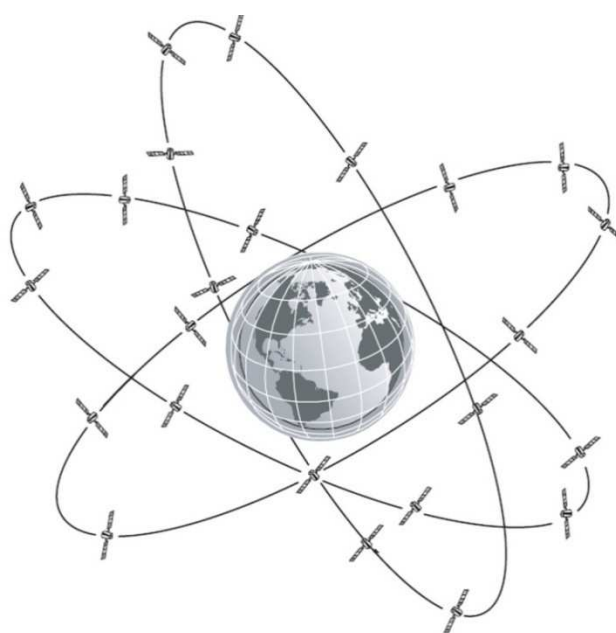


UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté des Sciences
Sciences Géographiques

PRÉCISION DU POSITIONNEMENT PAR SATELLITES

INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DE LA CONSTELLATION



*Mémoire présenté par **Matthieu LONCHAY**
pour l'obtention du diplôme de **Master en Sciences Géographiques**
orientation Géomatique & Géométrie*

Année académique 2008-2009

Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce travail.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à mon promoteur, Monsieur Warnant, pour son encadrement, son expérience et sa grande disponibilité.

Merci tout particulièrement à Benoît pour ses judicieux conseils, sa disponibilité, sa motivation et ses nombreuses idées. Merci aux membres de l'équipe « Profils ionosphériques » de l'Institut Royal Météorologique.

Merci à ma famille et à mes proches pour leur soutien et leurs encouragements.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.....	6
1.1. MOTIVATIONS	6
1.2. PLAN DU TRAVAIL.....	8
 CHAPITRE 2 : POSITIONNEMENT PAR SATELLITES: GÉNÉRALITÉS	9
2.1. INTRODUCTION.....	9
2.2. CARACTÉRISTIQUES D'UN GNSS.....	11
2.2.1. ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS.....	11
2.2.1.1. <i>Segment spatial</i>	11
2.2.1.2. <i>Segment de contrôle</i>	12
2.2.1.3. <i>Segment utilisateur</i>	12
2.2.2. STRUCTURE DU SIGNAL	12
2.2.2.1. <i>Codes de modulation</i>	13
2.2.2.2. <i>Ondes porteuses</i>	15
2.2.2.3. <i>Message de navigation</i>	16
2.2.3. INFLUENCES PHYSIQUES SUR LES SIGNAUX GNSS	17
2.2.4. GPS ET GALILEO : CARACTÉRISTIQUES DES CONSTELLATIONS SATELLITAIRES	18
2.3. MODES ET TECHNIQUES DE POSITIONNEMENT.....	19
2.3.1. NOTIONS GÉNÉRALES.....	19
2.3.1.1. <i>Techniques de positionnement</i>	19
2.3.1.2. <i>Principes généraux du positionnement par satellites</i>	20
2.3.2. CALCUL D'UNE POSITION	21
2.3.2.1. <i>Positionnement absolu instantané avec les codes</i>	21
2.3.2.2. <i>Positionnement relatif instantané avec les codes</i>	27
2.4. PRÉCISION DU POSITIONNEMENT.....	33
2.4.1. COMPOSANTES D'UN AJUSTEMENT PAR MOINDRES CARRÉS	33
2.4.1.1. <i>Modèle mathématique</i>	33
2.4.1.2. <i>Modèle stochastique</i>	33
2.4.2. LOI DE PROPAGATION DES VARIANCES-COVARIANCES	35
2.4.2.1. <i>Généralités</i>	35
2.4.2.2. <i>Poids et cofacteurs</i>	36
2.5. INDICATEURS DE LA GÉOMÉTRIE.....	38
2.5.1. FORMULATION	38
2.5.2. DÉFINITION QUANTITATIVE DU DOP.....	38
2.5.2.1. <i>Positionnement absolu</i>	38
2.5.2.2. <i>Positionnement relatif</i>	41
2.5.3. DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DU DOP	42
2.6. INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DE LA CONSTELLATION.....	44
2.6.1. POSITIONNEMENT ABSOLU	44
2.6.2. POSITIONNEMENT RELATIF.....	46
 CHAPITRE 3 : OBJECTIFS.....	49

CHAPITRE 4 : POSITIONNEMENT ABSOLU	49
4.1. POINT DE DÉPART	49
4.1.1. OBJECTIFS	49
4.1.2. DONNÉES	50
4.1.3. OUTILS	51
4.2. SYSTÈMES DE COORDONNÉES.....	52
4.2.1. SYSTÈME DE COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES	52
4.2.1.1. Définition	52
4.2.2. SYSTÈME DE COORDONNÉES TOPOCENTRIQUES.....	52
4.2.2.1. Définition	52
4.2.2.2. Adaptation du modèle mathématique.....	54
4.2.3. SKYPLOTS	55
4.3. CONSTELLATION SYMÉTRIQUE.....	57
4.3.1. ASPECT ANALYTIQUE	57
4.3.2. ASPECT NUMÉRIQUE	64
4.4. DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL D'ANALYSE : « DOPA »	68
4.4.1. OBJECTIFS	68
4.4.2. POSSIBILITÉS	68
4.4.2.1. Sélection des données	68
4.4.2.2. Calcul du DOP	69
4.4.2.3. Analyse des résultats.....	70
4.4.3. INTERFACE	72
4.5. VARIABILITÉ SPATIO-TEMPORELLE DU DOP.....	73
4.5.1. MÉTHODOLOGIE.....	73
4.5.2. INFLUENCE DU MASQUE D'ÉLEVATION.....	75
4.5.3. INFLUENCE DE LA LONGITUDE.....	78
4.5.4. INFLUENCE DE LA LATITUDE	80
4.5.5. INFLUENCE DE L'HÉMISPHERE.....	82
4.5.6. LES COMPOSANTES DU PDOP	84
4.5.6.1. Latitude équatoriale : 0°N	84
4.5.6.2. Latitude moyenne : 45°N	85
4.5.6.3. Latitude polaire : 90°N	86
4.5.6.4. Corrélation entre les composantes du PDOP.....	87
4.5.7. ORDRE DE GRANDEUR DU PDOP.....	88
4.6. INTERPRÉTATION : 4 CAS PARTICULIERS	89
4.6.1. CHOIX DES CAS EXTRÊMES.....	89
4.6.2. OBSERVATIONS	90
4.6.2.1. Cas 1	90
4.6.2.2. Cas 2	92
4.6.2.3. Cas 3 et cas 4.....	94
4.6.3. APPROCHE MATHÉMATIQUE	96
4.6.3.1. Notions théoriques	96
4.6.3.2. Observations.....	98
4.6.4. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE : AJUSTEMENT D'UN CÔNE 3D	101
4.6.4.1. Introduction	101
4.6.4.2. Modèle mathématique.....	101
4.6.5. VALIDATION DE LA MÉTHODE DU CÔNE 3D.....	105
4.7. SYNTHÈSE	107

CHAPITRE 5 : POSITIONNEMENT RELATIF	109
5.1. POINT DE DÉPART	109
5.1.1. OBJECTIFS	109
5.1.2. DONNÉES	110
5.2. NOTIONS THÉORIQUES	111
5.2.1. CONSTRUCTION DE LA MATRICE A	111
5.2.2. PONDÉRATION DES OBSERVATIONS	113
5.3. DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL D'ANALYSE : « DOPR »	115
5.3.1. OBJECTIFS	115
5.3.2. POSSIBILITÉS	115
5.3.2.1. <i>Sélection des données</i>	115
5.3.2.2. <i>Calcul du RDOP</i>	115
5.3.2.3. <i>Analyse des résultats</i>	116
5.3.3. INTERFACE	117
5.4. CORRÉLATION ENTRE DOP ET RDOP	118
5.4.1. MÉTHODOLOGIE	118
5.4.2. INFLUENCE DE LA CONSTRUCTION DE LA MATRICE A	120
5.4.3. LONGUES LIGNES DE BASE	121
5.4.3.1. <i>Région équatoriale</i>	121
5.4.3.2. <i>Latitude moyenne</i>	124
5.4.3.3. <i>Latitude polaire</i>	126
5.4.3.4. <i>Conclusions</i>	127
5.4.4. LIGNES DE BASE DE LONGUEUR MOYENNE	128
5.4.5. COURTES LIGNES DE BASE	130
5.4.6. ORDRE DE GRANDEUR DU RPDOP	132
5.4.7. CONCLUSIONS	133
5.5. INTERPRÉTATIONS : 4 CAS PARTICULIERS	134
5.5.1. NOTIONS THÉORIQUES	134
5.5.2. LONGUES LIGNES DE BASE : CAS 1, 2 ET 3	135
5.5.3. COURTES LIGNES DE BASE : CAS 4	138
5.6. VALIDATION	140
5.7. SYNTHÈSE	144
 CHAPITRE 6 : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	 147
6.1. CONCLUSIONS	146
6.1.1. LE POSITIONNEMENT ABSOLU	146
6.1.2. LE POSITIONNEMENT RELATIF	148
6.2. PERSPECTIVES	150
 BIBLIOGRAPHIE	 153
ANNEXES	155

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Motivations

Les systèmes globaux de navigation et de positionnement par satellites font partie, à l'heure actuelle, des techniques de pointe en matière de positionnement et de navigation. Le terme « GNSS » (*Global Navigation Satellite System*) est généralement utilisé pour désigner l'ensemble de ces systèmes. Si à l'origine, la finalité première des GNSS était de répondre à des exigences d'ordre militaire, les applications exploitant pleinement ces technologies aujourd'hui relèvent de domaines multiples et variés (applications civiles, scientifiques, industrielles, etc.).

Le niveau de performance toujours croissant des GNSS en termes de précision et de couverture spatio-temporelle ainsi que le niveau de sophistication de certaines techniques spécifiques de positionnement exploitées dans le cadre des GNSS, ont fait du positionnement par satellites l'un des outils de prédilection du scientifique dans les domaines de la topographie ou de la géodésie en particulier. En effet, le développement de certaines techniques propres aux GNSS permet actuellement d'atteindre une précision centimétrique en temps réel (*Real Time Kinematic*). Dès lors, on comprend l'intérêt que peut porter, par exemple, un géomètre professionnel, pour cette technologie.

De manière très générale, la précision constitue un critère très important lors du choix d'une technique de positionnement. Dans le cas du positionnement par satellites, de nombreux facteurs peuvent avoir une influence plus ou moins importante sur la précision d'un calcul de position. Parmi ces facteurs, on peut citer la configuration géométrique de la constellation satellitaire visible pour un utilisateur depuis un site d'observation donné à un instant donné. Les systèmes de positionnement par satellites exploitent, pour calculer une position, des techniques relevant de la théorie des ajustements par moindres carrés. Le développement mathématique d'un ajustement par moindres carrés et la théorie des erreurs nous permettent de montrer que la géométrie de la constellation agit comme un facteur dégradant la précision entre les observations et les paramètres inconnus¹.

La qualité géométrique d'une constellation GNSS peut être estimée au moyen de toute une série d'indicateurs communément regroupés derrière le vocable « DOP » (*Dilution Of Precision*). Ces indicateurs sont calculés à partir des cofacteurs des paramètres ajustés. On comprend donc la relation latente entre ces indicateurs et la précision de l'estimation des paramètres inconnus.

¹ Typiquement, dans le cadre du positionnement par satellites, les observations sont les mesures de pseudo-distances entre récepteur et satellites tandis que les inconnues de position et l'erreur d'horloge du récepteur constituent les paramètres inconnus à estimer.

Le DOP constitue très souvent la seule information relative à la qualité de la géométrie de la constellation dont dispose le géomètre lors d'une mission. Il est donc particulièrement intéressant d'étudier la qualité de la géométrie de la constellation par le biais de cet indicateur ainsi que la validité de cet indicateur lors de l'utilisation de certaines techniques de positionnement particulières, propres aux GNSS.

Avec le développement récent de nouveaux GNSS tels que Galileo, la notion d'interopérabilité entre les différents GNSS coexistants est fréquemment évoquée. Grâce à notre étude, nous allons pouvoir comprendre comment l'interopérabilité entre différents GNSS peut contribuer à améliorer, à terme, la précision du positionnement.

A l'heure actuelle, de nombreux efforts sont entrepris afin d'élever, plus haut encore, le niveau de précision offert par les GNSS. Par exemple, les différentes sources d'erreurs affectant la propagation des signaux GNSS, telles que l'ionosphère ou encore la troposphère, font l'objet de modélisations toujours plus complexes et toujours plus réalistes. Les techniques mises en œuvre sont également toujours plus sophistiquées. Cependant, indépendamment de ces techniques et des différentes erreurs affectant les signaux GNSS, certains types de configurations géométriques de la constellation satellitaire, se présentant ponctuellement dans le temps et dans l'espace, peuvent, dans tous les cas, anéantir la précision du positionnement. L'intérêt de notre étude est de comprendre pourquoi et comment certaines géométries de la constellation satellitaire des GNSS peuvent engendrer de tels effets sur la précision du calcul de position.

L'objet de notre étude est donc de comprendre l'influence de la géométrie de la constellation satellitaire sur la précision du positionnement par satellites. Deux techniques de positionnement seront en particulier investiguées : le positionnement absolu et le positionnement relatif.

1.2. Plan du travail

Notre étude débute par un résumé de l'état des connaissances existantes sur les systèmes globaux de positionnement et de navigation par satellites (chapitre 2). Après avoir présenté les caractéristiques générales des GNSS, nous introduirons les différentes techniques de positionnement qu'ils permettent de mettre en œuvre en insistant sur la présentation des différents modèles mathématiques exploités dans les calculs de position. Nous mentionnerons ensuite les principes directeurs régissant les ajustements par moindres carrés utilisés dans le positionnement par satellites, en soulignant l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision de la détermination des inconnues de position. Nous définirons ensuite les indicateurs généralement utilisés pour estimer la qualité de la géométrie de la constellation.

Informé de l'état des connaissances existantes dans notre domaine d'étude, le lecteur pourra prendre connaissance des objectifs précis de notre travail, au sein du chapitre 3.

La première partie de notre étude concerne l'influence de la géométrie de la constellation satellitaire sur la précision du positionnement absolu instantané, exploitant des mesures de codes (chapitre 4). Cette partie se caractérise par une première approche intuitive basée sur une constellation présentant un haut degré de symétrie. Le but de cette approche est de prendre connaissance des facteurs influençant la qualité de la géométrie de la constellation. A l'aide d'un outil informatique développé spécifiquement à cet effet, nous étudierons ensuite la variabilité spatio-temporelle de la qualité géométrique de la constellation GPS, par le biais d'un indicateur : le DOP. Nous apporterons une explication mathématique au comportement très particulier adopté par le DOP lors d'évènements se présentant de manière ponctuelle dans le temps et dans l'espace. Nous élaborerons ensuite une méthode permettant d'expliquer pourquoi certaines configurations géométriques peuvent dégrader fortement la précision du positionnement.

La seconde partie de notre étude concerne l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement relatif instantané, exploitant des mesures de codes (chapitre 5). Après avoir énoncé quelques concepts fondamentaux relatifs à cette technique de positionnement, nous étudierons en particulier la corrélation entre le RDOP et le DOP afin d'évaluer le caractère prévisible du RDOP (à partir du DOP). Nous tenterons de voir comment la longueur de la ligne de base considérée influe sur la corrélation entre ces deux indicateurs. Enfin, nous transposerons vers le cas du positionnement relatif, la méthode développée précédemment dans le cas du positionnement absolu permettant d'expliquer pourquoi certaines configurations géométriques de la constellation affectent sévèrement la précision du positionnement relatif.

CHAPITRE 2

POSITIONNEMENT PAR SATELLITES : GÉNÉRALITÉS

2.1. Introduction

L'évolution des technologies spatiales depuis le milieu du siècle dernier a abouti, aujourd'hui, vers de véritables systèmes de positionnement et de navigation par satellites, opérationnels à l'échelle du globe terrestre. La date du 4 octobre 1957, correspondant au lancement du premier satellite artificiel (Spoutnik) par l'URSS, est souvent considérée comme capitale vis-à-vis de l'ère de la technologie spatiale. À partir de cette date, les observations réalisées sur des satellites artificiels en orbite autour de la Terre ont progressivement supplanté l'astronomie de position engendrant le développement de nombreux systèmes de positionnement et de navigation toujours plus performants. Ces innovations trouvèrent rapidement des finalités, tant dans le domaine militaire que civil ou scientifique (SANTERRE 2008¹).

En décembre 1973, le Département de la Défense des Etats-Unis (DoD ou *US Department of Defense*) lance son programme GPS-NAVSTAR (*Global Positioning System – NAVigation Satellite Timing And Ranging*). Développé initialement à des fins militaires, ce système révolutionnaire de positionnement par satellites allait offrir des possibilités inégalées jusqu'alors par les systèmes antérieurs. En effet, la couverture satellitaire actuelle du GPS est telle qu'à tout moment, depuis n'importe quel endroit du globe et quelles que soient les conditions atmosphériques, un utilisateur peut observer un minimum de quatre satellites simultanément, lui permettant ainsi de connaître sa position et sa vitesse de manière instantanée. La constellation GPS est présentée à la figure 2.1 ci-dessous.

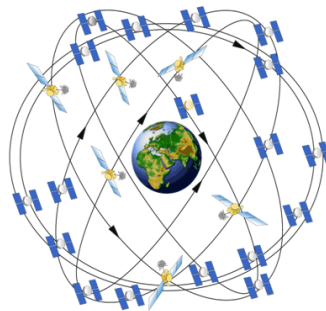


Figure 2.1. Constellation satellitaire GPS
(Source: Portail géographique du Québec²)

¹ Site du Département des Sciences Géomatiques de l'Université de Laval (http://www.scg.ulaval.ca/gps-rs/fr/Histo/GNSS/histoGNSS_p1.htm), consultation le 26 juillet 2009

² Portail géographique du Québec (<http://quebecgeographique.gouv.qc.ca>), consultation le 20 août 2009

Le potentiel du GPS ne tarda pas à être exploité pleinement dans bon nombre d'applications civiles. Cependant, les Etats-Unis possèdent la faculté de limiter l'usage du GPS aux seules personnes autorisées au moyen de deux mécanismes spécifiques : l'*Anti-Spoofing* (AS) et la *Selective Availability* (SA) (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2001).

A l'instar des Etats-Unis, la Russie a également développé son propre système de positionnement et de navigation par satellites nommé « GLONASS » (*GLObal'naya NAvigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*). Ce système fut également mis sur pied pour répondre à des exigences militaires (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008).

Enfin, dans le but de marquer son indépendance vis-à-vis du système de positionnement développé par les Etats-Unis, l'Europe est actuellement à l'œuvre afin d'établir son propre système de positionnement et de navigation : « Galileo » (fig. 2.2-2.3). Contrairement aux systèmes GPS et GLONASS, Galileo a été développé dans le but premier d'être exploité pour des applications civiles.

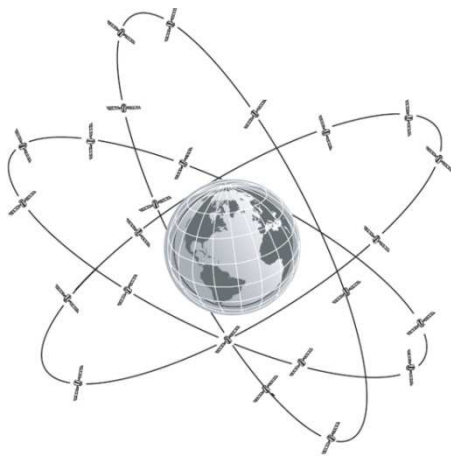


Figure 2.2. Constellation satellitaire de Galileo
(Source : PIEPLU 2006, p. 11)



Figure 2.3. Logo officiel de Galileo
(Source : ESA¹)

Le terme général « GNSS » (*Global Navigation Satellite System*) désigne globalement l'ensemble des systèmes de positionnement et de navigation globaux dont le fonctionnement repose sur l'observation de satellites artificiels.

¹ Site de l'agence spatiale européenne (<http://www.esa.int/esaCP/France.html>), consultation le 20 août 2009

2.2. Caractéristiques d'un GNSS

2.2.1. Eléments constitutifs

La structure des GNSS peut être décrite en répartissant les éléments qui les composent en trois catégories, traditionnellement dénommées « segments ». La figure 2.4 ci-dessous illustre schématiquement les segments composant traditionnellement un GNSS.

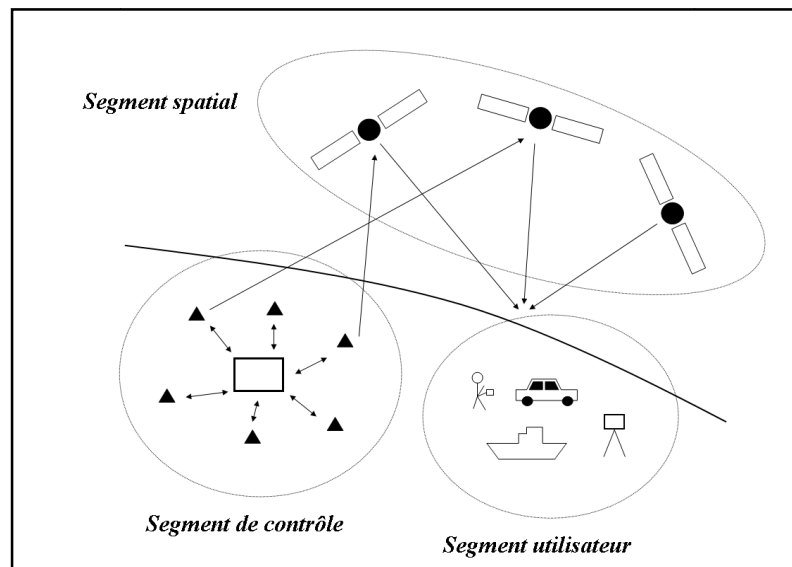


Figure 2.4. Eléments constitutifs d'un GNSS

2.2.1.1. Segment spatial

Le segment spatial regroupe l'ensemble des satellites GNSS en orbite autour de la Terre. Dans le but d'assurer une couverture globale permanente à l'échelle du globe, les constellations satellitaires des GNSS doivent comporter un nombre suffisant de satellites répartis sur plusieurs orbites distinctes. Différents paramètres peuvent caractériser la géométrie de la constellation satellitaire des GNSS :

- géométrie des orbites ;
- nombre et inclinaison des plans orbitaux ;
- distribution orbitale des satellites.

Chaque satellite est porteur de plusieurs codes permettant leur identification au sein de la constellation. Par exemple, les satellites de la constellation GPS peuvent être identifiés grâce à leur code PRN (*Pseudo Random Noise*).

Les fonctions principales des satellites formant le segment spatial d'un GNSS sont les suivantes :

- transmission de signaux électromagnétiques vers les utilisateurs ;
- conservation d'une échelle de temps stable ;
- exécution de calculs spécifiques.

2.2.1.2. Segment de contrôle

Le segment de contrôle est responsable de la gestion de l'ensemble du système. La mission du segment de contrôle inclut les tâches suivantes :

- développement et maintenance du système ;
- détermination et prédiction des paramètres orbitaux sur base de l'observation des satellites (*tracking*) ;
- détermination et prédiction des paramètres d'horloge des satellites ;
- transfert des éphémérides et autres informations vers la mémoire des satellites ;
- cryptage des données et protection du service vis-à-vis d'utilisateurs non-autorisés.

Le segment de contrôle se compose d'infrastructures terrestres chargées d'assurer les tâches présentées ci-dessus. On distingue généralement une station principale de contrôle assurant la coordination de l'ensemble des fonctions, des stations de poursuite chargées des différentes observations et mesures ainsi que d'antennes terrestres dont le rôle est d'assurer la communication vers les satellites.

2.2.1.3. Segment utilisateur

Le segment utilisateur est constitué de récepteurs couplés à des antennes permettant de capter les signaux émis par les satellites. Les récepteurs ont la faculté de transformer les signaux électromagnétiques reçus en données de position et de navigation. Plusieurs modes et techniques de positionnement peuvent être exploités par les récepteurs suivant leur degré de sophistication (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008).

2.2.2. Structure du signal

Les satellites GNSS émettent des signaux électromagnétiques à destination des utilisateurs (fig. 2.5). Ces signaux électromagnétiques sont constitués de plusieurs composantes. Ainsi, on peut distinguer :

- les codes de modulation ;
- les ondes porteuses ;
- le message de navigation.

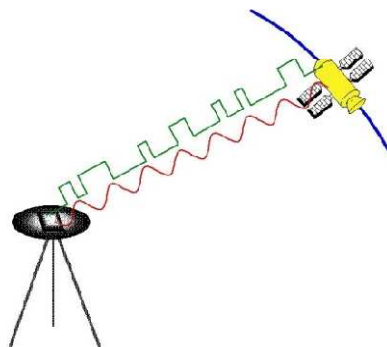


Figure 2.5. Réception d'un signal GNSS
(Source : VIGNY 2009¹)

¹ Site du laboratoire de Géologie de l'ENS (<http://www.geologie.ens.fr/spiplabocnrs/>), consultation le 21 août 2009

Certaines techniques de positionnement sont basées sur des mesures de codes exclusivement, d'autres exploitent des mesures de phases réalisées directement sur les ondes porteuses tandis que d'autres encore utilisent une combinaison de ces deux types de mesures. La précision finale du positionnement dépend fortement de la technique employée.

2.2.2.1. Codes de modulation

Un code est une suite de nombres binaires. Il s'agit d'un signal rectangulaire dont les seules valeurs possibles sont « -1 » ou « 1 ». La fréquence d'un code s'exprime en « bits par seconde ». Contrairement à un signal parfaitement sinusoïdal, un code permet de véhiculer de l'information. Plus précisément, le transfert d'un code s'opère au moyen de techniques de modulation : une onde dite « porteuse » est modulée par un code binaire. Dans le cas des signaux GNSS, les codes sont transportés par les ondes porteuses en utilisant une modulation de phase. Cette technique spécifique est illustrée à la figure 2.6 ci-dessous.

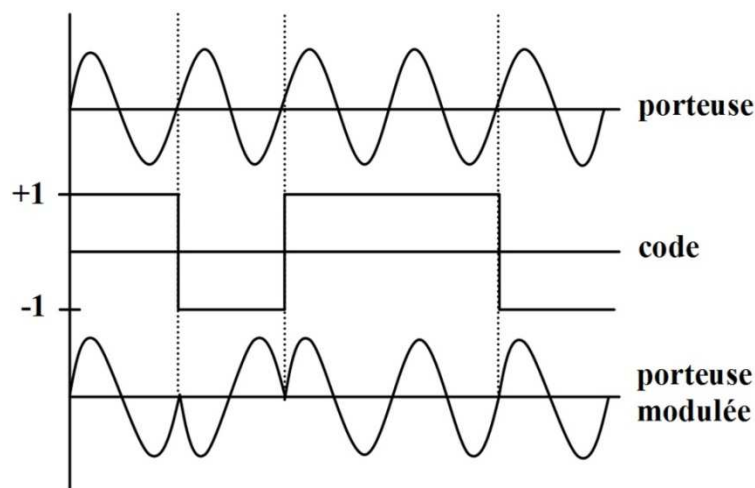


Figure 2.6. Modulation de phase d'une onde porteuse par un code binaire

(Source : HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2001, p. 73)

Chaque satellite constituant le segment spatial d'un GNSS génère un ou plusieurs codes uniques permettant son identification. Chaque satellite possède ainsi son propre numéro de code PRN. La génération des codes par les satellites est assurée par des algorithmes clairement établis. Ces codes sont donc parfaitement reproductibles. A chaque instant t correspond un état de code pour chacun des satellites.

Remarquons dès à présent que dans un GNSS, plusieurs échelles de temps coexistent. En effet, à chaque satellite ainsi qu'à chaque récepteur est intégrée une horloge dont la synchronisation par rapport au temps GNSS (échelle de temps de référence au sein du GNSS) n'est jamais parfaite. Cette désynchronisation est à l'origine de ce que l'on dénommera les « erreurs d'horloge ».

Le principe des techniques de positionnement exploitant les mesures de codes est basé sur la caractéristique de reproductibilité des codes de chaque satellite. En effet, en négligeant la désynchronisation des horloges des récepteurs et des satellites par rapport au temps GNSS, les récepteurs sont capables de générer un code particulier en parfaite synchronisation avec un satellite donné.

Lors de la réception d'un signal émis par un satellite, il devient donc possible de mesurer le retard Δt accusé par le code du satellite par rapport au code généré par le récepteur. Ce retard correspond au délai de propagation du signal entre le satellite et le récepteur. Une mesure de code consiste ainsi à mesurer le retard Δt entre le code généré par le récepteur et le code reçu du satellite (fig. 2.7).

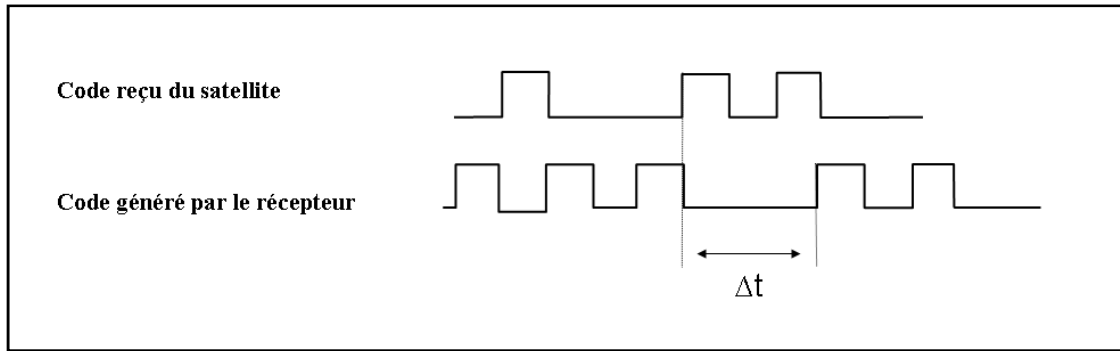


Figure 2.7. Mesure de code sur un signal GNSS

Ce délai de propagation Δt multiplié par la vitesse de propagation c d'un signal électromagnétique dans le vide permet d'obtenir une première approximation de la distance géométrique séparant le satellite du récepteur à l'instant de la mesure. Cette approximation ne tient pas compte du fait que les signaux électromagnétiques émis par les satellites subissent différents effets lors de leur traversée de l'atmosphère terrestre. C'est pourquoi on qualifie cette mesure de « pseudo-distance ». Ainsi, nous pouvons écrire l'équation (2.1) suivante :

$$P_p^i(t) = c \tau_{p,m}^i + c(\Delta t^i(t - \tau_{p,m}^i) - \Delta t_p(t)) \quad (2.1)$$

où $P_p^i(t)$ est la mesure de pseudo-distance réalisée au temps t entre le récepteur p et le satellite i , $\tau_{p,m}^i$ est le temps de parcours des codes entre le satellite i et le récepteur p , $\Delta t^i(t - \tau_{p,m}^i)$ est la désynchronisation de l'horloge du satellite i par rapport au temps GNSS à l'instant d'émission du signal $t_e = t - \tau_{p,m}^i$ et $\Delta t_p(t)$ est la désynchronisation de l'horloge du récepteur p par rapport au temps GNSS à l'instant de réception du signal t (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008).

2.2.2.2. Ondes porteuses

De manière analogue aux mesures de codes et en supposant les différentes horloges parfaitement synchronisées, les récepteurs GNSS sont également capables de générer une réplique des ondes porteuses parfaitement en phase avec celles émises par les satellites.

Ainsi, les récepteurs sont capables de mesurer le déphasage $\Delta\phi$ qui existe entre la réplique d'une porteuse et la porteuse émise par un satellite (fig. 2.8). Il s'agit d'une « mesure de phase de battement » ou « mesure de phase ». Remarquons que les mesures de phases sont ambiguës. En effet, elles sont connues à un nombre entier de longueurs d'onde près. Il s'agit du nombre entier de cycles s'étant écoulés entre l'instant d'émission du signal par le satellite et l'instant de réception de ce même signal par le récepteur. Pour déterminer la distance géométrique séparant le satellite du récepteur à l'instant de la mesure, il est donc impératif de lever cette ambiguïté à l'aide de traitements spécifiques.

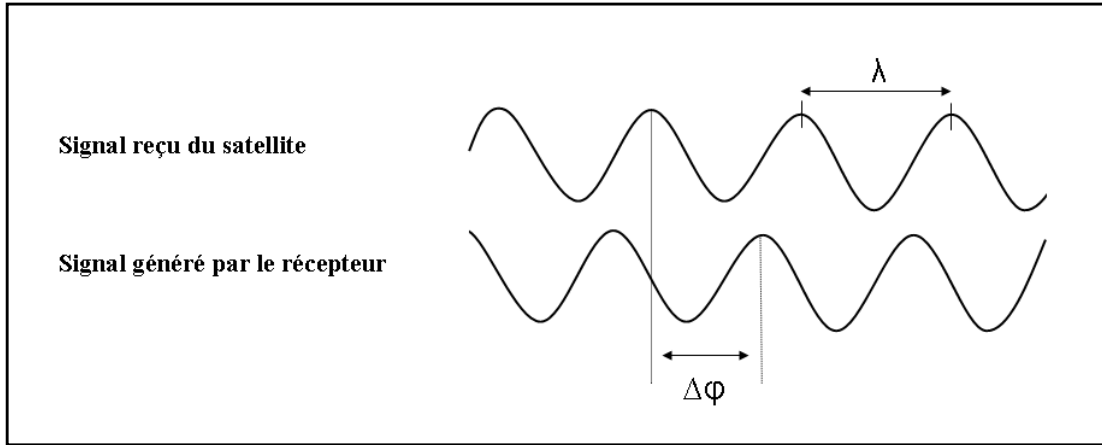


Figure 2.8. Mesure de phase sur un signal GNSS

Suivant les mêmes considérations que pour les mesures de codes, une mesure de phase peut être caractérisée par l'équation (2.2) ci-dessous (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008):

$$\phi_p^i(t) = f \tau_{p,\phi}^i + f (\Delta t^i(t_e) - \Delta t_p(t)) + N_p^i \quad (2.2)$$

où $\phi_p^i(t)$ est la mesure de phase de battement réalisée au temps t entre le récepteur p et le satellite i , f est la fréquence de l'onde porteuse, $\tau_{p,\phi}^i$ est le temps de parcours de la porteuse entre le satellite i et le récepteur p et N_p^i est l'ambiguïté sur la mesure de phase réalisée.

Cette mesure peut également s'écrire en termes de distance. Intégrant le fait que $c = \lambda f$, avec c la vitesse de l'onde, f la fréquence et λ la longueur d'onde, nous pouvons écrire, d'après l'équation (2.2) :

$$\Theta_p^i(t) = c\tau_{p,\varphi}^i + c(\Delta t^i(t_e) - \Delta t_p(t)) + \lambda N_p^i \quad (2.3)$$

Qu'il s'agisse de mesures de codes ou de phases, ces mesures sont toujours entachées d'une erreur liée à la résolution de l'instrument mesurant le décalage entre les deux signaux. Cette erreur est le bruit de mesure, noté ε . Afin de fournir un ordre de grandeur de ce bruit de mesure, nous pouvons généralement considérer qu'il est de l'ordre du centième de la longueur d'onde du signal considéré.

2.2.2.3. Message de navigation

Le message de navigation est, en réalité, une suite de codes binaires permettant de transférer des informations depuis les satellites vers les récepteurs. Ces informations sont initialement calculées et injectées dans la mémoire des satellites par les stations terrestres constituant le segment de contrôle du GNSS. On y retrouve par exemple :

- des informations sur la désynchronisation de l'horloge du satellite par rapport à l'échelle de temps GNSS ;
- les paramètres de l'orbite du satellite à un instant déterminé ;
- une collection de données relatives à l'ensemble de la constellation GNSS (éphémérides, santé des satellites, etc.).

Le transport du message de navigation requiert également une technique de modulation des ondes porteuses.

2.2.3. Influences physiques sur les signaux GNSS

Dans les équations (2.2) et (2.3), les temps de parcours $\tau_{p,m}^i$ et $\tau_{p,\varphi}^i$ ne correspondent pas exactement au délai de propagation des signaux en ligne droite et à vitesse c entre le satellite i et le récepteur p . Concrètement, cela signifie que ces temps de parcours multipliés par la vitesse c sont différents de la distance géométrique D_p^i séparant le récepteur p du satellite i .

Plusieurs effets sont susceptibles de perturber la propagation du signal électromagnétique au travers de l'atmosphère terrestre entachant les mesures d'un certain nombre d'erreurs. Parmi les effets affectant les signaux GNSS, on distingue généralement :

- l'effet de l'atmosphère neutre : T_p^i ;
- l'effet de l'ionosphère¹ : I_p^i ;
- l'effet du multi-trajets pour les codes $M_{p,m}^i$ et pour les porteuses $M_{p,\varphi}^i$.

Nous pouvons dès lors écrire les équations d'observation à partir desquelles seront élaborés les développements ultérieurs (équations (2.4) et (2.5)) :

$$P_p^i(t) = D_p^i + T_p^i + I_p^i + M_{p,m}^i + c(\Delta t^i(t_e) - \Delta t_p(t)) + \mathcal{E}_{p,m}^i \quad (2.4)$$

$$\Theta_p^i(t) = D_p^i + T_p^i - I_p^i + M_{p,\varphi}^i + c(\Delta t^i(t_e) - \Delta t_p(t)) + \lambda N_p^i + \mathcal{E}_{p,\varphi}^i \quad (2.5)$$

¹ L'ionosphère est un milieu dispersif. L'indice de réfraction de l'ionosphère varie en fonction de la fréquence du signal électromagnétique considéré. L'impact de l'ionosphère sur les codes de modulation et sur les ondes porteuses sera donc différent.

2.2.4. GPS et Galileo : caractéristiques des constellations satellitaires

Les satellites formant la constellation GPS évoluent sur des orbites elliptiques à une altitude d'environ 20 200 km. Leur période de révolution est d'un peu moins de 12 heures de temps sidéral. Au nombre de 30 à l'heure actuelle, ils évoluent sur six plans orbitaux distincts dont l'inclinaison par rapport à l'équateur est de 55°. La constellation GPS a été élaborée, initialement, de manière à assurer la visibilité d'au moins quatre satellites d'élévation supérieure à 15°, en permanence et à n'importe quel endroit du globe terrestre. En pratique, cet objectif est largement atteint puisque le nombre de satellites observables simultanément par un utilisateur est généralement supérieur à 4.

La constellation Galileo comprendra 30 satellites (27 satellites opérationnels et 3 satellites de réserve) répartis sur trois orbites circulaires à une altitude de 23 616 km. Ces trois plans orbitaux seront inclinés de 56° par rapport au plan équatorial. Leur période de révolution sera de 14 h 4 min 45 s. Galileo disposera également de sa propre échelle de temps : GST (*Galileo System Time*).

Le tableau 2.1 ci-dessous reprend les informations essentielles caractérisant les constellations satellitaires du GPS et de Galileo. Ces paramètres auront une influence considérable sur la qualité de la géométrie de la constellation du GNSS considéré.

Tableau 2.1. Comparaison des constellations satellitaires du GPS et Galileo

	<u>GPS</u>	<u>Galileo</u>
Excentricité e des orbites	0.0226	0
Demi-grand axe a des orbites [km]	26 571	29 994
Demi-petit axe b des orbites [km]	26 564	-
Inclinaison i [°]	55	56
Nombre de plans orbitaux	6	3
Nombre de satellites	28	30
Visibilité minimum (Masque: 10°)	4	6
Période de révolution (UTC)	11 h 58 min	14 h 4 min 45 s

(Source : HOFMANN-WELLENHOF 2008 pp. 322-375)

2.3. Modes et techniques de positionnement

2.3.1. Notions générales

2.3.1.1. Techniques de positionnement

L'observation des signaux GNSS est exploitée dans de nombreuses techniques de positionnement et de navigation. Toutes ces techniques n'offrent pas aux utilisateurs des niveaux de précision identiques, et il convient de sélectionner la technique adéquate en fonction des domaines d'application. Par exemple, les techniques de positionnement mises en œuvre dans les récepteurs de voiture diffèrent considérablement de celles utilisées par un géomètre ou un géodésien souhaitant réaliser un levé ou des mesures de haute précision. La précision du positionnement peut varier de quelques mètres à quelques centimètres ou millimètres, suivant la technique employée (WARNANT 2006). Ces techniques peuvent être classées en différentes catégories. L'objectif de cette section est de présenter brièvement les différentes catégories de techniques de positionnement et de navigation par GNSS, d'en citer les points forts et les points faibles et d'énoncer clairement les équations d'observation qui se rapportent aux techniques approfondies dans le cadre de notre étude.

- Mesures de phases et mesures de codes

Les mesures de codes et les mesures de phases permettent d'obtenir une estimation du temps de parcours d'un signal GNSS entre un satellite et un récepteur. Si les mesures de phases présentent une plus haute précision (millimétrique) que les mesures de codes (métrique), elles présentent le désavantage d'être ambiguës et nécessitent donc des traitements spécifiques afin de résoudre ces ambiguïtés. Certaines techniques exploitent à la fois les mesures de codes et les mesures de phases.

- Positionnement en temps réel ou post-traitement

L'emploi de certaines techniques de positionnement permet l'obtention de résultats instantanés tandis que d'autres techniques nécessitent des traitements postérieurs.

- Positionnement absolu, différentiel ou relatif

Le positionnement absolu consiste en la détermination d'une position au moyen d'un unique récepteur tandis que le positionnement relatif consiste en la détermination d'une position par rapport à une autre position connue. Le positionnement relatif nécessite l'utilisation simultanée de deux récepteurs. Les observations réalisées par les deux récepteurs sont combinées en temps réel ou lors des opérations de post-traitement.

Le positionnement différentiel peut être considéré comme un cas particulier du positionnement absolu. Des corrections calculées et émises par une station de référence de position connue sont utilisées pour améliorer la précision du positionnement absolu.

- Positionnement statique ou cinématique

Enfin, on distingue également les techniques de positionnement et de navigation utilisées lorsque l'observateur occupe une position fixe (statique) de celles utilisées lorsque l'observateur est mobile (cinématique).

2.3.1.2. Principes généraux du positionnement par satellites

De manière très générale, le positionnement par GNSS consiste à déterminer la valeur des trois inconnues de position (coordonnées rectangulaires tridimensionnelles par rapport à un système de référence global) du point sur lequel est stationné le récepteur à un instant déterminé. Cependant, nous avons vu que les mesures effectuées par les récepteurs étaient des mesures de temps de propagation de signaux électromagnétiques. Or, plusieurs échelles de temps coexistent au sein d'un même GNSS, nous obligeant à considérer une quatrième inconnue propre au récepteur : la désynchronisation de son horloge par rapport à l'échelle de temps de référence. Aux trois inconnues de position du récepteur s'ajoute donc une quatrième inconnue relative à l'erreur d'horloge du récepteur. Notons dès à présent que cette quatrième inconnue est une fonction du temps.

Typiquement, cela signifie que pour lever ces quatre inconnues à un instant donné, un minimum de quatre observations sera nécessaire.

Il est souvent intéressant d'évoquer l'interprétation géométrique de ce type de problème de positionnement. Très concrètement, il s'agit d'un exercice de trilatération. En toute généralité, la position du récepteur à un instant donné correspond à l'intersection de quatre sphères centrées sur les quatre satellites observés par le récepteur et dont les rayons sont égaux aux distances mesurées, séparant le récepteur des satellites. En raison de l'erreur d'horloge notamment, ces quatre sphères ne s'intersectent pas exactement en un point. En fait, la position inconnue est le centre de la sphère tangente aux quatre sphères centrées sur les quatre satellites observés, le rayon de cette sphère centrale étant égal à l'erreur d'horloge du récepteur, exprimée en termes de distance. La figure 2.9 ci-dessous illustre ces concepts.

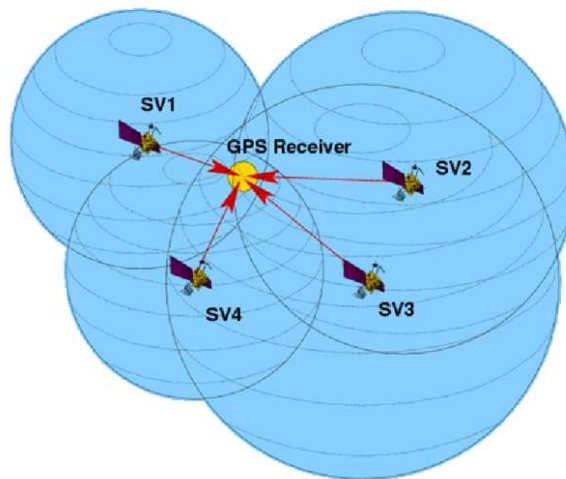


Figure 2.9. Interprétation géométrique du positionnement par GNSS
(Source : Site Air Power Australia¹)

Généralement, le nombre de satellites observés est supérieur à 4. Pour effectuer le calcul d'une position, on utilise alors des traitements relevant de la théorie des moindres carrés.

¹ Site Air Power Australia (<http://www.ausairpower.net/TE-GPS-Guided-Weps.html>), consultation le 8 août 2009

2.3.2. Calcul d'une position

Les différentes techniques de positionnement peuvent être envisagées en considérant soit les mesures de codes soit les mesures de phases. Dans le cadre de notre étude, les différents développements ont été réalisés à partir des équations d'observation correspondant aux mesures de codes et en considérant une seule époque d'observation. Les développements de cette section se limitent donc à cet aspect particulier des techniques de positionnement.

Les traitements utilisés pour la résolution des problèmes de positionnement par GNSS relèvent de la théorie des moindres carrés (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008 ; KAPLAN 1996 ; LEICK 2004 ; SILLARD 2001).

2.3.2.1. Positionnement absolu instantané avec les codes

- Equations d'observation

Le positionnement absolu instantané consiste à déterminer la position d'un utilisateur au moyen d'un seul récepteur sur base d'une seule époque de mesure (*Single Point Single Epoch*). Commençons par rappeler l'équation d'observation modèle d'une mesure de code par un récepteur p sur le signal provenant d'un satellite i à l'instant t (équation (2.6)).

$$P_p^i(t) = D_p^i + T_p^i + I_p^i + M_{p,m}^i + c(\Delta t^i(t_e) - \Delta t_p(t)) + \varepsilon_{p,m}^i \quad (2.6)$$

Le terme D_p^i désigne la distance géométrique séparant le satellite du récepteur. C'est à l'intérieur de ce terme que résident les trois inconnues de position du récepteur, comme nous le montre l'équation (2.7) ci-dessous :

$$D_p^i = \sqrt{(X^i - X_p)^2 + (Y^i - Y_p)^2 + (Z^i - Z_p)^2} \quad (2.7)$$

avec (X_p, Y_p, Z_p) et (X^i, Y^i, Z^i) respectivement les coordonnées du récepteur p et du satellite i . Les équations (2.6) et (2.7) permettent d'obtenir l'équation (2.8) :

$$P_p^i(t) = \sqrt{(L_{p,X}^i)^2 + (L_{p,Y}^i)^2 + (L_{p,Z}^i)^2} + T_p^i + I_p^i + M_{p,m}^i + c(\Delta t^i(t_e) - \Delta t_p(t)) + \varepsilon_{p,m}^i \quad (2.8)$$

avec

$$L_{p,X}^i = X^i - X_p \quad (2.9)$$

$$L_{p,Y}^i = Y^i - Y_p \quad (2.10)$$

$$L_{p,Z}^i = Z^i - Z_p \quad (2.11)$$

Les inconnues étant au nombre de quatre, nous avons vu précédemment qu'un minimum de quatre observations était nécessaire pour résoudre ce problème de positionnement. Pour déterminer sa position à un instant t , un utilisateur doit donc effectuer au moins quatre mesures de pseudo-distances simultanées sur quatre signaux GNSS provenant de quatre satellites différents¹. Le calcul de la position de l'utilisateur consiste alors à résoudre un système de n équations à quatre inconnues ($n \geq 4$).

En pratique, il est fréquent de pouvoir observer un nombre de satellites supérieur à quatre. Le nombre d'observations peut alors dépasser le nombre de paramètres inconnus, rendant ainsi le système surabondant. La résolution d'un tel système nécessite alors d'utiliser des techniques d'ajustement par moindres carrés. Le principe fondamental des ajustements par moindres carrés est de rechercher la solution minimisant la somme pondérée des carrés des résidus des observations.

L'ensemble des équations d'observation forme le « modèle mathématique » ou « modèle fonctionnel » de l'ajustement. Dans le cas présent, il est évident que le modèle mathématique n'est pas linéaire, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relations linéaires entre les inconnues et les observations.

Afin de réaliser l'ajustement par moindres carrés, il convient impérativement de linéariser le modèle fonctionnel par rapport aux paramètres inconnus.

- Linéarisation du modèle fonctionnel

Afin de simplifier les développements qui vont suivre, nous pouvons dès à présent émettre les quelques hypothèses ci-dessous concernant l'équation (2.8).

- Le site d'observation est bien dégagé et permet de négliger l'effet du multi-trajets ($M_{p,m}^i = 0$).
- L'utilisation de modèles troposphériques et ionosphériques permet d'obtenir des estimations des erreurs dues à l'ionosphère et à l'atmosphère neutre². Ces estimations sont notées $T_{p,\text{mod}}^i$ et $I_{p,\text{mod}}^i$.
- Une estimation de l'erreur d'horloge du satellite i à l'instant t_e (Δt_{mod}^i) peut également être obtenue grâce aux informations contenues dans le message de navigation.
- Nous supposons que le bruit de mesure est négligeable ($\varepsilon_{p,m}^i = 0$).

¹ Théoriquement, il serait possible de solutionner ce problème avec moins de quatre satellites mais en considérant plusieurs époques d'observations. Considérant un récepteur statique, il ne faut cependant pas oublier que, l'erreur d'horloge du récepteur étant une fonction du temps, chaque nouvelle époque d'observation apporte une nouvelle inconnue au problème.

² Les ajustements par moindres carrés exploitent le caractère gaussien des distributions statistiques des observations, pouvant être considérées comme des variables aléatoires. Avant de mettre en œuvre un ajustement par moindres carrés, il convient de nettoyer les observations des éventuelles erreurs grossières et systématiques afin qu'il ne subsiste plus que des erreurs accidentelles (ou aléatoires). Les erreurs dues à la traversée de l'atmosphère par les signaux GNSS sont typiquement des erreurs systématiques.

