $f(x) < C$ pour tout $x \in E$, où E est de mesure non nulle. Par un lemme de Steinhaus, il existe un intervalle non trivial I inclus dans $E - E$. On a donc $f(x) < 2C$ sur I. Dans ce cas, le graphe de f ne peut être dense. □

Proposition 6. *Une fonction additive mesurable est linéaire.*

Démonstration. Pour une fonction linéaire f, posons $A_j = \{x : f(x) < j\}$. Puisque $\lim_j A_j = \mathbb{R}$, A_j est de mesure positive pour j assez grand. □

Soit $\mathcal{H}$ une base de Hamel[1] de $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x = \sum_{(j)} r_j x_j,$$

avec $r_j \in \mathbb{Q}$, $x_j \in \mathcal{H}$, et où $\sum_{(j)}$ signifie que la somme est finie, avec $j \in \mathbb{N}$.

Remarque 7. Nous utilisons la base de Hamel en son sens premier, tel que défini par Hamel lui-même. De nos jours, une base de Hamel désigne simplement une base algébrique.

Remarque 8. L'ensemble $\mathcal{H}$ a la puissance du continu.

Si $f_{\mathcal{H}}$ est une fonction définie sur $\mathcal{H}$, posons, avec des notations évidentes,

$$f(x) = \sum_{(j)} r_j f_{\mathcal{H}}(x_j).$$

Cette fonction définie sur $\mathbb{R}$ est additive :

$$f(x+y) = f\Big(\sum_{(j)} (r_j + r'_j) x_j\Big) = \sum_{(j)} r_j f(x_j) + \sum_{(j)} r'_j f(x_j) = f(x) + f(y).$$

Inversement, toute fonction additive est telle que $f(x) = \sum_{(j)} r_j f(x_j)$.

Si une fonction additive est linéaire, alors

$$\frac{f(x_j)}{x_j} = \frac{c x_j}{x_j} = c$$

est constant pour tout $x_j \in \mathcal{H}$. Les fonctions additives linéaires sont donc celles pour lesquelles $f(x_j)/x_j$ est constant.

Proposition 9 (SN). *Au sens de la prévalence, presque toute fonction additive est discontinue.*

Démonstration. À une fonction additive f, associons la fonction

$$g : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \quad x_j \mapsto \frac{f(x_j)}{x_j}.$$

Les fonctions f linéaires sont associées aux fonctions g constantes, qui constitue un espace vectoriel de dimension 1. Il suffit alors de considérer un espace de fonctions suffisamment grand, comme $C_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$, par exemple. □

1. Une base de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2 L'équation de Fréchet

Définition 10. La *différence finie* d'écart h de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Grâce à l'opérateur Δ_h, on peut écrire l'équation de Cauchy comme suit :

$$\Delta_y f(x) = f(y).$$

En posant naturellement $\Delta_h^{n+1} = \Delta_h \Delta_h^n$, on constate que toute fonction additive vérifie $\Delta_h^2 f = 0$. Bien entendu, il existe d'autres solutions que les fonctions additives. Par exemple, toute polynôme de degré ≤ 1 satisfait cette équation.

Définition 11. L'*équation de Fréchet* d'ordre m est l'équation

$$\Delta_h^m f = 0.$$

Comme l'équation de Cauchy, les solutions de l'équation d'une équation de Fréchet sont soit régulières, soit extrêmement irrégulières, au sens où elles ne sont pas localement intégrables.

On peut définir une version locale de l'équation de Fréchet.

Définition 12. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'*équation de Fréchet* d'ordre m au voisinage de x_0 si l'équation

$$\Delta_h^m f(x_0) = 0$$

est vérifiéee pour h suffisamment petit.

Le résultat classique associé à l'équation de Fréchet (resp. de Cauchy) d'ordre m stipule que les solutions localement intégrables sont les polynômes de degré $\leq m$ (resp. les polynômes homogènes de degré m).

Lemme 13 (A. Molla, SN, J.-P. Schneiders)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée presque partout sur $]a,b[$ qui satisfait $\Delta_h^m f = 0$ sur cet intervalle pour presque tout h suffisamment petit, alors f est borné sur $]a,b[$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} f(x+mh-jh)| \\ &\leq 2^m \sup\{|f(y)| : y \in \{x+jh : 1 \leq j \leq m\}\}, \end{aligned}$$

pour tout $x \in]a,b[$ et presque tout $|h| < \epsilon$. Soit $C > 0$ et $N \subset]a,b[$ un ensemble négligeable tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout x de $]a,b[\setminus N$. Pour $1 \leq j \leq m$ et $x \in]a,b[$, posons