Ces hypothèses permettent d'écrire le modèle fonctionnel à linéariser de la manière suivante (équation (2.12)) :

$$P_p^i = \sqrt{(L_{p,X}^i)^2 + (L_{p,Y}^i)^2 + (L_{p,Z}^i)^2} - c \Delta t_p + T_{p,\text{mod}}^i + I_{p,\text{mod}}^i + c \Delta t_{\text{mod}}^i \quad (2.12)$$

Linéariser un modèle fonctionnel consiste à développer ce modèle selon un développement en séries de Taylor pour ne conserver ensuite que la partie linéaire du développement. Le reste du développement, dénommé « défaut de linéarité » et noté R , est comblé par l'exécution d'itérations multiples au cours de l'ajustement.

Seules les trois inconnues de position se trouvent sous une forme non-linéaire au sein de l'équation (2.12). La linéarisation porte donc finalement sur l'équation (2.13) :

$$D_p^i = \sqrt{(X^i - X_p)^2 + (Y^i - Y_p)^2 + (Z^i - Z_p)^2} = f(X_p, Y_p, Z_p) \quad (2.13)$$

La linéarisation du modèle fonctionnel nécessite la connaissance de valeurs approchées $(X_{p,0}, Y_{p,0}, Z_{p,0})$ des paramètres inconnus (X_p, Y_p, Z_p) telles que :

$$X_p = X_{p,0} + \Delta X_p \quad (2.14)$$

$$Y_p = Y_{p,0} + \Delta Y_p \quad (2.15)$$

$$Z_p = Z_{p,0} + \Delta Z_p \quad (2.16)$$

Nous utiliserons fréquemment le terme « pivot de la linéarisation » ou « valeurs à priori des paramètres inconnus » pour désigner ces valeurs. Les équations (2.14), (2.15) et (2.16) permettent d'écrire les relations suivantes:

$$D_p^i = f(X_p, Y_p, Z_p) = f(X_{p,0} + \Delta X_p, Y_{p,0} + \Delta Y_p, Z_{p,0} + \Delta Z_p) \quad (2.17)$$

$$D_{p,0}^i = \sqrt{(X^i - X_{p,0})^2 + (Y^i - Y_{p,0})^2 + (Z^i - Z_{p,0})^2} \quad (2.18)$$

Le terme $D_{p,0}^i$ désigne la distance « approchée » (pivot de la linéarisation) entre le satellite i et le récepteur p . La linéarisation de l'équation (2.13) aboutit alors au résultat suivant (équation (2.19)):

$$f(X_p, Y_p, Z_p) \approx f(X_{p,0}, Y_{p,0}, Z_{p,0}) + \left. \frac{\partial f(X_p, Y_p, Z_p)}{\partial X_p} \right|_{POS} \Delta X_p + \left. \frac{\partial f(X_p, Y_p, Z_p)}{\partial Y_p} \right|_{POS} \Delta Y_p + \left. \frac{\partial f(X_p, Y_p, Z_p)}{\partial Z_p} \right|_{POS} \Delta Z_p \quad (2.19)$$

avec

$$POS = (X_{p,0}, Y_{p,0}, Z_{p,0}) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f(X_p, Y_p, Z_p)}{\partial X_p} \right|_{(X_{p,0}, Y_{p,0}, Z_{p,0})} &= -\frac{(X^i - X_{p,0})}{D_{p,0}^i} \\
\left. \frac{\partial f(X_p, Y_p, Z_p)}{\partial Y_p} \right|_{(X_{p,0}, Y_{p,0}, Z_{p,0})} &= -\frac{(Y^i - Y_{p,0})}{D_{p,0}^i} \\
\left. \frac{\partial f(X_p, Y_p, Z_p)}{\partial Z_p} \right|_{(X_{p,0}, Y_{p,0}, Z_{p,0})} &= -\frac{(Z^i - Z_{p,0})}{D_{p,0}^i}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\Delta X_p &= X_p - X_{p,0} \\
\Delta Y_p &= Y_p - Y_{p,0} \\
\Delta Z_p &= Z_p - Z_{p,0}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainsi, l'équation (2.23) peut être déduite de l'équation (2.19) :

$$D_p^i = D_{p,0}^i - \frac{(X^i - X_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta X_p - \frac{(Y^i - Y_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta Y_p - \frac{(Z^i - Z_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta Z_p \tag{2.23}$$

Et donc la forme linéarisée du modèle fonctionnel devient :

$$P_p^i = D_{p,0}^i - \frac{(X^i - X_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta X_p - \frac{(Y^i - Y_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta Y_p - \frac{(Z^i - Z_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta Z_p - c\Delta t_p + T_{p,\text{mod}}^i + I_{p,\text{mod}}^i + c\Delta t_{\text{mod}}^i \tag{2.24}$$

Soit $P_{p,0}^i$ la valeur approchée de la mesure de pseudo-distance telle que :

$$P_{p,0}^i = D_{p,0}^i + T_{p,\text{mod}}^i + I_{p,\text{mod}}^i + c\Delta t_{\text{mod}}^i \tag{2.25}$$

Les équations (2.21) et (2.22) nous permettent de finalement écrire une forme de l'équation d'observation linéarisée et simplifiée dans laquelle apparaissent clairement les observations (mesures) et les paramètres inconnus :

$$P_p^i = P_{p,0}^i - \frac{(X^i - X_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta X_p - \frac{(Y^i - Y_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta Y_p - \frac{(Z^i - Z_{p,0})}{D_{p,0}^i} \Delta Z_p - c\Delta t_p \tag{2.26}$$

Remarquons dès à présent que les coefficients des termes ΔX_p , ΔY_p , et ΔZ_p dans l'équation (2.26) correspondent aux cosinus directeurs de la visée du récepteur p vers le satellite i . Ces cosinus directeurs peuvent être définis comme les projections du vecteur unitaire, pointant du récepteur p vers le satellite i , sur les trois axes définissant le système de coordonnées tridimensionnel.

Considérant un nombre suffisant d'observations (n satellites), le modèle mathématique peut être exprimé sous une forme matricielle (équation (2.27)) :

$$\underline{A}\underline{x} + \underline{W} - \underline{v} = 0 \quad (2.27)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(X^1 - X_{p,0})}{D_{p,0}^1} & -\frac{(Y^1 - Y_{p,0})}{D_{p,0}^1} & -\frac{(Z^1 - Z_{p,0})}{D_{p,0}^1} & -c \\ -\frac{(X^2 - X_{p,0})}{D_{p,0}^2} & -\frac{(Y^2 - Y_{p,0})}{D_{p,0}^2} & -\frac{(Z^2 - Z_{p,0})}{D_{p,0}^2} & -c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{(X^n - X_{p,0})}{D_{p,0}^n} & -\frac{(Y^n - Y_{p,0})}{D_{p,0}^n} & -\frac{(Z^n - Z_{p,0})}{D_{p,0}^n} & -c \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta X_p \\ \Delta Y_p \\ \Delta Z_p \\ \Delta t_p \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$W = \begin{bmatrix} P_{p,0}^1 - P_p^1 \\ P_{p,0}^2 - P_p^2 \\ \dots \\ P_{p,0}^n - P_p^n \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Rappelons-nous les quelques suppositions que nous avons évoquées précédemment. Le modèle fonctionnel ne tient pas compte du bruit de mesure. En outre, les erreurs atmosphériques et les erreurs d'horloge des satellites ne sont pas non plus parfaitement modélisées. Ces considérations nous amènent à introduire le terme v_p , contenant les résidus d'observation, tel que :

$$\begin{bmatrix} \overline{P}_p^1 \\ \overline{P}_p^2 \\ \dots \\ \overline{P}_p^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_p^1 \\ P_p^2 \\ \dots \\ P_p^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_p^1 \\ v_p^2 \\ \dots \\ v_p^n \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Dès à présent, nous pouvons observer que la matrice A contient l'ensemble des cosinus directeurs des visées entre le récepteur p et tous les satellites observés. La matrice A contient la « géométrie » du système (*design matrix*).

L'ajustement par moindres carrés consiste, à cette étape, à rechercher une estimation $\hat{\underline{x}}$ de $\underline{x}$ vérifiant l'équation (2.27) et qui minimise la somme pondérée des carrés des résidus d'observation.

2.3.2.2. Positionnement relatif instantané avec les codes

Le positionnement relatif consiste en la détermination de la position d'un point inconnu par rapport à la position d'un point connu. Le principe du positionnement relatif repose sur l'observation simultanée d'un certain nombre de satellites depuis deux positions. Il nécessite donc l'emploi de deux récepteurs. Ces observations simultanées vont permettre d'effectuer des différences entre des mesures de pseudo-distances effectuées par deux récepteurs sur une série de satellites observés simultanément. Il s'agit d'un moyen de s'affranchir de certaines erreurs communes aux multiples mesures de pseudo-distances.

- Equations d'observation

Soient deux récepteurs A et B et quatre satellites i, j, k, l . Le récepteur A est positionné sur un point dont les coordonnées (X_A, Y_A, Z_A) sont connues et le récepteur B sur un point dont la position (X_B, Y_B, Z_B) est inconnue. Cette situation est représentée schématiquement par la figure 2.10.

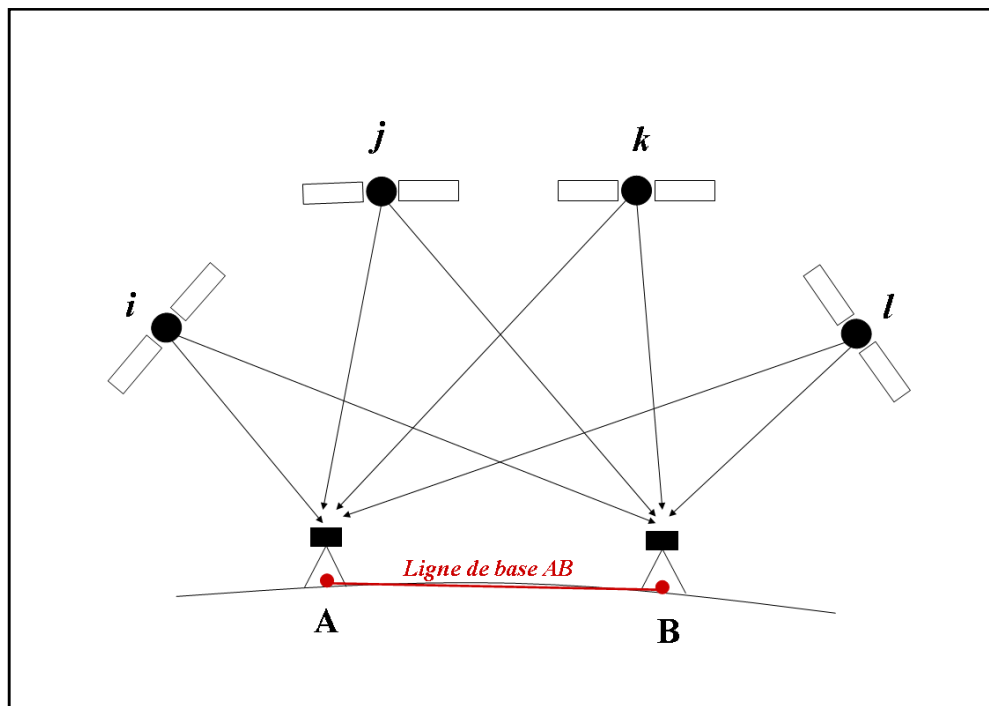


Figure 2.10. Concepts de base du positionnement relatif

La simple différence

La simple différence consiste à réaliser la différence entre deux mesures de codes simultanées réalisées sur un même satellite depuis deux récepteurs différents. Considérons la simple différence réalisée par les récepteurs A et B sur le satellite i à l'instant t . Les équations d'observation pour les deux récepteurs peuvent s'écrire :

$$P_A^i(t) = D_A^i + T_A^i + I_A^i + M_{A,m}^i + c(\Delta t^i(t - \tau_{A,m}) - \Delta t_A(t)) + \varepsilon_{A,m}^i \quad (2.32)$$

$$P_B^i(t) = D_B^i + T_B^i + I_B^i + M_{B,m}^i + c(\Delta t^i(t - \tau_{B,m}) - \Delta t_B(t)) + \varepsilon_{B,m}^i \quad (2.33)$$

La simple différence entre ces mesures de codes devient :

$$P_{AB}^i = P_A^i - P_B^i = D_{AB}^i + T_{AB}^i + I_{AB}^i + M_{AB,m}^i + c(\Delta t_B(t) - \Delta t_A(t)) + \varepsilon_{AB,m}^i \quad (2.34)$$

Avec la convention suivante : $*_{AB}^i = *_{A}^i - *_{B}^i$

Nous pouvons dès lors effectuer les observations suivantes :

- les effets du multi-trajets affectant les deux mesures de codes vont se combiner ;
- les bruits de mesure affectant les deux mesures de codes vont se combiner ;
- les termes T_A^i et T_B^i ainsi que les termes I_A^i et I_B^i sont corrélés avec la distance séparant les récepteurs A et B (les termes T_{AB}^i et I_{AB}^i seront d'autant plus petits que la ligne de base entre A et B sera courte).

La simple différence permet de s'affranchir de l'erreur d'horloge du satellite. La simple différence ne permet néanmoins pas de s'affranchir des erreurs d'horloge des récepteurs. La technique de la double différence va permettre de résoudre ce problème.

La double différence

La double différence est la différence de deux simples différences effectuées simultanément sur deux satellites distincts. Considérons la double différence réalisée par les récepteurs A et B sur les satellites i et j à l'instant t . Les équations d'observation correspondant aux deux simples différences peuvent s'écrire :

$$P_{AB}^i(t) = D_{AB}^i + T_{AB}^i + I_{AB}^i + M_{AB,m}^i + c(\Delta t_B(t) - \Delta t_A(t)) + \varepsilon_{AB}^i \quad (2.35)$$

$$P_{AB}^j(t) = D_{AB}^j + T_{AB}^j + I_{AB}^j + M_{AB,m}^j + c(\Delta t_B(t) - \Delta t_A(t)) + \varepsilon_{AB}^j \quad (2.36)$$

La double différence entre ces deux simples différences devient :

$$P_{AB}^{ij}(t) = P_{AB}^i - P_{AB}^j = D_{AB}^{ij} + T_{AB}^{ij} + I_{AB}^{ij} + M_{AB,m}^{ij} + \varepsilon_{AB}^{ij} \quad (2.37)$$

Avec la convention suivante : $*_{AB}^{ij} = *_{AB}^i - *_{AB}^j$

Le principal avantage de la double différence est l'affranchissement des erreurs d'horloge des deux récepteurs. A partir de l'équation (2.38) ci-dessous, il apparaît que cette réalité n'est vérifiée que lorsque les mesures sont parfaitement simultanées.

$$(\Delta t_B(t) - \Delta t_A(t))^i - (\Delta t_B(t) - \Delta t_A(t))^j \approx 0 \quad (2.38)$$

Comme dans le cas de la simple différence, les termes T_{AB}^{ij} et I_{AB}^{ij} seront d'autant plus petits que la ligne de base entre les récepteurs A et B sera courte. Le bruit de mesure et les effets du multi-trajets affectant les mesures de codes vont quant à eux se combiner au sein de la double différence.

Dans le cas du positionnement relatif exploitant la technique de la « double différence », l'équation d'observation (2.37) constitue le modèle fonctionnel.

- Linéarisation du modèle fonctionnel

Afin de simplifier nos développements, nous allons à nouveau émettre les quelques hypothèses présentées ci-dessous, concernant l'équation (2.37).

- Nous sommes sur un site bien dégagé et nous pouvons supposer que l'effet du multi-trajets est négligeable ($M_{p,m}^i = 0$).
- La ligne de base entre les récepteurs A et B étant relativement courte et les conditions atmosphériques calmes, nous pouvons négliger les termes résiduels T_{AB}^{ij} et I_{AB}^{ij} .
- Nous supposons que le bruit de mesure est négligeable ($\varepsilon_{p,m}^i = 0$).

L'équation d'observation (2.31) devient alors :

$$P_{AB}^{ij} = D_{AB}^{ij} = D_{AB}^i - D_{AB}^j = D_A^i - D_B^i - D_A^j + D_B^j = D_A^i - D_A^j + D_B^j - D_B^i \quad (2.39)$$

La position du récepteur A étant connue, les inconnues de position du récepteur B à déterminer sont incluses dans les termes D_B^j et D_B^i . C'est précisément ces deux termes qui seront concernés par la linéarisation préalable à un ajustement par moindres carrés. Les termes D_A^j et D_A^i doivent donc être considérés comme des termes connus.

De manière analogue à ce qui a été réalisé pour le positionnement absolu, le modèle fonctionnel linéarisé et simplifié devient :

$$P_{AB}^{ij} = P_{AB,0}^{ij} + \left[\frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^j - X_{B,0})}{D_{B,0}^j} \right] \Delta X + \left[\frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^j - Y_{B,0})}{D_{B,0}^j} \right] \Delta Y + \left[\frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^j - Z_{B,0})}{D_{B,0}^j} \right] \Delta Z \quad (2.40)$$

avec $P_{AB,0}^{ij} = D_A^i - D_A^j + D_{B,0}^j - D_{B,0}^i$.

La double différence permettant de s'affranchir des erreurs d'horloge des récepteurs, le nombre d'inconnues du problème est réduit à trois. Il s'agit des trois inconnues de position du récepteur B .

La recherche d'une solution nécessite donc de disposer d'un minimum de trois équations d'observation, c'est-à-dire trois doubles différences. Nous verrons qu'il est impératif que ces observations (doubles différences) soient indépendantes.

Exprimé sous forme matricielle, le modèle mathématique peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{A}\underline{X} + \underline{W} - \underline{v} = 0 \quad (2.41)$$

avec

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^j - X_{B,0})}{D_{B,0}^j} & \frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^j - Y_{B,0})}{D_{B,0}^j} & \frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^j - Z_{B,0})}{D_{B,0}^j} \\ \frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^k - X_{B,0})}{D_{B,0}^k} & \frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^k - Y_{B,0})}{D_{B,0}^k} & \frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^k - Z_{B,0})}{D_{B,0}^k} \\ \frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^l - X_{B,0})}{D_{B,0}^l} & \frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^l - Y_{B,0})}{D_{B,0}^l} & \frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^l - Z_{B,0})}{D_{B,0}^l} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta X_B \\ \Delta Y_B \\ \Delta Z_B \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$W = \begin{bmatrix} P_{AB,0}^{ij} - P_{AB}^{ij} \\ P_{AB,0}^{ik} - P_{AB}^{ik} \\ P_{AB,0}^{il} - P_{AB}^{il} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{AB}^{ij} \\ v_{AB}^{ik} \\ v_{AB}^{il} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

On peut observer que les informations contenues dans la matrice A sont toujours relatives à la géométrie du système. Les éléments de la matrice A sont les différences entre les cosinus directeurs des visées depuis le récepteur B vers les différents satellites. **Remarquons dès à présent que les informations contenues dans la matrice A ne concernent que le récepteur B et en aucun cas le récepteur A .**

- Indépendance des observations

Le nombre minimum d'observations dont on doit disposer pour réaliser un calcul de position par GNSS dépend directement du nombre de paramètres inconnus à déterminer, le nombre de paramètres inconnus étant lié à la technique employée.

Supposons n_r récepteurs effectuant des mesures de codes sur des signaux provenant de n_s satellites durant n_e époques d'observations. Le nombre total N d'observations indépendantes est égal à :

$$N = n_r n_s n_e \quad (2.46)$$

Prenons l'exemple de 2 récepteurs ($n_r = 2$) effectuant des mesures de codes sur 3 satellites ($n_s = 2$) durant 2 époques d'observations ($n_e = 2$). Le nombre d'observations indépendantes est alors égal à 12.

A partir de ces 12 observations, il est possible de former 12 simples différences mais seules 6 de ces simples différences seront totalement indépendantes. Sur base de ces 6 simples différences indépendantes, il ne sera possible de former que 3 doubles différences totalement indépendantes.

De manière générale, le nombre de simples différences indépendantes est donné par la relation :

$$n_{SD} = (n_r - 1) n_s n_e \quad (2.47)$$

Le nombre de doubles différences indépendantes est donné par la relation :

$$n_{DD} = (n_r - 1)(n_s - 1) n_e \quad (2.48)$$

Dans un cas de positionnement relatif n'exploitant qu'une seule époque d'observation, le nombre de paramètres inconnus étant égal à 3 et le nombre de récepteurs étant au nombre de 2, il est impératif d'observer un minimum de 4 satellites pour qu'une solution soit envisageable.

$$n_{DD} = (n_r - 1)(n_s - 1) n_e \Leftrightarrow (2 - 1)(n_s - 1) = 3 \Rightarrow n_s \geq 4 \quad (2.49)$$

2.4. Précision du positionnement

2.4.1. Composantes d'un ajustement par moindres carrés

2.4.1.1. Modèle mathématique

Dans les sections précédentes, nous nous sommes attardés à la description et à la mise au point du modèle mathématique relatif à un ajustement par moindres carrés. Le modèle mathématique décrit les relations (mathématiques) qui existent entre les observations (mesures) et les paramètres inconnus.

Soit $\bar{l}$ le vecteur des observations ajustées et $\bar{x}$ le vecteur des paramètres ajustés tels que :

$$\bar{l} = l + v \quad (2.50)$$

$$\bar{x} = x^0 + x \quad (2.51)$$

On distingue généralement trois types de modèles mathématiques, suivant la manière dont les relations entre observations et inconnues peuvent être exprimées :

- Modèle mixte : $0 = f(\bar{x}, \bar{l})$
- Modèle avec équations d'observation : $\bar{l} = f(\bar{x})$
- Modèle avec équations de condition : $0 = f(\bar{l})$

Le modèle avec équations d'observation et le modèle avec équations de conditions sont des cas particuliers du modèle mixte. Le positionnement par GNSS exploite généralement le modèle avec équations d'observation.

2.4.1.2. Modèle stochastique

Le modèle stochastique constitue une autre composante des ajustements par moindres carrés. Il contient principalement les informations relatives à la précision des observations.

Concrètement, la précision des observations s'exprime au travers de la matrice de variances-covariances des observations. La matrice de variances-covariances est une matrice carrée symétrique exprimant les interactions (dépendances) entre un certain nombre de variables aléatoires (observations).

Soit $\underline{l}$ un vecteur de n variables aléatoires (observations). La matrice de variances-covariances de ces variables aléatoires peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \dots & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_2 l_1} & \sigma_{l_2}^2 & \dots & \sigma_{l_2 l_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{l_n l_1} & \sigma_{l_n l_2} & \dots & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

où $\sigma_{l_i}^2$ est la variance de la variable aléatoire l_i et $\sigma_{l_i l_j}$ est la covariance entre les variables aléatoires l_i et l_j . D'un point de vue statistique, la covariance traduit la corrélation qui existe entre deux variables aléatoires. Dans le cas d'observations indépendantes, la matrice de variances-covariances est une matrice diagonale.

La figure 2.11 ci-dessous illustre les différentes composantes d'un ajustement par moindres carrés.

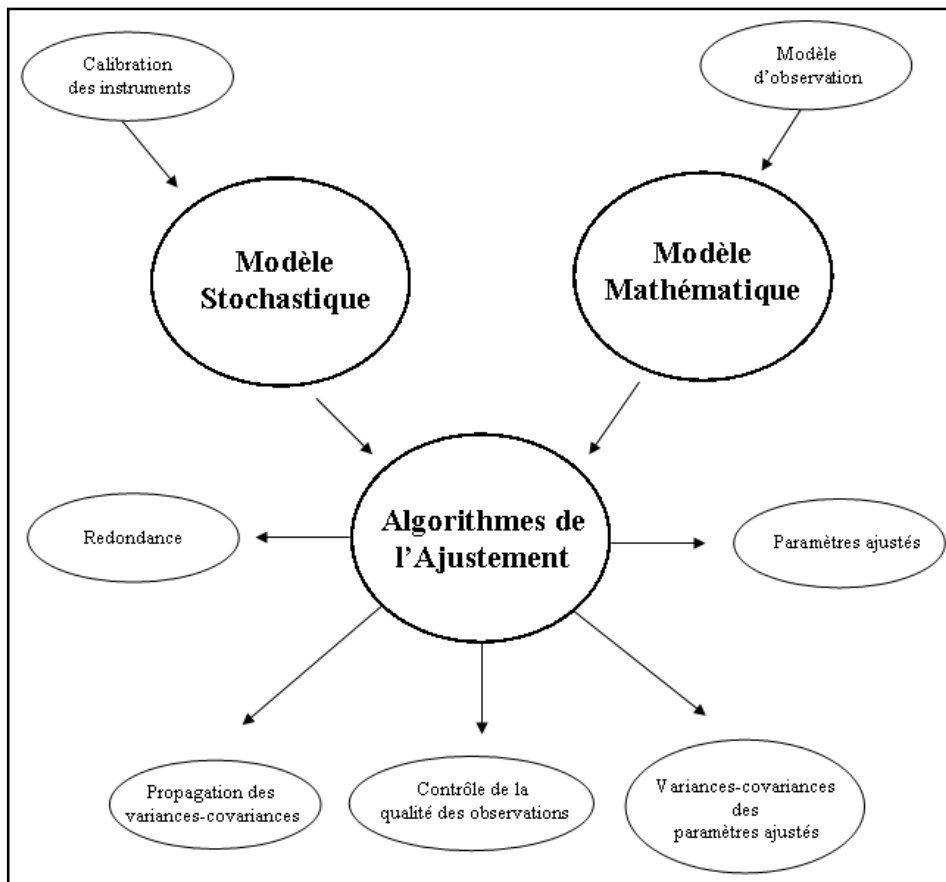


Figure 2.11. Éléments constitutifs d'un ajustement par moindres carrés
(Source : LEICK 2004, p. 97)

2.4.2. Loi de propagation des variances-covariances

2.4.2.1. Généralités

L'une des principales caractéristiques des ajustements par moindres carrés est la possibilité de calculer la précision de l'ajustement des paramètres inconnus à partir de la précision des observations, sans pour autant procéder à la réalisation intégrale de l'ajustement. Cette possibilité repose sur un principe fondamental : la propagation des variances-covariances au travers du modèle mathématique.

Soient $\underline{\tilde{y}}$ et $\underline{\tilde{x}}$ deux vecteurs de variables aléatoires et soit $\underline{\tilde{y}}$ une fonction non-linéaire de $\underline{\tilde{x}}$:

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{f}(\underline{\tilde{x}}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \dots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{\tilde{x}}) \\ f_2(\underline{\tilde{x}}) \\ \dots \\ f_m(\underline{\tilde{x}}) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Après linéarisation autour d'une valeur fixée $\underline{x}^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ et mise sous forme matricielle, cette relation peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \dots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}^0) \\ f_2(\underline{x}^0) \\ \dots \\ f_m(\underline{x}^0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \dots \\ x_n - x_n^0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\text{ou encore : } \underline{\tilde{y}} = \underline{f}(\underline{x}^0) + J(\underline{\tilde{x}} - \underline{x}^0) \Leftrightarrow \underline{\tilde{y}} = \underline{f}(\underline{x}^0) + J\underline{\tilde{x}} - J\underline{x}^0 \quad (2.55)$$

$$\text{avec la matrice } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

La loi de propagation des variances-covariances nous permet d'écrire (LEICK 2004) :

$$\sum_{\underline{\tilde{y}}} = J \sum_{\underline{\tilde{x}}} J^T \quad (2.57)$$

2.4.2.2. Poids et cofacteurs

Le poids d'une variable aléatoire est une mesure de l'importance relative de cette variable. Le poids d'une variable aléatoire est inversement proportionnel à sa variance.

Commençons par définir la matrice des cofacteurs Q :

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum \quad (2.58)$$

avec σ_0^2 une variance de référence et $\sum$ une matrice de variances-covariances. La matrice des poids peut alors être définie de la manière suivante :

$$P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \sum^{-1} \quad (2.59)$$

La matrice des poids et la matrice des cofacteurs contiennent donc des nombres adimensionnels.

De manière générale, une observation dans le domaine de la métrologie peut s'apparenter à une variable aléatoire. Une observation très précise aura donc un poids plus important et une variance plus petite qu'une observation moins précise. La variance de référence σ_0^2 fixée à priori correspond à la variance d'une observation dont le poids serait unitaire (variance de poids unitaire).

Sur base de ces considérations et tenant compte de la loi de propagation des variances-covariances appliquée au modèle mathématique développé précédemment, il est possible de démontrer que la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés peut être calculée de la manière suivante :

$$Q_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} = (A^T Q_l^{-1} A)^{-1} = (A^T \sigma_0^2 \sum_l^{-1} A)^{-1} \quad (2.60)$$

avec P la matrice des poids des observations, A la matrice contenant la géométrie du système, $\hat{\sigma}_0^2$ la variance de poids unitaire estimée et $\sum_{\hat{x}}$ la matrice des variances-covariances des paramètres ajustés.

Notons également que :

$$N = A^T P A \quad (2.61)$$

N étant dénommée la « matrice normale ». La matrice normale est donc une matrice carrée de dimension u (u étant le nombre de paramètres inconnus). Remarquons que la matrice des cofacteurs est obtenue en inversant la matrice normale (équations (2.60) et (2.61)).

A partir de ces relations, on voit que la matrice A , qui contient essentiellement la géométrie du système dans le cas des GNSS, a une influence considérable sur la matrice des cofacteurs (et donc la précision) des paramètres ajustés (équation (2.60)). La loi de propagation des variances-covariances nous apprend donc que la géométrie du système va « dégrader » ou « diluer » la précision entre les observations et les paramètres ajustés.

Ainsi, deux facteurs influencent donc principalement la précision du positionnement par GNSS, notée σ_{POS} (HOFMANN-WELLENHOF 2008):

- la précision sur les mesures de pseudo-distances (σ_p) ;
- la géométrie de la constellation satellitaire.

La précision sur la position des satellites dépend de la qualité des informations contenues dans le message de navigation.

Désignons la précision sur les mesures de pseudo-distances par l'écart-type σ_p . La précision σ_p va dépendre, notamment, des influences physiques subies par le signal électromagnétique au cours de sa traversée de l'atmosphère terrestre mais également de la qualité de la modélisation des paramètres d'horloge des satellites. Cet écart-type est également parfois désigné par l'acronyme UERE (*User Equivalent Range Error*) (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008).

Enfin, la géométrie est généralement caractérisée par le biais d'un indicateur dénommé « DOP » (*Dilution of Precision*). On peut ainsi écrire :

$$\sigma_{POS} = DOP \sigma_p \quad (2.62)$$

2.5. Indicateurs de la géométrie

2.5.1. Formulation

La géométrie de la constellation satellitaire peut être caractérisée par un indicateur quantitatif. Cet indicateur va permettre de quantifier l'impact de la configuration géométrique de la constellation satellitaire sur la précision du positionnement.

D'après l'équation (2.62), on peut voir que plus le DOP sera faible, meilleure sera la précision du positionnement. Une géométrie « de bonne qualité » sera donc associée à une faible valeur de DOP. Un utilisateur averti veillera donc à réaliser ses mesures durant des périodes où le DOP est minimal. Nous reviendrons ultérieurement sur la notion de géométrie de « bonne qualité » et de « mauvaise qualité ».

Remarquons sans plus tarder que la géométrie de la constellation satellitaire n'est pas responsable de l'introduction d'une nouvelle erreur dans le calcul de positionnement. Simplement, la géométrie est responsable de la dégradation de la précision des mesures de pseudo-distances vers la précision du positionnement. Concrètement, si les mesures de pseudo-distances étaient parfaitement exactes ($\sigma_p = 0$), la configuration de la géométrie n'aurait aucun impact sur l'exactitude du positionnement ($\sigma_{POS} = 0$).

2.5.2. Définition quantitative du DOP

2.5.2.1. Positionnement absolu

Le DOP est calculé à partir de la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés $Q_{\hat{x}}$ issue de l'ajustement par moindres carrés.

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} q_{XX} & q_{XY} & q_{XZ} & q_{Xt} \\ q_{YX} & q_{YY} & q_{YZ} & q_{Yt} \\ q_{ZX} & q_{ZY} & q_{ZZ} & q_{Zt} \\ q_{tX} & q_{tY} & q_{tZ} & q_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Etant donné l'équation (2.60), le lien entre la géométrie de la constellation satellitaire (contenue dans la matrice A) et la matrice des cofacteurs est évident.

Le DOP se décline en plusieurs composantes. Ainsi, on distingue :

$$GDOP = \sqrt{q_{XX} + q_{YY} + q_{ZZ} + q_{tt}} \quad (2.64)$$

$$PDOP = \sqrt{q_{XX} + q_{YY} + q_{ZZ}} \quad (2.65)$$

$$TDOP = \sqrt{q_{tt}} \quad (2.66)$$

Moyennant l'application d'une rotation du système de coordonnées géocentriques de référence afin d'obtenir un système de coordonnées topocentriques (*North, East, Up*) (cf. § 4.2.2), on peut également définir :

$$HDOP = \sqrt{q_E + q_N} \quad (2.67)$$

$$VDOP = \sqrt{q_N} \quad (2.68)$$

Cependant, nous évoquerons l'indicateur « DOP » lors de nos discussions pour faire référence, de manière générale, aux indicateurs de la géométrie des satellites.

Considérant l'équation (2.62), il est ainsi possible d'observer l'effet de la géométrie sur la précision des différents paramètres inconnus grâce aux relations suivantes :

$$\sigma_{POS} = GDOP \sigma_P \quad (2.69)$$

$$\sigma_H = HDOP \sigma_P \quad (2.70)$$

$$\sigma_V = VDOP \sigma_P \quad (2.71)$$

$$\sigma_{XYZ} = PDOP \sigma_P \quad (2.72)$$

$$\sigma_T = TDOP \sigma_P \quad (2.73)$$

Il est important de comprendre que le calcul du DOP ne nécessite nullement la réception d'un signal GNSS ou un quelconque traitement sur ce signal. En effet, la seule connaissance de la position et du mouvement des satellites est suffisante pour calculer le DOP au-dessus d'une position déterminée. Ainsi, un récepteur peut donc fournir à son utilisateur une valeur du DOP à partir des éphémérides contenues dans le message de navigation. Le processus du calcul du DOP est schématisé à la figure 2.12.

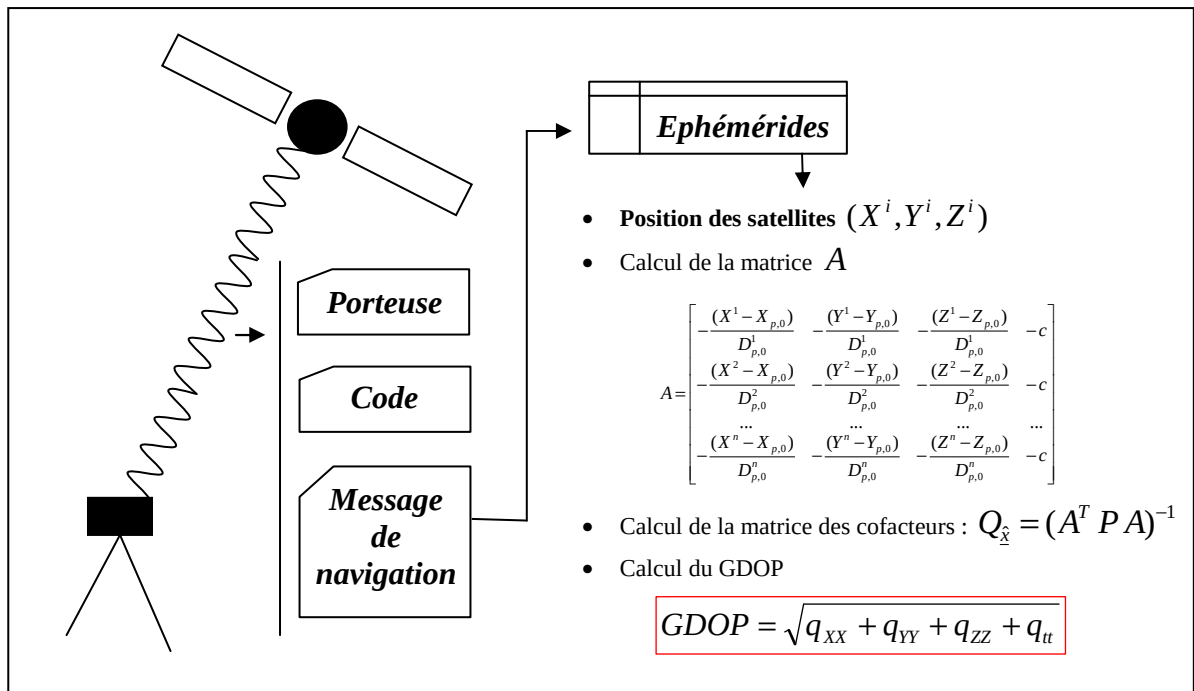


Figure 2.12. Processus permettant de calculer le GDOP

Dès lors, le DOP est un indicateur dont la variation spatiale et temporelle est parfaitement prévisible étant donné la parfaite connaissance de la position et du mouvement des satellites sur leurs orbites. Cette caractéristique du DOP sera pleinement exploitée dans la suite de notre étude.

Nous avons précisé précédemment (cf. § 2.3.2.1) que le positionnement absolu sur une seule époque d'observation nécessitait l'observation simultanée d'un minimum de quatre satellites. Nous avons évoqué le fait que les constellations GNSS sont généralement conçues pour permettre l'observation simultanée de plus de quatre satellites. Cette redondance d'observations est à la source de l'ajustement par moindres carrés utilisé pour le calcul des positions. Toutefois, les différentes générations de récepteurs ont un nombre limité de canaux sur lesquels ils peuvent recevoir les signaux GNSS en provenance des satellites. Autrement dit, il n'est pas toujours possible d'exploiter tous les signaux provenant de tous les satellites visibles à un instant donné. Il convient dès lors de sélectionner, parmi les satellites visibles, la constellation à prendre en compte afin de minimiser la valeur du DOP. De nombreuses techniques spécifiques ont été développées à cet effet (DOONG 2008).

Soit une constellation de satellites visibles depuis une position déterminée. A nombre de satellites égal, la valeur du DOP correspondante sera directement influencée par la manière dont ces satellites sont répartis dans le ciel. Ainsi, des études sur la métrique du GDOP ont permis de définir une limite inférieure du GDOP lorsque l'on considère une constellation de quatre satellites visibles (YARLAGADDA 2000):

$$GDOP \geq \sqrt{2} \quad (2.74)$$

Généralement, l'ajout de satellites dans la constellation visible contribuera à diminuer la valeur du DOP (DOONG 2008). Ceci nous amène à comprendre comment l'interopérabilité entre différents GNSS peut constituer une piste permettant d'améliorer la précision du positionnement. En effet, la combinaison des constellations propres à plusieurs GNSS va permettre d'accroître le nombre de satellites visibles depuis un endroit à un instant donné (DAGHAY *et al.* 2007). Par exemple, d'après la figure 2.13 ci-dessous, nous pouvons observer comment l'interopérabilité entre les systèmes GPS et Galileo peut contribuer à améliorer la distribution mondiale du nombre moyen de satellites visibles.

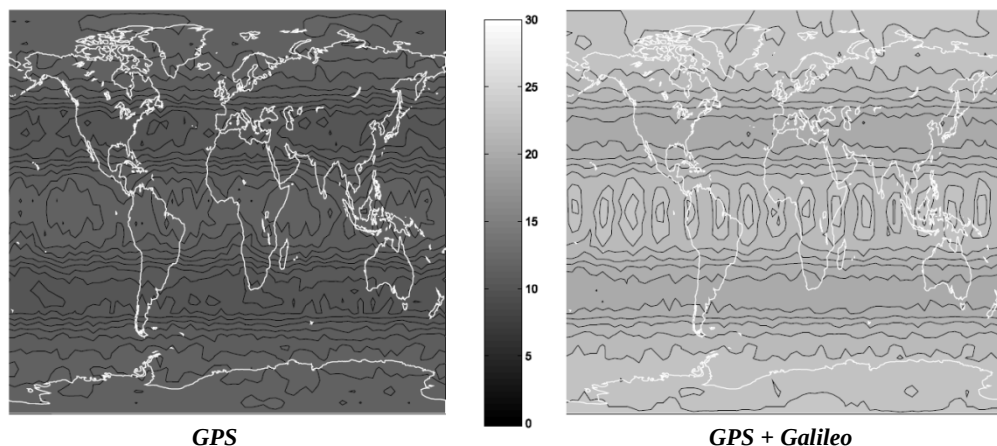


Figure 2.13. Distribution mondiale du nombre moyen de satellites visibles (Masque : 10°)
(Source : DAGHAY *et al.* 2007, p. 2)

On peut généralement considérer qu'une constellation de bonne qualité géométrique est caractérisée par des valeurs de PDOP et de HDOP inférieures respectivement à 3 et à 2 unités (HOFMANN-WELLENHOF 2008). Ces valeurs, calculées sur base de paramètres statistiques, diminuent avec la qualité toujours croissante de la couverture spatio-temporelle des GNSS.

2.5.2.2. Positionnement relatif

De manière analogue à ce qui a été développé dans le cas du positionnement absolu, il est également envisageable de développer un indicateur caractérisant la qualité de la géométrie de la constellation dans le cas du positionnement relatif (HOFMANN-WELLENHOF 2008).

Le calcul du RDOP (*Relative DOP*) est effectué sur base des mêmes formules que le DOP (équations (2.64-2.68)). Simplement, n'omettons pas le fait que ces deux cas diffèrent par le contenu de la matrice A au sein du modèle mathématique.

Etant donné la caractéristique principale du positionnement relatif qui est l'affranchissement des erreurs d'horloge des récepteurs, il n'y a donc plus lieu de considérer une valeur de TDOP. Toutefois, les valeurs suivantes peuvent être calculées selon les mêmes considérations que précédemment (DAGHAY *et al.* 2007 ; NIELSEN 1997):

- RGDOP (=RPDOP)
- RHDOP
- RVDOP

L'équation (2.62), dans le cas particulier du positionnement relatif, devient :

$$\sigma_{POS} = RDOP \sigma_{DD} \quad (2.75)$$

avec σ_{DD} la précision d'une double différence, effectuées à partir de quatre mesures de pseudo-distances (équations (2.34) et (2.37)).

Une étude de YANG (2000) consacrée particulièrement au RDOP soulève le problème du caractère prévisible du RDOP à partir du DOP. L'une des questions à laquelle notre étude va tenter de répondre est de savoir si le DOP constitue un indicateur précis de la qualité de la géométrie de la constellation dans le cas du positionnement relatif. Cette question est particulièrement intéressante car, lors d'une mission de terrain, un géomètre dispose souvent uniquement de la valeur du DOP, et n'a aucune connaissance de la valeur du RDOP.

2.5.3. Définition géométrique du DOP

D'un point de vue géométrique, il est intéressant de comprendre à quels types de configuration géométrique de la constellation correspondent des valeurs extrêmes du DOP. Cet aspect sera développé plus en profondeur dans le cadre de notre étude. Toutefois, considérant une constellation de quatre satellites, la valeur du DOP semble être une fonction inverse du volume du tétraèdre construit sur les quatre vecteurs unitaires pointant du récepteur vers les quatre satellites. Ainsi, la relation de proportionnalité suivante peut être admise, V étant le volume du tétraèdre (YARLAGADDA 2000 ; PHILLIPS 1984 in DOONG 2008):

$$PDOP \propto \frac{1}{V} \quad (2.76)$$

Cette considération peut nous conduire à la conclusion qu'une répartition homogène des satellites visibles dans le ciel entraîne des valeurs faibles du DOP. Au contraire, une constellation présentant un regroupement des satellites visibles dans une même portion du ciel engendre des valeurs élevées du DOP (fig. 2.14).

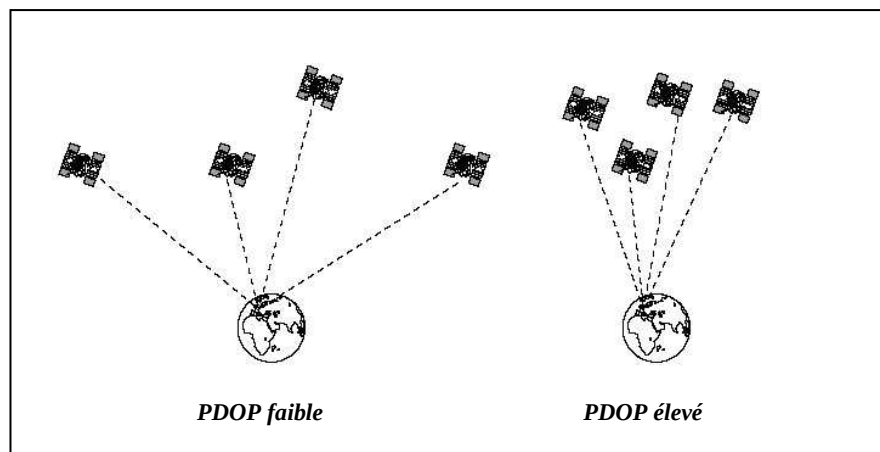


Figure 2.14. Interprétation géométrique du PDOP
(Source : Site AUTERRA¹)

De manière plus nuancée, la géométrie de la constellation satellitaire peut affecter différemment les multiples composantes du DOP. Ainsi, certaines constellations peuvent dégrader fortement la valeur du VDOP sans affecter la valeur du HDOP et inversement, comme le montre la figure 2.15 (PIEPLU 2006).

¹ Site AUTERRA (http://www.dashdyno.net/tech/GPS/gps_location.html), consultation le 9 août 2009

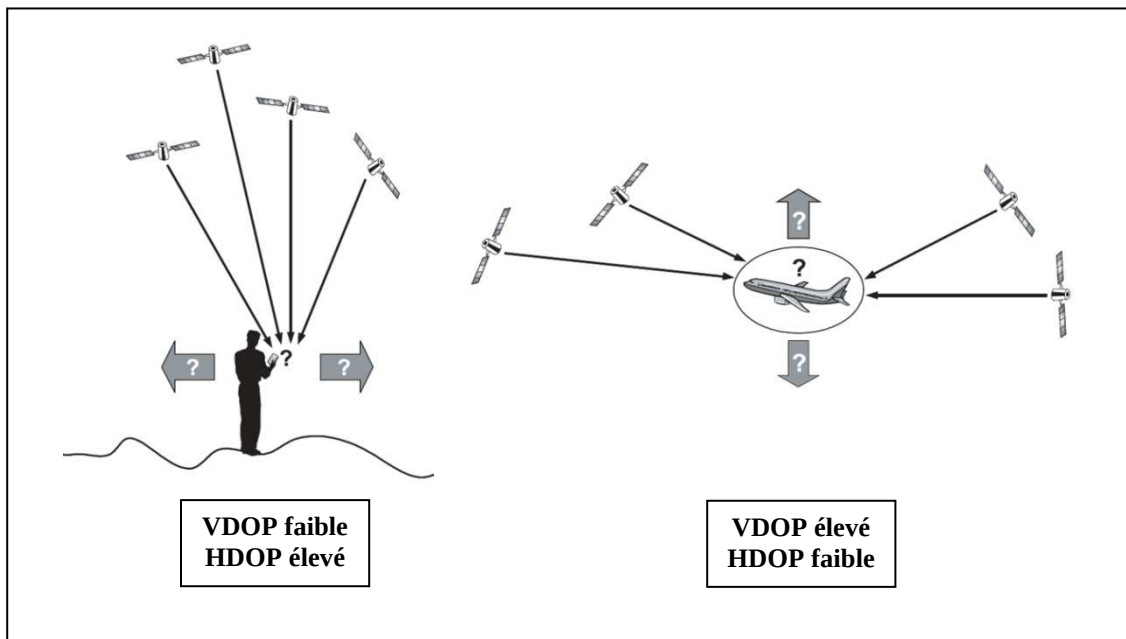


Figure 2.15. Effet de la géométrie de la constellation satellitaire sur le VDOP et le HDOP
(Source : PIEPLU 2006, pp. 29-30)

Il peut être intéressant d'effectuer le lien entre l'interprétation géométrique et quantitative du DOP en introduisant la considération suivante. Une faible élévation des satellites va conduire à un accroissement du volume du tétraèdre construit sur les vecteurs unitaires liant le récepteur aux satellites. Cependant, les signaux en provenance de satellites dont l'élévation est faible vont subir des dégradations plus importantes dues à la traversée de l'atmosphère terrestre. Si l'on se réfère à l'équation (2.62), ces dégradations plus importantes vont entraîner une augmentation de la valeur σ_p . On comprend donc finalement que la bonne précision du positionnement final dépend d'un compromis entre la valeur du DOP (la qualité de la géométrie) et la valeur du σ_p . Remarquons que les effets de masquage réduisant la visibilité satellitaire d'un récepteur vont inmanquablement conduire à de hautes valeurs du DOP (fig. 2.16).

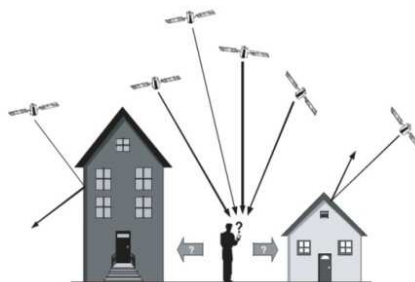


Figure 2.16. Influence des effets de masquage sur le DOP
(Source : PIEPLU 2006, pp. 29-30)

2.6. Influence de la géométrie de la constellation

2.6.1. Positionnement absolu

Considérant l'équation fondamentale du modèle mathématique avec équations d'observations (équation (2.27)), la solution de l'ajustement par moindres carrés peut être obtenue grâce à la relation suivante (LEICK 2004):

$$\underline{\hat{x}} = -N^{-1}u \quad (2.77)$$

telle que :

$$\underline{\bar{x}} = \underline{x}_0 + \underline{\hat{x}} \quad (2.78)$$

avec

$$N = A^T P A \quad (2.79)$$

et

$$u = A^T P W \quad (2.80)$$

Tenant compte des équations (2.79) et (2.80), l'équation (2.77) devient :

$$\underline{\hat{x}} = -(A^T P A)^{-1} A^T P W \quad (2.81)$$

Cette dernière équation permet de voir la manière avec laquelle toute erreur affectant les mesures de pseudo-distances va se propager pour affecter l'estimation finale des paramètres inconnus.