$$A_j = \{h \in]\frac{a-x}{m}, \frac{b-x}{m}[: x + jh \in]a,b[\setminus N\}.$$

Pour $2 \leq j \leq m$, on a $A_1 \subset (A_1 \setminus A_j) \cup A_j$, où $A_1 \setminus A_j$ est négligeable, puisque partie de $(N-x)/j$. On en conclut que A_1 est l'ensemble $\cap_{j=1}^m A_j$ presque partout. Remarquons également que $A_1 \cap]-\epsilon, \epsilon[$ est égal à un intervalle presque partout. En conséquence, en choisissant h tel que $x + jh \in]a, b[\setminus N$ pour tout $1 \leq j \leq m$, on obtient

$$|f(x)| \leq 2^m C,$$

pour tout $x \in]a, b[$. $\square$

Théorème 14 (A. Molla, SN, J.-P. Schneiders)**.** *Les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées p.p. au voisinage de x_0 de l'équation de Fréchet d'ordre m au voisinage de x_0 pour presque tout h suffisamment petit sont les polynômes de degré $\leq m-1$.*

Démonstration. Considérons $m > 1$. Vu le lemme, on peut supposer l'existence de $\eta > 0$ pour lequel f est borné et satisfait $\Delta_h^m f = 0$ sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ pour presque tout $|h| < \eta$. Nous éviterons la locution presque partout dans la suite. Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < \eta/m$ et posons $\delta = \eta - m\epsilon$. On peut supposer avoir $|\Delta_h^j f(x)| \leq C$ pour $0 \leq j \leq m$, $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et $|h| < \epsilon$.. Montrons que f est continu en un tel x. Étant donné $r \in \mathbb{N}_*$, soit h tel que $|rh| < \epsilon$; la formule d'interpolation de Newto permet d'écrire

$$f(x + qh) = \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_h^j f(x)}{j!} (q)_j,$$

pour $q \in \mathbb{N}$, où $(q)_j$ désigne la factorielle tombante :

$$(q)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{j-1} (q-k) & \text{si } j > 0 \end{cases}.$$

On a aussi, pour $q \geq m$,

$$f(x + qrh) = \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_{rh}^j f(x)}{j!} (q)_j,$$

ce qui implique

$$\sum_{j=0}^{qr} \frac{\Delta_h^j f(x)}{j!} (qr)_j = \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_{rh}^j f(x)}{j!} (q)_j$$

En notant $s(j,k)$ le nombre de stirling de première espèce, on peut réécrire cette égalité comme suit :

$$\sum_{j=0}^{qr} \frac{\Delta_h^j f(x)}{j!} \sum_{k=0}^{j} s(j,k)(qr)^k = \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_{rh}^j f(x)}{j!} \sum_{k=0}^{j} s(j,k) q^k.$$

Dès lors, on a
$$\sum_{j=0}^{qr} \frac{\Delta_h^j f(x)}{j!} s(j,k) = \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_{rh}^j f(x)}{j!} s(j,k) r^{-k},$$
pour $0 \leq k \leq m-1$. En notant $S(j,k)$ le nombre de Stirling de seconde espèce, l'égalité
$$\sum_{k=l}^{m-1} \sum_{j=0}^{qr} \frac{\Delta_h^j f(x)}{j!} s(j,k) S(k,l) = \sum_{k=l}^{m-1} \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_{rh}^j f(x)}{j!} s(j,k) r^{-k} S(k,l),$$
donne
$$\frac{\Delta_h^l f(x)}{l!} = \sum_{k=l}^{m-1} \sum_{j=0}^{q} \frac{\Delta_{rh}^j f(x)}{j!} s(j,k) r^{-k} S(k,l),$$
pour $0 \leq l \leq m-1$, puisque $\sum_{k=l}^{j} s(j,k) S(k,l) = \delta_{j,l}$. On a donc
$$|\frac{\Delta_h^l f(x)}{l!}| \leq C' \sum_{k=l}^{m-1} r^{-k},$$
pour une constante C'. Maintenant, étant donné $0 < |h| < \epsilon$, soit r le nombre naturel tel que $r|h| < \epsilon \leq (r+1)|h|$. La dernière inégalité donne
$$|\frac{\Delta_h^l f(x)}{l!}| \leq C' \sum_{k=l}^{m-1} \frac{|h|^k}{(\epsilon - |h|)^k},$$
pour $0 \leq l \leq m-1$. En particulier, $\Delta_h f(x)$ tend vers 0 avec h.

Pour $0 < |h| < \delta/m$. il existe un polynôme unique P_h de degré $m-1$ au plus tel que $P_h(x_0 + jh) = f(x_0 + jh)$, pour $0 \leq j \leq m$. Pour $r \in \mathbb{N}$, le même argument que dans la première partie assure l'existence d'un polynôme $P_{h/r}$ tel que $P_{h/r}(x_0 + jh/r) = f(x_0 + jh/r)$, pour $0 \leq j \leq mr$. Puisque P_h et $P_{h/r}$ sont égaux en m points, il sont égaux sur la droite. Ainsi, P_h est égal à f sur
$$\{x_0 + qh : q \in \mathbb{Q},\, 0 \leq q \leq m\},$$
ce qui permet de conclure, par continuité. □

Remarque 15. Si la fonction f est supposée mesurable, la démonstration se simplifie considérablement.

L'équation de Fréchet peut se généraliser à $\mathbb{R}^n$ en considérant l'équation
$$\Delta_h^m f = 0,$$
pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Corollaire 16. *Les solutions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bornées p.p. au voisinage de x_0 de l'équation de Fréchet d'ordre m au voisinage de x_0 pour presque tout h suffisamment petit sont les polynômes de degré $\leq m-1$.*

Définition 17. L'*équation de Cauchy* d'ordre m est l'équation

$$\Delta_h^m f(x) = m! f(h).$$

Corollaire 18. *Les solutions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bornées p.p. de l'équation de Cauchy d'ordre m sont les polynômes homogènes $f(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$.*

3 Le cas des distributions

Nous posons ici $X = \mathbb{R}^n$. On peut définir les différences finies pour les distributions via leur action sur les fonctions test.

Définition 19. La *différence finie* d'écart h à l'ordre m de $T \in D'(X)$ est définie par

$$\Delta_h^m T(\varphi) = T(\Delta_{-h}^m \varphi),$$

pour $\varphi \in D(X)$.

Théorème 20 (A. Molla, SN, J.-P. Schneiders)**.** *Les solutions de l'équation $\Delta_h^m T = 0$ pour presque tout h, avec $T \in D'(E)$, sont les distributions associées à un polynôme de degré $\leq m - 1$.*

Comme conséquence, on obtient le résultat classique suivant :

Corollaire 21. *Les solutions $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ de l'équation de Fréchet d'ordre m pour presque tout h sont les polynômes de degré $\leq m - 1$.*

Pour l'équation de Fréchet, rappelons que, étant donné deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to V$ d'ordre C^∞ dont la différentielle en x est surjective pour tout $x \in U$, il existe une application

$$f^* : D'(V) \to D'(U)$$

telle que $f^* T = T \circ f$ pour $T \in C(V)$.

Définition 22. L'application f^* définie plus haut est appelée[2] le *pullback* de f.

Nous utiliserons un anglicisme pour désigner f^* plutôt que l'*application réciproque.*
Notons

$$p_j : X^2 \to X \quad (x, y) \mapsto x + jy \qquad \text{et} \qquad q_j : X^2 \to X \quad (x, y) \mapsto jx + y.$$

Ainsi p_0 et q_0 sont des projections orthogonales et

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} p_j^* f(x, h),$$

pour tout $f \in C(X)$. On peut ainsi définir l'application linéaire continue différence finie.

2. Plus classiquement, on appelle $f^* T$ le pullback de T par f.

Définition 23. La *différence finie* Δ^m à l'ordre m est l'application

$$\Delta^m : D'(X) \to D'(X^2) \quad T \mapsto \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} p_j^* T.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\Delta^m T = m! q_0^* T.$$

Cette équation est symétrique au sens du lemme suivant. Posons

$$\Lambda^m : D'(X) \to D'(X^2) \quad T \mapsto \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} q_j^* T.$$

Lemme 24. *Une distribution $T \in D'(X)$ satisfait $\Delta^m T = m! q_0^* T$ si et seulement si on a $\Lambda^m T = m! p_0^* T$.*

Théorème 25 (A. Molla, SN, J.-P. Schneiders)**.** *Les solutions de l'équation $\Delta^m T = m! q_0^* T$ sont les distributions associées aux polynômes homogènes $\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$.*

Corollaire 26. *Les solutions $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ de l'équation $\Delta^m f = m! q_0^* f$ sont les polynômes homogènes $\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$.*

4 Le cas des groupes de Lie

Tous les résultats ont été obtenus ici en collaboration avec Arman Molla.

Nous considérerons ici que G est un groupe de Lie connexe. Posons

$$L_x : y \mapsto xy \quad \text{et} \quad R_x : y \mapsto yx,$$

pour définir les différence finies

$$\Delta_h = R_h^* - I \quad \text{et} \quad {}_h\Delta = L_h^* - I.$$

On pose $\Delta^2_{h_1,h_2} = \Delta_{h_1} \circ \Delta_{h_2}$ et noterons

$$\Delta_h^{m+1} = \Delta^{m+1}_{h_1,\ldots,h_{m+1}} = \Delta^m_{h_1,\ldots,h_m} \circ \Delta_{h_{m+1}}.$$

Nous allons considérer l'équation

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0,$$

avec $f : G \to \mathbb{R}$. On peut considérer cette équation globalement (pour tout $x \in G$ et $h \in G^{m+1}$), ou localement (au voisinage de x et pour $h \in G^{m+1}$ au voisinage de l'identité).