Dans le cas précis du positionnement absolu, les mesures de pseudo-distances entre le récepteur et les différents satellites observés sont réalisées de manière indépendante. Qui plus est, ces différentes mesures sont caractérisées, à priori, par une même précision, nous permettant de poser l'hypothèse que la matrice des poids des observations correspond à la matrice identité. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\underline{\hat{x}} = -(A^T A)^{-1} A^T W \quad (2.82)$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I \quad (2.83)$$

Dans le cas du positionnement relatif, la matrice des poids devra être calculée, étant donné la corrélation existant entre les observations (doubles différences) (cf. § 5.2.2)

L'un des usages les plus répandus des GNSS est le positionnement absolu instantané à l'aide de récepteurs simple-fréquence sur base de mesures de codes. L'ionosphère est grandement responsable de la limitation de la précision de ces récepteurs. L'erreur due à l'ionosphère est couramment dénommée « délai ionosphérique » (MOHINO 2007).

L'observation de la répartition du délai ionosphérique sur les différents paramètres inconnus au cours d'une journée permet de conclure que le délai ionosphérique sur la position finale est le résultat de l'interaction de deux facteurs principaux :

- l'activité ionosphérique ;
- la géométrie de la constellation visible.

Afin d'étudier plus en profondeur cette interaction dans le cas précis du GPS, plusieurs techniques de simulation de la géométrie de la constellation ont été mises en œuvre permettant d'arriver à des conclusions cohérentes.

L'une de ces techniques (MOHINO 2007) consiste à envisager le cas d'une constellation présentant un haut degré de symétrie. En transposant les composantes des vecteurs unitaires joignant le récepteur aux satellites observés depuis un système de coordonnées géocentriques vers un système de coordonnées topocentriques, une telle constellation permet de faciliter la résolution purement analytique de l'ajustement par moindres carrés. La figure 2.17 ci-dessous illustre la symétrie de la géométrie de la constellation envisagée par E. MOHINO, dans laquelle les positions des satellites sont exprimées en termes d'azimut et d'élévation (χ, η) . Hormis un satellite situé au zénith, tous les autres satellites sont équitablement répartis sur l'horizon et à même élévation.

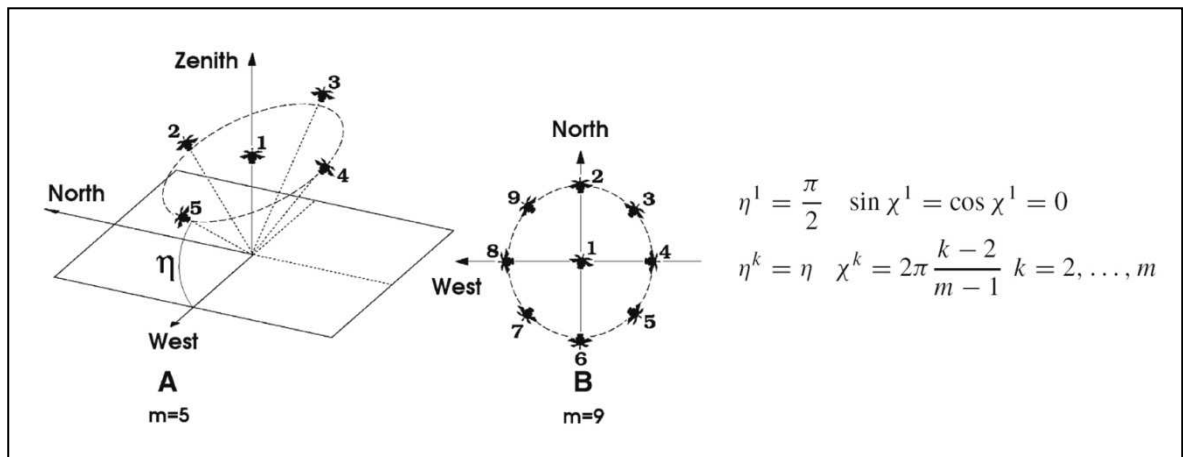


Figure 2.17. Constellation satellitaire hautement symétrique

(Source : MOHINO 2007, p. 34)

Nous reviendrons sur l'utilisation du modèle topocentrique, dans lequel les positions des satellites peuvent être exprimées soit en coordonnées tridimensionnelles NEU (*North-East-Up*), soit en coordonnées sphériques (χ, η) .

Les techniques de modélisation ainsi testées ont permis d'effectuer une transition entre une constellation fictive très symétrique et une constellation réelle. Les techniques de modélisation exploitées sont au nombre de trois :

- constellation hautement symétrique permettant une résolution analytique facilitée (MOHINO 2007) ;
- technique de modélisation de SANTERRE supposant une constellation continue et homogène sur une portion de l'espace (SANTERRE 1991) ;
- technique de modélisation numérique (MOHINO 2007).

A partir de ces observations, quatre hypothèses de travail ont été élaborées et validées avec succès sur des données réelles. Les relations entre ces hypothèses de travail et le contenu de la matrice A ont également été établies (MOHINO 2007).

2.6.2. Positionnement relatif

L'impact de la géométrie de la constellation satellitaire du GPS a également été étudié dans le cas du positionnement relatif statique par R. SANTERRE. Ses travaux sont basés sur le fait que la constellation satellitaire peut être supposée continue et homogène sur une certaine portion de l'espace. Cette supposition permet de remplacer, dans les traitements propres aux ajustements par moindres carrés, des sommes sur le nombre total d'observations par des intégrales. L'objectif final étant de pouvoir observer le contenu de la matrice de variances-covariances des paramètres estimés en fonction de la géométrie de la constellation (SANTERRE 1991).

La figure 2.18 ci-dessous représente une constellation satellitaire homogène et continue sur une certaine portion de l'espace (avec χ, η les variables désignant respectivement l'azimut et l'élévation des satellites).

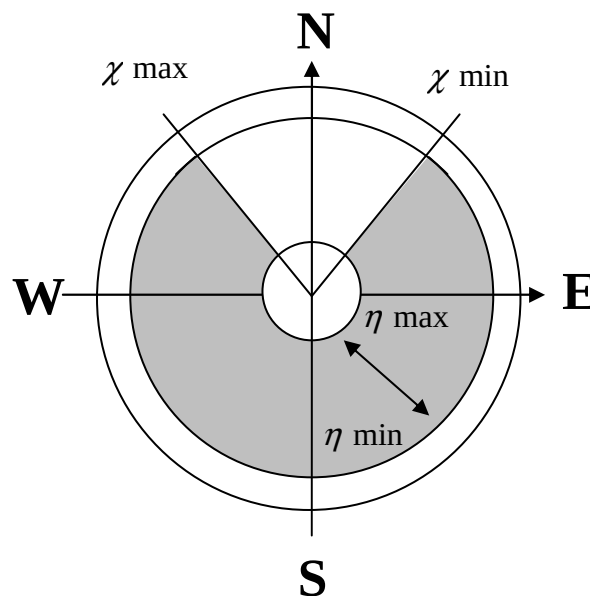


Figure 2.18. Constellation satellitaire homogène et continue
(Source : SANTERRE 1991, p. 33)

CHAPITRE 3

OBJECTIFS

Comme précisé lors de l'introduction, l'objet de notre étude est l'influence de la géométrie de la constellation satellitaire des GNSS sur la précision du positionnement dans le cadre de deux techniques particulières : le positionnement absolu instantané et le positionnement relatif instantané (mesures de codes).

L'état des connaissances concernant les systèmes globaux de positionnement et de navigation par satellites (chapitre 2) a permis de présenter les différentes études concernant l'influence de la géométrie de la constellation satellitaire sur la précision du positionnement par satellites ainsi que les indicateurs permettant d'estimer la qualité de la géométrie de la constellation. La méthodologie que nous avons employée s'inspire des travaux de E. MOHINO (2007) (cf. § 2.6.1) : dans le but d'étudier la relation entre la géométrie de la constellation et la précision du positionnement, nous exploitons premièrement le cas particulier d'une constellation fictive présentant un haut degré de symétrie pour ensuite généraliser notre étude sur des données réelles de position des satellites.

Dans le cas du positionnement absolu, notre objectif est de caractériser la variabilité spatio-temporelle de la qualité de la géométrie de la constellation GPS. Par le biais du DOP, nous voulons vérifier et comprendre une éventuelle influence sur la qualité de la géométrie de la constellation, des facteurs suivants :

- l'heure de la journée ;
- la longitude ;
- la latitude ;
- l'hémisphère.

Nous voulons également démontrer que la corrélation entre les différentes composantes du DOP est fonction de la latitude du site d'observation.

Nous tenterons de caractériser certaines configurations géométriques de la constellation engendrant une forte dégradation de la précision du positionnement. Nous voulons identifier quels sont les facteurs, propres à la configuration géométrique de la constellation, qui peuvent engendrer des valeurs extrêmes du DOP. Cela nous permettra ainsi de comprendre et de visualiser quels types de géométries de la constellation sont favorables ou défavorables à un positionnement de haute précision.

Les études concernant l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement relatif sont peu nombreuses. Contrairement à R. SANTERRE (1991), qui a étudié cette influence en considérant une constellation supposée continue et homogène (cf. § 2.6.2), nous avons mené notre étude sur base de données réelles de positions des satellites de la constellation GPS.

Premièrement, nous voulons savoir si la manière de combiner les doubles différences au sein du modèle mathématique peut avoir une influence sur la valeur calculée du RDOP.

Nous tenterons ensuite de vérifier qu'il existe une corrélation entre le RDOP et le DOP, pour une ligne de base donnée. Nous rechercherons également une éventuelle influence de la longueur de la ligne de base sur cette corrélation. Cela nous permettra ainsi d'apporter une réponse à la question soulevée par YANG (2000) : « Le DOP constitue-t-il un indicateur précis de la qualité de la géométrie de la constellation dans le cas du positionnement relatif ? ». Autrement dit, nous voulons savoir si la valeur du RDOP est prévisible à partir de la valeur du DOP. Rappelons le fait que le géomètre en mission dispose souvent uniquement de la valeur du DOP pour estimer la qualité de la géométrie de la constellation.

Comme dans le cas du positionnement absolu, nous voulons comprendre et pouvoir visualiser quels types de géométries de la constellation GPS engendrent de fortes dégradations de la précision du positionnement relatif.

Le logiciel SoDIPE-RTK (LEJEUNE 2006) développé au sein de la section « Profils ionosphériques » de l'Institut Royal Météorologique (IRM) est un logiciel permettant la détermination de l'erreur de position due à l'ionosphère dans le cas du positionnement RTK (*Real Time Kinematic*). Certaines erreurs de position importantes peuvent être observées dans les résultats de ce logiciel durant des périodes de basse activité ionosphérique. Nous tenterons d'expliquer l'origine de ces erreurs grâce aux résultats de nos recherches.

CHAPITRE 4

POSITIONNEMENT ABSOLU

4.1. Point de départ

4.1.1. Objectifs

L'objectif premier de ce chapitre est de caractériser la variabilité spatiale et temporelle de la qualité de la géométrie de la constellation satellitaire GPS, dans le cas particulier du positionnement absolu instantané exploitant des mesures de codes¹. Cette caractérisation s'effectuera par le biais des indicateurs quantifiant la qualité de la géométrie de la constellation (DOP) (cf. § 2.5).

Nous commencerons ce chapitre par préciser sur quel type de système de coordonnées se basent nos développements. Nous présenterons ensuite l'adaptation du modèle mathématique, sur lequel se base notre étude, au système de coordonnées retenu (cf. § 4.2).

Afin de fournir un premier ordre de grandeur de l'intervalle de variation du DOP, la première partie de notre étude portera sur la variabilité du DOP dans le cas particulier d'une constellation hautement symétrique (cf. § 4.3). Cette première approche intuitive nous permettra de comprendre l'influence de certains paramètres sur la variabilité du DOP. Ce point de départ de notre étude s'inspire directement des travaux de E. MOHINO.

Dans l'optique d'une généralisation de notre étude de la variabilité spatio-temporelle du DOP, nous avons mis au point un outil informatique permettant d'étudier la géométrie de la constellation GPS à l'échelle du globe. Nous présenterons brièvement la philosophie de conception et les possibilités de cet outil informatique (cf. § 4.4).

Les résultats obtenus grâce à l'exploitation de notre outil informatique sont présentés en section 5 de ce chapitre. Nous décrirons le raisonnement soutenu pour mener cette étude, nous commenterons les différents choix posés et présenterons nos principales observations (cf. § 4.5).

Parmi nos observations, nous sélectionnerons une série de situations extrêmes ou particulières, selon des critères clairement établis. En section 6, nous présenterons ces différentes situations pour tenter d'y apporter interprétations et explications.

¹ Il est tout à fait possible de montrer que les développements soutenus sont transposables au cas du positionnement absolu exploitant des mesures de phases. La différence se situe au niveau de la construction de la matrice A , contenant la géométrie du système (cf. § 2.3.2.1).

4.1.2. Données

Nous avons énoncé le fait que le calcul du DOP ne nécessitait de connaître que la position des satellites dans le ciel de l'observateur. Moyennant la connaissance du mouvement et de la position des satellites, le DOP est donc un paramètre tout à fait prévisible (cf. § 2.5.2.1).

Les positions des satellites GPS visibles depuis une position déterminée sur Terre peuvent être déterminées à l'aide d'un logiciel développé au sein de la section « Profils Ionosphériques » de l'Institut Royal Météorologique (IRM). C'est ce logiciel qui constituera la source de toutes les données exploitées dans le cadre de notre étude. La figure 4.1 ci-dessous illustre les paramètres d'entrée et de sortie de ce programme ainsi que la structure des fichiers générés. Chacun de ces fichiers contient les données de position des satellites visibles pour une journée et un site d'observation donnés. Pour une journée donnée, le temps est compté en secondes depuis 00 h 00. Les positions des satellites sont calculées par pas de 30 secondes.

La figure 4.1 ci-dessous présente schématiquement la génération et la structure des fichiers sources que nous avons exploités. Le programme nécessite en entrée les paramètres de latitude φ , de longitude λ et de hauteur ellipsoïdale h (WGS84) ainsi que la date de la journée d'observation souhaitée. Chaque ligne des fichiers générés correspond à l'observation d'un satellite à une époque donnée. Pour chaque satellite observé, les fichiers contiennent les données suivantes :

- temps [s];
- code PRN du satellite observé ;
- azimut χ du satellite [°] ;
- élévation η du satellite [°].

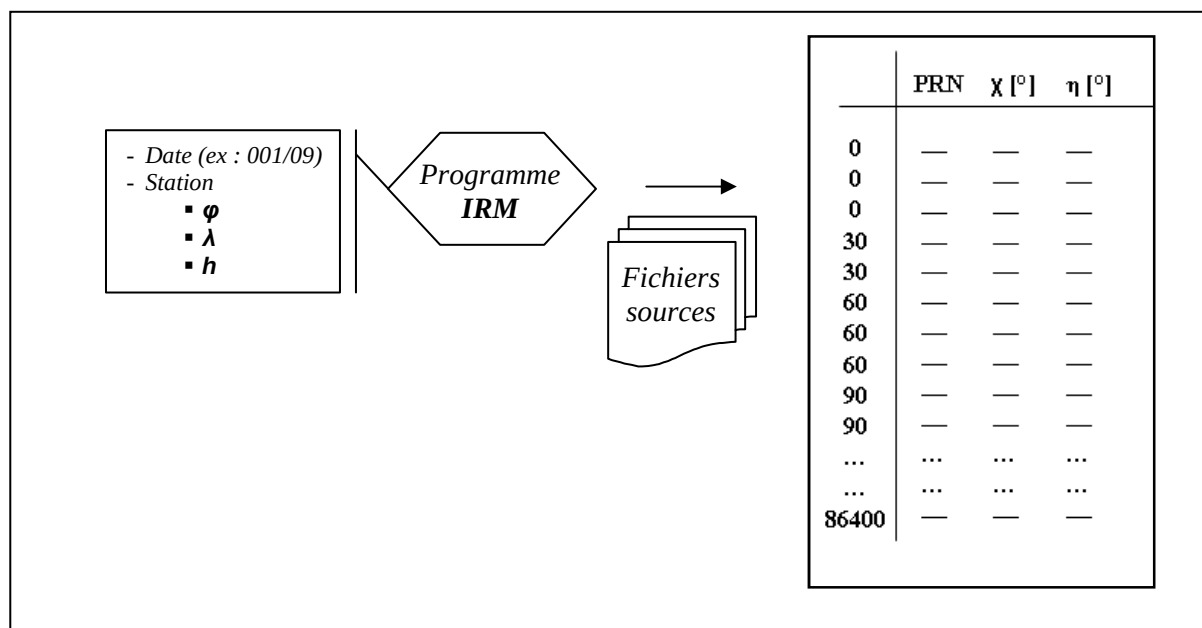


Figure 4.1. Génération et structure des fichiers sources

Supposons un quadrillage du globe terrestre d'une résolution de 15° (fig. 4.2). Nous disposons des données de position des satellites GPS visibles depuis toutes les intersections de ce quadrillage pour le 1^{er} janvier 2009 (001/09). Précisons qu'à cette date, la constellation GPS comportait 32 satellites. La hauteur ellipsoïdale des sites d'observation sera toujours fixée à 0 m. ton

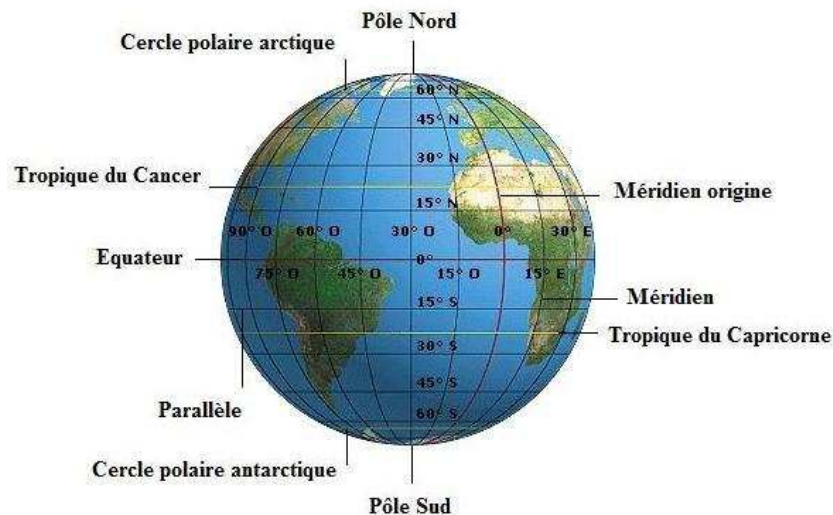


Figure 4.2. Quadrillage du globe terrestre (15°)
(Source : Site Géofri¹)

4.1.3. Outils

La quantité de données exploitées ainsi que la complexité des traitements à exécuter nous ont poussés à nous tourner vers un langage de programmation, afin d'automatiser et de généraliser au mieux les opérations à effectuer. Notre choix s'est porté pour le langage de programmation et l'environnement de développement du même nom : MATLAB® (fig. 4.3). MATLAB® est en effet un outil particulièrement adapté aux démarches purement expérimentales. L'un des nombreux points forts de MATLAB® réside au niveau de ses fonctions de graphisme avancées.

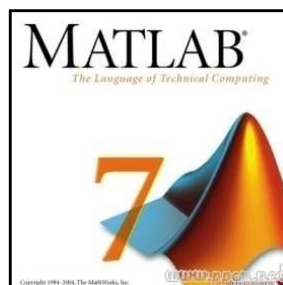


Figure 4.3. Logo MATLAB®
(Source : Site officiel MATLAB®¹)

¹ Site des enseignants de Géographie du canton de Fribourg
(<http://www.geofri.ch/moodle/>), consultation le 13 août 2009

4.2. Systèmes de coordonnées

4.2.1. Système de coordonnées géocentriques

4.2.1.1. Définition

Le système de coordonnées auquel se réfère le GPS est le datum WGS84. Il s'agit d'un système de coordonnées géocentriques ECEF (*Earth-Centered Earth-Fixed*). Une position dans un tel système de référence peut être caractérisée, soit par des coordonnées rectangulaires tridimensionnelles $(X_{WGS84}, Y_{WGS84}, Z_{WGS84})$, soit par des coordonnées sphériques ou ellipsoïdales en termes de latitude, longitude et hauteur $(\varphi_{WGS84}, \lambda_{WGS84}, h_{WGS84})$. Dans le cadre des applications qui nous occupent, ce sont très clairement les coordonnées $(X_{WGS84}, Y_{WGS84}, Z_{WGS84})$ qui sont le plus souvent exploitées.

Un tel système de coordonnées est centré sur le centre de masse de la Terre. Les axes définissant ce système sont fixes par rapport à une position terrestre. L'axe des X situé dans le plan équatorial est dirigé vers un méridien de référence tandis que l'axe des Z pointe dans la direction de l'axe de rotation de la Terre (position moyenne conventionnelle).

4.2.2. Système de coordonnées topocentriques

4.2.2.1. Définition

Un système de coordonnées topocentriques est également couramment dénommé « système local ». En effet, un tel système s'individualise par le fait qu'il est centré sur une position à la surface de la Terre. Dans le cadre de notre étude, il s'agit d'une position occupée par un observateur potentiel.

Les axes de ce type de systèmes peuvent se définir de la manière suivante :

- l'axe *North* est situé à l'intersection entre le plan horizontal et le méridien local, dans la direction du Nord (N) ;
- l'axe *East* est situé dans le plan horizontal et est perpendiculaire à l'axe *North* (dans la direction de l'Est) (E) ;
- l'axe *Up* est perpendiculaire aux axes N et E et pointe vers le zénith (U).

Remarquons que les axes N et E sont compris dans un plan tangent à la Terre au point d'observation. On parle également de système NEU (*North East Up*). La figure 4.4 ci-après présente la superposition d'un système de coordonnées topocentriques (NEU) sur un système de coordonnées géocentriques (ECEF).

¹ Site officiel MATLAB® (<http://www.mathworks.fr/>), consultation le 10 août 2009.

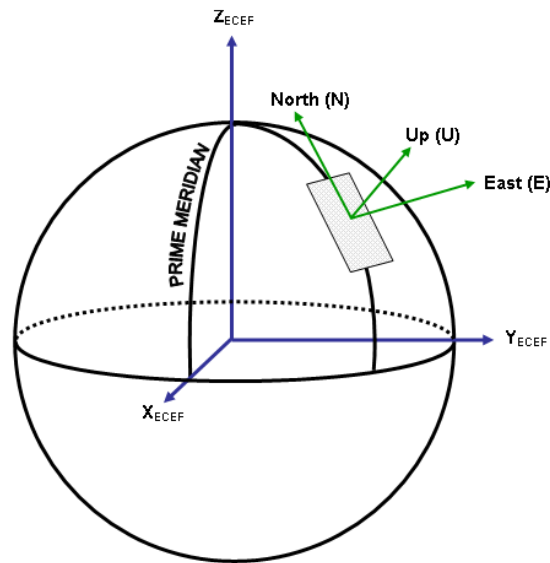


Figure 4.4. Coordonnées géocentriques et topocentriques
(Source : Encyclopédie Wikipédia 2009¹)

La position d'un point S dans un système de coordonnées topocentriques peut également s'exprimer au moyen de coordonnées sphériques, en termes d'azimut, d'élévation et de rayon, comme l'illustre la figure 4.5 ci-dessous. L'élévation η^S du point S est définie comme l'angle entre le vecteur liant l'origine du système O au point S et le plan horizontal. Il s'agit également de l'angle complémentaire de l'angle zénithal du vecteur $\underline{OS}$. L'azimut χ^S du point S est l'angle entre la projection orthogonale du vecteur $\underline{OS}$ dans le plan horizontal et l'axe *North*, compté positivement dans le sens horaire depuis l'axe *North*. Le rayon ρ^S du point S est la norme du vecteur $\underline{OS}$.

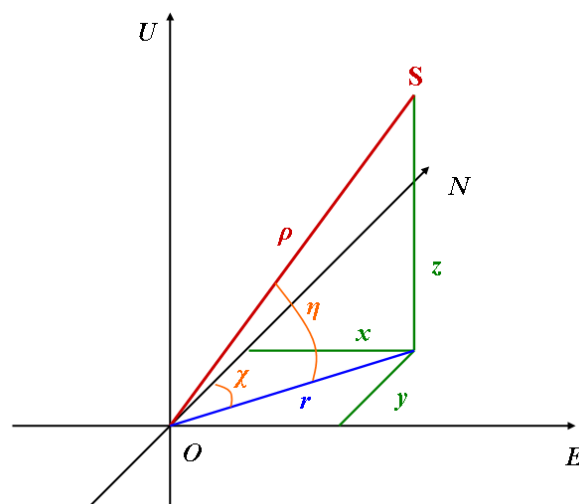


Figure 4.5. Coordonnées topocentriques sphériques

¹ Encyclopédie libre Wikipedia 2009
(http://en.wikipedia.org/wiki/Geodetic_system#Geodetic_vs_geocentric_latitude), consultation le 11 août 2009

4.2.2.2. Adaptation du modèle mathématique

Les positions des différents sites d'observation faisant l'objet de notre étude seront désignées par leurs coordonnées géographiques $(\varphi_{\text{WGS84}}, \lambda_{\text{WGS84}})$ vis-à-vis du datum WGS84 (coordonnées géocentriques).

Sur chaque site d'observation, les positions des satellites seront désignées par leurs coordonnées topocentriques sphériques, exprimées en termes d'azimut χ et d'élévation η (MOHINO 2007).

Les raisons ayant influencé ces choix sont multiples :

- facilité d'interprétation et de représentation ;
- simplification du modèle mathématique ;
- simplification de la résolution analytique de l'ajustement par moindres carrés ;
- adéquation directe avec les cartes du ciel (*skyplots*) (cf. § 4.2.3) ;
- adéquation directe avec la notion de visibilité des satellites.

A partir de la figure 4.5, nous pouvons facilement effectuer la conversion entre coordonnées rectangulaires tridimensionnelles (N^S, E^S, U^S) et coordonnées sphériques (χ^S, η^S, ρ^S) du point S . Il s'agit de projeter le vecteur $\underline{OS}$, liant l'origine O du système local au point S , sur les différents axes du système. Ainsi, on obtient :

$$N^S = \rho^S \cos \eta^S \cos \chi^S \quad (4.1)$$

$$E^S = \rho^S \cos \eta^S \sin \chi^S \quad (4.2)$$

$$U^S = \rho^S \sin \eta^S \quad (4.3)$$

Rappelons à présent la forme analytique de la matrice A^1 , contenant la géométrie de la constellation visible depuis un observateur. Cette matrice est exprimée vis-à-vis d'un système de coordonnées géocentriques :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(X^1 - X_{p,0})}{D_{p,0}^1} & -\frac{(Y^1 - Y_{p,0})}{D_{p,0}^1} & -\frac{(Z^1 - Z_{p,0})}{D_{p,0}^1} & 1 \\ -\frac{(X^2 - X_{p,0})}{D_{p,0}^2} & -\frac{(Y^2 - Y_{p,0})}{D_{p,0}^2} & -\frac{(Z^2 - Z_{p,0})}{D_{p,0}^2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{(X^n - X_{p,0})}{D_{p,0}^n} & -\frac{(Y^n - Y_{p,0})}{D_{p,0}^n} & -\frac{(Z^n - Z_{p,0})}{D_{p,0}^n} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

¹ La quatrième colonne de la matrice A peut être remplie de valeurs « 1 », en considérant le terme $-c\Delta t_p$ comme une inconnue plutôt que le terme Δt_p (équations (2.28) et (2.29)).

Chaque ligne de la matrice A contient les composantes d'un vecteur unitaire liant le récepteur à un satellite observé. En exprimant la position d'un satellite grâce à ses coordonnées sphériques (équations (4.1), (4.2) et (4.3)) au sein de la matrice A (équation 4.4)), on peut obtenir une nouvelle forme analytique de cette matrice A (équation (4.5)). Cette matrice contient toujours les cosinus directeurs des visées entre le récepteur p et les n satellites mais ceux-ci sont maintenant exprimés vis-à-vis d'un référentiel topocentrique.

$$A = \begin{bmatrix} -\cos\eta^1 \sin\chi^1 & -\cos\eta^1 \cos\chi^1 & -\sin\eta^1 & 1 \\ -\cos\eta^2 \sin\chi^2 & -\cos\eta^2 \cos\chi^2 & -\sin\eta^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos\eta^n \sin\chi^n & -\cos\eta^n \cos\chi^n & -\sin\eta^n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La position de l'observateur correspondant à l'origine du système de coordonnées topocentriques, nous pouvons écrire :

$$(X_p, Y_p, Z_p) = (0, 0, 0) \quad (4.6)$$

4.2.3. Skyplots

Les *skyplots* sont des représentations graphiques polaires orthogonales de la position des satellites dans le ciel de l'utilisateur. Sur un *skyplot*, le mouvement d'un satellite est représenté comme une fonction de l'élévation et de l'azimut de ce satellite.

Les *skyplots* constituent de précieux outils permettant de visualiser la géométrie de la constellation à un instant donné. La figure 4.6 ci-après illustre un exemple de *skyplot*. Les équations (4.7) et (4.8) permettent de calculer la position à attribuer à un satellite i sur un *skyplot*, en fonction de son azimut χ^i et de son élévation η^i . Nous avons mis au point un script MATLAB® permettant la génération automatique de *skyplots* à partir des coordonnées des satellites (cf. § A3.1).

$$X_{skyplot}^i = (90 - \eta^i) \sin\chi^i \quad (4.7)$$

$$Y_{skyplot}^i = (90 - \eta^i) \cos\chi^i \quad (4.8)$$

Bien que les équations ci-dessous permettent de construire pratiquement un *skyplot*, il est plus intuitif de considérer la position d'un satellite sur un *skyplot* à l'aide de coordonnées polaires (κ, μ) , en termes de rayon et d'azimut, telles que:

$$\kappa_{skyplot}^i = (90 - \eta^i) \quad (4.9)$$

$$\mu_{skyplot}^i = \chi^i \quad (4.10)$$

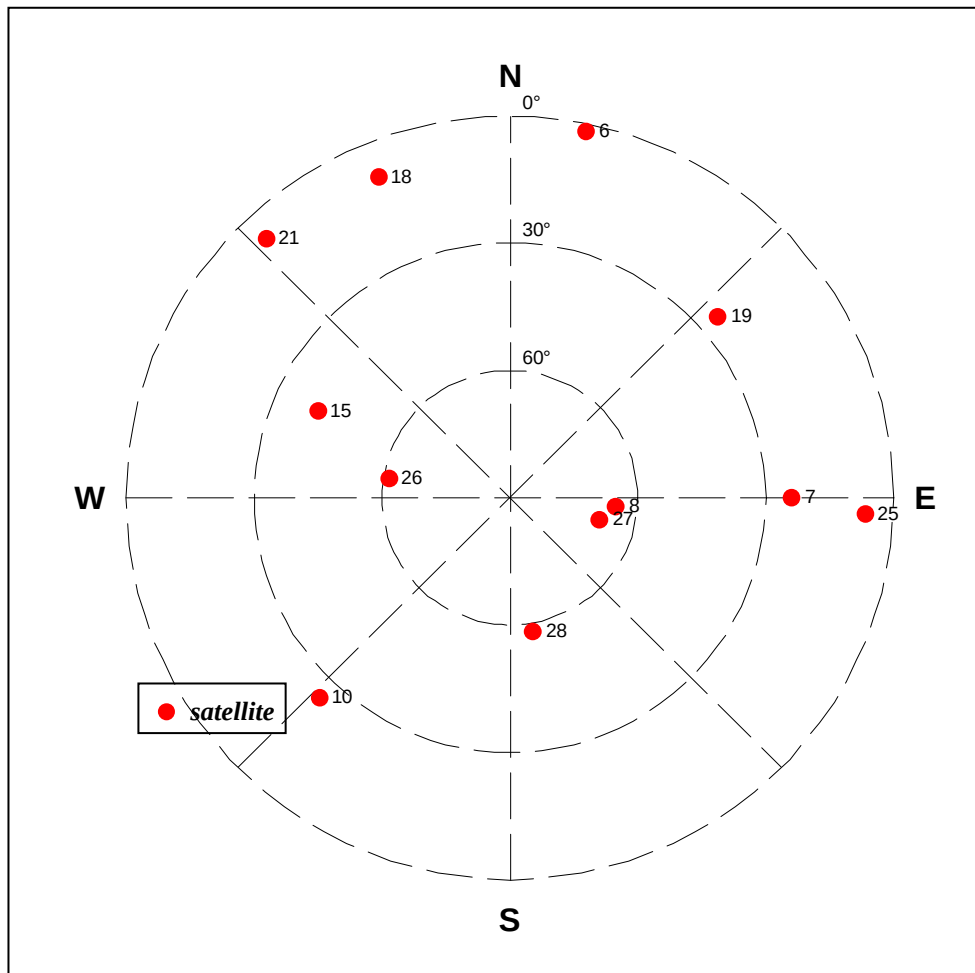


Figure 4.6. Exemple de *skyplot*

4.3. Constellation symétrique

Au travers de cette section, nous allons tenter d'appliquer une démarche intuitive afin de caractériser la variabilité du DOP en fonction des paramètres géométriques d'une constellation hautement symétrique. Cette étape va nous permettre de préciser un premier ordre de grandeur de l'intervalle de variation du DOP et de comprendre comment certains paramètres géométriques de la constellation peuvent influencer la valeur du DOP. Nous avons mentionné (cf. § 2.6.1) qu'une constellation hautement symétrique engendrait des simplifications considérables au sein de la matrice A (équation (4.5)) permettant une résolution analytique simplifiée de l'ajustement par moindres carrés.

A partir de ces considérations, nous allons tenter, dans un premier temps, de développer une forme purement analytique des différentes composantes du DOP. Ensuite, en modifiant certains paramètres de cette constellation hautement symétrique et en employant une méthode numérique, nous fournirons quelques ordres de grandeur de l'intervalle de variation du DOP.

Nous avons étudié, dans cette section, les 5 composantes du DOP suivantes:

- GDOP ;
- PDOP ;
- HDOP ;
- VDOP ;
- TDOP.

4.3.1. Aspect analytique

La figure 4.7 ci-dessous illustre la constellation symétrique considérée dans cette partie de notre étude. Cette constellation comporte 9 satellites. Le satellite portant le numéro 1 est situé au zénith tandis que les 8 autres satellites sont à même élévation η et équitablement répartis sur l'horizon (azimut χ) (MOHINO 2007).

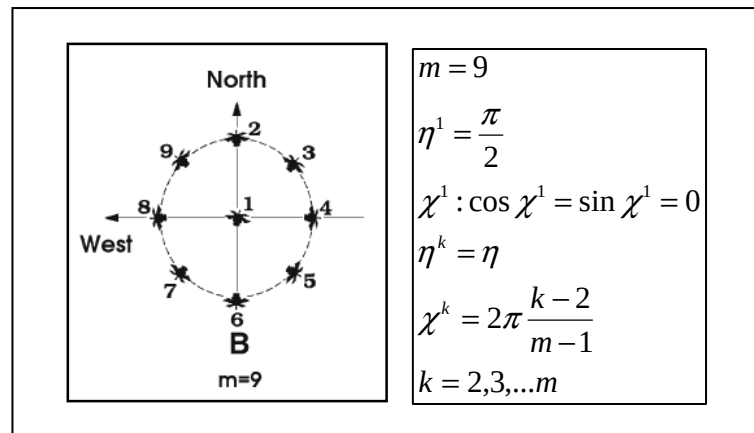


Figure 4.7. Constellation hautement symétrique
(Source : MOHINO 2007)

Les valeurs particulières d'azimut et d'élévation du satellite situé au zénith, et l'élévation identique des autres satellites au sein de cette constellation vont entraîner des simplifications au sein de la matrice A . Ainsi, l'équation (4.5) devient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\cos\eta \sin\chi^2 & -\cos\eta \cos\chi^2 & -\sin\eta & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos\eta \sin\chi^9 & -\cos\eta \cos\chi^9 & -\sin\eta & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Les valeurs du DOP sont calculées à partir de la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés $Q_{\hat{x}}$ (équations (2.63) à (2.68)). Considérant que les précisions sur les observations sont identiques (matrice de poids $P = I$), l'équation (2.60) devient :

$$Q_{\hat{x}} = (A^T A)^{-1} \quad (4.12)$$

Dans notre situation, la transposée de la matrice A est donnée par l'équation (4.13) ci-dessous :

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\eta \sin\chi^2 & \dots & -\cos\eta \sin\chi^9 \\ 0 & -\cos\eta \cos\chi^2 & \dots & -\cos\eta \cos\chi^9 \\ -1 & -\sin\eta & \dots & -\sin\eta \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

La multiplication de la matrice A par sa transposée nous fournit la matrice carrée symétrique ci-dessous. Il s'agit de la matrice normale, notée N .

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} \cos^2\eta \sum_{k=2}^m \sin^2\chi^k & \cos^2\eta \sum_{k=2}^m \sin\chi^k \cos\chi^k & \cos\eta \sin\eta \sum_{k=2}^m \sin\chi^k & -\cos\eta \sum_{k=2}^m \sin\chi^k \\ \cos^2\eta \sum_{k=2}^m \sin\chi^k \cos\chi^k & \cos^2\eta \sum_{k=2}^m \cos^2\chi^k & \cos\eta \sin\eta \sum_{k=2}^m \cos\chi^k & -\cos\eta \sum_{k=2}^m \cos\chi^k \\ \cos\eta \sin\eta \sum_{k=2}^m \sin\chi^k & \cos\eta \sin\eta \sum_{k=2}^m \cos\chi^k & (m-1)\sin^2\eta + 1 & -(m-1)\sin\eta - 1 \\ -\cos\eta \sum_{k=2}^m \sin\chi^k & -\cos\eta \sum_{k=2}^m \cos\chi^k & -(m-1)\sin\eta - 1 & m \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Cependant, il est facile de montrer que la répartition homogène des satellites sur l'horizon, telle que sur la figure 4.7, entraîne les égalités suivantes :

$$\sum_{k=2}^m \cos \chi^k = 0 \quad (4.15)$$

$$\sum_{k=2}^m \sin \chi^k = 0 \quad (4.16)$$

$$\sum_{k=2}^m \sin^2 \chi^k = \frac{m-1}{2} \quad (4.17)$$

$$\sum_{k=2}^m \cos^2 \chi^k = \frac{m-1}{2} \quad (4.18)$$

$$\sum_{k=2}^m \cos \chi^k \sin \chi^k = 0 \quad (4.19)$$

D'après les équations (4.15) à (4.19), l'équation (4.14) devient :

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} \frac{m-1}{2} \cos^2 \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m-1}{2} \cos^2 \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m-1) \sin^2 \eta + 1 & -(m-1) \sin \eta - 1 \\ 0 & 0 & -(m-1) \sin \eta - 1 & m \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Il s'agit alors d'inverser la matrice normale N afin d'obtenir la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés $Q_{\hat{x}}$ (équation (2.60) et (2.61)). Soit N^* la comatrice¹ de la matrice N , l'inverse de la matrice normale est alors calculée selon l'équation ci-dessous :

$$N^{-1} = \frac{(N^*)^T}{\det(N)} \quad (4.21)$$

¹ La comatrice (matrice des cofacteurs) de la matrice normale N , notée N^* , est la matrice contenant les cofacteurs de la matrice normale N . Le cofacteur de l'élément N_{ij} de la matrice N est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de cette matrice.

L'équation (4.22) présente la manière avec laquelle le déterminant de la matrice normale a été calculé :

$$\begin{aligned}
\det(N) &= |A^T A| = \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta \left[\left[(m-1) \sin^2 \eta + 1 \right] m - [-1 - (m-1) \sin \eta] [-1 - (m-1) \sin \eta] \right] \\
&= \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta \left[m(m-1) \sin^2 \eta + m - (1 + (m-1) \sin \eta + (m-1) \sin \eta + (m-1)^2 \sin^2 \eta) \right] \\
&= \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta \left[m^2 \sin^2 \eta - m \sin^2 \eta + m - 1 - m \sin \eta + \sin \eta - m \sin \eta + \sin \eta - m^2 \sin^2 \eta + 2m \sin^2 \eta - \sin^2 \eta \right] \quad (4.22) \\
&= \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta \left[\sin^2 \eta (m^2 - m - m^2 + 2m - 1) + \sin \eta (-m + 1 - m + 1) + m - 1 \right] \\
&= \frac{(m-1)^3}{4} \cos^4 \eta \left[\sin^2 \eta - 2 \sin \eta + 1 \right] \\
&= \frac{(m-1)^3}{4} \cos^4 \eta (\sin \eta - 1)^2
\end{aligned}$$

La comatrice de la matrice normale est donnée par l'équation (4.23) :

$$N^* = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ 0 & 0 & N_{43} & N_{44} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

avec

$$N_{11} = N_{22} = \frac{(m-1)^2}{2} \cos^2 \eta (\sin \eta - 1)^2 \quad (4.24)$$

$$N_{33} = m \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta \quad (4.25)$$

$$N_{44} = \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta (1 + (m-1) \sin^2 \eta) \quad (4.26)$$

$$N_{43} = N_{34} = \frac{(m-1)^2}{4} \cos^4 \eta (-1 - (m-1) \sin \eta) \quad (4.27)$$

Ainsi, dans le cas d'une constellation hautement symétrique, nous pouvons aboutir à une forme analytique de la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés $Q_{\hat{x}}$:

$$Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(m-1)\cos^2 \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(m-1)\cos^2 \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2} & \frac{-1 - (m-1)\sin \eta}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1 - (m-1)\sin \eta}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2} & \frac{1 + (m-1)\sin^2 \eta}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

On peut alors extraire de cette dernière matrice, les formes analytiques des différentes composantes du DOP :

$$GDOP = \sqrt{\frac{4}{(m-1)\cos^2 \eta} + \frac{m}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2} + \frac{1 + (m-1)\sin^2 \eta}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2}} \quad (4.29)$$

$$PDOP = \sqrt{\frac{4}{(m-1)\cos^2 \eta} + \frac{m}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2}} \quad (4.30)$$

$$HDOP = \sqrt{\frac{4}{(m-1)\cos^2 \eta}} = \frac{2}{\cos \eta} \sqrt{\frac{1}{m-1}} \quad (4.31)$$

$$VDOP = \sqrt{\frac{m}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2}} = \frac{1}{\sin \eta - 1} \sqrt{\frac{m}{m-1}} \quad (4.32)$$

$$TDOP = \sqrt{\frac{1 + (m-1)\sin^2 \eta}{(m-1)(\sin \eta - 1)^2}} \quad (4.33)$$

Considérer une telle constellation permet ainsi d'exprimer les différentes composantes du DOP comme de simples fonctions de l'élévation des satellites équitablement répartis sur l'horizon. Ces fonctions sont représentées sur le graphique de la figure 4.8 ci-après.

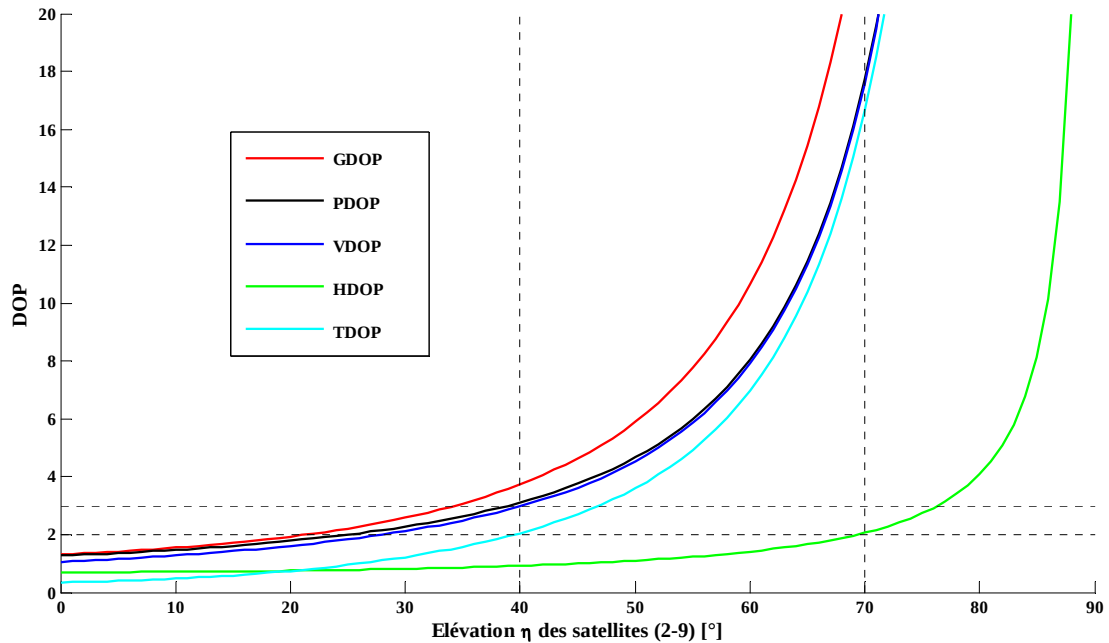


Figure 4.8. Variation des composantes du DOP en fonction de l'élévation des satellites

Les équations (4.29) à (4.33) nous permettent d'affirmer que les fonctions représentées sur le graphique de la figure 4.8 présentent toutes une asymptote verticale en $\eta = 90^\circ$. Une élévation de près de 90° des satellites répartis équitablement sur l'horizon correspond à un rassemblement de tous les satellites dans la direction du zénith. D'un point de vue géométrique, cela correspond à une diminution du volume du polyèdre construit sur les vecteurs unitaires liant le récepteur aux satellites (cf. § 2.5.3). On peut voir que cette disposition conduit à une qualité géométrique médiocre de la constellation, étant donné les très hautes valeurs prises par les composantes du DOP. La précision du positionnement dans cette situation particulière sera donc très dégradée.

L'augmentation de l'élévation des satellites répartis équitablement sur l'horizon entraîne dans tous les cas une augmentation des composantes du DOP. Néanmoins, il ressort de l'examen de ce graphique que la géométrie de la constellation peut affecter de manière très différente les multiples composantes du DOP.

On observe que le HDOP est bien moins sensible à une augmentation de l'élévation des satellites répartis sur l'horizon que les autres composantes. On peut expliquer cette observation par le fait que la répartition horizontale des satellites reste homogène même quand l'élévation des satellites augmente. Le HDOP conserve une valeur inférieure à 2 unités jusqu'à une élévation de près de 70 degrés.

Le PDOP conserve une valeur inférieure à 3 unités pour une élévation inférieure à environ 40° . Cette composante du DOP est plus sensible à une augmentation de l'élévation des satellites que le HDOP. D'après les équations (4.30) et (2.65), on peut expliquer la confusion entre les courbes du PDOP et du VDOP, pour une élévation comprise entre 0 et 70° d'élévation, par les faibles valeurs prises par le HDOP en-dessous d'une élévation de 70° .

De la même manière, les équations (4.29) et (2.64) nous permettent de comprendre pourquoi le GDOP est toujours supérieur au PDOP. Le calcul du GDOP inclut un terme supplémentaire toujours positif (cofacteur du paramètre d'horloge) par rapport au calcul du PDOP.

Enfin, on constate une forte corrélation entre les valeurs du VDOP et du TDOP pouvant s'expliquer d'après les équations (4.32) et (4.33). Les deux dénominateurs dans chacune de ces équations sont identiques. Plus l'élévation augmente, plus la valeur du numérateur de l'équation (4.33) va se rapprocher de la valeur du numérateur de l'équation (4.32).

Afin de conserver un certain parallélisme entre la partie de notre étude consacrée au positionnement absolu et celle consacrée au positionnement relatif¹, nous n'approfondirons pas l'étude du TDOP.

Le graphique de la figure 4.8 présenté ci-dessus permet d'illustrer une tendance générale de la variabilité des composantes du DOP. Le tableau 4.1 ci-dessous apporte un complément quantitatif à ce graphique, permettant de fixer un premier ordre de grandeur théorique du DOP.

Tableau 4.1. Variation des composantes du DOP en fonction de l'élévation des satellites (2-9)

Elévation η	GDOP	PDOP	HDOP	VDOP
0°	1.323	1.275	0.707	1.061
15°	1.713	1.607	0.732	1.431
30°	2.582	2.273	0.816	2.121
45°	4.626	3.757	1.000	3.621
60°	10.650	8.042	1.414	7.917
75°	43.447	31.248	2.732	31.128
90°	-	-	-	-

¹ La caractéristique principale du positionnement relatif est l'affranchissement des erreurs d'horloge des récepteurs. Les seules inconnues à déterminer dans le cas de cette technique sont donc les trois inconnues de position.

4.3.2. Aspect numérique

Nous allons à présent volontairement modifier la constellation symétrique considérée jusqu'ici afin de voir l'impact de la dissymétrie occasionnée par nos modifications sur les composantes du DOP. **Remarquons que les observations effectuées ci-après ne peuvent, en aucun cas, être mises en relation avec les équations (4.29) à (4.33) développées dans le cas précis d'une constellation hautement symétrique.**

A cet effet, nous avons figé un premier paramètre : l'élévation des satellites répartis sur l'horizon est fixée à 30°. Ensuite, nous avons comparé les valeurs du DOP calculées pour trois constellations différentes :

- cas 1 : constellation hautement symétrique (cas initial) (cf. fig. 4.7) ;
- cas 2 : regroupement des satellites dans deux quadrants voisins du *skyplot* ;
- cas 3 : regroupement des satellites dans un seul quadrant du *skyplot*.

Les résultats de cette comparaison sont présentés à la figure 4.9. Les différents *skyplots* montrent les modifications appliquées à la constellation initiale. On peut observer que le déséquilibre appliqué à la constellation entraîne une augmentation du DOP. Le déséquilibre affectant essentiellement la répartition horizontale des satellites, on peut voir que le rapport entre le HDOP et le VDOP augmente entre le cas 1 et le cas 2 ainsi qu'entre le cas 2 et le cas 3.

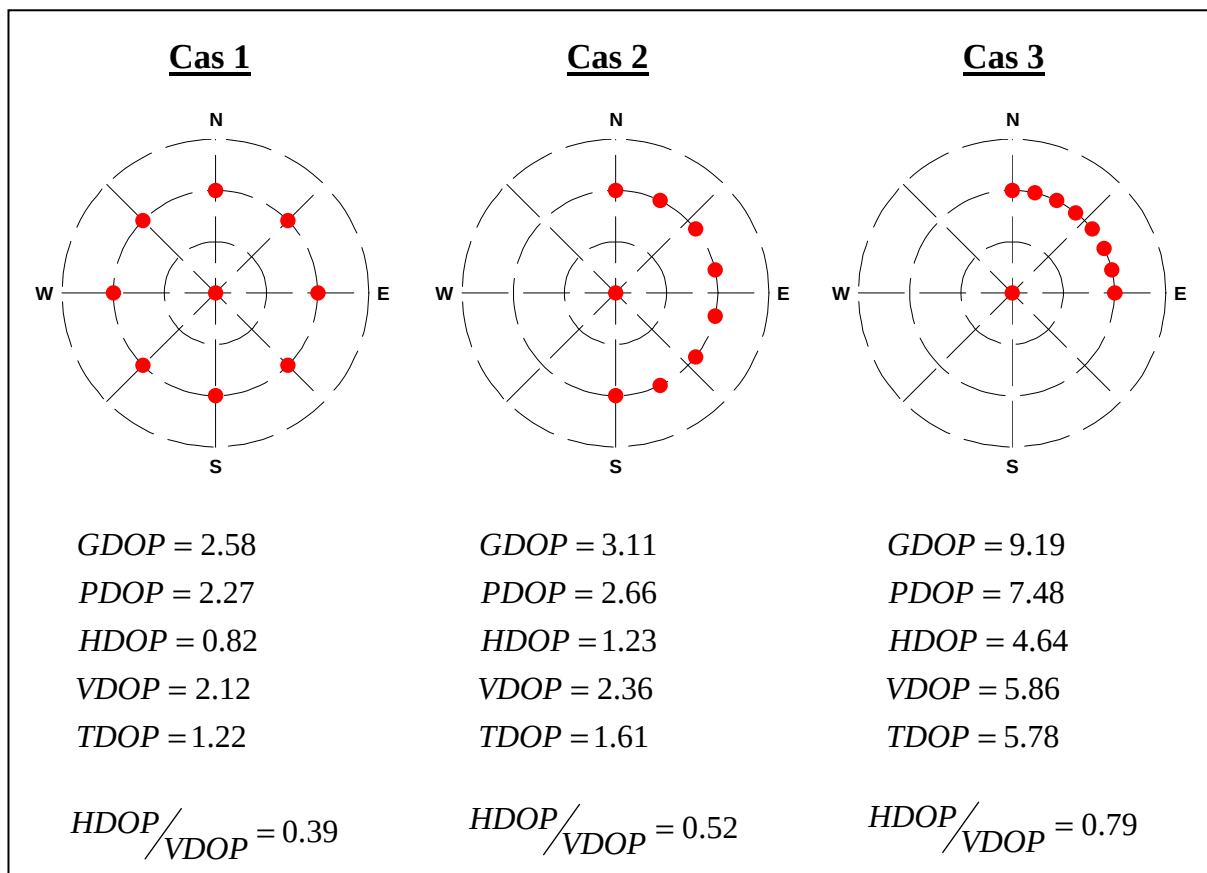


Figure 4.9. Constellation symétrique : aspect numérique de la variation du DOP

Le regroupement de tous les satellites dans un même quadrant engendre une forte élévation des valeurs de HDOP, de VDOP et de TDOP (et donc du PDOP et du GDOP). On peut donc constater que, de manière générale, toutes les composantes du DOP sont affectées par un déséquilibre prononcé de la géométrie de la constellation.

Soulignons tout de même le fait que même une modification n'affectant que la répartition horizontale des satellites peut engendrer de fortes variations de la valeur du VDOP. Nous fournirons une explication à cette observation dans la suite de notre étude (cf. § 4.6).

Nous avons ensuite voulu observer comment se comportait le DOP lorsque l'on faisait abstraction du satellite situé au zénith.

Lorsque l'on ne considère plus le satellite situé au zénith, le calcul du DOP devient impossible. En effet, cette situation particulière conduit la matrice normale vers un cas de singularité (fig. 4.10). La matrice normale n'étant plus inversible, il devient impossible de calculer la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés : la détermination du DOP est donc également impossible (équations (2.60), (2.61), (2.63) et (2.64) à (2.68)).

Ceci nous conduit à la conclusion suivante : lorsque tous les satellites de la constellation visible sont à même élévation, le calcul du DOP est impossible. Nous verrons qu'il s'agit là d'un cas très particulier que nous approfondirons en détails dans la suite de notre étude (cf. § 4.6).

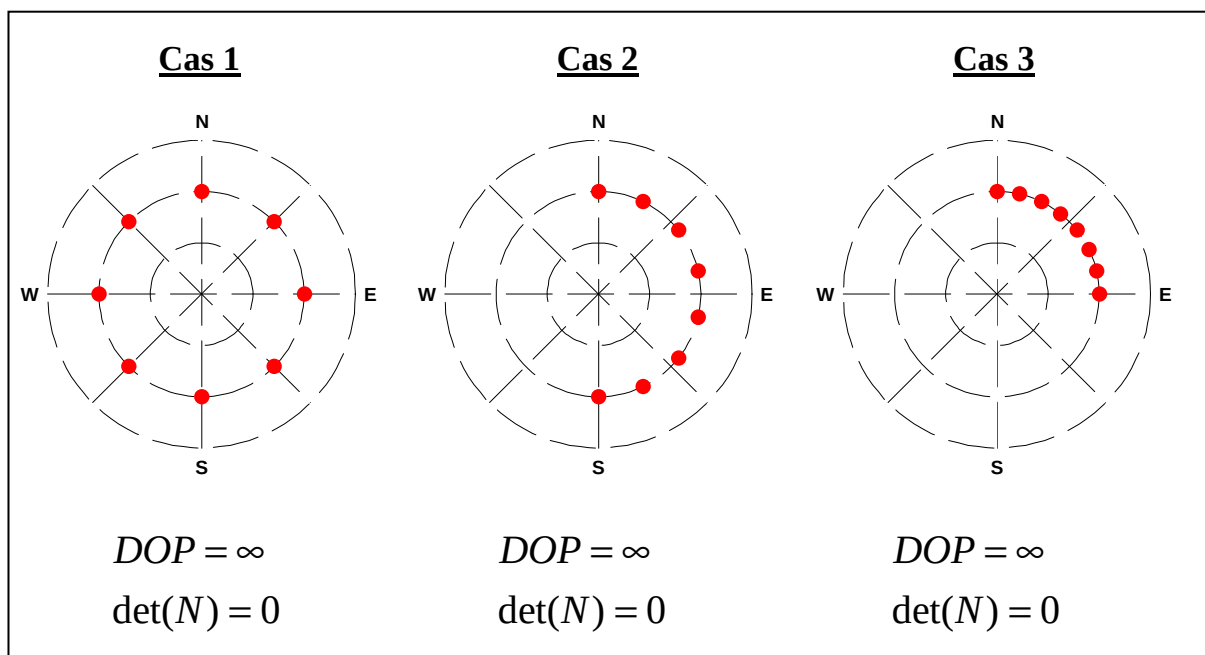


Figure 4.10. Constellation symétrique : cas de singularité

Enfin, pour conclure notre étude de la variabilité du DOP dans le cas particulier d'une constellation présentant un haut degré de symétrie, nous avons observé l'influence de la variation de l'élévation du satellite 1 sur le comportement des composantes du DOP. Le *skyplot* de la figure 4.11 ci-dessous présente les modifications successives appliquées à la position du satellite 1, initialement au zénith.

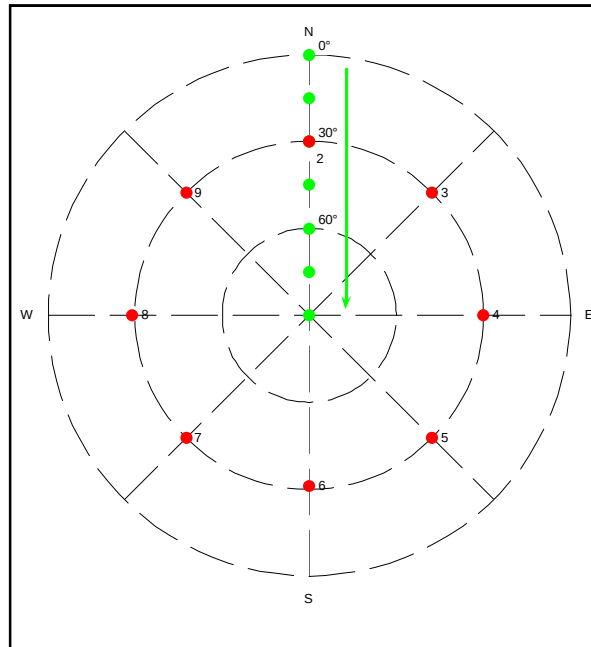


Figure 4.11. Skyplot : variation de l'élévation du satellite 1

Le graphique de la figure 4.12 ci-dessous présente la variation des différentes composantes du DOP en fonction de l'élévation du satellite 1

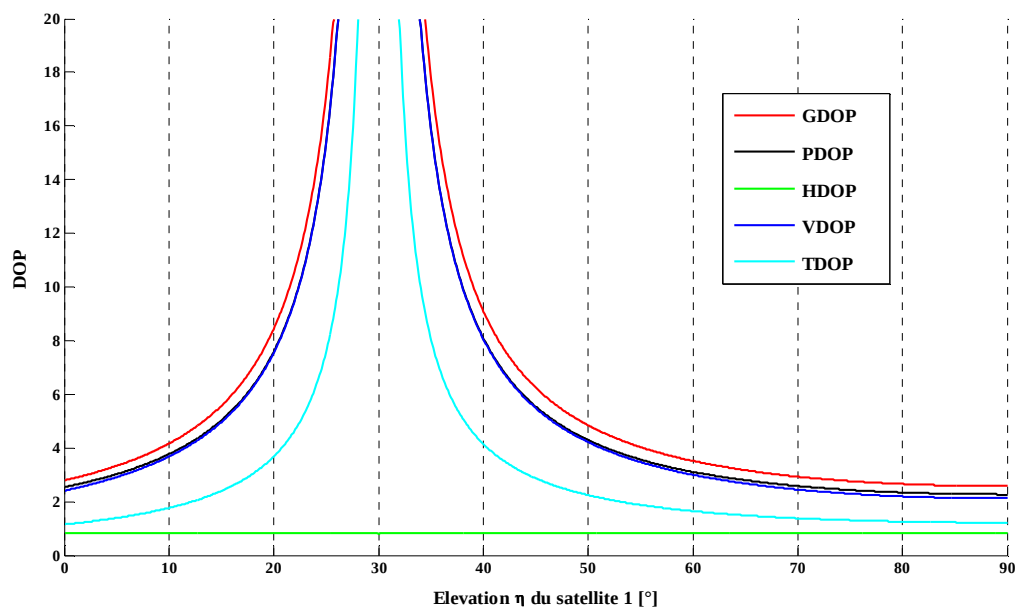


Figure 4.12. Variation du DOP en fonction de l'élévation du satellite 1

Ce graphique permet à nouveau de mettre en évidence un comportement différencié des multiples composantes du DOP.

On constate à nouveau une forte corrélation entre le GDOP, le PDOP, le VDOP et le TDOP. Ces quatre composantes du DOP présentent toutes une asymptote verticale en $\eta^1 = 30^\circ$, soit l'élévation des satellites équitablement répartis sur l'horizon.

L'influence de l'élévation du satellite 1 se fait fortement ressentir sur les valeurs de VDOP et de TDOP et, par conséquent, sur les valeurs de PDOP et de GDOP (équations (2.64) à (2.68)). On constate que plus l'élévation du satellite 1 est proche de la valeur d'élévation des satellites équitablement répartis sur l'horizon, plus la précision sur le positionnement vertical sera dégradée.

Quelle que soit l'élévation du satellite 1 (sauf $\eta^1 = 30^\circ$), le HDOP conserve une valeur constante de 0.816 unités. La variation de l'élévation du satellite 1 ne dégrade donc nullement la précision du positionnement horizontal qui reste d'excellente qualité, en raison de la répartition homogène des satellites sur l'horizon. Cette observation peut s'expliquer par le fait que certaines des hypothèses posées dans le cas d'une constellation hautement symétrique (équations (4.15) à (4.19)) restent valables malgré la modification apportée au niveau de l'élévation du satellite 1. Nous pourrions démontrer que la variation de l'élévation du satellite 1 n'affecte pas les deux premiers termes diagonaux de la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés (équation (2.67)), à partir desquels est calculée la valeur de HDOP.

Lorsque l'élévation du satellite 1 est égale à 30° , cette situation correspond au cas présenté précédemment dans lequel tous les satellites étaient caractérisés par une même élévation. Cette géométrie particulière conduit à une impossibilité de calculer les composantes du DOP, expliquant l'asymptote verticale. Pour $\eta^1 = 30^\circ$, la valeur du HDOP ne peut pas non plus être calculée (absence de valeur de HDOP pour $\eta^1 = 30^\circ$), **bien que cela ne soit pas visible sur le graphique**. La suite de notre étude est spécifiquement consacrée à ce type d'évènements particuliers (cf. § 4.6).

4.4. Développement d'un outil d'analyse : « DOPA »

4.4.1. Objectifs

Afin de permettre la généralisation de notre étude sur des constellations plus réalistes, nous avons développé un outil informatique spécifique offrant la possibilité d'effectuer plusieurs types de traitements s'appliquant directement sur les fichiers sources générés par le programme de l'IRM. Le nom que nous avons donné à cet outil est « DOPA » (DOP Absolu).

Tout au long de la conception de cet outil, l'objectif poursuivi a été de concevoir une interface conviviale et flexible afin de permettre à un quelconque utilisateur de travailler à un niveau d'abstraction supérieur, sans devoir manipuler le code source. Cet outil a été développé sous MATLAB® (cf. § 4.1.3).

Le but de cette section est de présenter les principes directeurs de la conception de cet outil ainsi que ses fonctionnalités principales. Pour des informations d'ordre technique, nous renvoyons le lecteur vers l'annexe 1 (cf. § A1).

4.4.2. Possibilités

4.4.2.1. Sélection des données

L'interface développée permet non seulement la sélection d'un unique fichier de données (cf. § 4.1.2) mais également la sélection directe d'un groupe de fichiers ou d'un dossier de données. Rappelons qu'un fichier de données individuel contient les positions des satellites visibles pour un site et un jour d'observation donnés. Il est également possible de préciser le dossier de destination des fichiers contenant les résultats des traitements opérés. Ces sélections s'opèrent au moyen de fenêtres permettant de naviguer dans l'arborescence du disque dur de la machine.

A partir d'un dossier contenant les fichiers sources, il est par exemple possible, par le biais de l'interface, de sélectionner tous les fichiers correspondant à une latitude fixée (longitude variable) ou à une longitude fixée (latitude variable).

L'outil de sélection des données est accompagné d'un panneau d'affichage permettant à l'utilisateur d'avoir une vue sur la sélection de fichiers retenue par le programme. Outre les noms des dossiers sélectionnés et le nombre précis de fichiers retenus, ce panneau d'affichage reprend également certaines des métadonnées relatives aux fichiers sources (fig. 4.17).

4.4.2.2. Calcul du DOP

La première fonction principale de notre interface est le calcul automatisé du DOP à partir des données sources précisées par la sélection de l'utilisateur.

Pour chaque époque d'observation (par pas de 30 secondes) et pour chaque fichier sélectionné, cette fonction permet de calculer les différentes composantes du DOP (GDOP, PDOP, TDOP, HDOP et VDOP) ainsi que le nombre de satellites visibles.

Ces résultats sont ensuite enregistrés dans des fichiers et stockés dans le dossier de destination indiqué précédemment. A chaque fichier source, correspond un fichier de résultats. La structure des fichiers résultats est présentée à la figure 4.13.

	Nb Sat.	GDOP	PDOP	TDOP	HDOP	VDOP
0	—	—	—	—	—	—
30	—	—	—	—	—	—
60	—	—	—	—	—	—
90	—	—	—	—	—	—
120	—	—	—	—	—	—
150	—	—	—	—	—	—
180	—	—	—	—	—	—
210	—	—	—	—	—	—
240	—	—	—	—	—	—
...	—	—	—	—	—	—
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
86400	—	—	—	—	—	—

Figure 4.13. Structure des fichiers résultats générés par DOPA

Cette fonction peut également être paramétrée par une valeur de masque. Le masque est l'élévation minimale des satellites pris en compte dans le calcul du positionnement. On observe en effet que sous un certain seuil d'élévation, les influences physiques affectent de manière trop importante les mesures effectuées sur les signaux électromagnétiques. La prise en compte de mesures trop imprécises au sein d'un ajustement affecterait inévitablement la précision des paramètres ajustés (cf. § 2.4.2).

Lors du lancement de cette fonction, l'utilisateur peut choisir de générer un graphique de visibilité de la constellation accompagnant chaque fichier résultat. Un exemple de ce type de graphique est présenté à la figure 4.14. Il s'agit du graphique de visibilité des satellites GPS au 1^{er} janvier 2009 depuis le site de latitude $\varphi = 45^\circ N$, de longitude $\lambda = 15^\circ N$ et de hauteur ellipsoïdale $h = 0\text{ m}$. Le masque d'élévation appliqué est de 15° .

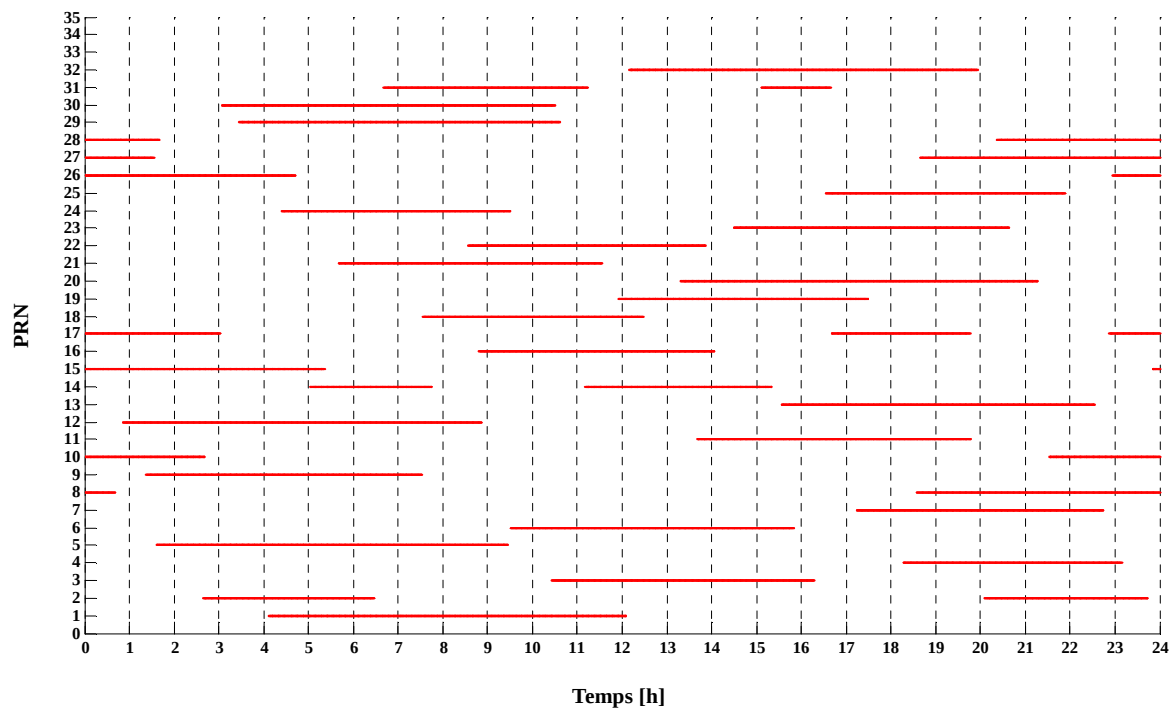


Figure 4.14. Graphique de visibilité de la constellation
 ($\varphi=15^\circ N$, $\lambda=15^\circ E$, $h=0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

4.4.2.3. Analyse des résultats

La seconde fonction principale de notre outil est de permettre à l'utilisateur d'exploiter pleinement les résultats précédents en calculant toute une série d'estimateurs statistiques sur les différentes composantes du DOP :

- la moyenne ;
- la médiane ;
- le minimum
- le maximum ;
- l'écart-type ;
- la variance ;
- les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance à 95% ;
- les valeurs de percentile 5% et 95% ;
- le nombre d'époques d'observations durant lesquelles le calcul d'une position est rendu impossible en raison d'un nombre trop peu élevé de satellites visibles.

La figure 4.15 représente la structure des fichiers de statistiques générés par le programme DOPA.

<i>Lat. Long.</i>	<i>Moy.</i>	<i>Med.</i>	<i>Min.</i>	<i>Max.</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Var.</i>	<i>±IC95</i>	<i>P₀₅</i>	<i>P₉₅</i>	<i>Ep. perdues</i>
-- --	--	--	--	--	--	--	-- --	--	--	--
-- --	--	--	--	--	--	--	-- --	--	--	--
-- --	--	--	--	--	--	--	-- --	--	--	--

Figure 4.15. Structure des fichiers de statistiques générés par le programme DOPA

Cette fonction génère également un graphique représentant la variabilité des composantes du DOP en fonction du temps. La sélection individuelle des différentes composantes du DOP est rendue possible au moyen d'un panneau de sélection. L'utilisateur a également la possibilité de superposer, sur un même graphique, plusieurs courbes correspondant à plusieurs sites d'observation.

La figure 4.16 ci-dessous présente un exemple du type de graphique qu'il est possible de générer à l'aide de notre programme DOPA. Sur ce graphique, nous avons affiché plusieurs courbes représentant la variation journalière, au 1^{er} janvier 2009, du PDOP pour différents sites d'observation. Le masque d'élévation appliqué est de 15°.

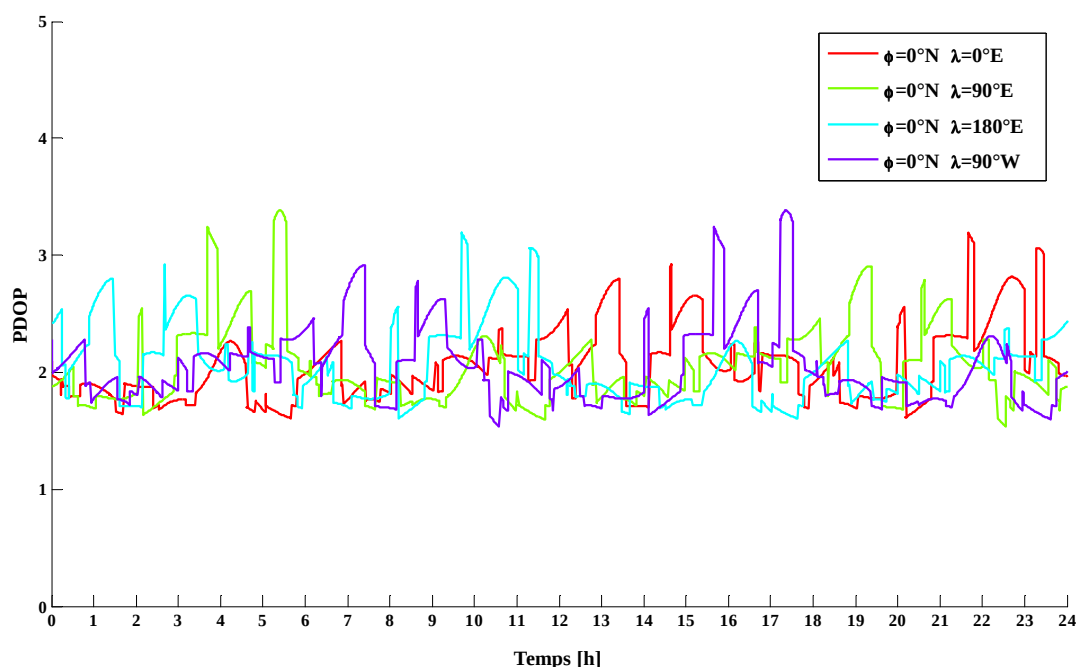


Figure 4.16. Variabilité journalière du PDOP pour différents sites d'observation
($h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

4.4.3. Interface

L'interface du programme DOPA est présentée à la figure 4.17. On y retrouve les éléments précités, à savoir :

- un panneau de sélection des données ;
- un panneau d'informations générales
- un panneau de sélection des paramètres de sortie ;
- un champ de texte permettant de préciser un masque d'élévation minimum ;
- plusieurs boutons permettant de lancer les différentes fonctions.

LONCHAY
Matthieu
M2 GEOM.

Année académique 2008-2009

DOPA

Variation de la géométrie de la constellation en fonction de la latitude/longitude

Données

Sélection

Latitude (°):

Longitude (°):

Résultats

Graphiques

☒ Graphique PRN/Time

Masque (°)

Ok

Progression
0/11

M/S/G/D

Initialisation

Paramètres de sortie

☐ GDOP
☐ PDOP
☒ TDOP
☐ HDOP
☐ VDOP
☐ NB SAT

Infos

Dossier de données:	Data
Dossier de résultats:	
Nb fichiers:	11
Latitude (°):	v
Longitude (°):	15
Durée ép. obs (s):	30
Durée obs (s):	86400
Nb époques:	2881
YY:	2009
DOY:	001

Figure 4.17. Interface de DOPA

4.5. Variabilité spatio-temporelle du DOP

Le programme DOPA nous a permis de poursuivre notre étude de la variabilité spatio-temporelle du DOP, et de généraliser celle-ci sur des constellations GPS réalistes.

4.5.1. Méthodologie

Etant donné les caractéristiques propres de la constellation GPS (cf. § 2.2.4), la géométrie des satellites visibles au-dessus d'un site d'observation évolue de manière périodique (période : 11h58 UTC). Les données dont nous disposons correspondent toujours à une journée complète d'observation (1^{er} janvier 2009). La couverture temporelle des données est donc suffisante que pour pouvoir observer toutes les configurations géométriques possibles de la constellation visible au-dessus d'un site d'observation¹.

Afin de conserver un certain parallélisme avec la partie de notre étude consacrée au positionnement relatif (cf. chapitre 5), nous avons concentré nos observations sur une composante particulière du DOP : le PDOP². Néanmoins, nous vérifierons qu'il existe bel et bien une corrélation forte entre la valeur du PDOP et les valeurs du HDOP et du VDOP pour un même site d'observation.

Dans un premier temps, nous tenterons d'observer l'influence du masque d'élévation sur la qualité de la géométrie de la constellation visible. Trois valeurs de masque d'élévation seront envisagées :

- masque de 0° ;
- masque de 15° ;
- masque de 20° .

L'étude sera poursuivie par une recherche de l'influence de la longitude du site d'observation sur les valeurs observées du PDOP. Trois longitudes caractéristiques seront ainsi sélectionnées :

- $0^\circ E$;
- $120^\circ E$;
- $240^\circ E = 120^\circ W$.

Ensuite, nous vérifierons l'existence d'une relation entre la latitude du site d'observation et la valeur du PDOP. Nous considérerons, à cet effet, trois latitudes caractéristiques :

- équateur ($0^\circ N$) ;
- latitude moyenne ($45^\circ N$) ;
- pôle ($90^\circ N$).

¹ La désactivation temporaire ou définitive de certains satellites ainsi que le lancement de nouveaux satellites GPS peuvent modifier les propriétés de la constellation GPS faisant l'objet de notre étude.

² Dans le cas du positionnement relatif, la désynchronisation de l'horloge du récepteur ne fait plus partie des paramètres inconnus à estimer. Le RGDOP correspond donc au RPDOP (cf. § 2.5.2.2).

Nous étudierons également l'impact d'un changement d'hémisphère sur les valeurs observées du PDOP :

- Hémisphère Nord (3 latitudes) ;
- Hémisphère Sud (3 latitudes).

Enfin, nous clôturerons l'étude de la variabilité spatio-temporelle du PDOP en tentant de fournir un ordre de grandeur de l'intervalle de variation de cet indicateur. Nous comparerons cet ordre de grandeur avec les valeurs du PDOP généralement admises comme acceptables.

Plutôt que de tenter une analyse et une comparaison de tous les résultats possibles engendrés par la variation des nombreux paramètres évoqués, nous avons estimé plus judicieux d'appliquer une démarche arborescente. La figure 4.18 ci-dessous schématise la démarche arborescente que nous avons suivie. A chaque étape, nos observations s'appuieront sur un graphique et une sélection de paramètres statistiques.

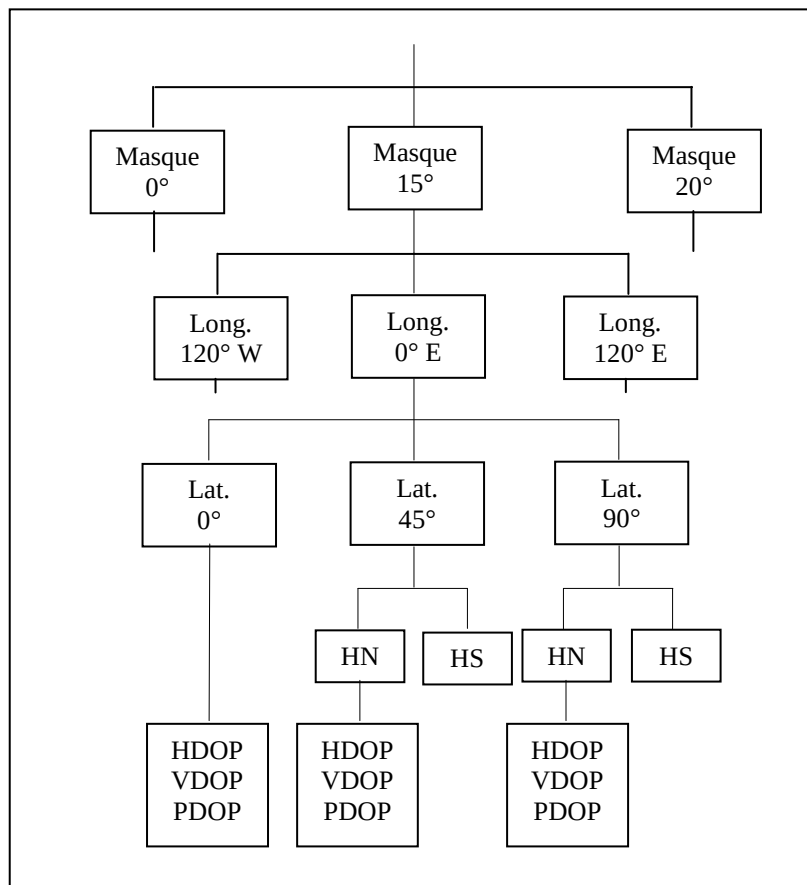


Figure 4.18. Démarche arborescente de l'étude de la variabilité spatio-temporelle du DOP

4.5.2. Influence du masque d'élévation

Le graphique de la figure 4.19 ci-dessous représente la variabilité journalière du PDOP pour trois valeurs de masque d'élévation distinctes (0° , 15° et 20°). Afin d'illustrer nos propos, nous avons choisi le site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 45^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$). Ce choix n'affecte en rien la généralité de nos résultats.

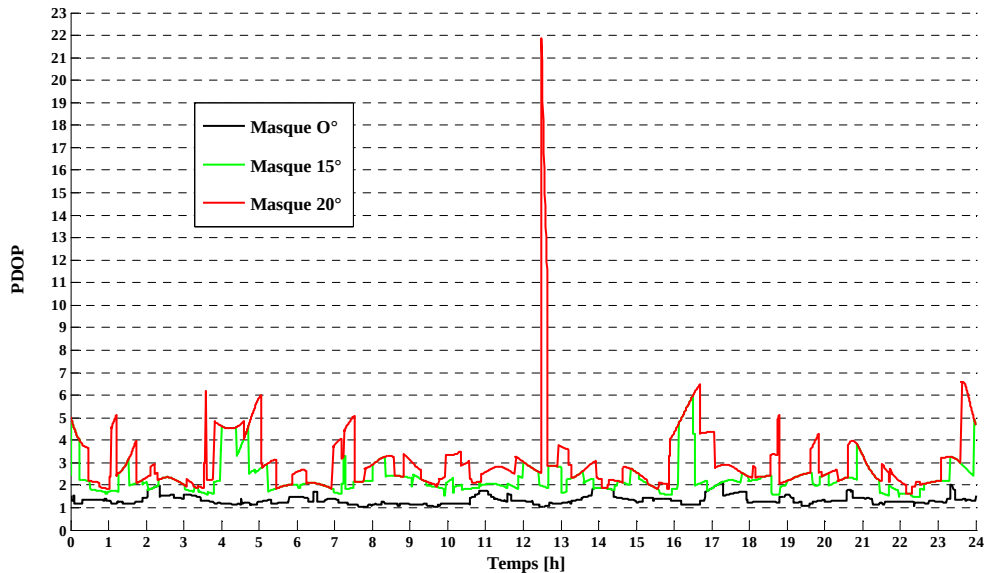


Figure 4.19. Influence du masque d'élévation sur le PDOP
($\varphi = 45^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, 01/01/2009)

Le graphique de la figure 4.20 montre l'influence du masque d'élévation sur le nombre de satellites visibles depuis ce site d'observation.

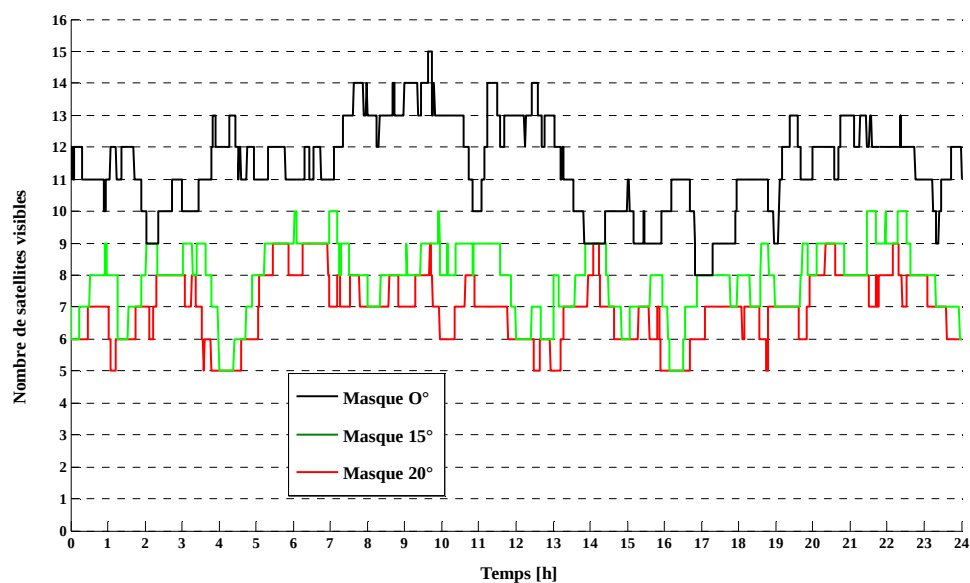


Figure 4.20. Influence du masque d'élévation sur le nombre de satellites visibles
($\varphi = 45^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, 01/01/2009)

Le graphique de la figure 4.19 nous permet d'observer à quel point la valeur du masque d'élévation va influencer la qualité de la géométrie de la constellation visible. Concrètement, une augmentation de la valeur du masque va conduire à une réduction du nombre de satellites considérés pour le positionnement. Or, nous avons vu que le nombre de satellites conditionnait directement la valeur du DOP (cf. § 2.5.2.1). Le graphique de la figure 4.20 corrobore ces observations.

Au-delà d'une valeur de 20° , le masque d'élévation est tel qu'il ne devient plus possible d'effectuer un calcul de positionnement à chaque période d'observation de la journée considérée, le nombre de satellites considérés devenant parfois inférieur à 4.

Le tableau 4.2 ci-dessous présente une sélection de paramètres statistiques de la variation journalière du PDOP pour ce site d'observation. Le tableau 4.3 contient des informations statistiques concernant le nombre de satellites visibles.

Tableau 4.2. Paramètres statistiques du PDOP

($\varphi = 45^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, 01/01/2009)

	Moyenne	Maximum	P ₉₅
Masque 0°	1.338	2.145	1.821
Masque 15°	2.303	5.988	4.055
Masque 20°	3.036	21.861	5.121

Tableau 4.3. Paramètres statistiques du nombre de satellites visibles

($\varphi = 45^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, 01/01/2009)

	Moyenne	Minimum	Maximum
Masque 0°	11.409	8	15
Masque 15°	7.871	5	10
Masque 20°	6.960	5	9

Des figures 4.19 et 4.20 ainsi que des tableaux 4.2 et 4.3, nous pouvons effectuer plusieurs constatations.

L'absence de masque d'élévation conduit la plupart du temps le PDOP vers des valeurs inférieures à 2 unités. Il y a en permanence un minimum de 8 satellites visibles. A certains moments de la journée, on peut même observer jusqu'à 15 satellites simultanément.

Un masque de 15 degrés d'élévation, correspondant au masque appliqué dans beaucoup d'applications, permet d'observer en permanence un minimum de 5 satellites. Rappelons que la constellation GPS a été conçue pour répondre à ce type d'exigences. Le PDOP conserve, la plupart du temps, une valeur inférieure à 4 unités et ne présente pas de brusques variations.

Un masque de 20° d'élévation entraîne régulièrement une chute du nombre de satellites visibles à 5. On peut également observer une brusque augmentation du PDOP atteignant une valeur de près de 22 unités vers 12h30. A cet instant, seuls 5 satellites sont visibles. Il est d'ores et déjà très intéressant de remarquer qu'une diminution du nombre de satellites visibles n'est pas seule responsable de l'augmentation du PDOP. En effet, le nombre de satellites visibles tombe également à 5 à plusieurs autres moments de la journée sans pour autant entraîner une telle augmentation du PDOP.

Au vu de ces premières observations, nous appliquerons un masque d'élévation d'une valeur de 15° pour toute la suite de notre étude. Il s'agit de la valeur la plus réaliste vis-à-vis des applications courantes.

4.5.3. Influence de la longitude

Afin de souligner une éventuelle influence de la longitude du site d'observation sur la valeur du PDOP, nous fixerons temporairement la latitude à $45^{\circ}N$. Nous avons vérifié que le choix d'une autre latitude n'altérerait pas la généralité de nos propos.

Le graphique de la figure 4.21 ci-dessous représente la variabilité journalière du PDOP pour différentes longitudes.

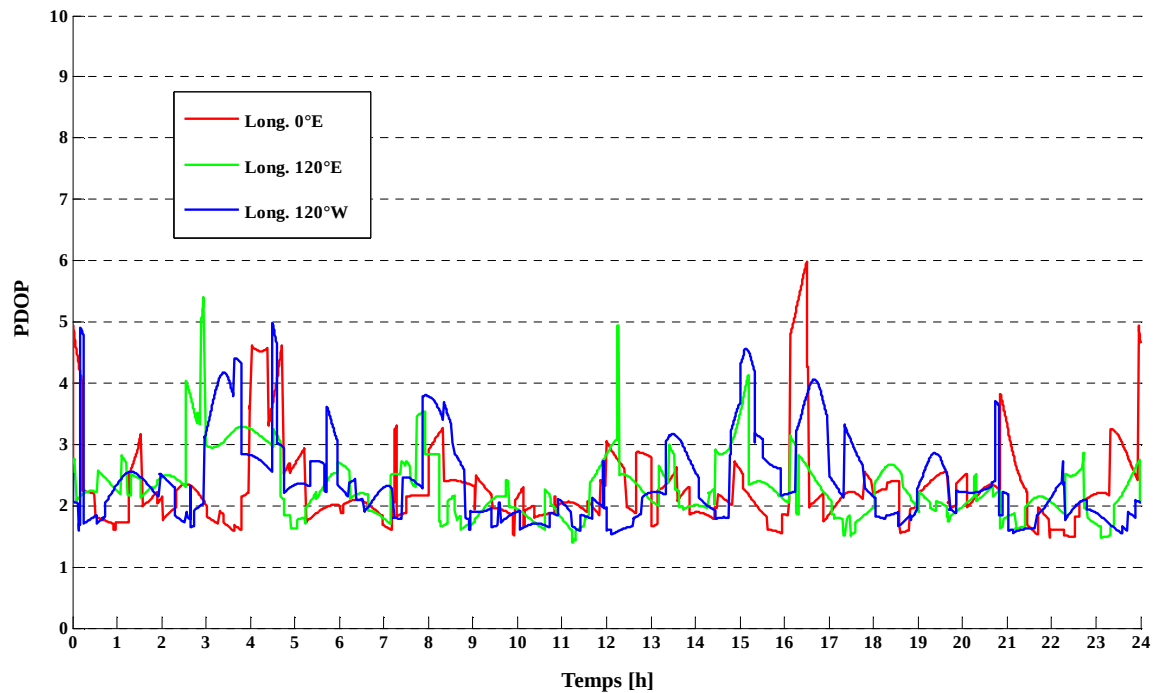


Figure 4.21. Influence de la longitude sur le PDOP
($\varphi = 45^{\circ}N$, $h = 0\text{ m}$, $M15^{\circ}$, 01/01/2009)

Le tableau 4.5 ci-dessous présente une sélection de paramètres statistiques de la variabilité journalière du PDOP en fonction de la latitude.

Tableau 4.4. Paramètres statistiques du PDOP
($\varphi = 45^{\circ}N$, $h = 0\text{ m}$, $M15^{\circ}$, 01/01/2009)

Latitude	Longitude	Moyenne	Maximum	P ₉₅
45°N	O°E	2.303	5.988	4.055
45°N	120°E	2.314	5.409	3.261
45°N	120°W	2.385	4.977	3.943

De l'observation du graphique de la figure 4.21 et du tableau 4.4, il ressort qu'il n'y a pas de différence significative entre le PDOP aux différentes longitudes. En effet, l'intervalle de variation du PDOP est du même ordre de grandeur pour chaque longitude considérée. Par ailleurs, les valeurs moyennes du PDOP sont également très semblables entre ces trois longitudes.

Dans la suite de notre étude, nous pourrions donc réduire le nombre de paramètres en fixant la valeur de la longitude.

4.5.4. Influence de la latitude

Nous allons à présent tenter d'observer si la latitude du lieu d'observation influence la qualité de la géométrie de la constellation. Les observations précédentes nous permettent de fixer les paramètres de longitude ($\lambda = 0^\circ E$) et du masque d'élévation ($M15^\circ$). La figure 4.22 représente la variabilité journalière du PDOP pour trois latitudes caractéristiques envisagées.

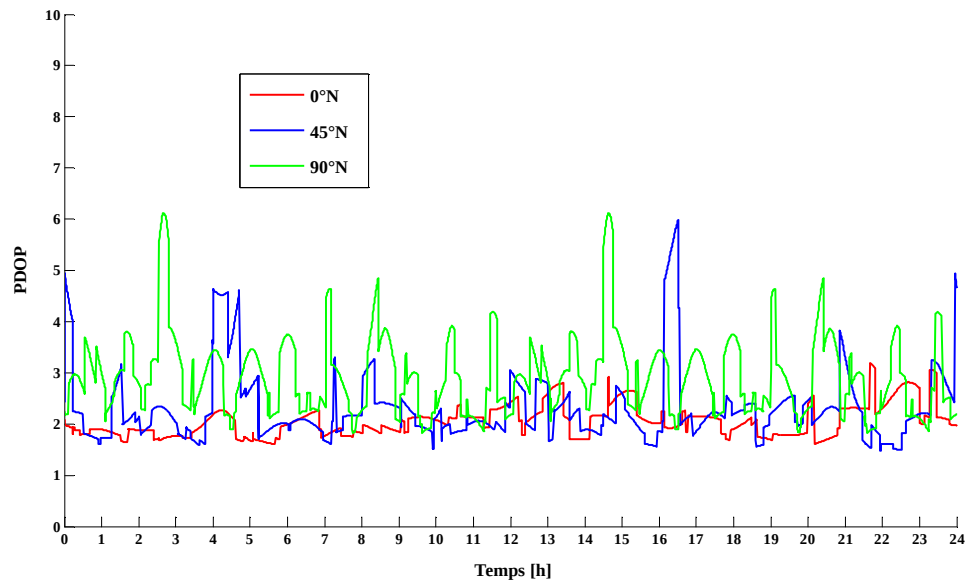


Figure 4.22. Influence de la latitude sur le PDOP
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

La figure 4.23 représente l'influence de la latitude sur la variation journalière du nombre de satellites visibles.

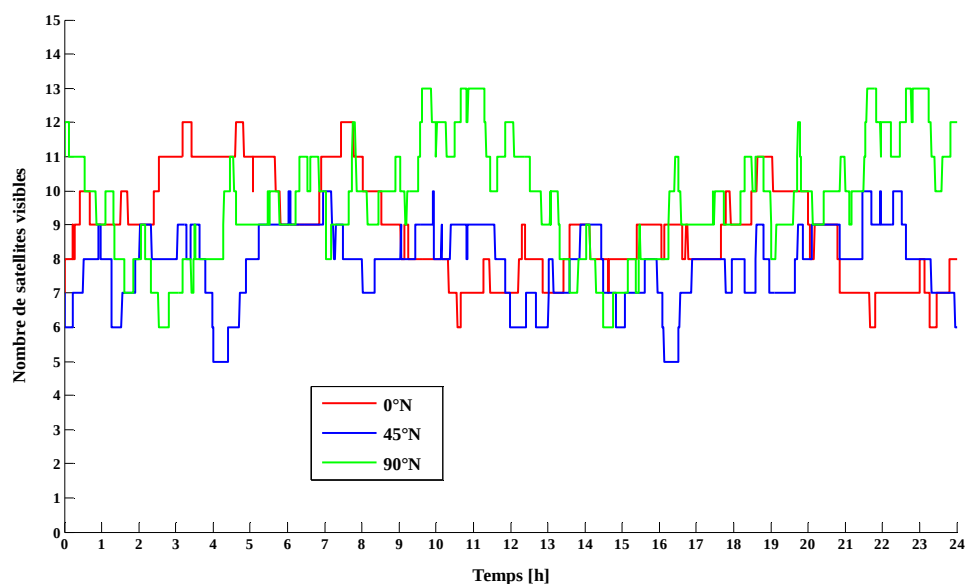


Figure 4.23. Influence de la latitude sur le nombre de satellites visibles
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Le tableau 4.5 ci-dessous contient des informations statistiques concernant la variabilité du PDOP aux différentes latitudes envisagées. Le tableau 4.6 contient des informations statistiques relatives au nombre de satellites visibles aux différentes latitudes envisagées.

Tableau 4.5. Paramètres statistiques du PDOP
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Latitude	Longitude	Moyenne	Maximum	P ₉₅
0°N	0°E	2.053	3.198	2.708
45°N	0°E	2.303	5.988	4.055
90°N	0°E	2.933	6.126	4.173

Tableau 4.6. Paramètres statistiques du nombre de satellites visibles
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Latitude	Longitude	Moyenne	Minimum	Maximum
0°N	0°E	8.865	6	12
45°N	0°E	7.871	5	10
90°N	0°E	9.701	6	13

Il apparaît très clairement sur le graphique de la figure 4.22 que le PDOP est bel et bien influencé par la latitude du lieu d'observation. Cette observation peut être mise en relation avec la configuration orbitale de la constellation GPS.

Le PDOP conserve en permanence de faibles valeurs à l'équateur avec un maximum de 3.198. Une information intéressante est apportée par le percentile 95 qui nous spécifie que le PDOP est inférieur à une valeur de 2.708 durant 95% du temps. La géométrie de la constellation GPS au-dessus de l'équateur est donc très favorable à un positionnement de haute précision.

Aux latitudes moyennes (45°N) et au pôle Nord (90°N), on observe des maximas semblables (5.988 et 6.126) mais un PDOP moyen supérieur à la latitude de 90°N.

D'après le graphique de la figure 4.23 et le tableau 4.6, on peut voir que le nombre moyen de satellites visibles est supérieur à la latitude de 90°N. Bien que ce soit à cette latitude que l'on observe le plus grand nombre de satellites visibles, on constate que c'est également à cette latitude que la qualité de la géométrie de la constellation est la moins bonne.

Une fois encore, cette observation nous confirme qu'un nombre élevé de satellites visibles n'est pas une condition suffisante à l'obtention d'une géométrie de bonne qualité.

4.5.5. Influence de l'hémisphère

Afin d'observer si le changement d'hémisphère a un impact sur la qualité de la géométrie de la constellation visible, nous allons comparer le PDOP aux latitudes 45°N et 45°S ainsi qu'aux latitudes 90°N et 90°S. Les résultats qui précèdent nous permettent de choisir une longitude.

Le graphique de la figure 4.24 ci-dessous présente une comparaison entre la variabilité journalière du PDOP à la latitude de 45° dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

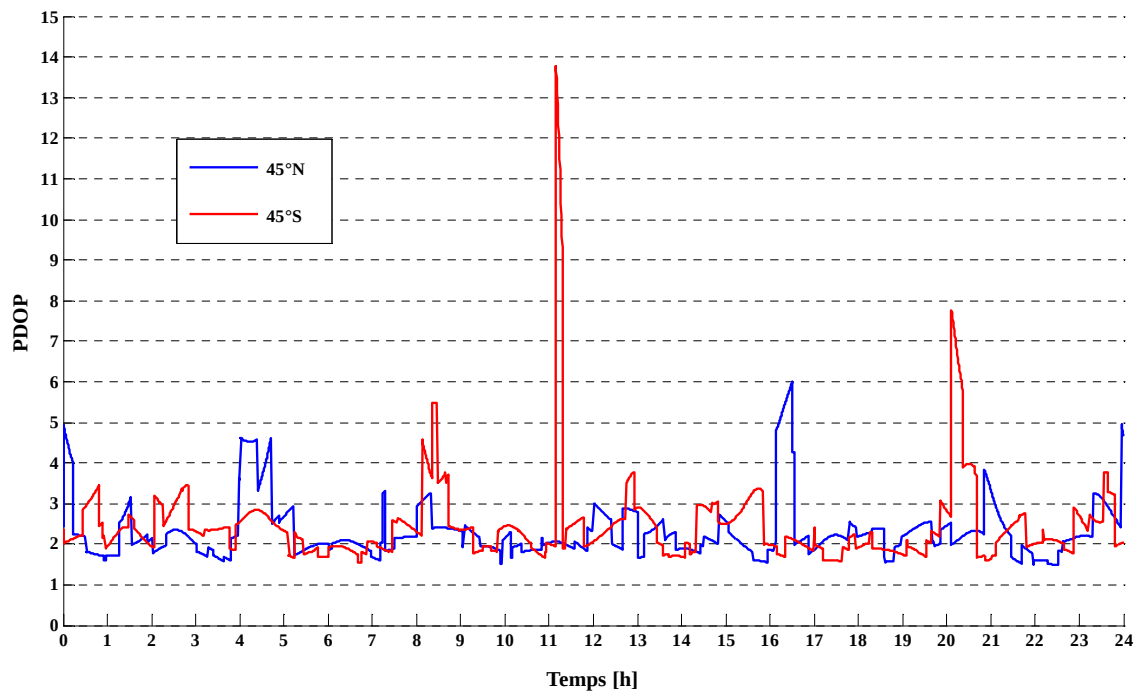


Figure 4.24. Influence de l'hémisphère sur le PDOP : 45°S/45°N
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Le tableau 4.7 ci-dessous présente une série de paramètres statistiques de la variabilité du PDOP aux différentes latitudes envisagées, dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

Tableau 4.7. Paramètres statistiques du PDOP
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Latitude	Longitude	Moyenne	Maximum	P ₉₅
90°S	0°E	2.952	5.726	4.195
45°S	0°E	2.452	13.777	3.738
45°N	0°E	2.303	5.988	4.055
90°N	0°E	2.933	6.126	4.173

De l'examen des données contenues dans le tableau 4.7, il ressort que les valeurs moyennes du PDOP ainsi que les percentiles 95 ne diffèrent pas de manière significative entre l'hémisphère sud et l'hémisphère nord.