Lemme 27. *Une fonction f est solution de $\Delta_h^{m+1} f = 0$ si et seulement si elle est solution de ${}_h\Delta^{m+1} f = 0$.*

Définition 28. Une solution de $\Delta_h^{m+1} f = 0$ est appelée un polynôme.

Posons $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et

$$\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(j)}].$$

Il existe un nombre N tel que

$$\mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(N)} = \mathfrak{g}^{(N+1)}.$$

Ce nombre est appelé le stabilisateur de la série centrale descendente. On a donc

$$\{0\} \subset (\mathfrak{g}^{(1)})^{\perp} \subset \cdots \subset (\mathfrak{g}^{(N)})^{\perp} \subset \mathfrak{g}^{*}.$$

Définition 29. On définit $M(\mathfrak{g})$ comme l'ensemble des fonctions additives $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ telles que $\mathfrak{g}^{(N)} \subset \ker(f)$. De même, $M^{\infty}(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des fonctions linéaires $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ telles que $\mathfrak{g}^{(N)} \subset \ker(f)$. On définit alors $P(G)$ comme l'espace des germes en 1 des fonctions $f : G \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ \exp$ appartient à l'algèbre des fonctions générées par $M(\mathfrak{g})$. De même, $P^{\infty}(G)$ est l'espace des germes en 1 des fonctions $f : G \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ \exp$ appartient à l'algèbre des fonctions générées par $M^{\infty}(\mathfrak{g})$.

Théorème 30. *Les éléments de $P(G)$ sont solution de l'équation de Fréchet pour tous x et h au voisinage de l'identité.*

Théorème 31. *Les solutions régulières de l'équation de Fréchet pour tous x et h au voisinage de l'identité sont les éléments de $P^{\infty}(G)$.*

Pour $h \in G$, posons

$$\underline{\Delta}_h^{m+1} = \Delta_{h,\ldots,h}^{m+1}.$$

Pour un groupz commutatif, l'équation $\underline{\Delta}_h^{m+1} f = 0$ est équivalente à $\Delta_h^{m+1} f = 0$.

Définition 32. Une solution de l'équation $\underline{\Delta}_h^{m+1} f = 0$ est appelée un semi-polynôme.

Un polynôme est trivialement un semi-polynôme et un résultat très général permet de montrer qu'un semi-polynôme est un polynôme, mais l'odre $m + 1$ de l'équation n'est pas nécessairement le même.

On ne sait pas si ce résultat général reste valide localement (conjecture : oui). Aussi, puisque $\underline{\Delta}_h^{\underline{m}+1} f = 0$ implique $\Delta_h^{m+1} f = 0$, on peut s'interroger sur la relation entre $\underline{m}$ et m. Conjecture : On a $m = \underline{m} + N$ pour une large classe de groupes de Lie.

Rappels sur les groupes de Lie

Un groupe de Lie G est un groupe muni d'une structure de variété différentiable telle que les opérations

$$(x, y) \mapsto xy \quad \text{et} \quad x \mapsto x^{-1}$$

sont des applications différentiables. Par définition, un groupe de Lie de dimension n est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace tangent en 1 de G constitue l'algèbre de Lie associée au groupe G ; il est noté $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie est un espace vectoriel réel de dimension n, muni d'une opération bilinéaire antisymétrique

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}^2 \to \mathfrak{g} \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

vérifiant l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Cette opération est le corchet de Lie. Chaque $X \in \mathfrak{g}$ représente une direction infinitésimale du groupe et $[X, Y]$ mesure le défaut de commutation entre les déplacements infinitésimaux dans les directions X et Y. Autrement dit, l'algèbre de Lie fournit une version linéarisée du groupe au voisinage de l'identité, et encode les interactions infinitésimales via le crochet de Lie.

L'application exponentielle relie l'algèbre de Lie au groupe de Lie. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on définit la courbe intégrale $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ telle que $\gamma_X(0) = 1$ et $\gamma'_X(t) = X \cdot \gamma(t)$. On pose

$$\exp : \mathfrak{g} \to G \quad X \mapsto \gamma_X(1).$$

L'exponentielle permet de reconstruire la structure globale à partir de la structure infinitésimale, que représente l'algèbre de Lie. Pour les groupes de Lie connexes ou simplement connexes, la structure de groupe est entièrement déterminée par son algèbre.