Sur le graphique de la figure 4.24, on observe ponctuellement deux fortes augmentations du PDOP à la latitude de 45°S. Le PDOP atteint une valeur de près de 14 unités vers 11 h 15 et une valeur de près de 8 unités vers 20 h 30. De telles augmentations ne sont pas observées à la latitude de 45°N. Nous verrons que des variations brutales du PDOP peuvent être dues à la disparition ou à l'apparition soudaine d'un seul satellite. Certaines configurations géométriques très particulières peuvent également engendrer ce type de phénomènes.

Globalement, on peut observer un comportement semblable du PDOP dans les deux hémisphères même si on atteint ponctuellement une valeur extrême de PDOP à la latitude de 45°S. Nous apporterons, dans la suite de notre étude, une explication à ce type d'évènements ponctuels (cf. § 4.6).

Le graphique de la figure 4.25 ci-dessous présente une comparaison entre la variabilité journalière du PDOP à la latitude de 90° dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

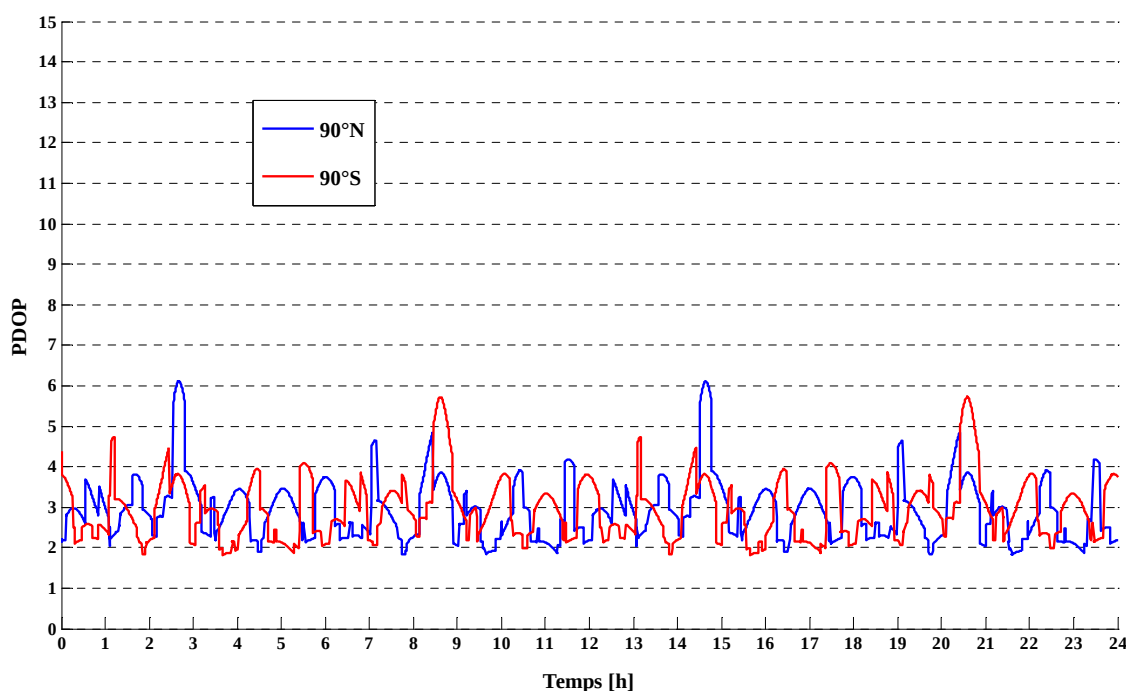


Figure 4.25. Influence de l'hémisphère sur le PDOP : 90°S/90°N
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

D'après ce graphique, nous pouvons constater que le comportement journalier du PDOP aux deux pôles est très semblable. Les maxima observés sont presque identiques et on ne relève pas d'évènements particuliers à ces deux latitudes.

4.5.6. Les composantes du PDOP

Enfin, nous allons à présent vérifier qu'il existe bel et bien une corrélation entre les valeurs du HDOP, du VDOP et du PDOP, aux trois latitudes caractéristiques considérées.

4.5.6.1. Latitude équatoriale : $0^\circ N$

Le graphique de la figure 4.26 confronte la variation journalière du PDOP, du HDOP et du VDOP pour le site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 0^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$).

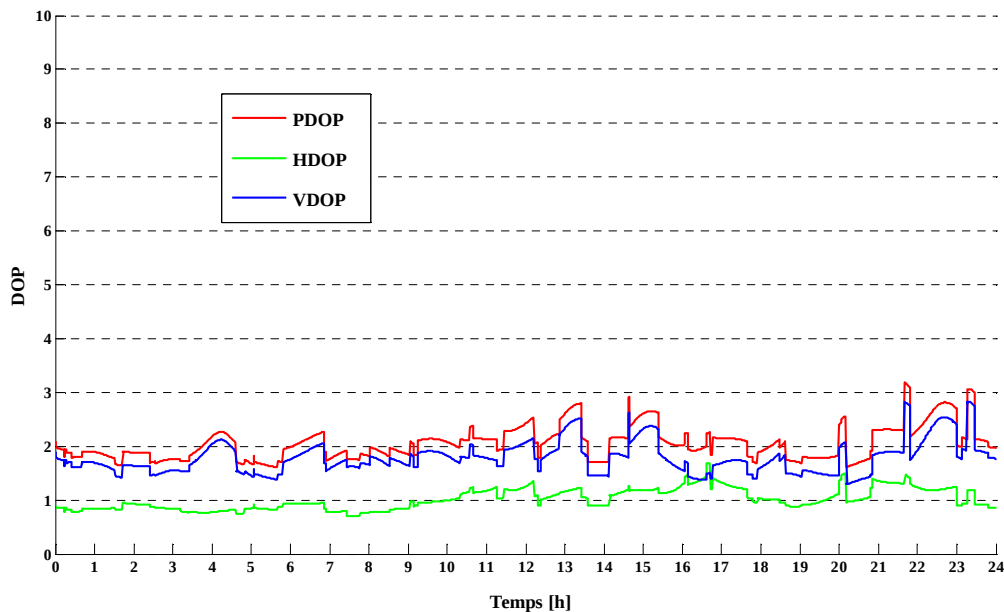


Figure 4.26. Corrélation entre les composantes du PDOP
($\varphi = 0^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

D'après le graphique de la figure 4.26, on peut observer une forte corrélation entre les valeurs du PDOP et du VDOP. La valeur du HDOP reste toujours inférieure à la valeur du VDOP et ne marque pas de variation significative au cours de la journée. En toute logique, la valeur du PDOP est bien sûr toujours supérieure aux valeurs du HDOP et du VDOP.

Cette observation confirme le fait que le positionnement horizontal du GPS est toujours plus précis que le positionnement vertical. Intuitivement, on peut expliquer cette observation par le fait que l'homogénéité de la répartition des satellites sur un cercle horizontal imaginaire sera toujours bien plus importante que l'homogénéité de la répartition des satellites sur un cercle vertical imaginaire (l'élévation des satellites étant toujours positive) (MOHINO 2007).

A cette latitude équatoriale, PDOP, HDOP et VDOP conservent en permanence de très faibles valeurs, confirmant le fait que la géométrie de la constellation au-dessus de l'équateur est très favorable à un positionnement de haute précision.

4.5.6.2. Latitude moyenne : $45^{\circ}N$

Le graphique de la figure 4.27 confronte la variation journalière du PDOP, du HDOP et du VDOP pour le site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 45^{\circ}N$, $\lambda = 0^{\circ}E$, $h = 0\text{ m}$).

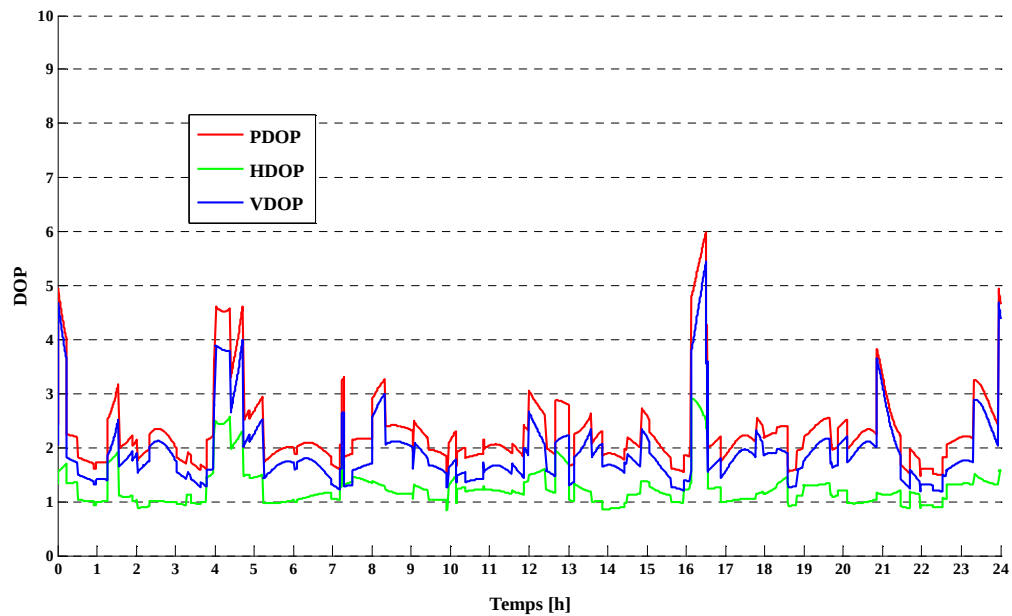


Figure 4.27. Corrélation entre les composantes du PDOP
($\varphi = 45^{\circ}N$, $\lambda = 0^{\circ}E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^{\circ}$, 01/01/2009)

On peut voir que les trois valeurs (HDOP, VDOP et PDOP) évoluent de manière similaire au cours du temps. Les trois indicateurs sont donc fortement corrélés. A nouveau, le HDOP conserve en permanence des valeurs inférieures au VDOP. Contrairement aux observations effectuées sur la figure 4.26, de brutales augmentations du PDOP peuvent s'expliquer, la plupart du temps, par de brutales augmentations du VDOP et du HDOP.

4.5.6.3. Latitude polaire : $90^\circ N$

Le graphique de la figure 4.28 confronte la variation journalière du PDOP, du HDOP et du VDOP pour le site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 90^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$).

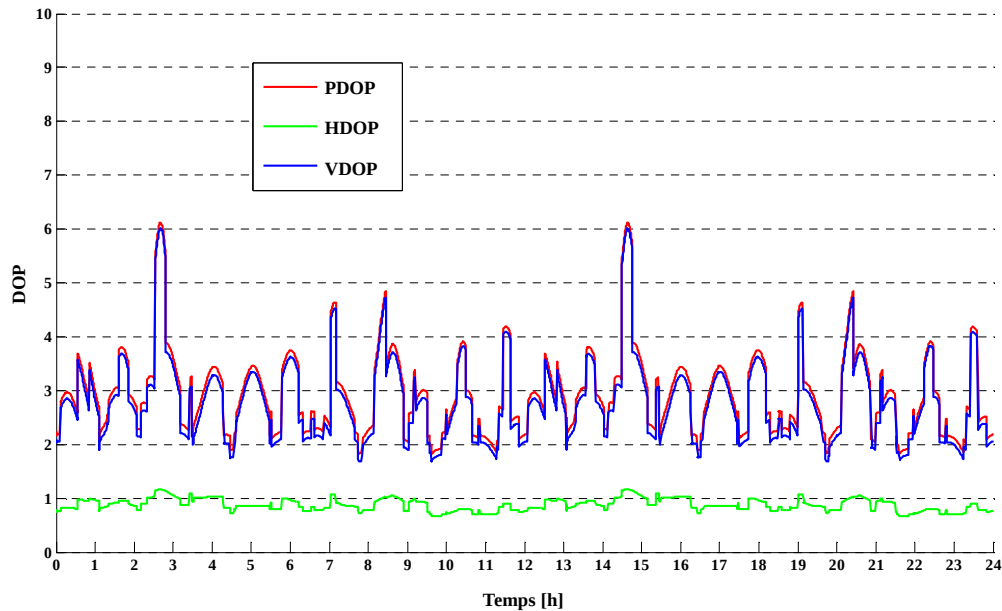


Figure 4.28. Corrélation entre les composantes du PDOP
($\varphi = 90^\circ N$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

L'examen du graphique de la figure 4.28 nous permet de constater que la corrélation entre le PDOP et le VDOP est très forte. Le HDOP conserve de très faibles valeurs durant toute la journée. La forte variabilité du PDOP est due exclusivement à une forte variabilité du VDOP.

Malgré des valeurs de PDOP élevées et très variables, la géométrie de la constellation au-dessus des pôles favorise néanmoins une haute précision pour le positionnement horizontal.

Ces observations peuvent être mises en relation avec la dernière partie de notre étude de la variabilité des composantes du DOP dans le cas d'une constellation hautement symétrique (cf. § 4.3.2). En effet, la situation dans laquelle nous faisons varier l'élévation du satellite initialement situé au zénith peut expliquer les observations élaborées à partir du graphique 4.28.

En raison de la configuration orbitale de la constellation GPS, la géométrie de la constellation visible aux pôles est caractérisée par l'absence de satellites à haute élévation mais par l'abondance de satellites de faible élévation et dont la répartition horizontale présente une certaine homogénéité.

4.5.6.4. Corrélation entre les composantes du PDOP

Le tableau 4.8 ci-dessous présente les coefficients de corrélation existant entre les différentes composantes du PDOP pour les trois latitudes caractéristiques considérées.

Tableau 4.8. Corrélations entre les composantes du PDOP
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Site	Variables	Coefficient de corrélation
0°N 0°E	PDOP - HDOP	0.658
	PDOP - VDOP	0.953
45°N 0°E	PDOP - HDOP	0.866
	PDOP - VDOP	0.986
90°N 0°E	PDOP - HDOP	0.786
	PDOP - VDOP	0.999

L'examen des données statistiques contenues dans ce tableau nous confirme la très bonne corrélation, de manière générale, entre le PDOP et le VDOP. Celle-ci est presque parfaite aux pôles. Cela signifie que, pour les trois latitudes considérées, une haute valeur de PDOP induit inévitablement une dégradation de la précision sur le positionnement vertical. Comme nous avons pu l'observer sur le graphique de la figure 4.27, c'est à la latitude de 45°N qu'on trouve la meilleure corrélation entre le PDOP et le HDOP (0.866).

Le tableau 4.9 ci-dessous présente les valeurs moyennes des différentes composantes du PDOP pour les trois latitudes caractéristiques considérées.

Tableau 4.9. Valeurs moyennes des composantes du PDOP
($\lambda = 0^\circ E$, $h = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Latitude	Longitude	PDOP moyen	HDOP moyen	VDOP moyen
0°N	0°E	2.053	1.013	1.778
45°N	0°E	2.303	1.239	1.931
90°N	0°E	2.933	0.877	2.795

On peut observer que c'est aux pôles que la valeur du HDOP est la plus faible et que la valeur du VDOP est la plus élevée. Ces observations peuvent être expliquées par la configuration orbitale de la constellation GPS. Le comportement très différencié du HDOP et du VDOP aux pôles est à mettre en relation avec la faible élévation des satellites observés depuis cette position et l'absence perpétuelle de satellites proches du zénith.

4.5.7. Ordre de grandeur du PDOP

Une constellation de très bonne qualité d'un point de vue géométrique est généralement associée à des valeurs de PDOP inférieures à 3 et des valeurs de HDOP inférieures à 2 (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008) (cf. § 2.5.2.1). Le PDOP reste toutefois acceptable en dessous d'une valeur de 5-6. (SANTERRE 2008). Ces valeurs, issues de paramètres statistiques, ont été revues à la baisse ces dernières années, en raison de l'amélioration de la couverture spatio-temporelle de la constellation GPS (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2001).

L'ensemble des constellations faisant l'objet de la première partie de notre étude nous permet d'avoir un premier ordre de grandeur de l'intervalle de variation du PDOP. Globalement, sur les différents sites d'observation envisagés, on peut voir que les événements critiques sont relativement rares. Les valeurs moyennes journalières du PDOP sont la plupart du temps inférieures à 3. La constellation GPS offre donc aux utilisateurs une excellente couverture spatio-temporelle. Les rares événements critiques sont observés de manière très ponctuelle.

N'oublions cependant pas que notre étude ne tient pas compte des éventuels effets d'obstruction engendrés par des obstacles rencontrés sur le terrain (cf. § 2.5.3).

4.6. Interprétation : 4 cas particuliers

Dans la section 5 de ce chapitre, nous avons adopté une démarche très systématique afin d'étudier la variabilité spatio-temporelle du PDOP. Les événements critiques se présentant de manière très ponctuelle dans le temps et dans l'espace, nous avons jugé pertinent de compléter cette approche initiale par une étude des extremums de la variabilité spatio-temporelle du DOP.

L'idée finale de cette partie de notre étude est de pouvoir déterminer quels types de constellations satellitaires visibles conduisent le PDOP vers des valeurs extrêmes. Nous voulons ainsi comprendre ce qu'est une constellation de bonne ou de mauvaise qualité géométrique.

4.6.1. Choix des cas extrêmes

Le choix des cas extrêmes s'est effectué sur l'ensemble des données sources dont nous disposons. Un script spécifique a été écrit sous MATLAB® afin de repérer ces situations particulières.

Dans un premier temps, nous avons isolé les valeurs minimale et maximale du PDOP sans tenir compte d'aucun autre paramètre (cas 1-2).

Nous avons pu observer que les valeurs extrêmes du PDOP ne dépendaient pas uniquement du nombre de satellites visibles mais également de la configuration géométrique qu'ils peuvent adopter dans le ciel de l'observateur. Ainsi, pour un même nombre de satellites, des valeurs très différentes de PDOP peuvent être rencontrées. Il s'agit de l'une des principales interrogations à laquelle nous voulons tenter de répondre dans le cadre de cette étude. A cet effet, nous avons isolé deux situations présentant un même nombre de satellites visibles mais des valeurs de PDOP très différentes (cas 3-4).

4.6.2. Observations

Pour chacune des quatre situations envisagées, nos observations s'appuieront sur :

- un graphique de la variation journalière du PDOP ;
- un graphique de la variation journalière du nombre de satellites visibles ;
- un *skyplot* ;
- la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés ;
- le déterminant de la matrice normale.

4.6.2.1. Cas 1

Le graphique de la figure 4.29 ci-dessous représente la variation journalière du PDOP pour le site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 15^\circ N$, $\lambda = 135^\circ E$, $h = 0 m$). C'est à cette position que l'on observe la valeur minimale du PDOP : 1.256 unités vers 15 h 15.

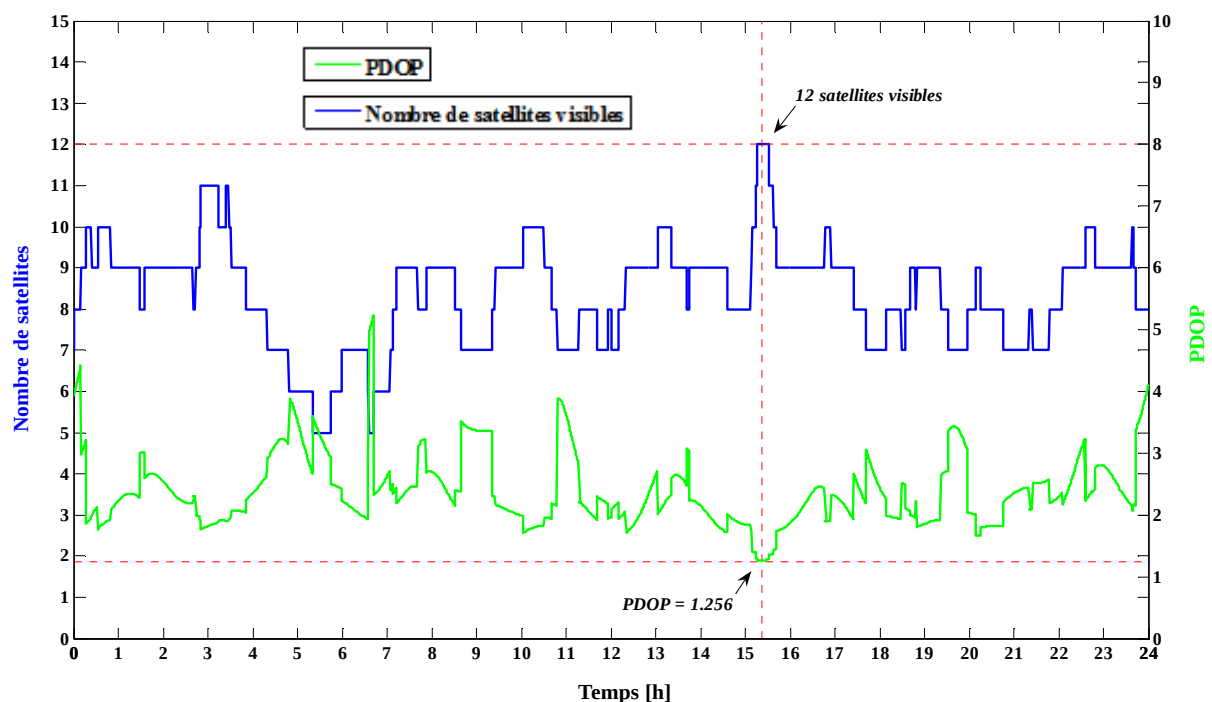


Figure 4.29. Variation journalière du PDOP et du nombre de satellites visibles
($\varphi = 15^\circ N$, $\lambda = 135^\circ E$, $h = 0 m$, M15°, 01/01/2009)

La valeur minimum du PDOP s'observe au moment où le nombre de satellites est maximum (12). Le *skyplot* présenté à la figure 4.30 illustre la configuration géométrique de la constellation à cet instant. On voit que la distribution des satellites dans le ciel de l'observateur est particulièrement homogène. On trouve ainsi au moins un satellite dans chaque octant du *skyplot*. On observe des satellites situés proches du zénith, des satellites situés à basse élévation et des satellites d'élévation moyenne.

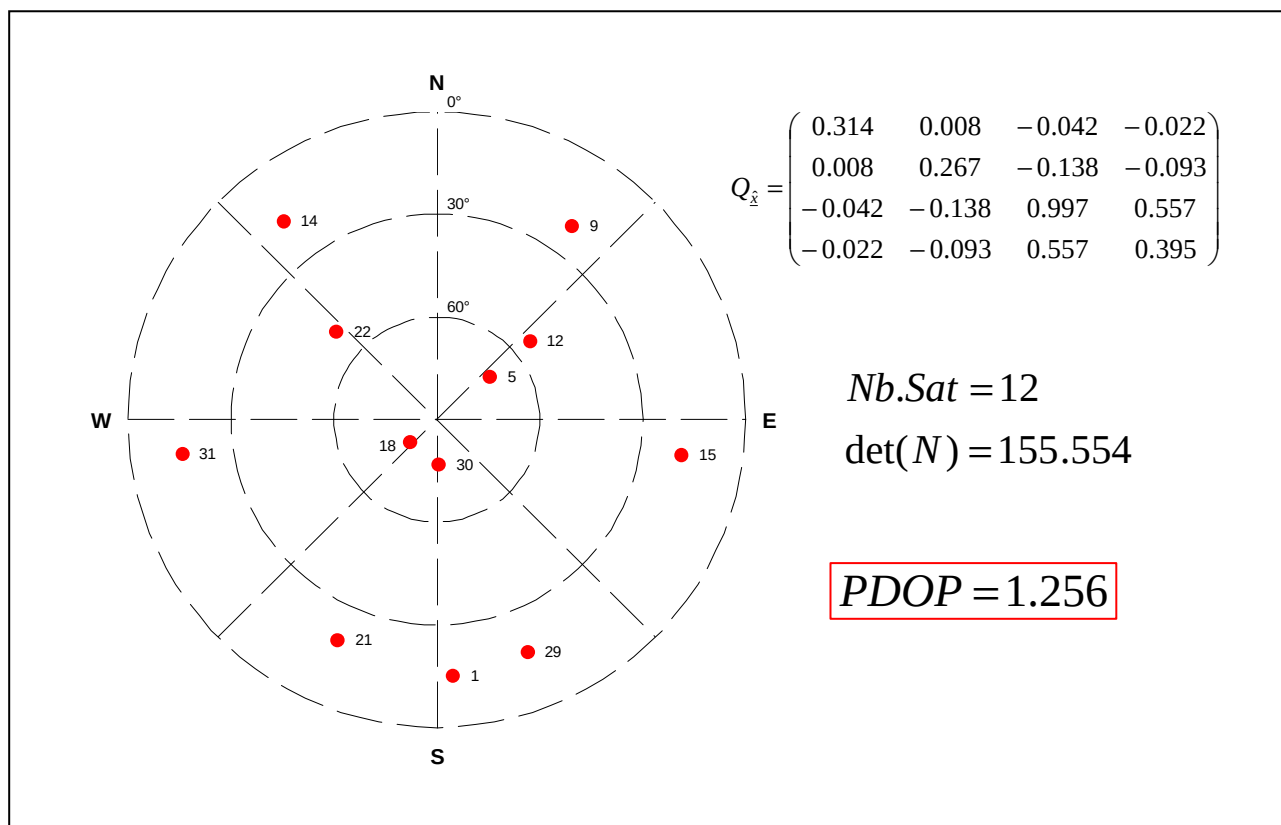


Figure 4.30. Configuration géométrique de la constellation : cas 1
 ($\varphi = 15^\circ N$, $\lambda = 135^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

On comprend qu'il s'agit d'un cas idéal. La géométrie de la constellation est optimale, les conditions sont donc favorables à un positionnement de haute précision.

4.6.2.2. Cas 2

Le graphique de la figure 4.31 ci-dessous représente la variation journalière du PDOP ainsi que du nombre de satellites visibles pour le site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 60^\circ N, \lambda = 75^\circ E, h = 0 m$). C'est à cette position que l'on observe la valeur maximum du PDOP : 1891.340 unités vers 2h45.

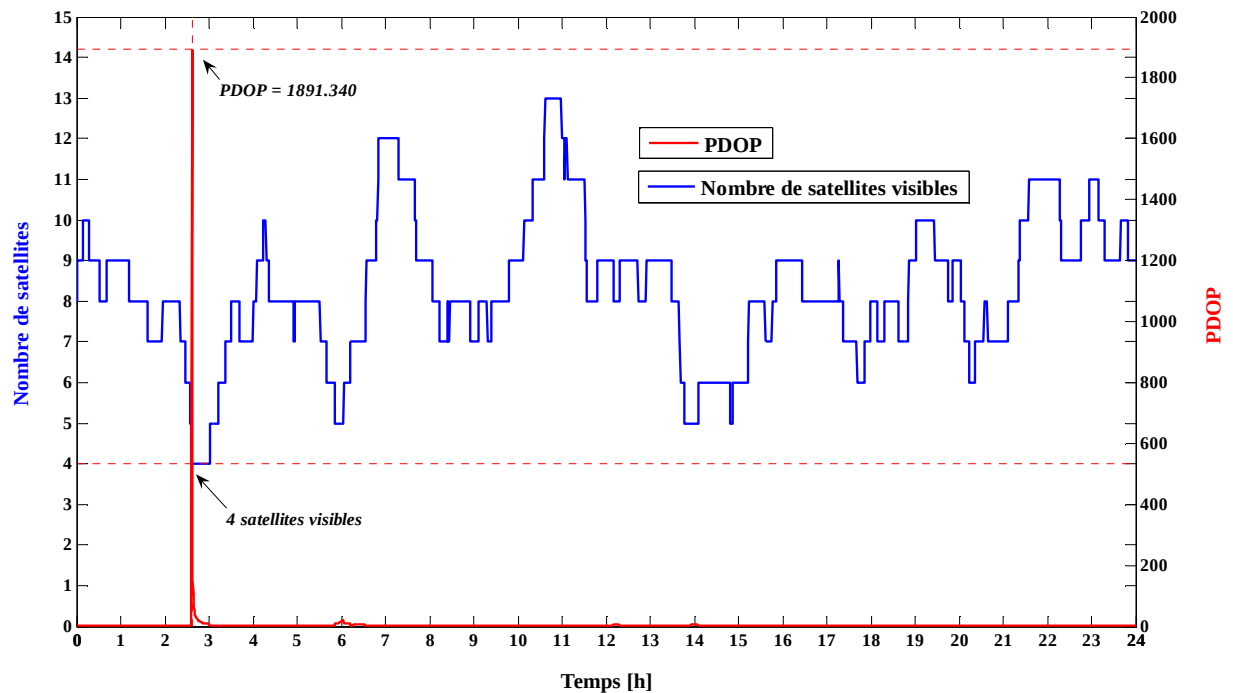


Figure 4.31. Variation journalière du PDOP et du nombre de satellites visibles
($\varphi = 60^\circ N, \lambda = 75^\circ E, h = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

La valeur maximum du PDOP s'observe au moment où le nombre de satellites est minimum (4). Le *skyplot* présenté à la figure 4.32 illustre la configuration géométrique de la constellation à cet instant. Le faible nombre de satellites visibles est certainement grandement responsable de la très haute valeur de PDOP. Néanmoins, sur base du *skyplot* seulement, il serait bien difficile de dire que la géométrie est de qualité médiocre. Nous approfondirons cette question dans la suite de notre étude (cf. § 4.6).

Par contre, dans le cas présent, le déterminant de la matrice normale est extrêmement faible ($8.231e^{-07}$), alors qu'il était très élevé (155.554) dans le cas du PDOP minimum. La matrice des cofacteurs des paramètres ajustés contient quant à elle de très grands nombres. La matrice des cofacteurs $Q_{\hat{x}}$ des paramètres ajustés étant l'inverse de la matrice normale, on comprend le lien entre une faible valeur du déterminant de la matrice normale et de hautes valeurs de cofacteurs (équations (2.60), (2.61) et (4.21)). Le PDOP étant calculé directement à partir de la matrice des cofacteurs $Q_{\hat{x}}$ (équation (2.65)), de hautes valeurs de cofacteurs conduisent donc à de hautes valeurs de PDOP, correspondant à une géométrie de faible qualité.

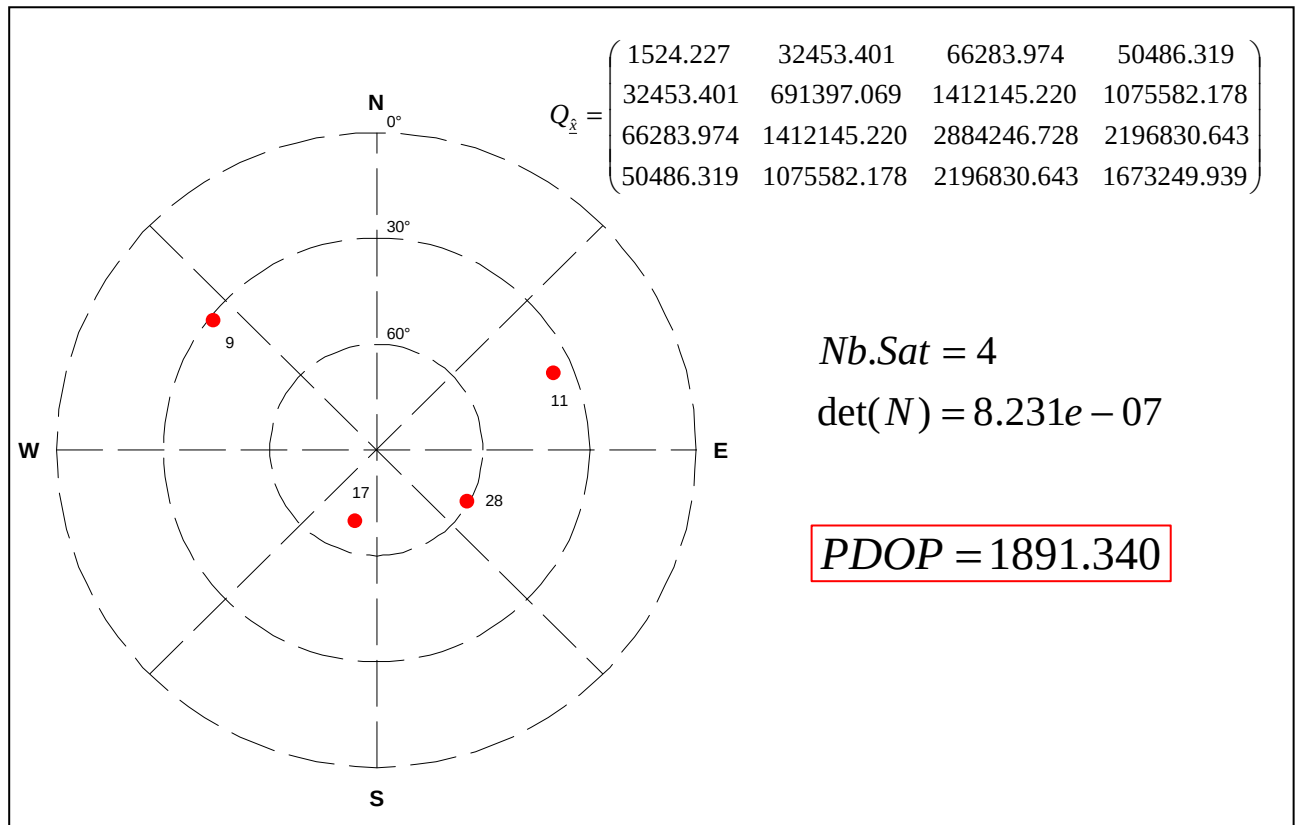


Figure 4.32. Configuration géométrique de la constellation : cas 2
 $(\varphi = 60^\circ N, \lambda = 75^\circ E, h = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009)$

Par définition, une matrice singulière est une matrice carrée dont le déterminant est nul. On peut donc raisonner de la manière suivante : si le déterminant d'une matrice se rapproche d'une valeur nulle, alors la matrice se rapproche d'un cas singulier.

Dès lors, d'après les observations qui précèdent, nous pouvons affirmer que lorsque la matrice normale se rapproche d'un cas singulier, la géométrie de la constellation est caractérisée par de hautes valeurs de PDOP et devient donc très défavorable à un positionnement de haute précision.

4.6.2.3. Cas 3 et cas 4

Parmi les paramètres pouvant influencer la qualité de la géométrie, nous voudrions mettre en évidence la configuration proprement dite de la constellation, soit l'agencement des satellites visibles dans le ciel de l'observateur.

Nous allons donc fixer le nombre de satellites et rechercher deux situations présentant des valeurs de PDOP extrêmement opposées mais un nombre identique de satellites.

On peut observer une telle situation au site d'observation dont les coordonnées géographiques sont ($\varphi = 45^\circ S, \lambda = 0^\circ E, h = 0 m$). Le graphique de la figure 4.33 ci-dessous confronte la variabilité journalière du PDOP avec celle du nombre de satellites visibles pour ce site d'observation.

Ce graphique nous permet d'observer que vers 11 h 00 et vers 22 h 00, le nombre de satellites visibles est égal à 6. Cependant, à 11 h 00, le PDOP atteint une valeur de 13.780 unités (cas 3 : géométrie médiocre) tandis qu'à 22 h 00 il n'est que de 2.364 unités (cas 4 : excellente géométrie). Ces deux géométries présentant un même nombre de satellites sont caractérisées par des PDOP extrêmement différents.

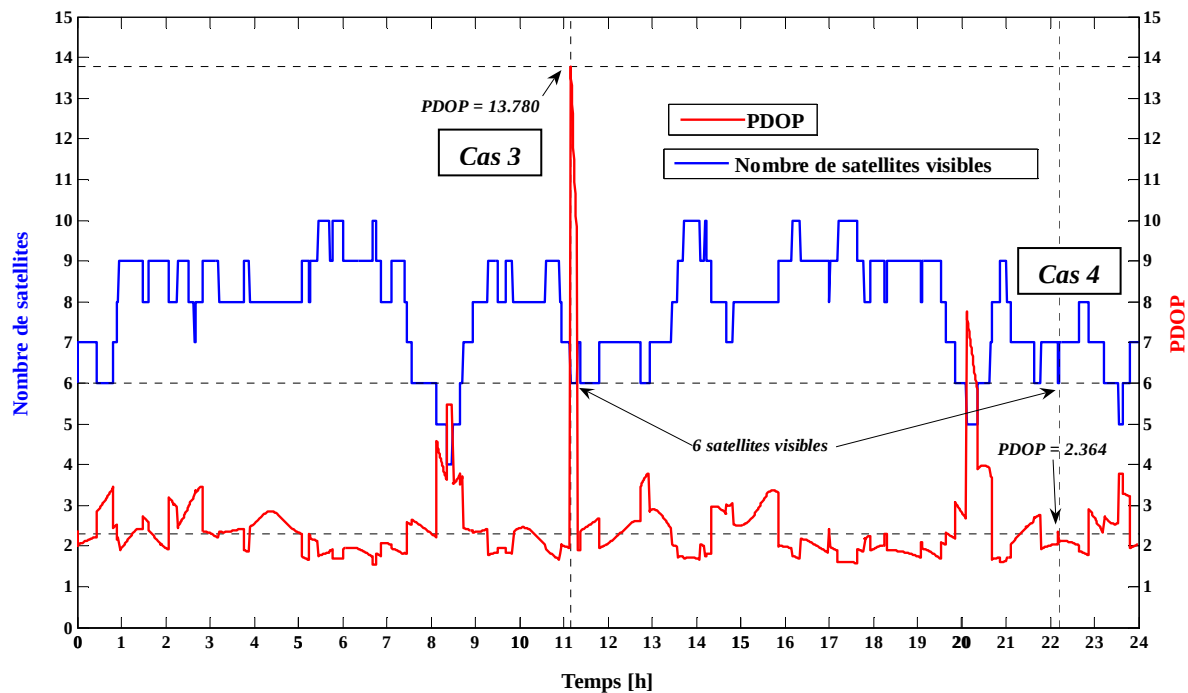


Figure 4.33. Variation journalière du PDOP et du nombre de satellites visibles
($\varphi = 45^\circ S, \lambda = 0^\circ E, h = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

Observons à présent plus en détails la configuration géométrique de la constellation à ces deux époques. La figure 4.34 ci-après permet une comparaison des configurations géométriques de la constellation des cas 3 et 4 sur base de *skyplots*.

La répartition des satellites est clairement moins homogène dans le cas 3 que dans le cas 4. En particulier, on voit que dans le cas 3, il n'y a aucun satellite situé dans la moitié nord du ciel de l'observateur. Une différence flagrante entre ces deux situations se situe également au niveau de la matrice normale. En effet, on voit que dans le cas 3, le déterminant de la matrice normale est très faible, voire même proche de 0, tandis qu'il est plus élevé dans le cas 4 (facteur 100). Une nette différence de la valeur du déterminant de la matrice normale pouvait déjà être observée entre les cas 1 et 2. La valeur de ce déterminant étant particulièrement proche de 0 dans le cas 2 (4 satellites) et particulièrement élevée dans le cas 1 (12 satellites).

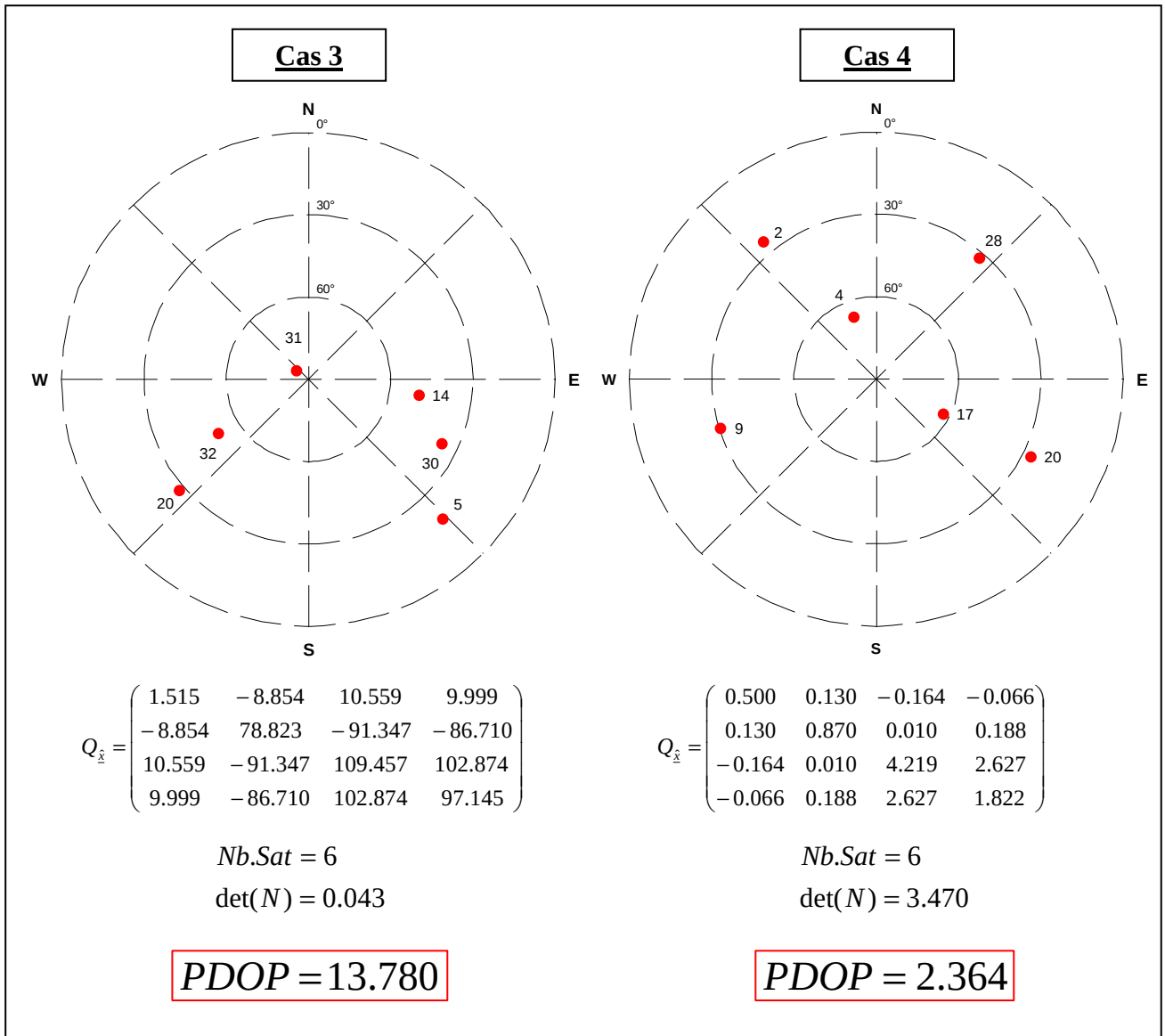


Figure 4.34. Configuration géométrique de la constellation : cas 3 et 4
($\varphi = 45^\circ S$, $\lambda = 0^\circ E$, $h = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Nous avons donc ainsi pu établir que lorsque la matrice normale se rapproche d'un cas singulier, le DOP peut atteindre des valeurs très élevées. Nous voulons à présent comprendre quels types de constellations peuvent engendrer des singularités au niveau de la matrice normale.

4.6.3. Approche mathématique

4.6.3.1. Notions théoriques

Soit M une matrice carrée d'ordre n . Si le déterminant de M est nul, alors la matrice M est dite « non-inversible » ou « singulière ». Si le déterminant de M est nul, alors au moins une colonne (resp. ligne) de cette matrice peut s'écrire comme étant une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice.

A partir de ces considérations, nous pouvons donc conclure que si le déterminant de la matrice normale est nul, c'est qu'il existe une relation linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de cette matrice normale.

Soit une constellation comportant n satellites. Rappelons la forme analytique de la matrice normale (cas général):

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \cos^2 \eta^k \sin^2 \chi^k & \sum_{k=1}^n \cos^2 \eta^k \cos^2 \chi^k & \sum_{k=1}^n \sin \eta^k \sin \chi^k \cos \eta^k & -\sum_{k=1}^n \cos \eta^k \sin \chi^k \\ \sum_{k=1}^n \cos^2 \eta^k \cos^2 \chi^k & \sum_{k=1}^n \cos^2 \eta^k \cos^2 \chi^k & \sum_{k=1}^n \sin \eta^k \cos \chi^k \cos \eta^k & -\sum_{k=1}^n \cos \eta^k \cos \chi^k \\ \sum_{k=1}^n \sin \eta^k \sin \chi^k \cos \eta^k & \sum_{k=1}^n \sin \eta^k \cos \chi^k \cos \eta^k & \sum_{k=1}^n \sin^2 \eta^k & -\sum_{k=1}^n \sin \eta^k \\ -\sum_{k=1}^n \cos \eta^k \sin \chi^k & -\sum_{k=1}^n \cos \eta^k \cos \chi^k & -\sum_{k=1}^n \sin \eta^k & n \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

avec A la matrice contenant la géométrie du système :

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \eta^1 \sin \chi^1 & -\cos \eta^1 \cos \chi^1 & -\sin \eta^1 & 1 \\ -\cos \eta^2 \sin \chi^2 & -\cos \eta^2 \cos \chi^2 & -\sin \eta^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos \eta^n \sin \chi^n & -\cos \eta^n \cos \chi^n & -\sin \eta^n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Nous pouvons démontrer que s'il existe une relation linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de la matrice N , alors on retrouve une telle relation linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de la matrice A :

Soit N une matrice carrée d'ordre m , soit A une matrice de dimension $n \times m$ et soit $(N)_{ij}$ un élément de N situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, tel que :

$$(N)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} (A)_{kj}$$

Si une des colonnes de la matrice N peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice, alors il existe $\lambda_j : j = 1, 2, \dots, m$ (λ_j non tous-nuls) tel que :

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j (N)_{ij} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = 0$$

Une combinaison linéaire de termes nuls étant nulle également, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ki} \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{kj} & \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ki} \right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette démonstration correspondant à une somme de termes toujours positifs, nous pouvons déduire que :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ki} = 0$$

Il existe donc bel et bien une combinaison linéaire entre les colonnes de la matrice A (CQFD).

Ainsi, nous pouvons affirmer, en nous appuyant sur une démonstration mathématique, que si le déterminant de la matrice normale est nul, alors c'est qu'il existe une combinaison linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de la matrice A , contenant la géométrie du système.

4.6.3.2. Observations

Observons dès à présent l'équation (4.35) présentant une forme analytique de la matrice A . La quatrième colonne de cette matrice contient uniquement des valeurs unitaires. Cela signifie que si l'une des autres colonnes contient également des termes identiques, il apparaît une dépendance linéaire entre les colonnes de cette matrice. Cette situation peut s'observer si tous les satellites de la constellation visible ont une élévation identique. Tous les éléments de la troisième colonne de la matrice A sont alors identiques.

Cette situation particulière correspond à la situation évoquée lors de l'étude du DOP dans le cas d'une constellation symétrique (cf. § 4.3.2). Les satellites sont alors disposés sur un cône vertical dont le sommet correspond à la position de l'observateur. La figure 4.35 ci-dessous représente la géométrie d'une constellation comportant 4 satellites de même élévation.

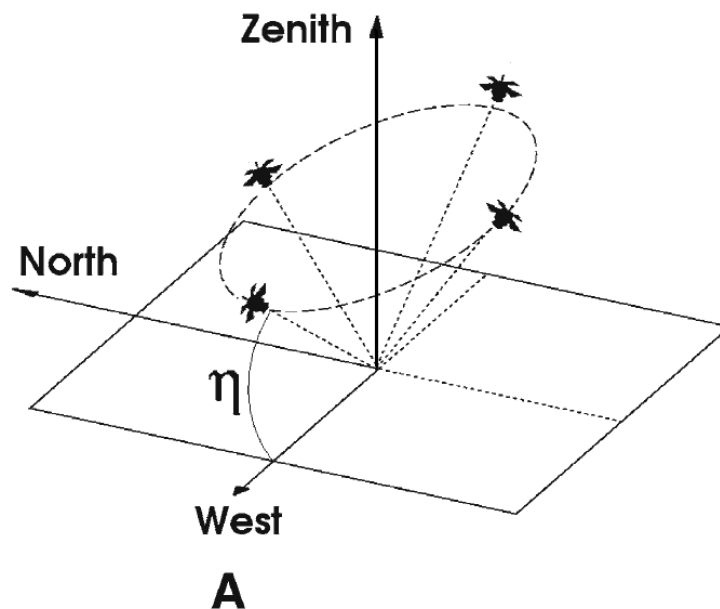


Figure 4.35. Satellites répartis sur un cône vertical

(Source : MOHINO 2007, p. 34)

Nous allons à présent démontrer que l'application d'une rotation à ce cône de satellites (le centre de rotation étant le sommet du cône) conserve la dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice A , conservant ainsi, par la même occasion, la matrice normale dans un état de singularité. La figure 4.36 ci-après illustre la rotation appliquée au cône vertical et présente la formation et le contenu de la matrice de rotation.

La matrice A contient les composantes des vecteurs unitaires liant l'observateur aux différents satellites observés. Pour des raisons de dimension matricielle, la rotation doit être appliquée à la transposée de la matrice A :

$$A_{ROT} = (RA^T)^T \quad (4.36)$$

Les règles du calcul matriciel nous permettent d'écrire :

$$A_{ROT} = AR^T \quad (4.37)$$

D'après l'équation (4.37) et (2.61), la matrice normale devient :

$$N_{ROT} = RA^T AR^T \quad (4.38)$$

D'après les propriétés du calcul du déterminant d'une matrice, nous pouvons écrire :

$$\det(N_{ROT}) = \det(R) \det(A^T A) \det(R) \quad (4.39)$$

Etant donné que la matrice normale N ($N = A^T A$) est singulière, on a:

$$\det(A^T A) = 0 \quad (4.40)$$

Et donc :

$$\det(N_{ROT}) = 0 \quad (4.41)$$

La rotation appliquée au cône vertical peut être décomposée en une rotation α du cône autour de l'axe E et une rotation β autour de l'axe U .

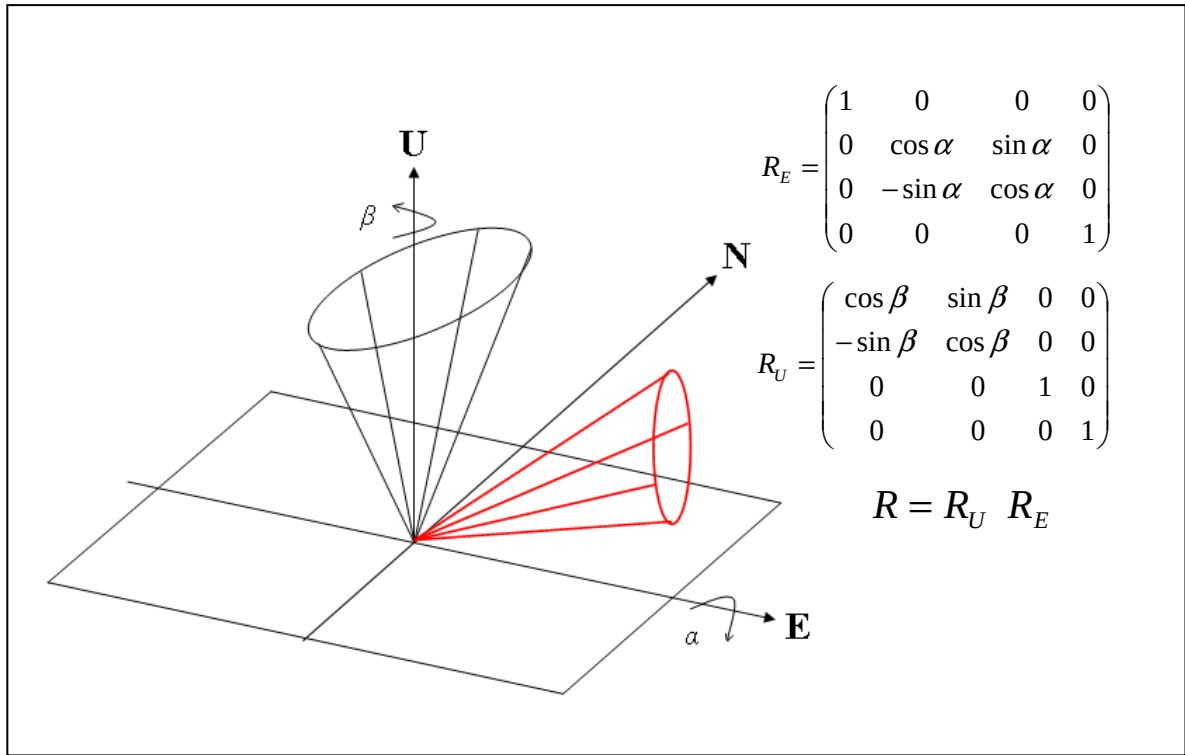


Figure 4.36. Rotation d'un cône dans un système NEU

La généralisation entraînée par cette dernière démonstration (équations (4.36) à (4.41)) nous permet d'affirmer que si les satellites visibles sont situés sur un cône dont le sommet correspond à la position de l'observateur, alors cette situation particulière entraîne un cas de singularité de la matrice normale.

Dès lors, une constellation satellitaire proche de cette disposition spécifique va avoir tendance à attirer la matrice normale vers un cas singulier, et ainsi à faire tendre la valeur de son déterminant vers une valeur nulle avec les conséquences que l'on connaît sur les composantes du DOP.

Nous avons donc identifié un type de configuration responsable de cas de singularités dans la matrice normale. Une infinité de constellations peuvent correspondre à cette configuration conique.

Toutefois, nous ne pouvons affirmer avec certitude qu'il s'agit de la seule et de l'unique configuration géométrique de la constellation entraînant ce type de problèmes, mais les situations problématiques viendront toujours d'une singularité dans la matrice normale.

4.6.4. Développement d'une méthode : ajustement d'un cône 3D

4.6.4.1. Introduction

Dans cette section, nous allons présenter la mise au point d'une nouvelle méthode permettant de détecter une constellation satellitaire de forme conique. Nous avons mis au point un script MATLAB® permettant l'ajustement d'un cône sur une constellation satellitaire donnée (cf. A3.3). Cet outil permet la représentation sur un *skyplot*, du cône ainsi ajusté et de la constellation faisant l'objet de l'ajustement (cf. § 4.6.5).

L'observation du *skyplot* et l'analyse des résidus de l'ajustement du cône nous permettront de voir à quel point une constellation particulière est proche d'une constellation conique.

4.6.4.2. Modèle mathématique

- Caractéristiques de l'ajustement

Soit une constellation de n satellites parfaitement conique observée, depuis un récepteur p . L'équation définissant la forme du cône est alors la suivante (LEICK 2004):

$$\underline{e}_p^i \bullet \underline{e}_{axe} = \cos \theta \quad (4.42)$$

avec θ l'angle d'ouverture du cône dont le sommet est le récepteur p . Les vecteurs unitaires $\underline{e}_p^i$ désignent les vecteurs pointant depuis le récepteur p vers les différents satellites i observés tandis que le vecteur unitaire $\underline{e}_{axe}$ est le vecteur directeur de la droite matérialisant l'axe principal du cône. La figure 4.37 ci-dessous illustre ces concepts fondamentaux.

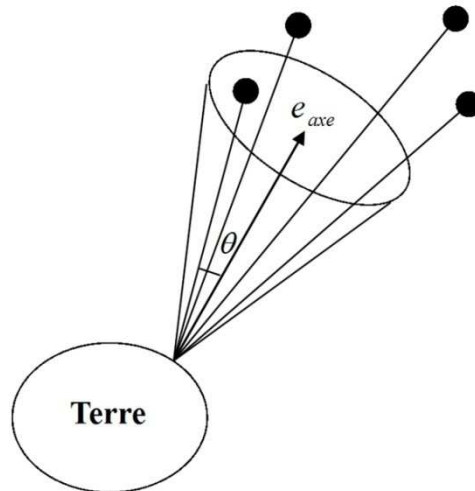


Figure 4.37. Rotation d'un cône dans un système NEU
(Source : LEICK 2004, p. 182)

Les observations de cet ajustement sont les angles d'élévation et d'azimut des satellites composant la constellation visible. Il y a donc $2n$ observations. Le nombre d'équations r du modèle mathématique est égal au nombre de satellites observés ($r = n$).

Les paramètres inconnus sont au nombre de trois ($u = 3$). Il s'agit de l'angle d'ouverture du cône θ , de l'élévation α et de l'azimut β de l'axe du cône.

- Equations d'observation

En développant le produit scalaire de l'équation (4.29), nous pouvons construire les équations d'observation de notre modèle fonctionnel.

Soient deux vecteurs $\underline{s}$ et $\underline{t}$ dont les coordonnées respectives sont (s_1, s_2, s_3) et (t_1, t_2, t_3) dans un système de coordonnées orthonormé. Le produit scalaire de ces deux vecteurs peut être calculé de la manière suivante :

$$\underline{s} \bullet \underline{t} = s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3 \quad (4.43)$$

Les coordonnées des vecteurs unitaires $\underline{e}_{axe}$ et $\underline{e}_p^i$ peuvent s'exprimer à partir de leurs coordonnées sphériques :

$$\underline{e}_{axe} : (\cos \alpha \sin \beta, \cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha) \quad (4.44)$$

$$\underline{e}_p^i : (\cos \eta^i \sin \chi^i, \cos \eta^i \cos \chi^i, \sin \eta^i) \quad (4.45)$$

Dès lors, en tenant compte des équations (4.43), (4.44) et (4.45), l'équation (4.42) devient :

$$\cos \eta^i \sin \chi^i \cos \alpha \sin \beta + \cos \eta^i \cos \chi^i \cos \alpha \cos \beta + \sin \eta^i \sin \alpha - \cos \theta = 0 \quad (4.46)$$

Contrairement aux ajustements par moindres carrés exploités dans le cadre du positionnement par satellites, le modèle fonctionnel s'apparente, dans cette situation, à un modèle mixte.

- Linéarisation du modèle fonctionnel

Etant donné la non-linéarité du modèle fonctionnel, il convient de linéariser les équations d'observation autour de valeurs fixées à priori. Soit le modèle mixte:

$$0 = \underline{f}(\underline{\bar{x}}, \underline{\bar{l}}) \quad (4.47)$$

La linéarisation de ce modèle peut s'effectuer de la manière suivante :

$$\underline{f}(\underline{\bar{x}}, \underline{\bar{l}}) = \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{l}) + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} \underline{x} + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{l}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} \underline{v} = 0 \quad (4.48)$$

Le modèle peut alors s'exprimer :

$$\underline{W} + \underline{B}\underline{v} + \underline{A}\underline{x} = 0 \quad (4.49)$$

La différence avec le modèle avec équations d'observation est l'introduction du terme $\underline{B}$ tel que :

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial l_1} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial l_2} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial l_1} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial l_2} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial l_n} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_r}{\partial l_1} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} & \left. \frac{\partial f_r}{\partial l_2} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} & \dots & \left. \frac{\partial f_r}{\partial l_n} \right|_{\underline{x}_0, \underline{l}} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Il s'agit des dérivées partielles du modèle fonctionnel par rapport aux observations.

Dans le cas précis de l'ajustement de notre cône sur une constellation satellitaire, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = -\sin \underline{\chi} \cos \alpha \sin \beta \sin \underline{\eta} - \cos \alpha \cos \beta \cos \underline{\chi} \sin \underline{\eta} + \sin \alpha \cos \underline{\eta} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = \cos \underline{\chi} \cos \alpha \sin \beta \cos \underline{\eta} - \cos \alpha \cos \beta \sin \underline{\chi} \cos \underline{\eta} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\sin \underline{\chi} \sin \alpha \sin \beta \cos \underline{\eta} - \sin \alpha \cos \beta \cos \underline{\chi} \cos \underline{\eta} + \cos \alpha \sin \underline{\eta} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \sin \underline{\chi} \cos \alpha \cos \beta \cos \underline{\eta} - \cos \alpha \sin \beta \cos \underline{\chi} \cos \underline{\eta} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin \theta \quad (4.55)$$

Afin de limiter le nombre d'itérations nécessaire à la réalisation de l'ajustement, nous avons choisi les valeurs à priori des paramètres à estimer de la manière suivante :

- les observations non-ajustées (azimuts et élévations des satellites) constituent les valeurs à priori : (η_0^i, χ_0^i) ;
- l'estimation des valeurs à priori des inconnues est plus complexe :
 - estimation des coordonnées sphériques du vecteur unitaire moyen : (α_0, β_0) ;
 - double rotation (α_0, β_0) de toute la constellation pour amener ce vecteur moyen à la verticale ;
 - calcul de l'élévation moyenne de la constellation redressée : η_{moy}
 - calcul de la valeur à priori de l'angle d'ouverture du cône :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \eta_{moy}$$

Les paramètres de sortie de l'ajustement sont donc les trois paramètres estimés : $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$. Une information importante issue de l'ajustement est la valeur de la variance de poids unitaire estimée à posteriori (r étant le nombre d'équations):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{r - u} \quad (4.43)$$

Cette valeur permettra de juger de la qualité de l'ajustement et donc de la forme conique de la géométrie de la constellation.

4.6.5. Validation de la méthode du cône 3D

Nous allons à présent expérimenter la nouvelle méthode mise au point sur les quatre situations extrêmes identifiées précédemment (cas 1, cas 2, cas 3 et 4) (cf. § 4.6.2).

La figure 4.38 ci-dessous permet de comparer l'ajustement d'un cône sur les géométries des constellations des cas 1 et 2, à l'aide de *skyplots*.

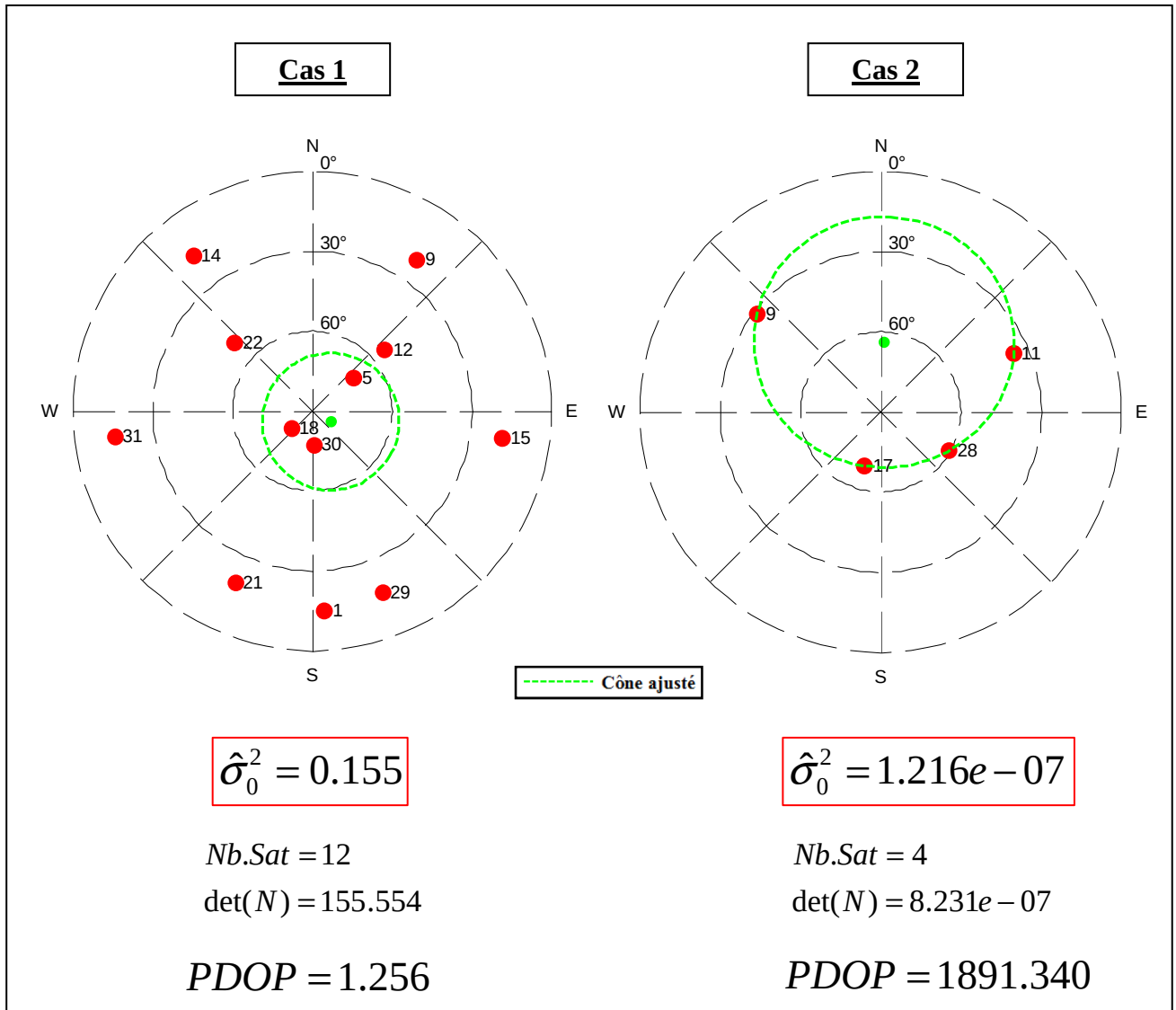


Figure 4.38. Ajustement d'un cône : cas 1 et cas 2

D'après l'observation de cette figure, nous ne pouvons que constater à quel point l'ajustement d'un cône est extrêmement bien réalisé sur la géométrie du cas 2. Par contre, on peut voir de l'ajustement du cône dans le cas 1, que la géométrie de cette constellation ne présente pas du tout une forme conique.

La très haute valeur de PDOP dans le cas 2 s'explique donc par la forme conique de la géométrie de cette constellation conduisant la matrice normale vers un cas de singularité.

L'observation des cas 3 et 4 avait mis en évidence le fait que le nombre de satellites visibles n'était pas le seul facteur responsable de valeurs extrêmes du PDOP.

On peut observer, sur les *skyplots* de la figure 4.39, que la géométrie de la constellation du cas 3 se rapproche très fortement d'une forme conique. L'ajustement du cône présente une variance de poids unitaire à posteriori particulièrement faible ($\hat{\sigma}_0^2 = 0.002$). Le *skyplot* correspondant au cas 4 nous montre que l'ajustement d'un cône sur la géométrie de cette constellation est réalisé avec bien moins de succès que dans le cas précédent. La constellation du cas 3 se rapprochant d'une forme conique, la matrice normale correspondante est donc plus proche d'un cas singulier que celle correspondant à la constellation du cas 4.

Le nombre de satellites visibles ne constitue donc pas le seul paramètre influençant la valeur du PDOP. La distribution des satellites visibles dans le ciel de l'observateur pouvant conduire la matrice normale vers des cas de singularité, elle constitue un paramètre essentiel régissant la valeur du PDOP. Cependant, plus le nombre de satellites visibles est faible, plus la probabilité pour que ces satellites soient distribués selon une forme conique dans le ciel de l'observateur est élevée.

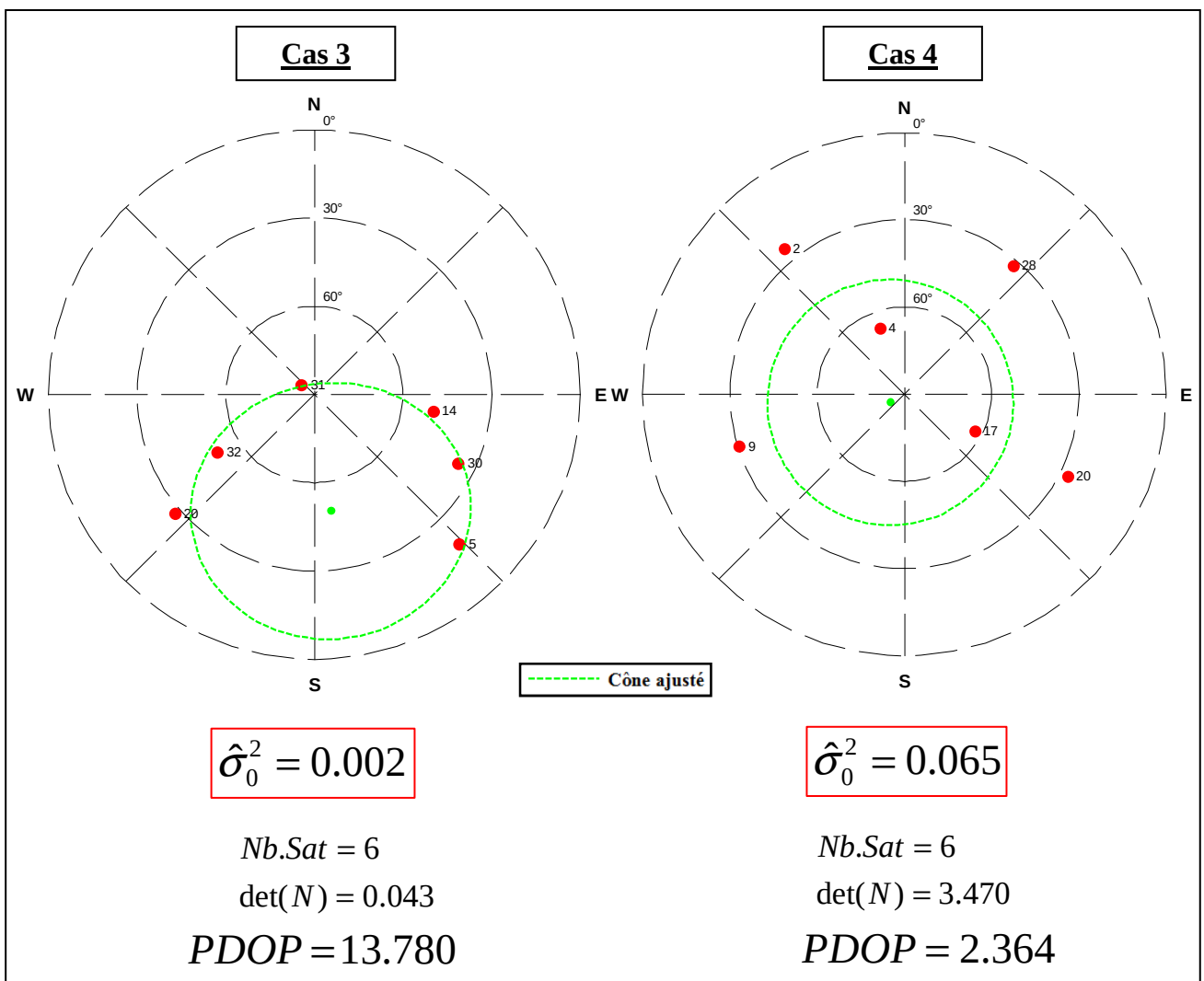


Figure 4.39. Ajustement d'un cône : cas 3 et cas 4

4.7. Synthèse

L'étude présentée dans ce chapitre consacré à l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement absolu nous a permis d'aboutir à plusieurs résultats concluants, répondant ainsi à une partie des objectifs énoncés dans le chapitre 3.

L'étude de la variabilité des composantes du DOP dans le cas d'une constellation présentant un haut degré de symétrie constituait une première approche intuitive permettant la compréhension des différents facteurs pouvant influencer le DOP. Nous avons pu comprendre comment la distribution spatiale des satellites dans le ciel de l'observateur pouvait affecter le DOP mais également les différentes composantes du DOP. Grâce à cette approche intuitive, nous avons pu détecter une première configuration particulière rendant le positionnement, et donc le calcul du DOP, impossible. Il s'agit d'une constellation ne comportant que des satellites situés à même élévation. Nous avons également pu prendre conscience de l'ordre de grandeur de l'intervalle de variation du DOP : certaines configurations particulières conduisent le DOP vers des valeurs infinies.

L'étude de la variabilité spatio-temporelle du DOP nous a permis de comprendre quels facteurs étaient susceptibles d'influencer la valeur du DOP.

La valeur du masque d'élévation appliqué lors de l'observation des satellites influence fortement la qualité de la géométrie de la constellation visible. D'une part, la valeur du masque conditionne le nombre de satellites pris en compte dans le calcul du positionnement. Nous savons que le nombre de satellites de la constellation visible fait partie des paramètres influençant le DOP. D'autre part, la valeur du masque d'élévation entraîne l'exclusion de satellites dont l'élévation est inférieure à un certain seuil. Or, de l'étude théorique du DOP dans le cas d'une constellation hautement symétrique, il ressortait que le DOP dépendait fortement de l'élévation minimale des satellites.

D'après nos observations, la longitude du site d'observation ne fait pas partie des facteurs influençant de manière significative la qualité de la constellation visible. Par contre, celle-ci dépend fortement de la latitude du site d'observation. La qualité de la géométrie de la constellation est en permanence excellente à l'équateur. La fiabilité de la qualité de la géométrie de la constellation décroît légèrement lorsque la latitude augmente. Cette relation entre la latitude et la fiabilité de la qualité de la géométrie de la constellation trouve son origine dans la configuration orbitale de la constellation GPS.

Le comportement moyen des valeurs du DOP est très semblable entre l'hémisphère sud et l'hémisphère nord. Néanmoins, on constate ponctuellement des augmentations brutales du PDOP à la latitude de $45^{\circ}S$ non-observées à la latitude de $45^{\circ}N$. Ces événements ponctuels peuvent s'expliquer par des configurations géométriques très particulières de la constellation, se présentant ponctuellement dans le temps et dans l'espace.

Nous avons également étudié la corrélation entre les composantes du PDOP pour différentes latitudes. Globalement, le HDOP présente des valeurs toujours inférieures au VDOP, confirmant le fait que la précision du positionnement horizontal est toujours meilleure que la précision du positionnement vertical. La corrélation entre les valeurs de HDOP, de VDOP et de PDOP est fortement influencée par la latitude du site d'observation. Au pôle, le HDOP conserve en permanence des valeurs très faibles tandis que le VDOP subit de fortes variations. Par conséquent, le PDOP subit également de fortes variations bien

que la précision du positionnement horizontal soit excellente en permanence. Ces observations peuvent s'expliquer par la présence de nombreux satellites à basse élévation à cette latitude, et par l'absence perpétuelle de satellites proches du zénith, en raison de la configuration orbitale de la constellation GPS. Les mêmes observations peuvent être effectuées à l'équateur mais, à cette latitude, la géométrie de la constellation est telle que le PDOP conserve de faibles valeurs en permanence. A la latitude de 45°N , on peut observer une forte corrélation entre la variabilité du HDOP et du VDOP.

D'après les observations effectuées, nous pouvons conclure que les situations critiques, d'un point de vue de la qualité de la géométrie de la constellation, se présentent de manière très ponctuelle dans le temps et dans l'espace. Toutefois, lors de tels événements, le PDOP peut alors atteindre des valeurs extrêmes (ex : 1800 unités). Cependant, la constellation GPS offre globalement une excellente couverture spatio-temporelle, le PDOP conservant la plupart du temps des valeurs inférieures à 4 unités. Néanmoins, n'oublions pas que notre étude ne tient pas compte d'éventuels effets de masquage. En outre, l'activation ou la désactivation temporaire ou définitive de certains satellites peuvent remettre en cause certaines de nos observations.

Nous avons souligné le fait que les situations critiques se présentant de manière très ponctuelle, pouvaient trouver leur origine dans la singularité de la matrice normale. Nous avons démontré que des singularités dans la matrice normale étaient engendrées par des configurations géométriques très particulières de la constellation et que ces singularités conduisaient le DOP vers des valeurs extrêmes.

Nous avons identifié un type de géométrie particulier entraînant un cas de singularité de la matrice normale : la constellation de forme conique. A l'aide d'une méthode consistant à effectuer l'ajustement par moindres carrés d'un cône sur une constellation satellitaire, nous avons pu comprendre pourquoi, parmi nos observations, certaines situations caractérisées par un nombre identique de satellites visibles présentaient des valeurs de PDOP extrêmement différentes. Nous pouvons donc affirmer qu'un faible nombre de satellites visibles ne constitue en rien une condition suffisante à de hautes valeurs du DOP mais que c'est la combinaison de ce facteur et de la distribution des satellites dans le ciel de l'observateur qui régit la qualité de la géométrie de la constellation. Précisons tout de même que la probabilité d'obtenir une géométrie de la constellation de forme conique décroît avec une augmentation du nombre de satellites visibles.

Ce premier volet de notre étude a ainsi permis d'établir un lien fort entre la valeur du PDOP et la configuration géométrique de la constellation satellitaire, rendant possible l'évaluation de la qualité de la géométrie de la constellation sur base de l'observation d'un *skyplot* illustrant la distribution des satellites visibles dans le ciel de l'observateur.

CHAPITRE 5

POSITIONNEMENT RELATIF

5.1. Point de départ

5.1.1. Objectifs

Après avoir étudié comment la géométrie de la constellation pouvait affecter la précision du positionnement absolu, la suite de notre étude est consacrée à l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement relatif. Nous étudierons en particulier l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement relatif basé sur des mesures de codes dans le cas où une seule époque d'observation est utilisée pour calculer la position de l'observateur.

Notre premier objectif est de vérifier qu'il existe une relation entre les indicateurs de la qualité de la géométrie de la constellation dans le cas du positionnement absolu et dans le cas du positionnement relatif. Nous avons déjà présenté ces indicateurs, il s'agit respectivement du DOP et du RDOP (*Relative DOP*) (cf. § 2.5). En effet, lorsqu'un géomètre emploie une technique de positionnement relatif, la seule information fournie par son récepteur au sujet de la qualité de la géométrie de la constellation visible est bien souvent la valeur du DOP, et non du RDOP. La comparaison du comportement de ces deux valeurs va nous permettre d'évaluer le caractère prévisible du RDOP à partir du DOP.

Dans le cas du positionnement absolu, la construction de la matrice A (contenant la géométrie du système) était élaborée selon une méthode unique, clairement établie. En raison de la dépendance statistique entre certaines des observations liées au positionnement relatif (cf. § 2.3.2.2), il existe plusieurs manières de combiner ces observations afin de former un ensemble d'observations indépendantes. Dès lors, il existe également plusieurs manières de construire la matrice A . Nous tenterons d'observer si les différentes constructions de la matrice A peuvent donner lieu à des valeurs différentes du RDOP.

Nous débuterons ce chapitre par une énonciation claire des hypothèses posées concernant la construction du modèle mathématique exploité tout au long de notre étude. (cf. § 5.2).

Afin de généraliser spatialement et temporellement notre étude à des constellations GPS réalistes, nous avons élaboré un outil informatique permettant d'automatiser partiellement l'exploitation des données sources. Nous présenterons brièvement cet outil en insistant sur les possibilités offertes aux utilisateurs (cf. § 5.3).

L'outil développé nous a permis d'effectuer de multiples opérations sur les données sources permettant une étude de la variabilité spatio-temporelle du RDOP ainsi qu'une comparaison de la variation journalière du RDOP et du DOP. Les résultats obtenus seront

présentés et discutés en section 4 de ce chapitre. Nous décrirons le raisonnement soutenu, justifierons les différents choix posés ainsi que la méthodologie employée et présenterons nos principales observations (cf. § 5.4).

De manière analogue à ce qui a été réalisé dans le cas du positionnement absolu (cf. § 4.6), nous tenterons d'éclairer certaines de nos observations à la lumière de notions précises de calcul matriciel. Cela nous permettra d'établir un lien clair entre la configuration géométrique de la constellation et certaines valeurs extrêmes prises par le RDOP. Quatre situations particulières faisant l'objet d'une interprétation poussée ont été retenues parmi nos observations.

Enfin, nous utiliserons notre outil afin de tenter d'expliquer certaines erreurs de position mises en évidence par le logiciel « So-DIPE-RTK » développé par la section « Profils ionosphériques » de l'Institut Royal Météorologique. Cette étape constituera la validation de notre étude.

5.1.2. Données

Ce second volet de notre étude consacré au positionnement relatif exploite les mêmes données sources que la partie de notre étude consacrée au positionnement absolu (cf. § 4.1.2). Toutefois, cet ensemble de données est complété par des données de résolution spatiale plus fine (1°) mais localisées à différentes latitudes. Nous disposons également des données de position des satellites pour trois stations du réseau FLEPOS, le réseau de référence RTK de la Région Flamande, et ce pour quelques jours de l'année 2008 (26/10/2008 – 05/11/2008) :

- GILL ;
- LEEU ;
- MECH.

Les données sources, contenant les positions des satellites dans le ciel de l'observateur, sont exprimées vis-à-vis d'un système de coordonnées topocentriques sphériques, en termes d'azimut et d'élévation. Les positions des satellites sont fournies par pas de 30 secondes.

5.2. Notions théoriques

5.2.1. Construction de la matrice A

Soient deux récepteurs A et B effectuant des mesures de codes simultanées sur les signaux provenant de n satellites durant une seule époque d'observation (fig. 2.10) (cf. § 2.3.2.2). Dans cette situation précise, nous avons évoqué au chapitre 2 que le nombre total de mesures de codes était de $2n$. Cependant, à partir de ces $2n$ mesures indépendantes, il n'est possible de former qu'un nombre de doubles différences indépendantes limité à $n-1$ (équation (2.48)). Les deux récepteurs doivent donc observer simultanément un minimum de quatre satellites communs afin de pouvoir lever les trois inconnues de position propres au positionnement relatif (cf. § 2.3.2.2).

Avant de poursuivre notre développement, rappelons la forme analytique de la matrice A (équation (2.42)), contenant la géométrie du système, dans le cas du positionnement relatif :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^j - X_{B,0})}{D_{B,0}^j} & \frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^j - Y_{B,0})}{D_{B,0}^j} & \frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^j - Z_{B,0})}{D_{B,0}^j} \\ \frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^k - X_{B,0})}{D_{B,0}^k} & \frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^k - Y_{B,0})}{D_{B,0}^k} & \frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^k - Z_{B,0})}{D_{B,0}^k} \\ \frac{(X^i - X_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(X^l - X_{B,0})}{D_{B,0}^l} & \frac{(Y^i - Y_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Y^l - Y_{B,0})}{D_{B,0}^l} & \frac{(Z^i - Z_{B,0})}{D_{B,0}^i} - \frac{(Z^l - Z_{B,0})}{D_{B,0}^l} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Considérant un système de coordonnées topocentriques sphériques dans lequel les positions des satellites sont exprimées en termes d'azimut et d'élévation, nous pouvons énoncer une nouvelle forme analytique de la matrice A , issue de l'équation (5.1) :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \eta^1 \sin \chi^1 - \cos \eta^2 \sin \chi^2 & \cos \eta^1 \cos \chi^1 - \cos \eta^2 \cos \chi^2 & \sin \eta^1 - \sin \eta^2 \\ \cos \eta^1 \sin \chi^1 - \cos \eta^3 \sin \chi^3 & \cos \eta^1 \cos \chi^1 - \cos \eta^3 \cos \chi^3 & \sin \eta^1 - \sin \eta^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \eta^1 \sin \chi^1 - \cos \eta^n \sin \chi^n & \cos \eta^1 \cos \chi^1 - \cos \eta^n \cos \chi^n & \sin \eta^1 - \sin \eta^n \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

On peut observer que les éléments contenus dans cette matrice sont en fait des différences entre les composantes des vecteurs unitaires liant le récepteur aux différents satellites observés. L'une des méthodes permettant de construire la matrice A est de considérer un satellite particulier de la constellation visible comme satellite de référence pour former les doubles différences avec tous les autres satellites. Il s'agit de la « méthode du satellite de référence » (LEICK 2004). C'est précisément cette méthode que nous avons exploitée dans le cadre de notre étude. Les différentes possibilités de construction de la matrice A envisagées diffèrent par le choix du satellite de référence considéré.

Remarquons que chaque ligne de la matrice A contient toujours les composantes d'un vecteur. Cependant, il ne s'agit plus d'un vecteur pointant du récepteur vers un satellite, comme dans le cas du positionnement absolu.

Notons sans plus tarder que la notion de constellation visible est différente dans le cas du positionnement absolu et relatif. En effet, le positionnement relatif nécessite que les satellites pris en compte pour réaliser le positionnement soient visibles depuis les deux récepteurs. Indiscutablement, pour une position donnée sur Terre à un instant donné, le nombre de satellites pouvant être pris en compte dans le cadre d'une technique de positionnement relatif sera toujours inférieur ou égal au nombre de satellites pouvant être observés dans le cadre d'une technique de positionnement absolu. La figure 5.1 ci-dessous illustre cette notion de constellation visible.

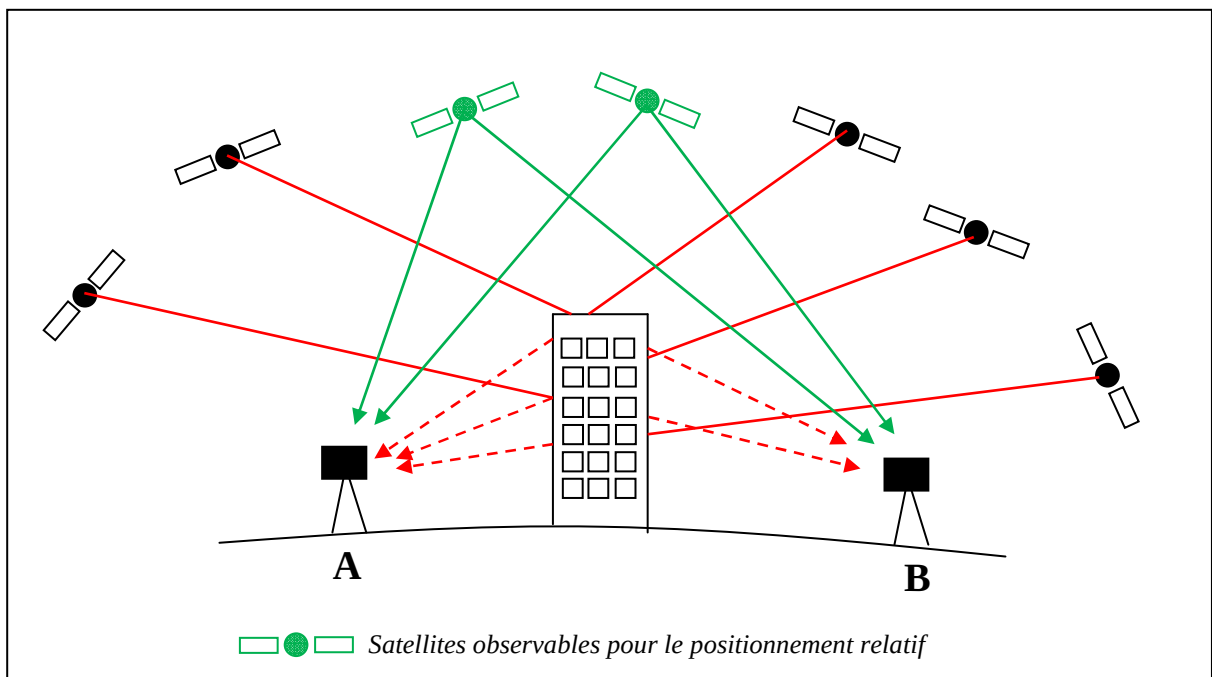


Figure 5.1. Visibilité de la constellation dans le cas du positionnement relatif

5.2.2. Pondération des observations

Lors de la première partie de notre étude consacrée au positionnement absolu, nous avons pu poser certaines hypothèses concernant les observations initiales nous autorisant à assimiler la matrice des poids des observations à la matrice identité (cf. § 4.3.1). Dans le cadre du positionnement relatif, les observations utilisées au sein de l'ajustement par moindres carrés sont des doubles différences effectuées à partir de mêmes mesures de codes. Certaines mesures individuelles de codes étant utilisées plus d'une fois pour former les doubles différences, celles-ci sont donc corrélées et la matrice des poids des observations ne peut plus être assimilée à la matrice identité. Pour calculer cette matrice des poids, nous utilisons la loi de propagation des variances-covariances (équation (2.57)).

D'après les équations (2.34) et (2.37), les relations mathématiques liant les mesures de codes individuelles et les doubles différences peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$P_{AB}^{1j} = P_A^1 - P_B^1 - P_A^j + P_B^j \quad (5.3)$$

avec P_A^j (resp. P_B^j) la mesure de code entre le récepteur A (resp. B) et le satellite j ($j = 2, 3, \dots, n$). Dans cet exemple, le satellite 1 est pris comme satellite de référence. Le problème peut être exprimé sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} P_{AB}^{12} \\ P_{AB}^{13} \\ \dots \\ P_{AB}^{1n} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} P_A^1 \\ P_B^1 \\ P_A^2 \\ P_B^2 \\ P_A^3 \\ P_B^3 \\ \dots \\ \dots \\ P_B^n \\ P_B^n \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

avec la matrice C telle que :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

La loi de propagation des variances-covariances (équation (2.57)) nous permet d'écrire :

$$\sum_{DD} = C \sum_{MC} C^T \quad (5.6)$$

avec $\sum_{DD}$ la matrice de variances-covariances des doubles différences formées et $\sum_{MC}$ la matrice de variances-covariances des mesures de codes initiales. La matrice de variances-covariances des mesures de codes initiales peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\sum_{MC} = \sigma_{MC}^2 I \quad (5.7)$$

où I est la matrice identité et σ_{MC}^2 est la variance d'une mesure de code initiale. Dès lors, à partir des équations (5.6) et (5.7), nous pouvons construire la matrice des poids des doubles différences :

$$P_{DD} = \sigma_{0,DD}^2 \left(C \sigma_{MC}^2 I C^T \right)^{-1} \quad (5.8)$$

$$P_{DD} = \frac{\sigma_{0,DD}^2}{\sigma_{MC}^2} \left(C C^T \right)^{-1} \quad (5.9)$$

Choisissons la variance de poids unitaire a priori sur une double différence égale à la variance d'une mesure de code initiale. L'équation (5.9) devient alors :

$$P_{DD} = \left(C C^T \right)^{-1} \quad (5.10)$$

De manière générale, la matrice des poids peut être obtenue au moyen de l'équation (5.11) ci-dessous (HOFMANN-WELLENHOF *et al.* 2008) :

$$P_{DD} = \frac{1}{2} \frac{1}{n_s} \begin{bmatrix} n_D & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n_D & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n_D \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

où n_D est le nombre de doubles différences considérées et n_s le nombre de satellites observés simultanément depuis les deux extrémités de la ligne de base.

5.3. Développement d'un outil d'analyse : « DOPR »

5.3.1. Objectifs

Le développement d'un outil informatique personnalisé nous a permis de généraliser et d'automatiser notre étude de la variabilité spatio-temporelle du RDOP ainsi que la comparaison de la variation journalière du RDOP et du DOP. Le nom que nous avons donné à cet outil est « DOPR » (DOP Relatif).

Egalement développé sous MATLAB®, cet outil est doté d'une interface conviviale (fig. 5.4) permettant à l'utilisateur d'effectuer des traitements complexes sur les données sources. Nous présenterons dans cette section les fonctionnalités principales de cet outil. Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur vers l'annexe 2 (cf. § A2).

5.3.2. Possibilités

5.3.2.1. Sélection des données

L'interface du programme DOPR nécessite une mention précise des positions des stations *A* et *B* de la part de l'utilisateur. D'après les conventions établies au chapitre 2 (cf. § 2.3.2.2), la station *A* est la station de position connue. L'utilisateur doit également préciser sur quelle journée d'observation porte ses traitements. Cela permet d'assurer la simultanéité des observations réalisées aux stations *A* et *B*. L'interface requiert également la mention du dossier contenant les fichiers sources ainsi que du dossier dans lequel les fichiers générés devront être enregistrés.

Des informations relatives à la sélection des données sont visualisables dans un panneau d'affichage prévu à cet effet, permettant ainsi à l'utilisateur de vérifier sa sélection avant de procéder aux traitements.

5.3.2.2. Calcul du RDOP

Le calcul automatisé du RDOP constitue la première fonction principale de l'outil DOPR. Pour chaque journée d'observation, le calcul des différentes composantes du RDOP est effectué par pas de 30 secondes. Ces valeurs, ainsi que le nombre de satellites visibles depuis les deux stations, sont enregistrés dans un fichier spécifique.

Notre programme élabore également deux autres fichiers reprenant les calculs du DOP aux deux stations *A* et *B* considérées indépendamment (cf. § 4.4.2.2).

Tout comme l'outil DOPA développé précédemment, l'interface de DOPR permet la génération de graphes de visibilité (cf. § 4.4.2.2).

Il est également possible de visualiser une comparaison entre les différentes valeurs du RDOP obtenues selon les multiples possibilités de construction de la matrice *A*.

5.3.2.3. Analyse des résultats

La seconde fonction principale de notre outil permet d'exploiter pleinement les résultats du calcul du RDOP. En effet, l'outil DOPR permet la génération de graphiques représentant la variation journalière des différentes composantes du RDOP. Ces graphiques offrent la possibilité de comparer la valeur du RDOP et les valeurs du DOP calculées pour les stations *A* et *B*. Un exemple de ce type de graphique est fourni à la figure 5.2 ci-dessous pour une ligne de base de 20 km.

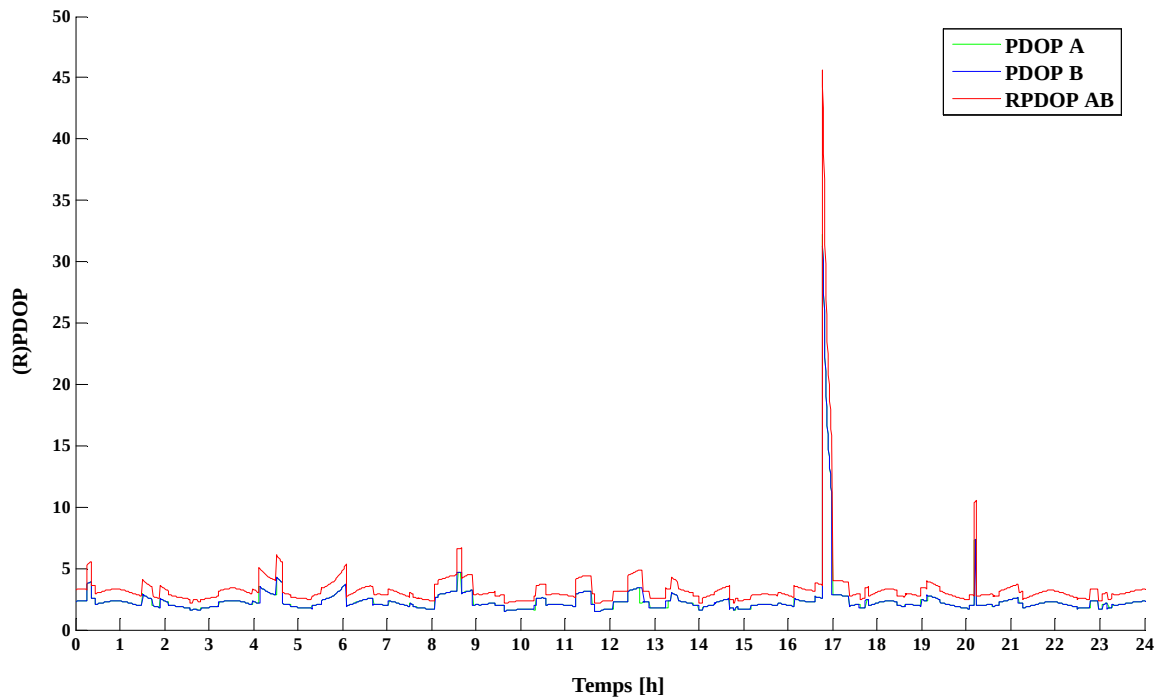


Figure 5.2. Graphique de comparaison entre le DOP et le RDOP

La génération de ce type de graphiques est accompagnée de l'élaboration d'un fichier permettant de comparer les valeurs de DOP et du RDOP sur base d'une sélection de paramètres statistiques. La structure de ce type de fichier est présentée à la figure 5.4 ci-dessous. On retrouve les mêmes indicateurs statistiques que ceux calculés par le programme DOPA (cf. § 4.4.2.3).

	<i>Moy.</i>	<i>Med.</i>	<i>Min.</i>	<i>Max.</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Var.</i>	<i>±IC95</i>	<i>P₀₅</i>	<i>P₉₅</i>	<i>Ep. perdues</i>
DOP A	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
DOP B	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
RDOP AB	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Figure 5.3. Structure des fichiers de statistiques générés par le programme DOPR

5.3.3. Interface

Un aperçu de l'interface du programme DOPR est présenté à la figure 5.4. On retrouve les éléments précités, à savoir :

- un panneau de sélection des données ;
- un panneau d'informations générales ;
- un panneau de sélection des paramètres de sortie ;
- un champ de texte permettant de préciser un masque d'élévation minimum ;
- plusieurs boutons permettant de lancer les différentes fonctions.

The screenshot displays the DOPR software interface. At the top left, it identifies the user as 'LONCHAY Matthieu' and 'M2 GEOM.'. The top right shows the 'Année académique 2008-2009'. The central title is 'DOPR'. Below this, there are three main input sections: 'Sélection: RA' with fields for 'Latitude (°): 15' and 'Longitude (°): 15'; 'Time' with 'DOY: 1' and 'YY: 9'; and 'Sélection: RB' with 'Latitude (°): 16' and 'Longitude (°): 16'. Two green buttons, 'Données' and 'Résultats', are positioned below these sections. The bottom area is divided into three columns. The left column contains a 'Graphiques' section with three checkboxes (the middle one is checked), a 'Masque (°)' field with '15' and 'Ok'/'C' buttons, and a 'Progression' box. The middle column has a 'Message' box and a 'Paramètres de sortie' section with radio buttons for 'PDOP' (selected), 'HDOP', 'VDOP', and 'NB SAT'. The right column is an 'Infos' section displaying 'Dossier de données:', 'Dossier de résultats:', 'Coord. A (°):', 'Coord. B (°):', 'Durée ép. obs (s):', 'Durée obs (s):', 'Nb époques:', 'YY:', and 'DOY:'. At the bottom, there are three buttons: 'M/S/G/D' (blue), 'Initialisation' (orange), and a red 'Ok' button.

Figure 5.4. Interface de DOPR

5.4. Corrélation entre DOP et RDOP

Le programme DOPR nous a permis de réaliser une étude de la corrélation entre le DOP et le RDOP pour différentes lignes de base.

5.4.1. Méthodologie

Dans le but de conserver un certain parallélisme entre l'étude de l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement absolu et relatif, nous avons concentré nos recherches sur l'une des composantes du RDOP : le RPDOP.

Pour les raisons évoquées précédemment, un masque d'élévation d'une valeur de 15° a systématiquement été appliqué sur l'ensemble des données sources.

Nous avons premièrement voulu étudier l'impact du choix de la combinaison d'observations indépendantes (lors de la mise au point de la matrice A) sur la valeur observée du RPDOP. Afin d'illustrer nos propos, nous avons choisi une ligne de base située sur l'équateur (ce choix n'altère en rien la généralité de nos résultats) :

- STATION A ($\varphi_A = 0^\circ N, \lambda_A = 60^\circ E, h_A = 0 m$)
- STATION B ($\varphi_B = 0^\circ N, \lambda_B = 75^\circ E, h_B = 0 m$)

Ensuite, nous avons tenté de caractériser la corrélation entre les valeurs de PDOP et de RPDOP dans le cas de très longues lignes de base (≈ 1600 km) (cf. § 5.4.3). A cet effet, nous avons fixé la valeur de longitude ($0^\circ E$) et considéré trois latitudes caractéristiques :

- $0^\circ N$: ($\varphi_A = 0^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 15^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m$) ;
- $45^\circ N$: ($\varphi_A = 45^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 60^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m$) ;
- $90^\circ N$: ($\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m$) .

Nous avons également étudié la corrélation entre les valeurs de PDOP et de RPDOP dans le cas d'une ligne de base de longueur moyenne (≈ 100 km) (cf. § 5.4.4). La zone d'étude sélectionnée est centrée sur la Belgique :

- STATION A ($\varphi_A = 50^\circ N, \lambda_A = 4^\circ E, h_A = 0 m$)
- STATION B ($\varphi_B = 51^\circ N, \lambda_B = 4^\circ E, h_B = 0 m$)

Enfin, nous avons envisagé le cas d'une très courte ligne de base (≈ 20 km) entre deux stations du réseau belge FLEPOS (fig. 5.5) (cf. § 5.4.5).

- STATION *A* (MECH)
- STATION *B* (GILL)



Figure 5.5. Localisation de la ligne de base MECH-GILL sur le réseau FLEPOS (≈ 20.5 km)
(Source : Site de l'IGN¹)

Evoquons sans plus tarder le fait que, pour les différentes longueurs de lignes de base considérées, notre étude est davantage concentrée sur la comparaison du comportement des valeurs de RPDOP et de PDOP (soit la corrélation entre le RPDOP et le PDOP) plutôt que sur les valeurs numériques de ces variables. N'oublions pas que la matrice *A* possède une forme analytique différente dans le cas du positionnement absolu et du positionnement relatif (équations (5.1) et (5.2)). Or, les valeurs du DOP et du RDOP sont obtenues à partir de la matrice des cofacteurs des paramètres ajustés, cette matrice étant elle-même élaborée à partir de la matrice *A* (équation (2.60)). Il ne serait donc pas pertinent de vouloir comparer quantitativement les valeurs du DOP et du RDOP (cf. § 2.5.2.2) (YANG 2000).

Afin de fixer un ordre de grandeur des valeurs du RPDOP, nous tenterons, sur base de paramètres statistiques, de fournir une valeur du RPDOP témoignant d'une qualité géométrique de la constellation jugée suffisante que pour effectuer un positionnement de haute précision.

¹ Site de l'Institut Géographique National (<http://www.ngi.be/agn/FR/FR2-1.shtml>), consultation le 19 août 2009.

5.4.2. Influence de la construction de la matrice A

Nous allons observer comment la manière de combiner les observations indépendantes lors de la formation de la matrice A peut affecter la valeur du RPDOP calculée. Afin d'illustrer nos propos, nous avons sélectionné une ligne de base située sur l'équateur ($\varphi_A = 0^\circ N, \lambda_A = 60^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 0^\circ N, \lambda_B = 75^\circ E, h_B = 0 m$). Néanmoins, nous avons vérifié que ce choix n'affectait en rien la généralité de nos résultats.

A chaque époque d'observation, le nombre de combinaisons possibles d'observations indépendantes est égal au nombre de satellites (lorsque les doubles différences sont formées sur base de la méthode du satellite de référence). Afin de faciliter l'interprétation des résultats de notre expérience, nous avons décidé de calculer, pour chaque époque d'observation et à partir de toutes les valeurs de RPDOP obtenues pour chaque combinaison envisagée, les valeurs suivantes :

- RPDOP moyen ;
- RPDOP maximum ;
- RPDOP minimum ;
- RPDOP obtenu en considérant le satellite dont l'élévation est la plus élevée comme satellite de référence.

La variation journalière de ces différentes valeurs pour le site d'observation considéré est représentée sur le graphique de la figure 5.6. On peut observer que les quatre courbes sont parfaitement confondues, ce qui signifie que le choix du satellite de référence lors de la construction de la matrice A n'influence pas la valeur du RDOP. Afin d'adhérer aux principes mis en œuvre dans la plupart des applications pratiques, nous considérerons toujours, dans la suite de cette étude, le satellite ayant la plus haute valeur d'élévation comme le satellite de référence pour construire notre modèle mathématique.

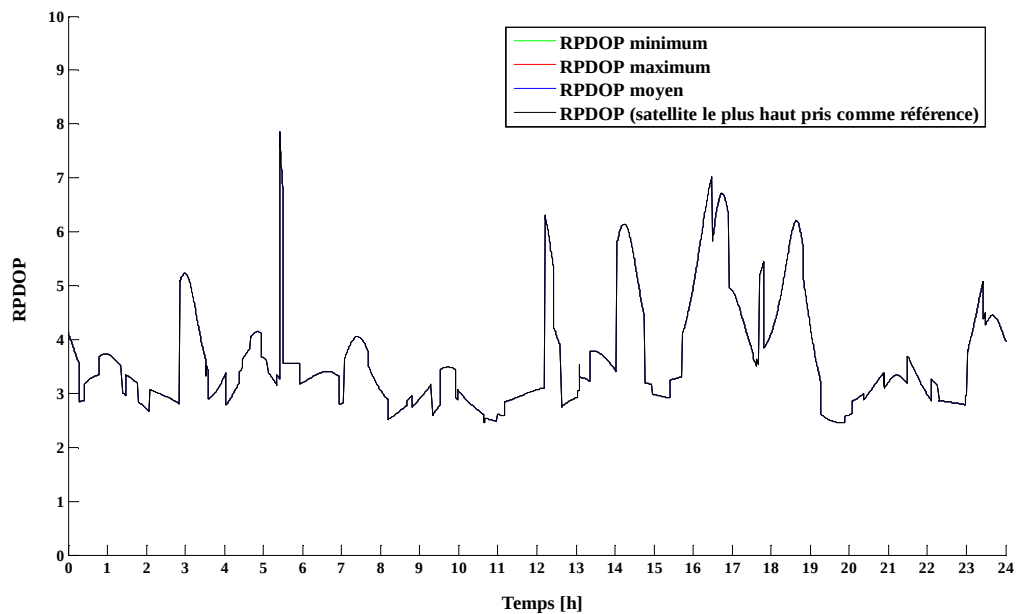


Figure 5.6. Influence de la construction de la matrice A sur le RPDOP
($\varphi_A = 0^\circ N, \lambda_A = 60^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 0^\circ N, \lambda_B = 75^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

5.4.3. Longues lignes de base

Nous allons à présent étudier spécifiquement la variabilité spatio-temporelle du RPDOP ainsi que les relations entre DOP et RPDOP dans le cas de très longues lignes de base (≈ 1600 km).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous avons fixé le paramètre de longitude et envisagé trois lignes de base alignées sur un méridien et situées à des latitudes caractéristiques différentes.

5.4.3.1. Région équatoriale

Le graphique de la figure 5.7 ci-dessous représente la variabilité journalière du RPDOP pour une ligne de base choisie en région équatoriale ($\varphi_A = 0^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 15^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m$). Sur ce graphique, on retrouve également les variations journalières des valeurs de DOP calculées pour chacune des deux stations délimitant la ligne de base.

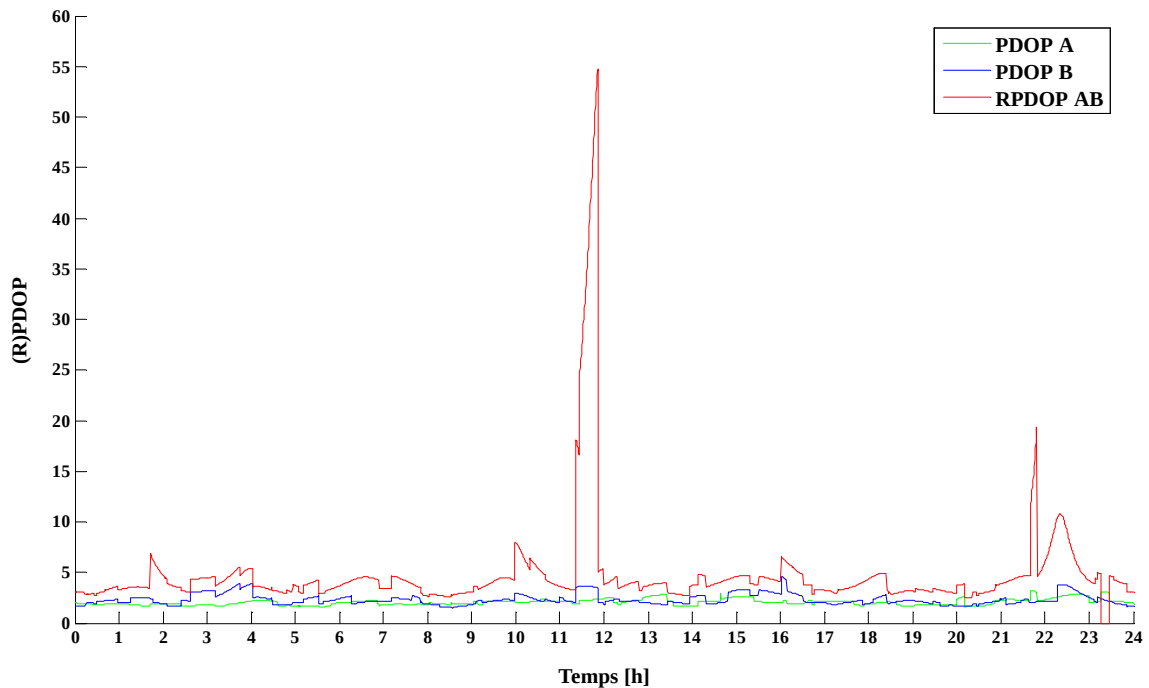


Figure 5.7. Variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP
($\varphi_A = 0^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 15^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

Le tableau 5.1 ci-dessous présente quelques informations statistiques de la variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP pour cette ligne de base.

Tableau 5.1. Paramètres statistiques des valeurs de RPDOP et de DOP
 ($\varphi_A = 0^\circ N$, $\lambda_A = 0^\circ E$, $h_A = 0\text{ m}$, $\varphi_B = 15^\circ N$, $\lambda_B = 0^\circ E$, $h_B = 0\text{ m}$, M15°, 01/01/2009)

	Moyenne	Maximum	P ₉₅
PDOP A	2.053	3.198	2.708
PDOP B	2.318	4.587	3.546
RPDOP AB	4.749	54.724	7.590

A partir du graphique de la figure 5.7, nous pouvons observer que la valeur du RPDOP est généralement supérieure aux valeurs de DOP calculées aux deux stations délimitant la ligne de base. Cette observation est confirmée par les valeurs moyennes de ces indicateurs repris dans le tableau 5.1 ci-dessus. Globalement, le comportement du RPDOP et du DOP sont faiblement corrélés.

On observe que le RPDOP subit une forte variation entre 11h00 et 12h00 (54.724 unités) ainsi que vers 22h00 (21.810 unités) alors que les valeurs de DOP n'augmentent pas de manière significative à ces deux périodes de la journée. **Concrètement, cela signifie que la géométrie de la constellation peut nuire fortement à la précision du positionnement relatif sans que le DOP, observé indépendamment aux deux stations, ne marque de variation significative.**

Vers 23h30, on voit que la valeur du RPDOP n'a pas pu être calculée par notre logiciel. La figure 5.8 ci-après nous permet d'en comprendre la raison. Cette figure présente l'évolution du nombre de satellites visibles depuis chacune des deux stations *A* et *B* ainsi que du nombre de satellites exploitables pour le positionnement relatif (nombre de satellites visibles simultanément depuis *A* et *B*).

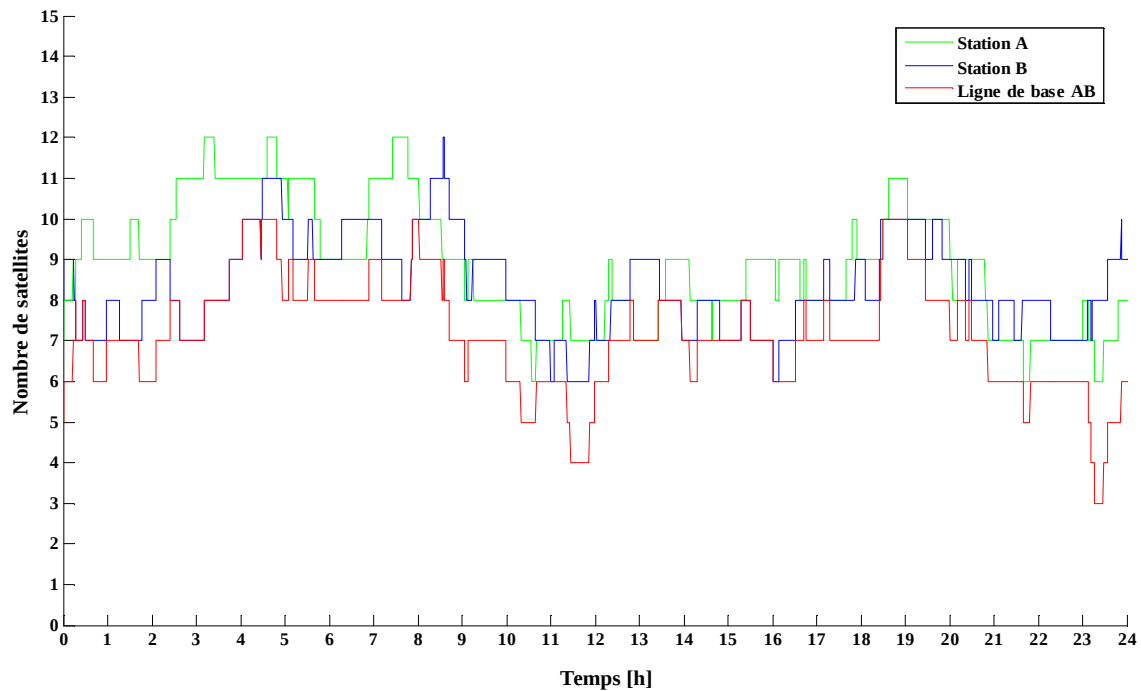


Figure 5.8. Variation journalière du nombre de satellites visibles
 ($\varphi_A = 0^\circ N$, $\lambda_A = 0^\circ E$, $h_A = 0 m$, $\varphi_B = 15^\circ N$, $\lambda_B = 0^\circ E$, $h_B = 0 m$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Pour une ligne de base donnée, le nombre de satellites utilisables dans le cadre d'une technique de positionnement relatif est, bien entendu, toujours inférieur ou égal au nombre de satellites utilisables pour effectuer un positionnement absolu aux deux stations, puisque les doubles différences ne peuvent être formées que sur base de satellites observés simultanément depuis les deux stations.

Nous observons que vers 23h30, il n'y a plus que trois satellites visibles simultanément depuis les deux stations. Ce nombre de satellites est insuffisant pour réaliser le calcul d'une position sur une seule époque d'observation ; trois satellites permettent de former seulement deux doubles différences. Cela explique l'absence de valeur de RPDOP à cet instant.

L'augmentation brutale du RPDOP vers 12h00 correspond à une période de la journée où seuls quatre satellites sont visibles depuis les deux stations. Quatre satellites permettant de former trois doubles différences, il s'agit du nombre minimum de satellites rendant possible la détermination d'une position. Considérées séparément, les deux stations peuvent observer respectivement 5 et 6 satellites, ce qui explique, partiellement, le fait que les valeurs de DOP n'augmentent pas de manière significative à cette période de la journée. Rappelons-nous que le nombre de satellites ne constitue pas un facteur suffisant permettant d'expliquer la valeur du DOP (cf. chapitre 4).

L'élévation du RPDOP vers 22h00 correspond à un instant où les deux récepteurs situés aux deux extrémités de la ligne de base ne peuvent observer que cinq satellites en commun (4 doubles différences). Toutefois, on remarque qu'il y a d'autres moments de la journée durant lesquels seuls cinq satellites sont observables depuis les deux stations et qui ne sont pas caractérisés par une augmentation du RPDOP. Comme dans le cadre de notre

étude sur le positionnement absolu et le DOP, nous pouvons donc affirmer que le nombre de satellites n'est pas le seul paramètre influençant la qualité de la géométrie de la constellation visible dans le cas du positionnement relatif. Nous apporterons une explication à cette observation dans la suite de ce chapitre, et nous montrerons que d'autres facteurs peuvent également influencer la valeur du RPDOP (cf. § 5.5).

5.4.3.2. Latitude moyenne

Le graphique de la figure 5.9 ci-dessous représente la variabilité journalière du RPDOP pour une ligne de base choisie dans une région de latitude moyenne ($\varphi_A = 45^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 60^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m$). Sur ce graphique, on retrouve également les variations journalières des valeurs de DOP calculées pour chacune des deux stations délimitant la ligne de base.

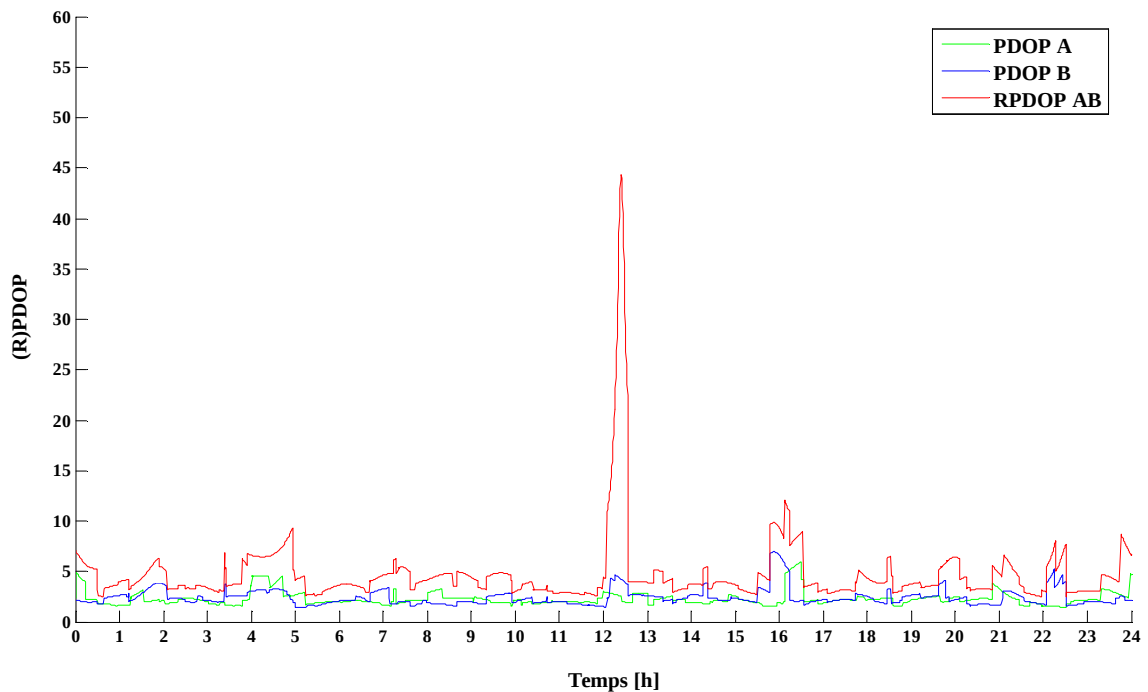


Figure 5.9. Variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP
($\varphi_A = 45^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 60^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

Les observations concernant la comparaison proprement dite des valeurs de RPDOP et de DOP s'apparentent aux observations émises concernant la ligne de base localisée en région équatoriale. L'augmentation brutale du RPDOP (44.373 unités) vers 12h30 peut partiellement être expliquée par une chute du nombre de satellites visibles (5 satellites) depuis les deux stations à cet instant, comme le montre la figure 5.10 ci-après.

Le tableau 5.2 ci-dessous présente quelques informations statistiques de la variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP pour cette ligne de base.

Tableau 5.2. Paramètres statistiques des valeurs de RPDOP et de DOP
 $(\varphi_A = 45^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 60^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

	Moyenne	Maximum	P ₉₅
PDOP A	2.303	5.988	4.055
PDOP B	2.427	6.965	3.894
RPDOP AB	4.763	44.373	8.461

Notons que vers 16h00, le nombre de satellites visibles depuis les deux stations descend jusqu'à une valeur de 4 mais entraîne une valeur bien moins élevée de RPDOP que celle observée à 12h30 (5 satellites). A nouveau, cette constatation démontre que le nombre de satellites n'est pas le seul paramètre influençant la valeur du RPDOP.

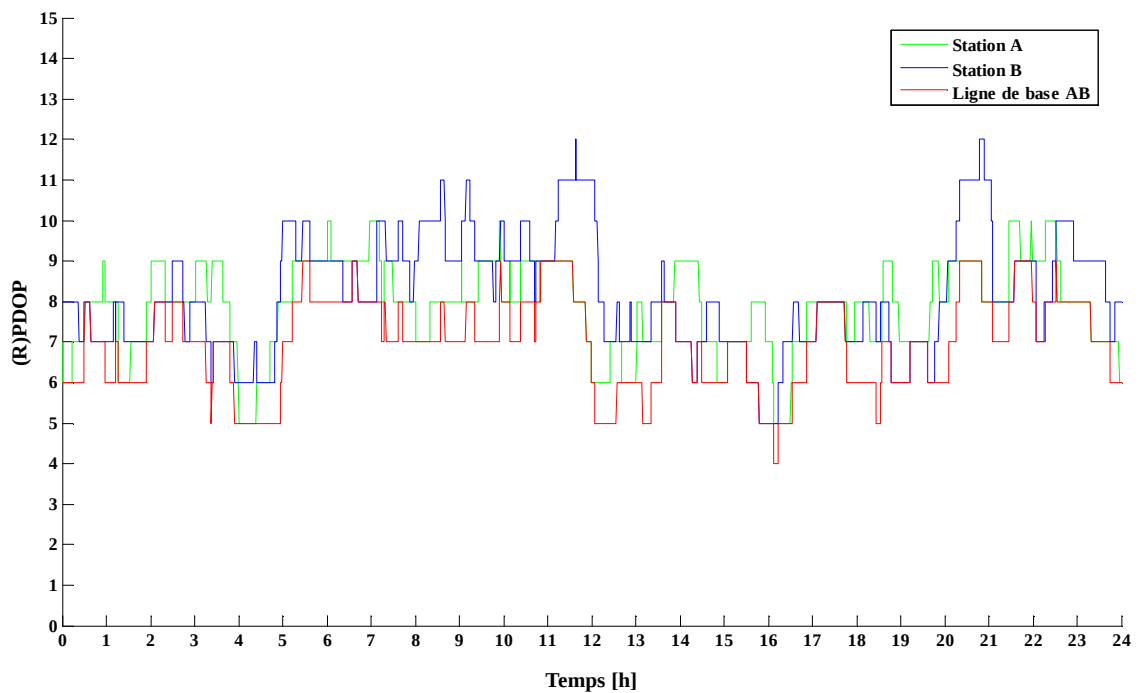


Figure 5.10. Variation journalière du nombre de satellites visibles
 $(\varphi_A = 45^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 60^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

5.4.3.3. Latitude polaire

Le graphique de la figure 5.11 ci-dessous représente la variabilité journalière du RPDOP pour une ligne de base choisie dans une région polaire ($\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m$). Sur ce graphique, on retrouve également les variations journalières des valeurs de DOP calculées pour chacune des deux stations délimitant la ligne de base.

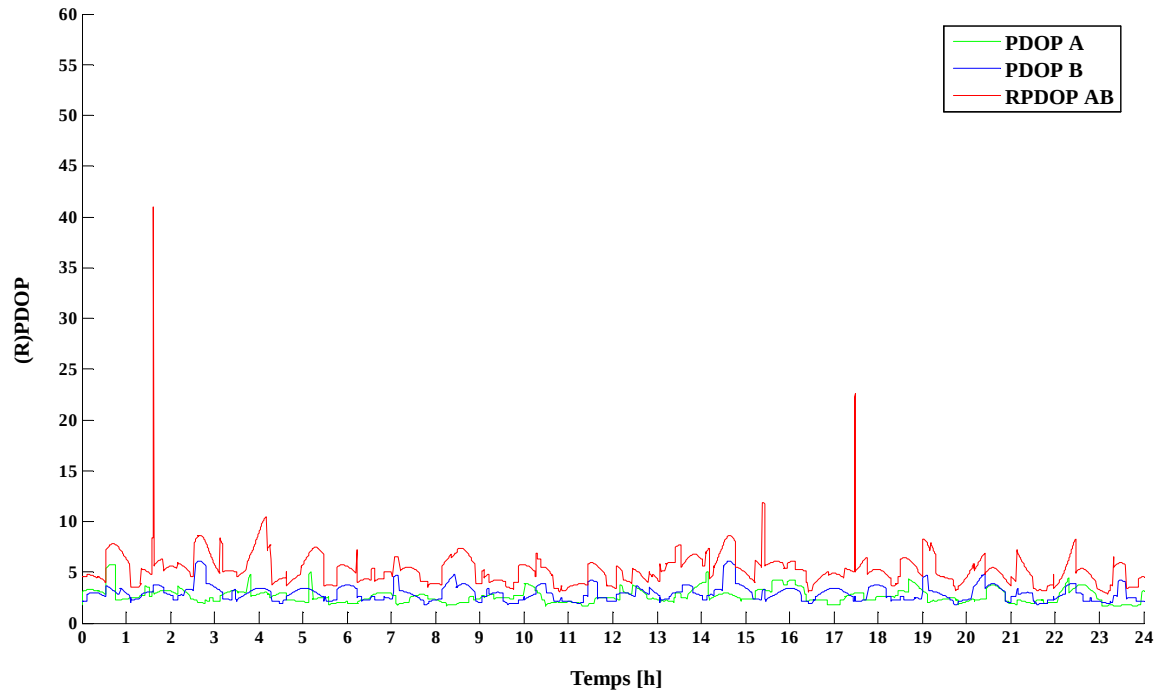


Figure 5.11. Variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP
($\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

Le tableau 5.3 ci-dessous présente quelques informations statistiques de la variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP pour cette ligne de base.

Tableau 5.3. Paramètres statistiques des valeurs de RPDOP et de DOP
($\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

	Moyenne	Maximum	P ₉₅
PDOP A	2.658	5.756	3.924
PDOP B	2.850	6.126	4.173
RPDOP AB	5.295	41.022	7.780

Les observations concernant la comparaison proprement dite des valeurs de RPDOP et de DOP s'apparentent aux observations émises concernant la ligne de base localisée en région équatoriale et en région de latitude moyenne. L'augmentation brutale du RPDOP (41.022 unités) vers 1h30 peut partiellement être expliquée par une chute du nombre de satellites (5 satellites) visibles depuis les deux stations à cet instant, comme le montre la figure 5.12 ci-dessous.

On peut observer, à partir de cette figure 5.12, que le nombre de satellites chute très fréquemment à une valeur de 5 sans entraîner systématiquement une hausse de la valeur du RPDOP. Par contre, il est intéressant d'observer que vers 17h30, bien que le nombre de satellites visibles depuis les deux stations soit de 7, on constate une valeur de RPDOP de 22.640 unités.

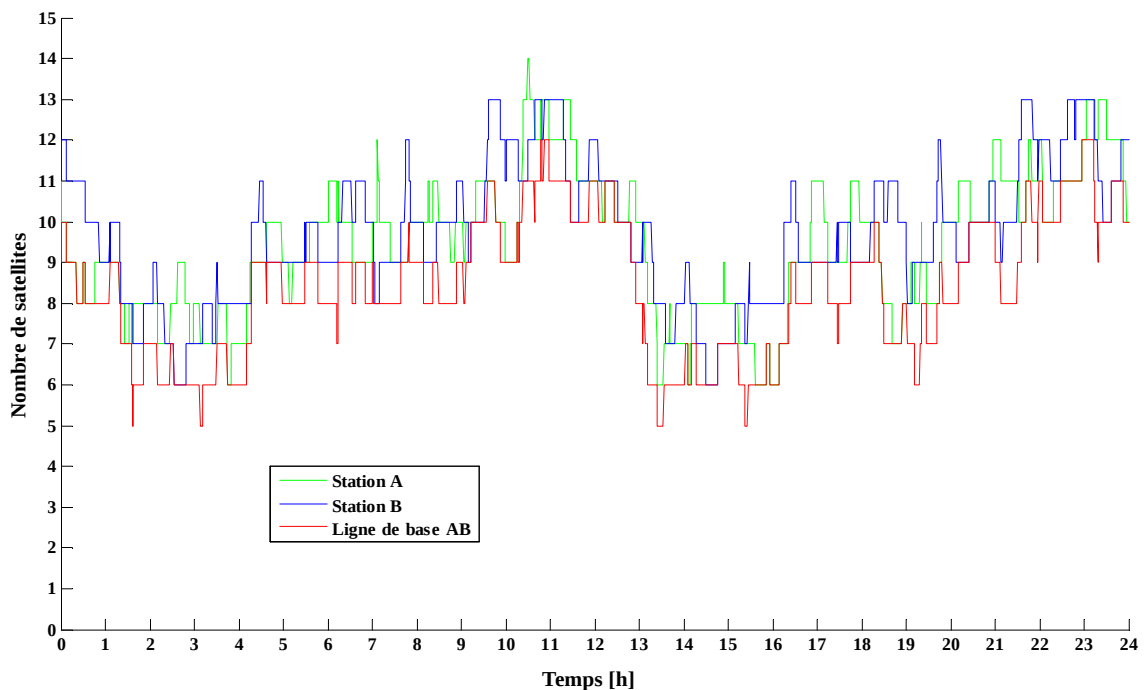


Figure 5.12. Variation journalière du nombre de satellites visibles
 $(\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009)$

5.4.3.4. Conclusions

Dans le cas de très longues lignes de base, nous pouvons globalement affirmer que les valeurs de DOP et de RPDOP sont faiblement corrélées. On constate ponctuellement de fortes augmentations du RPDOP durant des périodes où les valeurs du DOP restent tout à fait acceptables. Cette observation peut partiellement s'expliquer par une réduction du nombre de satellites visibles depuis les deux stations. Toutefois, il ne s'agit pas du seul paramètre influençant la valeur du RPDOP. Nous tenterons d'apporter une explication à cette constatation dans la section 5 de ce chapitre.

Nous avons pu observer que la latitude du site d'observation n'influence pas significativement la corrélation entre PDOP et RPDOP.

5.4.4. Lignes de base de longueur moyenne

Nous allons à présent étudier spécifiquement la variabilité du RPDOP ainsi que les relations entre DOP et RPDOP dans le cas de lignes de base de longueur moyenne (≈ 100 km).

Le graphique de la figure 5.13 ci-dessous représente la variabilité journalière du RPDOP pour une ligne de base choisie à la latitude de la Belgique ($\varphi_A = 50^\circ N, \lambda_A = 4^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 51^\circ N, \lambda_B = 4^\circ E, h_B = 0 m$). Sur ce graphique, on retrouve également les variations journalières des valeurs de DOP calculées pour chacune des deux stations délimitant la ligne de base.

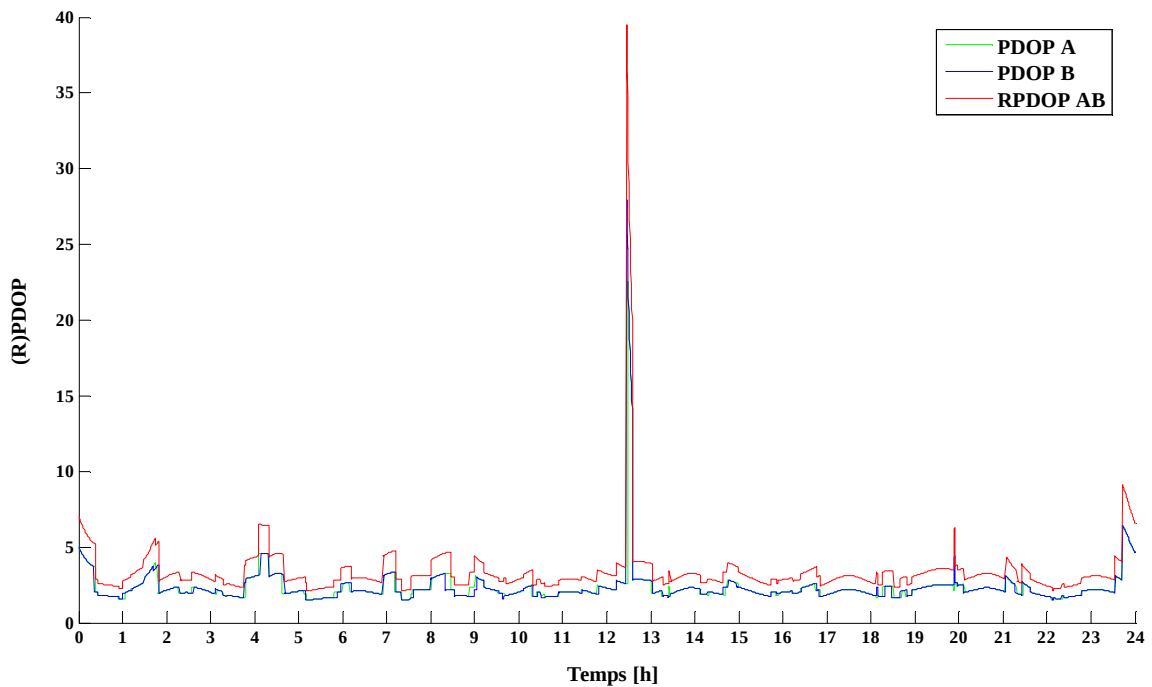


Figure 5.13. Variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP
($\varphi_A = 50^\circ N, \lambda_A = 4^\circ E, h_A = 0 m, \varphi_B = 51^\circ N, \lambda_B = 4^\circ E, h_B = 0 m, M15^\circ, 01/01/2009$)

Il est très intéressant d'observer sur ce graphique à quel point la variabilité du RPDOP est similaire à celle du PDOP. **Cela signifie que, contrairement aux observations effectuées dans le cas de très longues lignes de base, il n'y a pas véritablement de valeurs complètement inattendues du RPDOP vis-à-vis des valeurs du DOP.**

On remarque une forte augmentation du RPDOP vers 12h30. Mais la différence importante par rapport aux cas précédents, c'est que cette forte variation du RPDOP s'accompagne également de fortes variations des valeurs du DOP.

Le tableau 5.4 ci-dessous présente quelques informations statistiques de la variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP pour cette ligne de base.

Tableau 5.4. Paramètres statistiques des valeurs de RPDOP et de DOP
 $(\varphi_A = 50^\circ N, \lambda_A = 4^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 51^\circ N, \lambda_B = 4^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

	Moyenne	Maximum	P ₉₅
PDOP A	2.342	22.537	3.423
PDOP B	2.380	27.914	3.426
RPDOP AB	3.415	39.477	5.247

Le graphique de la figure 5.14 nous illustre l'évolution journalière du nombre de satellites visibles depuis les deux stations délimitant la ligne de base considérée. On peut observer que les périodes durant lesquelles certains satellites ne sont pas visibles simultanément depuis les deux stations sont rares. Lors de tels événements, le nombre de satellites ignorés étant faible, l'impact sur la valeur du RPDOP reste minime.

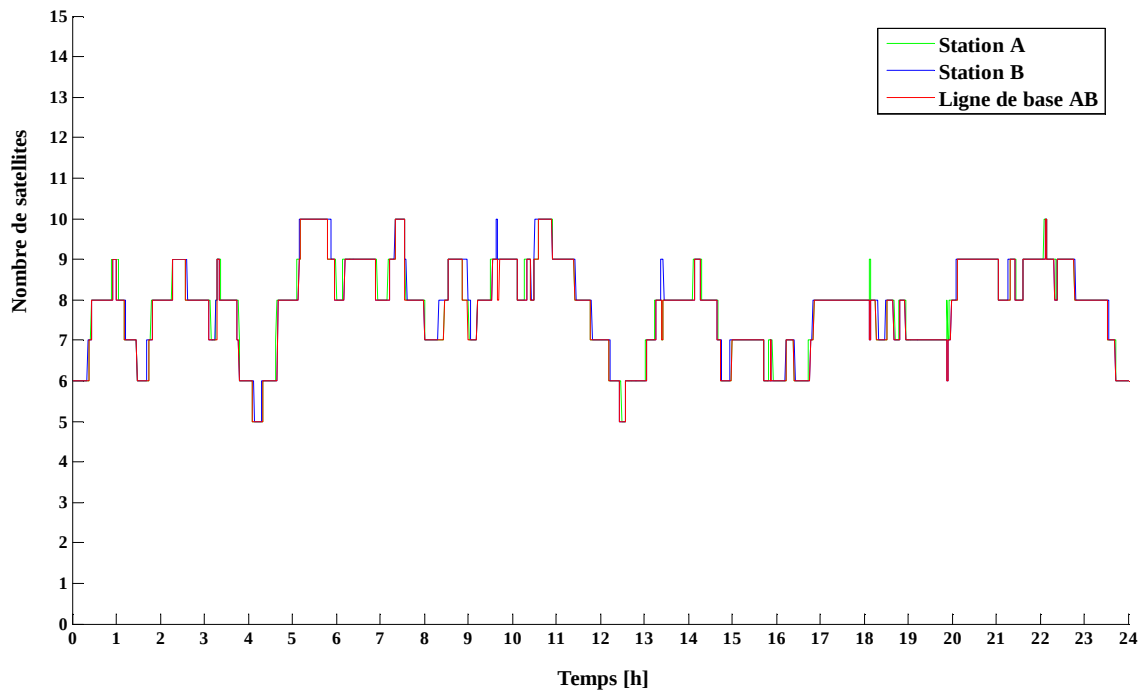


Figure 5.14. Variation journalière du nombre de satellites visibles
 $(\varphi_A = 50^\circ N, \lambda_A = 4^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 51^\circ N, \lambda_B = 4^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

Remarquons que les lignes de base considérées dans cette section ont une longueur proche de 100 km. Pour des applications de haute précision, les lignes de base sont très souvent bien plus courtes. Envisageons donc dès à présent le cas de très courtes lignes de base.

5.4.5. Courtes lignes de base

Nous allons à présent étudier spécifiquement la variabilité du RPDOP ainsi que les relations entre DOP et RPDOP dans le cas de très courtes lignes de base (≈ 20 km).

Le graphique de la figure 5.15 ci-dessous représente la variabilité journalière du RPDOP pour une ligne de base choisie entre deux stations du réseau FLEPOS (STATION *A* (MECH) $\rightarrow$ STATION *B* (GILL)). Sur ce graphique, on retrouve également les variations journalières des valeurs de DOP calculées pour chacune de ces deux stations.

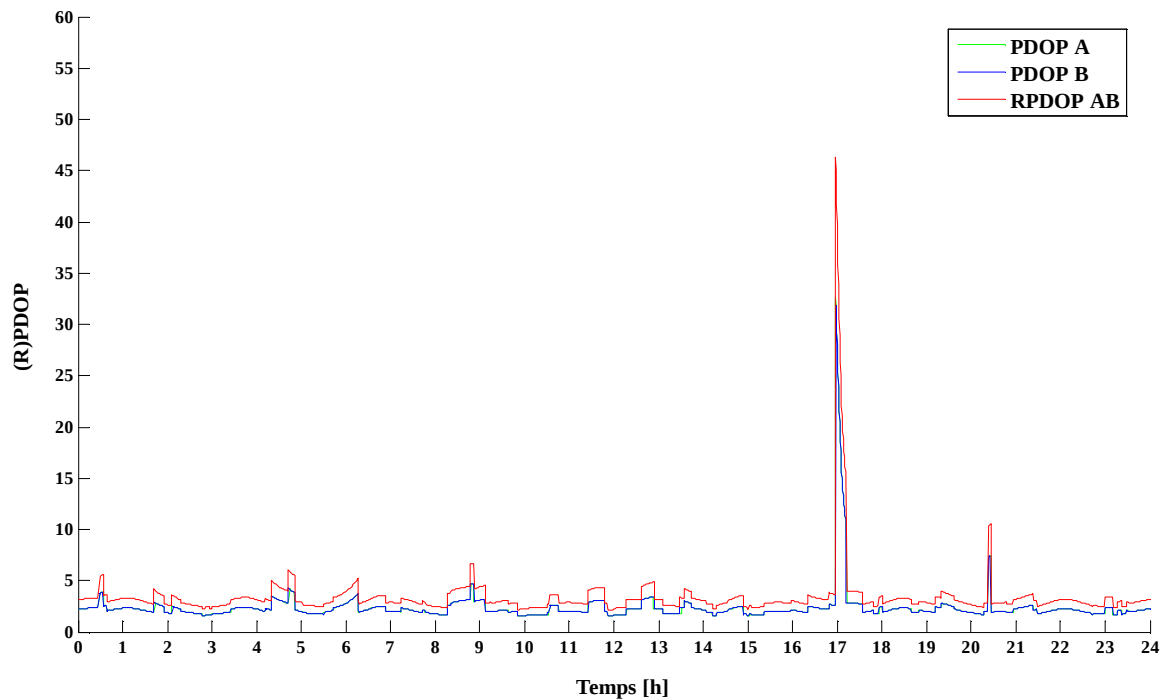


Figure 5.15. Variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP
(STATION *A* (MECH) $\rightarrow$ STATION *B* (GILL), $M15^\circ$, 27/10/2008)

Le tableau 5.5 ci-dessous présente quelques informations statistiques de la variation journalière des valeurs de RPDOP et de DOP pour cette ligne de base.

Tableau 5.5. Paramètres statistiques des valeurs de RPDOP et de DOP
(STATION *A* (MECH) $\rightarrow$ STATION *B* (GILL), $M15^\circ$, 27/10/2008)

	Moyenne	Maximum	P ₉₅
PDOP A	2.391	32.574	3.174
PDOP B	2.379	31.837	3.178
RPDOP AB	3.393	46.251	4.511

Les observations du graphique de la figure 5.15 sont semblables à celles effectuées dans le cas de lignes de base de longueur moyenne. En effet, on constate à nouveau un comportement extrêmement similaire entre les valeurs de PDOP et du RPDOP. On peut observer également à quel point les valeurs de PDOP calculées pour les deux stations sont semblables.

Le graphique de la figure 5.16 nous illustre l'évolution journalière du nombre de satellites visibles depuis les deux stations délimitant la ligne de base considérée. On peut observer que la constellation visible depuis les deux stations est très semblable tout au long de la journée d'observation. La différence entre le nombre de satellites utilisés pour le positionnement relatif et le nombre de satellites visibles depuis une des deux stations ne dépasse jamais la valeur 1.

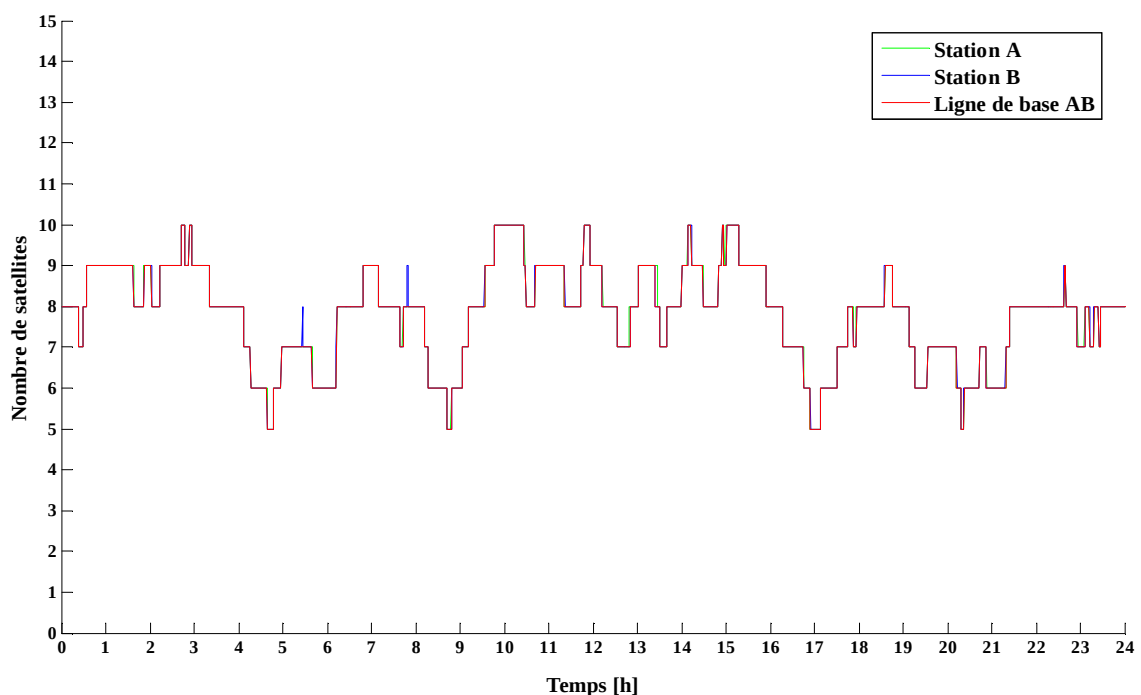


Figure 5.16. Variation journalière du nombre de satellites visibles
(STATION A (MECH) → STATION B (GILL), $M15^\circ$, 27/10/2008)

Nous pouvons constater que les observations effectuées pour les lignes de base de longueur moyenne et pour les très courtes lignes de base sont similaires. Cependant, les applications de haute précision utilisent généralement des lignes de base inférieures à 20 km. **On comprend donc que la limitation sévère de la longueur de la ligne de base pour les applications de haute précision exploitant des techniques de positionnement relatif ne trouve pas son origine au niveau de la qualité de la géométrie de la constellation.**

Cependant, rappelons que notre étude concerne des cas de visibilité « idéales » des satellites, sans tenir compte d'éventuels effets de masquage.

5.4.6. Ordre de grandeur du RPDOP

D'après les observations que nous avons pu effectuer, nous avons tenté de fixer un ordre de grandeur de l'intervalle de variation du RPDOP. Cet ordre de grandeur doit être considéré en tenant compte des hypothèses posées initialement (cf. § 5.2.2).

Dans le cas du positionnement absolu, nous avons mentionné que les valeurs généralement considérées comme acceptables du DOP étaient calculées sur base de paramètres statistiques.

De la même manière, nous allons nous servir des valeurs de percentile 95 calculées pour les différentes lignes de base considérées (tableaux 5.1 à 5.5) afin de fournir une valeur de RPDOP au-delà de laquelle la qualité de la géométrie de la constellation ne sera plus jugée suffisante pour assurer la précision du positionnement. Ces valeurs sont reprises dans le tableau 5.6 ci-dessous.

Tableau 5.6. Percentiles 95 du RPDOP pour différentes longueurs de ligne de base

	P₉₅ RPDOP
Longues lignes de base (≈1600km)¹	7.944
Lignes de base de longueur moyenne (≈ 100 km)	5.247
Courtes lignes de base (≈ 20 km)	4.511

¹ La valeur reprise dans le tableau est la valeur moyenne des trois percentiles 95 observés aux trois latitudes caractéristiques considérées.

5.4.7. Conclusions

Au travers de cette étude, nous avons pu établir que le comportement différencié entre les valeurs de PDOP et de RPDOP était fortement fonction de la longueur de la ligne de base considérée.

En effet, plus la longueur de la ligne de base est courte, plus la constellation de satellites exploités pour le positionnement relatif sera semblable à celle utilisée pour le positionnement absolu. Ceci explique que, pour de courtes lignes de base, PDOP et RPDOP évoluent de manière similaire au cours du temps. Les valeurs de RPDOP sont donc fortement prévisibles à partir des valeurs de DOP. Rappelons que la plupart des récepteurs utilisés par les géomètres ne fournissent généralement que la valeur du DOP, même lorsque des techniques de positionnement relatif sont employées.

En revanche, un accroissement de la longueur de la ligne de base entraîne une réduction du nombre de satellites pouvant être exploités dans le cadre d'une technique de positionnement relatif par rapport au nombre de satellites visibles en chacune des deux stations. Le faible nombre de satellites observables fait partie des paramètres pouvant provoquer une dégradation de la qualité de la géométrie de la constellation. Cependant, nous avons pu constater que le nombre de satellites visibles depuis les deux stations n'était pas le seul paramètre influençant la qualité de la géométrie de la constellation dans le cas du positionnement relatif. Dans la suite de notre étude, nous allons démontrer que la distribution des satellites retenus pour le positionnement relatif dans le ciel de l'observateur influence également la qualité de la géométrie de la constellation.

Les différences de valeurs entre RPDOP et DOP trouvent leur origine dans la construction propre de la matrice A , comme nous l'avons mentionné précédemment. En raison d'une forme analytique différente de la matrice A et de choix posés lors de la construction de la matrice des poids, notre objectif n'était nullement de comparer quantitativement les valeurs de DOP et de RDOP.

L'ensemble de nos observations soulèvent la question de savoir à quels types de géométries de la constellation correspondent de hautes valeurs de RPDOP. Dans la section 5 de ce chapitre, nous avons approfondi notre étude afin de pouvoir identifier et visualiser une géométrie de mauvaise ou de bonne qualité dans le cas d'application de techniques de positionnement relatif.

5.5. Interprétations : 4 cas particuliers

Dans la section précédente de ce chapitre, nous avons pu identifier 4 situations suscitant certaines interrogations. A présent, nous allons tenter d'apporter une interprétation de ces phénomènes particuliers observés en nous appuyant sur les résultats obtenus dans le cadre de notre étude du positionnement absolu.

5.5.1. Notions théoriques

Nous avons commencé par vérifier que la forme conique de la constellation visible donnant lieu à un cas de singularité dans le cas du positionnement absolu, engendre également un cas de singularité dans le cas du positionnement relatif. A cet effet, rappelons-nous premièrement la forme analytique de la matrice A (équation (5.2)) :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \eta^1 \sin \chi^1 - \cos \eta^2 \sin \chi^2 & \cos \eta^1 \cos \chi^1 - \cos \eta^2 \cos \chi^2 & \sin \eta^1 - \sin \eta^2 \\ \cos \eta^1 \sin \chi^1 - \cos \eta^3 \sin \chi^3 & \cos \eta^1 \cos \chi^1 - \cos \eta^3 \cos \chi^3 & \sin \eta^1 - \sin \eta^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \eta^1 \sin \chi^1 - \cos \eta^n \sin \chi^n & \cos \eta^1 \cos \chi^1 - \cos \eta^n \cos \chi^n & \sin \eta^1 - \sin \eta^n \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Nous pouvons remarquer que les termes compris dans la matrice A dépendent uniquement de la géométrie de la constellation visible depuis la station B .

Supposons, dans un premier temps, que les satellites observables simultanément depuis les stations A et B soient répartis sur un cône vertical centré au-dessus de B . Dans ce cas, tous les satellites apparaissent à une même élévation η depuis la station B . D'après l'équation (5.12), on peut voir qu'une telle configuration va annuler tous les termes de la troisième colonne de la matrice A . Or, nous savons que la matrice normale N est obtenue à partir de la matrice A :

$$N = A^T P A \quad (5.10)$$

avec P la matrice des poids des observations (cf. § 5.2.2). Il est possible de démontrer que si la matrice A contient une colonne nulle, alors la matrice N contient également une rangée nulle. Une matrice dont une rangée est nulle est caractérisée par un déterminant nul et constitue une matrice singulière. Lorsque tous les satellites sont à même élévation, la matrice normale, dans le cas du positionnement relatif, se trouve donc également dans un état de singularité.

Comme dans le cas absolu, chaque ligne de la matrice A contient les composantes d'un vecteur. Nous pouvons alors montrer que l'application d'une même rotation à ces vecteurs conserve la matrice normale dans un état de singularité (cf. § 4.6.3.2). Nous pouvons ainsi affirmer que si la géométrie de la constellation visible au-dessus de B se rapproche de la forme d'un cône dont le sommet correspond à la station B , alors la matrice normale se rapproche d'un cas singulier, entraînant le RDOP vers de hautes valeurs.

5.5.2. Longues lignes de base : cas 1, 2 et 3

D'après le graphique de la figure 5.9, nous avons mis deux situations en évidence (cas 1 et cas 2). Vers 12 h 30, la valeur du RPDOP atteint 44.373 unités alors que les PDOP en *A* et *B* sont respectivement de 2.005 et de 4.242 unités. A cet instant, le nombre de satellites visibles depuis les deux stations est de 5 (cas 1). Vers 18 h 30, le nombre de satellites visibles simultanément depuis les deux stations tombe également à 5 mais le RPDOP a une valeur de 5.204 unités (cas 2). Les tableaux 5.7 et 5.8 ci-dessous reprennent les données caractérisant ces deux premiers cas.

Tableau 5.7. Données : cas 1

($\varphi_A = 45^\circ N$, $\lambda_A = 0^\circ E$, $h_A = 0\text{ m}$, $\varphi_B = 60^\circ N$, $\lambda_B = 0^\circ E$, $h_B = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Heure: 12.42 h.		
	Nb. Satellites	(R)PDOP
A	7.000	2.005
B	7.000	4.242
AB	5.000	44.373

Tableau 5.8. Données : cas 2

($\varphi_A = 45^\circ N$, $\lambda_A = 0^\circ E$, $h_A = 0\text{ m}$, $\varphi_B = 60^\circ N$, $\lambda_B = 0^\circ E$, $h_B = 0\text{ m}$, $M15^\circ$, 01/01/2009)

Heure: 18.50 h.		
	Nb. Satellites	(R)PDOP
A	7.000	2.395
B	7.000	3.246
AB	5.000	5.204

La figure 5.17 ci-après permet une rapide comparaison de la géométrie des constellations visibles entre les cas 1 et 2. Sur base de *skyplots*, nous pouvons observer que dans le cas 1, la perte des satellites n'étant pas visibles depuis les deux stations entraîne la géométrie de la constellation au-dessus de *B* vers un cas conique. Cette perte de satellites n'entraîne pas la géométrie de la constellation au-dessus de *B* dans une telle configuration dans le cas 2, bien que le nombre de satellites visibles depuis les deux stations soient alors identiques entre ces deux situations.

Dès lors, la forte augmentation du RPDOP dans le cas 1 peut bel et bien être expliquée par une forme conique de la constellation visible à cet instant, entraînant la matrice normale vers un état de singularité. **Ces observations sont indépendantes de la manière de combiner les doubles différences au sein du modèle mathématique.**

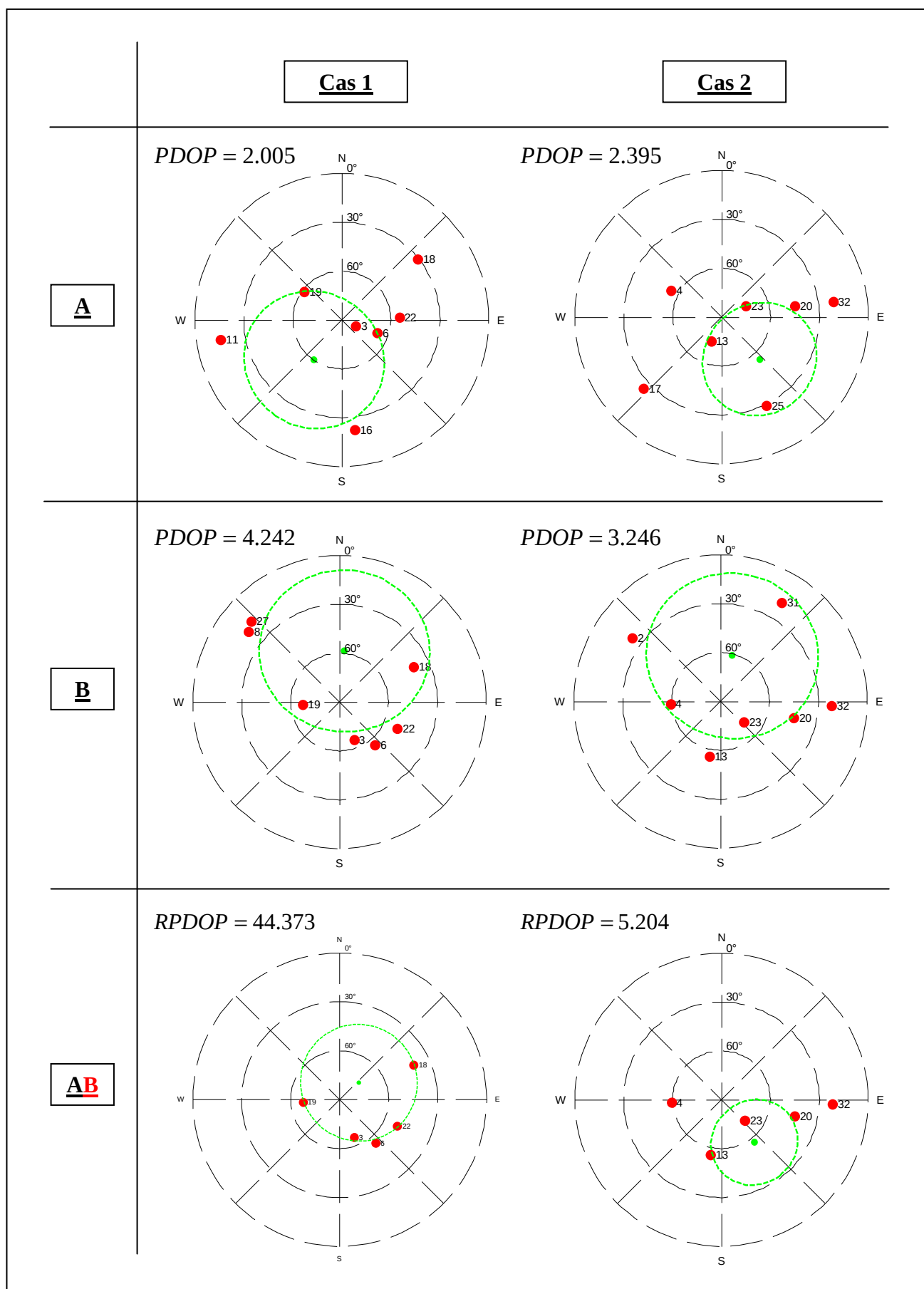


Figure 5.17. Configuration géométrique de la constellation : cas 1 et cas 2
 $(\varphi_A = 45^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 60^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

Sur le graphique de la figure 5.11, nous pouvons observer, vers 17 h 30, que le RPDOP atteint une valeur de 22.640 unités alors que le nombre de satellites visibles depuis les deux stations est, à ce moment là, de 7 (cas 3). Pour comprendre l'origine de cette valeur de RPDOP élevée dans un cas où le nombre de satellites visibles est élevé, nous avons représenté la géométrie de la constellation visible sur un *skyplot* présenté à la figure 5.18 ci-dessous.

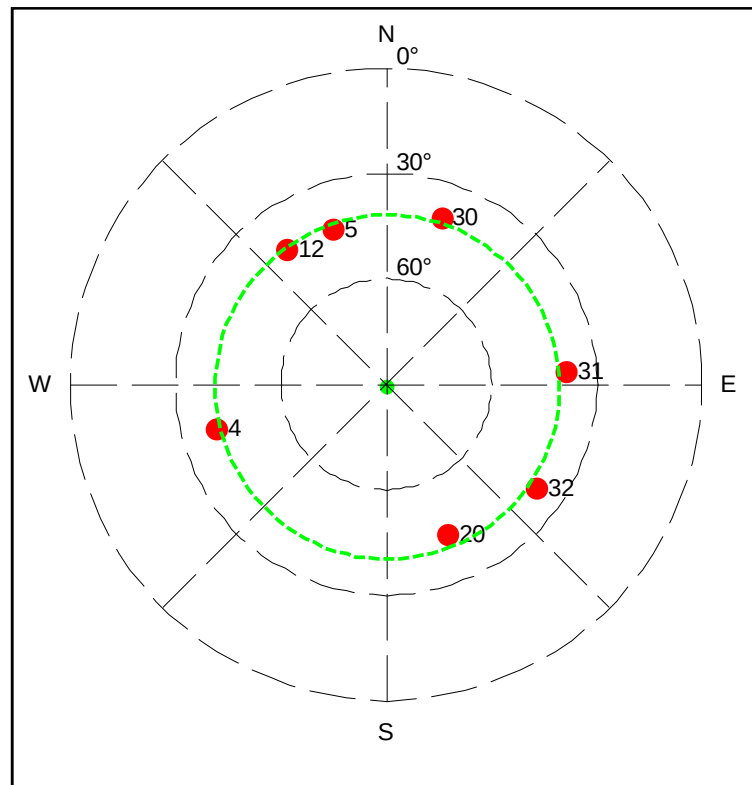


Figure 5.18. Configuration géométrique de la constellation : cas 3
 $(\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

Nous pouvons observer sur le *skyplot* de la figure 5.18 que les 7 satellites se trouvent bien sur un cône, ce qui explique la valeur élevée du RPDOP. Le tableau 5.9 ci-dessous présente les caractéristiques de ce troisième cas identifié.

Tableau 5.9. Données : cas 3
 $(\varphi_A = 75^\circ N, \lambda_A = 0^\circ E, h_A = 0\text{ m}, \varphi_B = 90^\circ N, \lambda_B = 0^\circ E, h_B = 0\text{ m}, M15^\circ, 01/01/2009)$

Heure: 17.48 h.		
	Nb. Satellites	(R)PDOP
A	9.000	2.913
B	9.000	2.609
AB	7.000	22.640

5.5.3. Courtes lignes de base : cas 4

D'après le graphique de la figure 5.15, nous pouvons voir que vers 17 h 00, le RPDOP atteint une valeur de près de 46.251 unités tandis que les valeurs du DOP au-dessus de *A* et de *B* sont d'environ 30 unités (cas 4). A cet instant, tous les satellites de la constellation visibles depuis *A* sont également visibles depuis *B* et inversement. La géométrie de la constellation visible simultanément depuis les deux stations comporte 5 satellites. Le tableau 5.10 ci-dessous reprend les données caractérisant ce quatrième cas.

Tableau 5.10. Données : cas 4
(STATION *A* (MECH) → STATION *B* (GILL), $M15^\circ$, 27/10/2008)

Heure: 16.96 h.		
	Nb. Satellites	(R)PDOP
A	5.000	32.700
B	5.000	31.840
AB	5.000	46.251

La figure 5.19 ci-dessous permet de comparer la géométrie des constellations visibles en *A* et en *B*. Ces deux stations étant très proches l'une de l'autre, la configuration géométrique de la constellation est très semblable entre ces deux stations. Les géométries de ces deux constellations se rapprochent fortement d'un cas conique, ce qui explique les valeurs élevées de PDOP.

Ceci nous conduit vers la conclusion suivante : lorsqu'une valeur élevée de PDOP peut être expliquée par une forme conique de la géométrie de la constellation visible, la perte d'un ou plusieurs satellites constituant cette constellation ne peut que renforcer le caractère conique de la géométrie de la constellation. Dès lors, on peut affirmer que si le PDOP caractérisant la géométrie de la constellation au-dessus de la station de position inconnue présente une valeur élevée, le RPDOP présentera immanquablement une valeur élevée. Par contre, et en particulier pour des longues lignes de base, une valeur élevée de RPDOP peut très bien se présenter malgré un PDOP tout à fait acceptable à la station *B*.

Concrètement, cela signifie que dans le cas de courtes lignes de base (≤ 100 km), le comportement du RPDOP peut être prévu à partir de l'observation du comportement du PDOP. Par contre, le caractère prévisible du RPDOP est fortement altéré lorsque l'on considère de très longues lignes de base (≥ 1000 km).

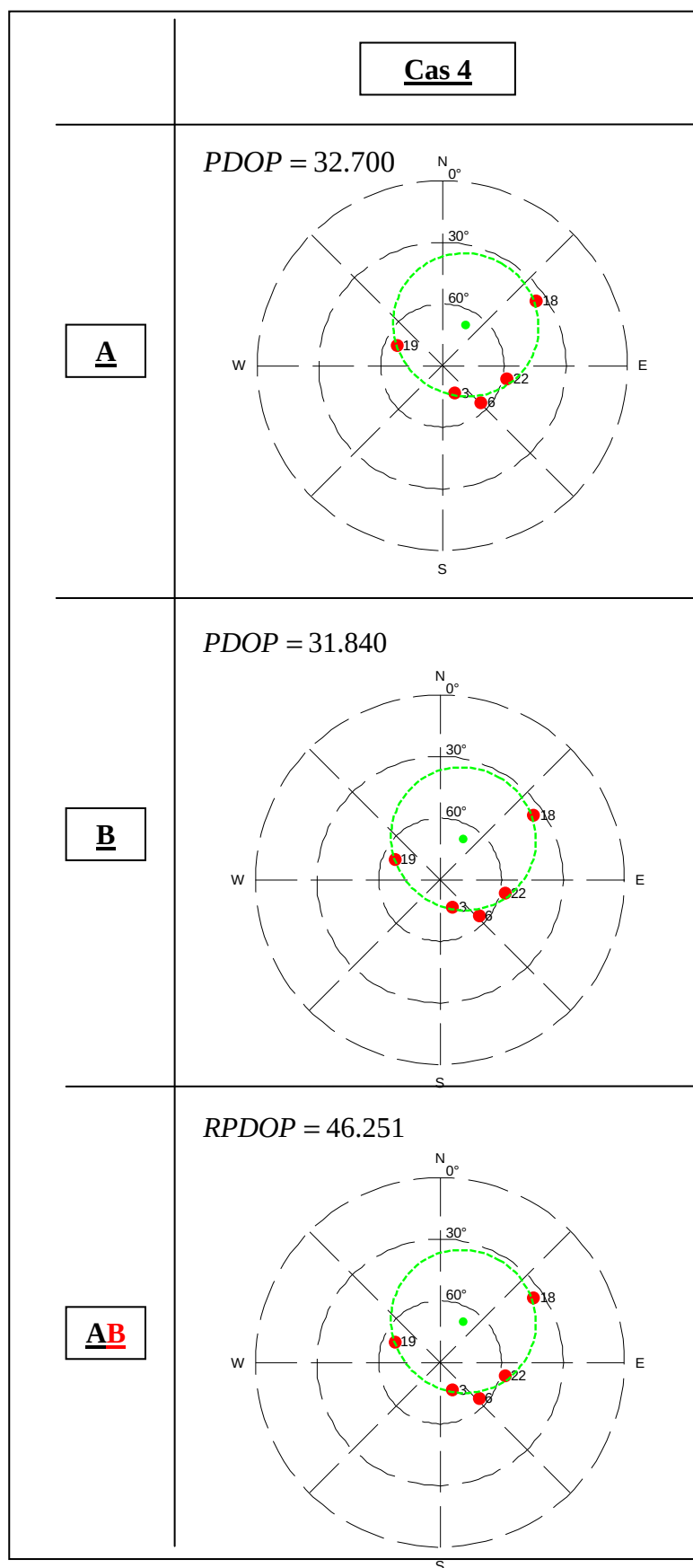


Figure 5.19. Cas 4
(STATION *A* (MECH) → STATION *B* (GILL), M15°, 27/10/2008)

5.6. Validation

Le logiciel SoDIPE-RTK (LEJEUNE 2006), développé au sein de la section « Profils ionosphériques » de l'IRM, est un logiciel permettant la détermination de l'erreur de position due à l'ionosphère dans le cas du positionnement RTK (*Real Time Kinematic*).

Dans les résultats générés par ce logiciel, on peut observer certaines erreurs de positionnement très importantes durant des périodes de basse activité ionosphérique. Qui plus est, ces erreurs importantes présentent un caractère périodique, se répétant de jour en jour avec un léger décalage de quelques minutes.

Le graphique de la figure 5.20 ci-dessous illustre la variation de l'erreur de position calculée par le logiciel SoDIPE-RTK pour une ligne de base du réseau FLEPOS (STATION A(GILL) → STATION B(LEEU)). Les deux courbes de ce graphique ont été calculées pour les jours 300 et 310 de l'année 2008 (26/10/2008 et 05/11/2008). Nous pouvons observer que l'erreur de position reste généralement inférieure à 5 cm sauf vers 17 h 00 où elle atteint une valeur de 22 cm et 30 cm, respectivement pour les jours 300 et 310.

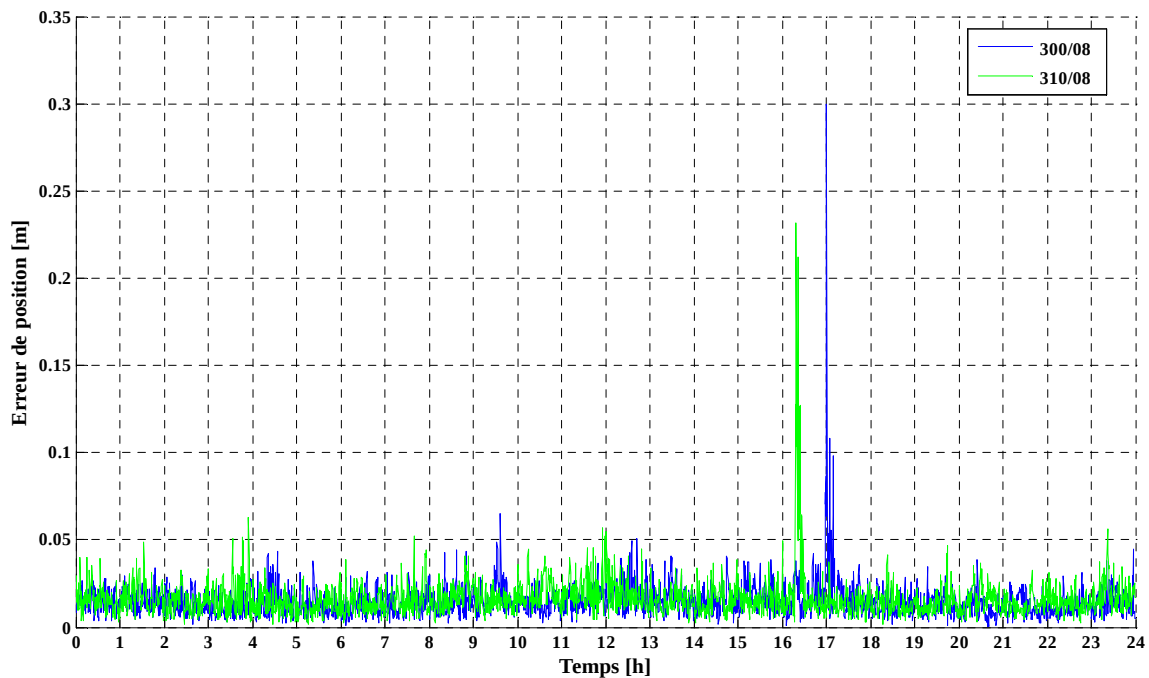


Figure 5.20. Variation journalière de l'erreur de position (So-DIPE-RTK)
(STATION A (GILL) → STATION B (LEEU), $M15^\circ$, 26/10/2008–05/11/2008)

Le décalage temporel entre les deux valeurs extrêmes des erreurs de position observées pour les jours 300 et 310 de l'an 2008 est d'environ 41 minutes. Or, nous savons que, pour un site d'observation donné, la géométrie de la constellation se retrouve dans une même configuration géométrique toutes les 11 h 58 m (UTC). Sur un laps de temps de 10 jours, le décalage temporel entre la répétition de deux mêmes configurations géométriques de la constellation est bien d'une quarantaine de minutes. Dès lors, on peut émettre l'hypothèse que cette erreur de position est due à une configuration géométrique particulière de la constellation.

Afin de pouvoir expliquer les valeurs extrêmes dans les résultats fournis par le logiciel SoDIPE-RTK qui, rappelons-le, ne peuvent être dues à l'ionosphère, nous allons confronter ces observations aux résultats de notre étude de l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement relatif. Cette étape constituera une validation de notre étude sur un cas « réel » de calcul de position. Nous réaliserons ce processus de validation en particulier sur la journée d'observation 310/08 (05/11/2008).

A l'aide du programme DOPR, nous avons pu calculer les valeurs du RPDOP pour la journée d'observation et la ligne de base considérées. Le graphique de la figure 5.21 présente une comparaison entre la variabilité du RPDOP et la variabilité de l'erreur de position. Nous avons volontairement réduit la portée du graphique à la période s'étalant de 15 h 00 à 18 h 00.

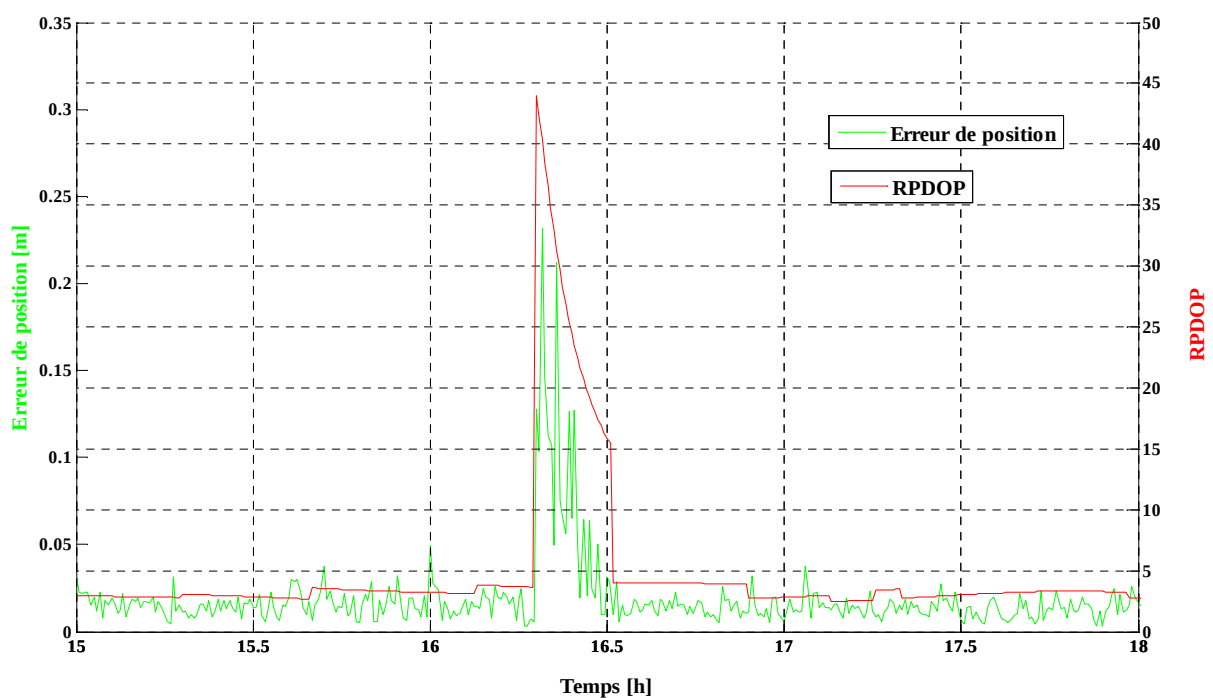


Figure 5.21. Variation journalière de l'erreur de position (So-DIPE-RTK) et du RPDOP
(STATION A (GILL) → STATION B (LEEU), $M15^\circ$, 05/11/2008)

A partir de ce graphique, nous pouvons observer que la corrélation entre le RPDOP et les valeurs extrêmes des erreurs de positions est excellente. Nous avons donc la confirmation que ces erreurs de positionnement trouvent bel et bien leur origine dans la configuration géométrique de la constellation.

Le graphique de la figure 5.22 montre le nombre de satellites visibles et le RPDOP. L'examen de cette figure indique clairement que le nombre de satellites visibles n'est pas le seul paramètre influençant le RPDOP. En effet, la valeur extrême de l'erreur de position correspondant à la valeur extrême de RPDOP est observée vers 16 h 15 alors que le nombre de satellites visibles est de 5 (cas 1). Vers 04 h 00, le RPDOP reste de l'ordre de 6 unités pour un nombre identique de satellites visibles (cas 2). A ce moment, l'erreur de position reste inférieure à 5 cm, ce qui correspond à la précision nominale du RTK.

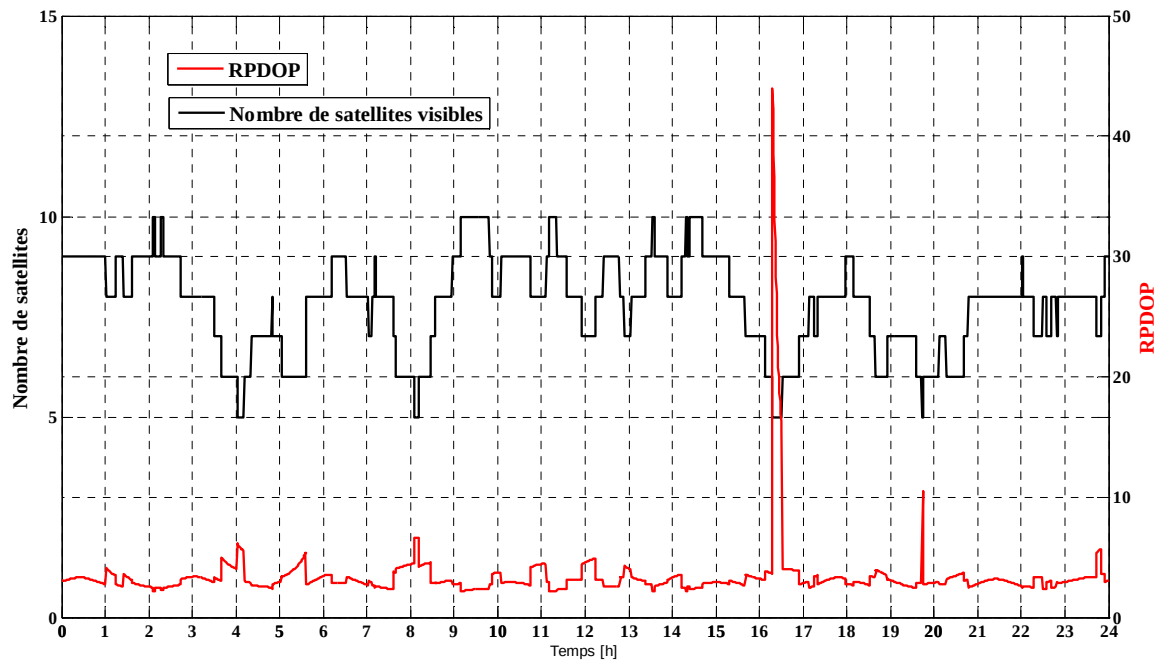


Figure 5.22. Variation journalière du RPDOP et du nombre de satellites visibles
(STATION A (GILL) → STATION B (LEEU), $M15^\circ$, 05/11/2008)

Nous terminerons notre validation par l'observation de la configuration géométrique de la constellation dans les cas 1 et 2, à l'aide des *skyplots* de la figure 5.23 ci-après.

Grâce à ces observations, nous pouvons par la même occasion valider notre interprétation. En effet, nous constatons que la géométrie de la constellation dans le cas 1 se rapproche d'une forme conique, expliquant les hautes valeurs de RPDOP et l'impact de ces hautes valeurs sur l'erreur de positionnement. Par contre, alors que la constellation visible dans le cas 2 comporte également cinq satellites, on peut voir que ces satellites ne sont pas distribués dans le ciel de l'observateur selon une forme conique. Ceci explique donc que le RPDOP conserve de faibles valeurs et que cette géométrie reste, malgré un nombre de satellites faible, favorable à un positionnement relatif de haute précision.

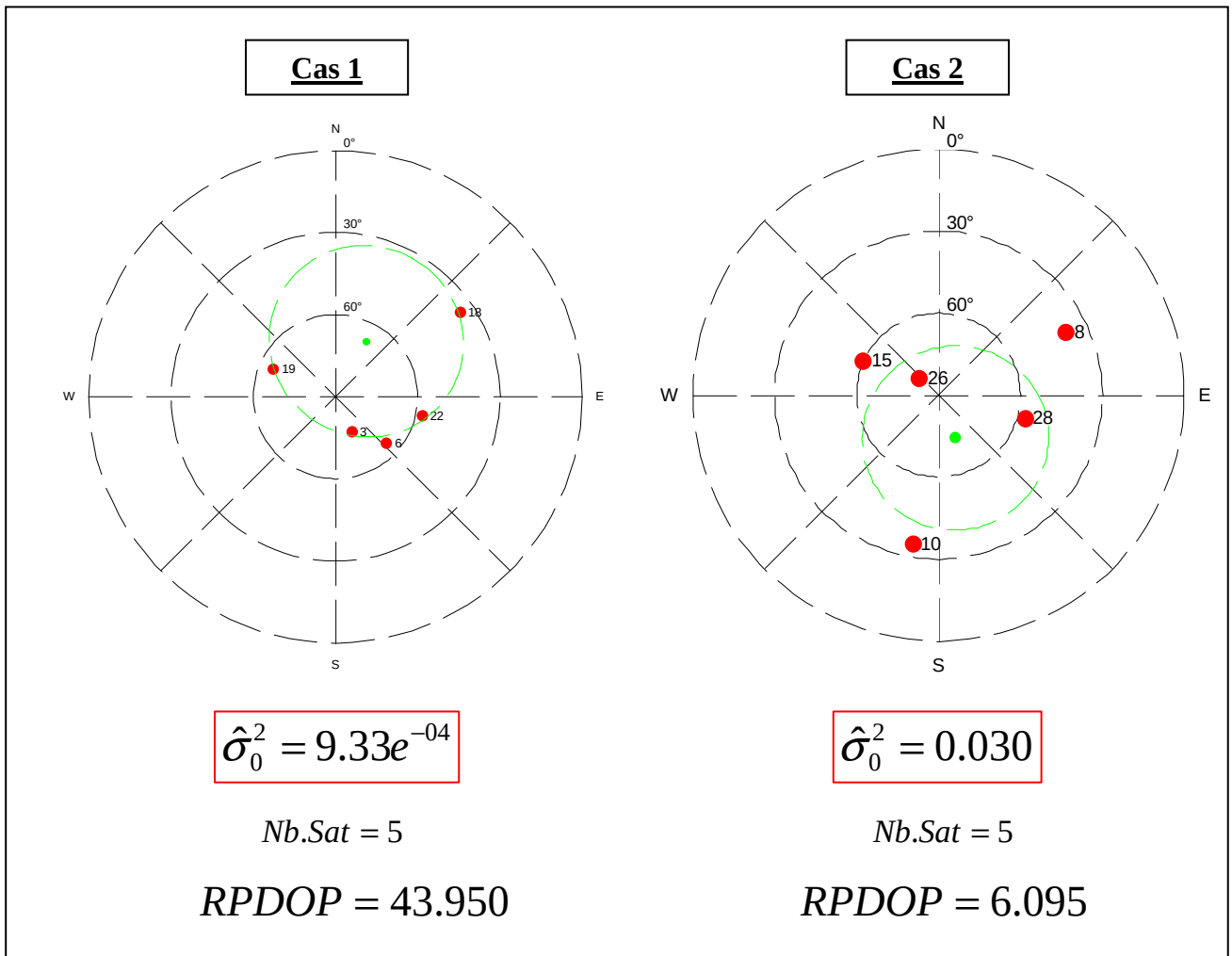


Figure 5.23. Comparaison des géométries des constellations des cas 1 et 2
(STATION A (GILL) → STATION B (LEEUE), M15°, 05/11/2008)

5.7. Synthèse

L'étude présentée dans ce chapitre consacré à l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement relatif nous a permis d'aboutir à plusieurs résultats concluants, répondant ainsi à une partie des objectifs énoncés dans le chapitre 3.

D'après nos expériences, nous avons pu mettre en évidence le fait que la manière de combiner les observations lors de la mise au point de la matrice A n'influait pas la valeur calculée du RPDOP. La méthode employée pour combiner les doubles différences est la méthode du satellite de référence (LEICK 2004). Les différentes combinaisons possibles permettant la construction de la matrice A se basent sur un choix différent du satellite de référence. Afin d'adhérer aux principes mis en œuvre dans la plupart des applications pratiques, nous avons toujours considéré le satellite d'élévation maximale comme le satellite de référence lors de la mise au point du modèle mathématique.

Les expériences que nous avons menées pour étudier la corrélation entre le PDOP et le RPDOP nous permettent de conclure que la latitude du site d'observation n'a pas de réelle influence sur cette corrélation. Par contre, la corrélation entre RPDOP et PDOP est influencée de manière significative par la longueur de la ligne de base considérée.

Dans le cas de très longues lignes de base (≈ 1600 km), la corrélation entre RPDOP et PDOP est faible. On peut observer ponctuellement des valeurs très élevées de RPDOP (ex : 54.724 unités) à des périodes où la valeur du PDOP reste tout à fait acceptable (ex : 4 unités). Ce type d'observation peut être partiellement expliqué par le nombre réduit de satellites visibles simultanément depuis les deux stations délimitant la ligne de base, par rapport au nombre de satellites visibles depuis les stations considérées isolément. Cependant, le nombre de satellites observables pour effectuer le calcul de positionnement relatif n'est pas seul responsable de la dégradation de la qualité de la géométrie de la constellation. Nous avons pu démontrer que de hautes valeurs de RPDOP pouvaient être expliquées par la forme conique de la géométrie de la constellation satellitaire commune, à la station de position inconnue. Certaines géométries comportant 5 satellites peuvent ainsi aboutir à des valeurs élevées de RPDOP (ex : 43.950 unités) tandis que d'autres géométries comportant également 5 satellites conservent de faibles valeurs de RPDOP (ex : 5 unités). Dans le cas de très longues lignes de base, nous pouvons donc conclure que le RPDOP est potentiellement imprévisible à partir du PDOP. Le géomètre disposant d'une valeur acceptable du PDOP ne peut donc pas être certain de réaliser un positionnement relatif de haute précision.

Dans le cas de lignes de base de longueur moyenne (≈ 100 km) ainsi que pour de très courtes lignes de base (≈ 20 km), le caractère prévisible du RPDOP à partir de la valeur du PDOP est bien plus prononcé. On peut observer une corrélation forte entre le RPDOP et le PDOP. Lorsque le RPDOP subit de fortes augmentations, la valeur du PDOP subit également une forte augmentation. L'excellente corrélation entre la variabilité du RPDOP et du PDOP peut s'expliquer par la similitude entre la géométrie de la constellation visible depuis les deux extrémités de la ligne de base et la géométrie de la constellation visible depuis la station de position inconnue. En effet, la plupart des satellites visibles depuis la station B à un instant donné sont également visibles depuis la station A à cet instant et peuvent donc être exploités dans le calcul de position.

Nous savions qu'une géométrie de la constellation de forme conique entraînait un cas de singularité au niveau de la matrice normale dans le cas du positionnement absolu. Nous avons pu montrer qu'une telle géométrie entraînait également un cas de singularité de la matrice normale dans le cas du positionnement relatif.

Etant donné la forme analytique différente de la matrice A et les choix posés lors de la construction de la matrice des poids, nous ne pouvons comparer quantitativement le RPDOP et le PDOP. Sur base de paramètres statistiques, nous avons pu établir, pour chaque longueur de ligne de base considérée, une valeur de RPDOP au-delà de laquelle la qualité de la géométrie de la constellation n'est plus jugée satisfaisante afin d'assurer un positionnement relatif de haute précision (cf. tableau 5.6). Cependant, rappelons une fois encore que notre étude ne tient pas compte d'éventuels effets de masquage et que l'activation ou la désactivation temporaire ou définitive de certains satellites peuvent remettre en cause certaines de nos observations.

Enfin, grâce à nos travaux, nous avons pu expliquer certaines erreurs de position importantes observées dans les résultats du logiciel SoDIPE-RTK (LEJEUNE 2006) développé au sein de la section « Profils ionosphériques » de l'IRM. Nous avons pu prouver que ces erreurs trouvaient leur origine dans des configurations particulières de la géométrie de la constellation. Cette étape a permis de valider les résultats de notre étude sur un cas « réel » de calcul de position.

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

6.1. Conclusions

Cette étude nous a permis de mieux comprendre **l'influence de la géométrie de la constellation sur la précision du positionnement** par satellites, en particulier le positionnement absolu instantané et le positionnement relatif instantané, exploitant des mesures de codes. Notre raisonnement est généralisable aux techniques de positionnement exploitant des mesures de phases. La qualité de la géométrie de la constellation, dans le cas de ces deux techniques de positionnement, peut être estimée à l'aide d'indicateurs : le **DOP** et le **RDOP**. Ces indicateurs se déclinent en plusieurs composantes. Afin de conserver un certain parallélisme entre les parties de notre étude consacrées au positionnement absolu et au positionnement relatif, nous avons étudié plus précisément le **PDOP** et le **RPDOP**.

Notre étude a nécessité la mise au point de deux **logiciels spécifiques** : **DOPA** et **DOPR** (cf. § 4.4 et § 5.3). Ces logiciels permettent une automatisation du calcul du DOP et du RDOP (cf. § A1 et § A2). L'interface de ces deux logiciels a été conçue de manière à permettre à l'utilisateur de visualiser directement le résultat de ses traitements. Ces programmes fournissent également toute une série de paramètres statistiques permettant à l'utilisateur une interprétation aisée de ses observations.

6.1.1. Le positionnement absolu

L'étude de l'influence de la géométrie de la constellation satellitaire sur le **positionnement absolu** a débuté par une approche intuitive basée sur une constellation fictive hautement symétrique (cf. § 4.3). Cette approche a permis de montrer que l'homogénéité de la répartition des satellites dans le ciel de l'observateur contribuait à optimiser la qualité de la géométrie. Grâce à cette approche intuitive, nous avons détecté une première configuration géométrique de la constellation rendant impossible le positionnement, et donc le calcul du DOP. Il s'agit de la géométrie de la constellation pour laquelle tous les satellites sont caractérisés par une même élévation. Nous avons également vu que certaines configurations particulières de la géométrie de la constellation conduisaient le DOP vers des valeurs infinies.

L'étude de la **variabilité spatio-temporelle du PDOP** (cf. § 4.5), rendue possible par le programme DOPA, a permis de mettre en évidence l'influence de plusieurs facteurs sur la qualité de la géométrie de la constellation.

Le **masque d'élévation** (cf. § 4.5.2) influence la valeur du PDOP en régissant le nombre de satellites visibles. Nous avons donc pu conclure qu'un nombre élevé de satellites visibles faisait partie des paramètres de la constellation conduisant à de faibles valeurs du PDOP.

Nous avons montré que la **longitude** (cf. § 4.5.3) du site d'observation n'influencait pas de manière significative la valeur du PDOP. Par contre, la qualité de la géométrie de la constellation est bel et bien influencée par la **latitude** du site d'observation (cf. § 4.5.4). Le PDOP conserve en permanence de très faibles valeurs à l'équateur. Globalement, la fiabilité de la qualité de la géométrie de la constellation décroît légèrement lorsque la latitude augmente. Ces observations s'expliquent par la configuration orbitale de la constellation GPS.

Il n'y a pas de différence significative entre le comportement moyen du PDOP dans l'**hémisphère** sud et dans l'hémisphère nord (cf. § 4.5.5). Néanmoins, le PDOP diffère entre les deux hémisphères par certains comportements particuliers rencontrés très ponctuellement et ne pouvant être expliqués par la position du site d'observation sur le globe. Ces événements sont engendrés par des configurations géométriques très particulières de la constellation se présentant ponctuellement dans le temps et dans l'espace (cf. ci-après).

La **corrélation** entre les différentes **composantes du PDOP** (cf. § 4.5.6) est fortement influencée par la latitude du site d'observation et, indirectement, par la configuration orbitale de la constellation GPS. La corrélation entre le HDOP, le VDOP et le PDOP est excellente à la latitude de 45°N. Par contre, le HDOP et le VDOP sont faiblement corrélés à la latitude de 90°N. A cette latitude, bien que le VDOP et le PDOP présentent une forte variabilité temporelle, le HDOP conserve en permanence de très faibles valeurs. Cela signifie que malgré une forte variabilité du PDOP, la géométrie de la constellation au pôle est toujours favorable à un positionnement **horizontal** de haute précision. Le fait que le HDOP conserve en permanence de faibles valeurs aux pôles s'explique par la présence de nombreux satellites à faible élévation et l'absence perpétuelle de satellites proches du zénith. Globalement, nos observations confirment le fait que **le positionnement horizontal est toujours plus précis que le positionnement vertical**, le HDOP conservant toujours des valeurs plus faibles que le VDOP. Cette différence de précision sur le positionnement horizontal et vertical s'explique par le fait que la répartition des satellites dans le ciel de l'observateur n'est jamais aussi homogène verticalement que horizontalement (pour un observateur terrestre, les satellites dont l'élévation est négative sont invisibles).

Enfin, l'étude de la variabilité spatio-temporelle du DOP nous a permis d'affirmer que la **couverture spatio-temporelle de la constellation GPS est excellente** : le PDOP conserve la plupart du temps des valeurs inférieures à 4 unités (cf. § 4.5.7). Toutefois, on rencontre très **ponctuellement**, dans le temps et dans l'espace, des **valeurs très élevées de PDOP**. Lors de tels événements, le PDOP atteint des valeurs parfois extrêmes (1800 unités). Néanmoins, n'oublions pas que notre étude ne tient pas compte d'éventuels effets de masquage.

Grâce à l'observation de ces événements particuliers (cf. § 4.6.2), nous avons montré qu'un nombre élevé de satellites visibles ne constituait en rien une condition suffisante à l'obtention d'une bonne qualité géométrique de la constellation. Par exemple, certaines géométries de la constellation comportant 6 satellites sont caractérisées par des valeurs de PDOP très différentes (2,364 unités ou 13.780 unités).

Nous avons démontré que l'apparition d'évènements critiques, marqués par une valeur élevée de PDOP, pouvait être mise en relation avec l'état singulier de la **matrice normale** (cf. § 4.6.3). Sur base de démonstrations mathématiques, nous avons prouvé que la **forme conique** de la géométrie de la constellation conduisait la matrice normale vers un état de **singularité**, et donc le PDOP vers des valeurs extrêmes. Une telle géométrie de la constellation est donc très défavorable à un positionnement de haute précision.

A partir de ces développements, nous avons mis au point une méthode consistant à réaliser **l'ajustement (par moindres carrés) d'un cône** sur une constellation de satellites visibles depuis une position donnée à un instant donné (cf. § 4.6.4). La représentation du cône ajusté sur un **skyplot** ainsi que l'observation des résidus de cet ajustement permettent de juger du caractère conique de la géométrie d'une constellation.

Grâce à cette méthode, toutes les situations critiques présentant des valeurs élevées de PDOP, identifiées dans nos observations, ont été expliquées par la forme conique de la géométrie de la constellation (cf. § 4.6.5). **Par la même occasion, nous avons ainsi prouvé que le nombre élevé de satellites visibles ainsi que l'homogénéité de leur distribution dans le ciel de l'observateur optimisaient la qualité de la géométrie de la constellation, pour autant que la forme de la géométrie de la constellation ne soit pas conique.** Nous avons déjà montré que le nombre de satellites n'était pas seul responsable de la valeur du PDOP. Précisons tout de même que la probabilité d'obtenir une forme conique de la géométrie de la constellation augmente lorsque le nombre de satellites diminue.

Ce premier volet de notre étude a permis d'établir un lien solide entre la valeur du PDOP et la configuration géométrique de la constellation satellitaire, rendant possible l'évaluation de la qualité de la géométrie de la constellation sur base de l'observation d'un **skyplot** illustrant la distribution des satellites visibles dans le ciel de l'observateur.

6.1.2. Le positionnement relatif

Nous avons débuté notre étude de l'influence de la géométrie de la constellation satellitaire sur la précision du **positionnement relatif** par une évaluation de l'impact de **combinaisons** différentes **des observations** dans le modèle mathématique sur la valeur calculée du RPDOP (cf. § 5.4.2). La construction de notre modèle mathématique est basée sur la méthode du satellite de référence (LEICK 2004). Les différentes combinaisons envisagées reposent sur un choix différent du satellite de référence. Grâce aux possibilités du programme DOPR, nous avons pu montrer que la valeur du RDOP n'était pas influencée de manière significative par la construction du modèle mathématique.

L'objet principal de ce second volet de notre étude était la **corrélation** entre le **PDOP** et le **RPDOP**. Nous avons montré que cette corrélation dépendait fortement de la longueur de la ligne de base considérée.

Dans le cas de très **longues lignes de base (≈ 1600 km)** (cf. § 5.4.2), la corrélation entre RPDOP et PDOP est globalement faible. Le RPDOP est susceptible d'adopter, lors d'évènements très ponctuels, des valeurs très élevées alors que, aux mêmes instants, le PDOP conserve de faibles valeurs. Cela signifie que la géométrie de la constellation peut favoriser un positionnement absolu de haute précision à cet instant, et dégrader fortement la précision du positionnement relatif au même instant, pour la ligne de base considérée. Ces

observations s'expliquent par le nombre réduit de satellites visibles simultanément depuis les deux stations délimitant la ligne de base, par rapport au nombre de satellites visibles depuis chacune des stations considérées isolément. Comme dans le cas du positionnement absolu, nous avons montré que le nombre de satellites visibles simultanément depuis les deux extrémités de la ligne de base considérée ne constituait pas le seul paramètre influençant la valeur du RPDOP. Par exemple, certaines géométries de la constellation comportant 5 satellites visibles simultanément depuis les deux extrémités d'une ligne de base donnée, peuvent conduire le RPDOP vers des valeurs très différentes (54.724 unités ou 5.240 unités). **Nous pouvons donc conclure que, dans le cas de très longues lignes de base, le PDOP n'est pas un indicateur précis de la qualité de la géométrie de la constellation dans le cas d'un positionnement relatif. Le géomètre qui emploie une telle technique de positionnement et qui observe une valeur acceptable de PDOP ne peut donc pas résolument être assuré de la précision de son travail.**

Dans le cas de **lignes de base de longueur moyenne (≈ 100 km)** (cf. § 5.4.3) ainsi que pour de très **courtes lignes de base (≈ 20 km)** (cf. § 5.4.4), le caractère prévisible du RPDOP à partir de la connaissance du PDOP est bien plus prononcé. On observe une **corrélation forte entre le RPDOP et le PDOP**. Lorsque le RPDOP subit une brutale augmentation (ex : 43 unités), le PDOP est également marqué, au même instant, par une élévation forte (ex : 32 unités)¹. L'excellente corrélation entre RPDOP et PDOP peut s'expliquer par la similitude entre la géométrie de la constellation visible depuis les deux extrémités de la ligne de base et la géométrie de la constellation visible depuis la station de position inconnue. En effet, pour de courtes lignes de base, la plupart des satellites visibles depuis la station de position inconnue sont également visibles depuis la station de position connue. **Concrètement, cela signifie que le géomètre en mission, employant une technique de positionnement relatif, va pouvoir utiliser le PDOP comme un indicateur précis de la qualité de la géométrie de la constellation**, étant donné la forte corrélation entre PDOP et RPDOP pour de courtes lignes de base².

Nous avons ensuite démontré que la **forme conique de la géométrie de la constellation**, entraînant la **matrice normale** vers un état **singulier** dans le cas du positionnement absolu, était également responsable de l'état singulier de la matrice normale dans le cas du positionnement relatif (cf. § 5.5.1). Ainsi, sur base de la méthode développée précédemment, nous avons pu expliquer les hautes valeurs de RPDOP observées ponctuellement dans nos observations (cf. § 5.5.2 et § 5.5.3). **Comme dans le cas du positionnement absolu, une géométrie favorisant un positionnement de haute précision est donc conditionnée par un nombre élevé de satellites visibles simultanément depuis les deux stations mais également et surtout par la distribution homogène de ces satellites dans le ciel de la station de position inconnue, pour autant que la forme de la géométrie de la constellation ne soit pas conique.** Lorsque la géométrie de la constellation visible se rapproche d'une forme conique, le RPDOP atteint des valeurs très élevées et la géométrie de la constellation dégrade fortement la précision du positionnement.

¹ Rappelons que la forme analytique différente de la matrice A et les choix posés lors de la construction de la matrice des poids ne permettent pas de comparer quantitativement le RPDOP et le PDOP.

² Généralement, dans le cas du positionnement relatif de haute précision, les longueurs des lignes de base considérées sont souvent bien plus courtes (inférieures à 20 kilomètres). Or, notre étude a permis de montrer que, même dans le cas de lignes de base de l'ordre de 100 km, la qualité de la géométrie de la constellation visible depuis les deux extrémités de la ligne de base restait suffisante afin d'assurer un positionnement relatif de haute précision. La raison de la sévère limitation de la longueur de la ligne de base pour le positionnement relatif de haute précision ne trouve donc pas son origine dans la qualité de la géométrie de la constellation.

Grâce à nos recherches, nous avons expliqué les **erreurs de position importantes** observées dans les résultats du logiciel **SoDIPE-RTK** développé au sein de la section « Profils ionosphériques » de l'IRM. Nous avons prouvé que ces erreurs trouvaient leur **origine** dans des configurations particulières de la **géométrie de la constellation**, entraînant la matrice normale vers un état singulier (cf. § 5.5.6).

L'interopérabilité entre différents GNSS va permettre, dans tous les cas, d'accroître la qualité de la couverture spatio-temporelle des satellites utilisés pour le positionnement. Bien que l'augmentation du nombre de satellites visibles ne puisse empêcher le fait d'obtenir une géométrie dont la forme conduit à un cas de singularité au niveau de la matrice normale, elle réduit néanmoins la probabilité de rencontrer ce type de configuration.

Enfin, rappelons que les différentes expériences que nous avons menées se basent sur des données GPS. Toutefois, les conclusions que nous avons pu tirer de nos observations se généralisent aisément à l'ensemble des GNSS.

6.2. Perspectives

Nous avons mentionné dans notre étude que la couverture spatio-temporelle du GPS était excellente à l'heure actuelle. Cependant, nous avons tous lu récemment dans la presse que le GPS était menacé de défaillance à partir de 2010. La raison avancée de ces défaillances est le non-respect des délais de remplacement des satellites. Ainsi, on peut lire dans un rapport du GAO¹ (*Government Accountability Office*) l'information suivante : « *Si l'Air Force ne peut respecter son calendrier en ce qui concerne le développement des satellites GPS IIIA, il y a de grandes chances qu'en 2010 [...] la constellation GPS globale tombera en dessous du nombre de satellites nécessaires pour fournir le niveau de service GPS auquel le gouvernement américain s'est engagé.* »². La désactivation temporaire ou définitive de certains satellites risque d'affecter considérablement l'homogénéité de la répartition orbitale des satellites GPS. Cette diminution du nombre de satellites de la constellation GPS va inmanquablement affecter la variabilité spatio-temporelle de la qualité de la géométrie de la constellation. Nous pourrions développer un aspect supplémentaire de notre étude en simulant la désactivation de certains satellites ou, au contraire, la mise en orbite de satellites supplémentaires. Il serait alors très intéressant d'observer les conséquences de ces modifications de la constellation GPS sur la variabilité spatio-temporelle du DOP.

Au cours de nos recherches, nous avons pu identifier un type particulier de configurations géométriques de la constellation conduisant la matrice normale vers un état singulier et nuisant ainsi très fortement à la précision du positionnement : la géométrie de la constellation de forme conique. Bien que nous ayons pu expliquer toutes les situations critiques rencontrées, par la forme conique de la géométrie de la constellation, nous ne pouvons affirmer qu'il s'agit du seul et de l'unique type de configurations géométriques de la constellation entraînant la matrice normale vers un état singulier. Nous pourrions investir plus profondément encore cet aspect de notre étude en tentant d'identifier tous les types de configurations géométriques de la constellation conduisant la matrice normale vers un état

¹ Le GAO est une agence fédérale américaine indépendante chargée de la surveillance de l'argent public, au service du Congrès.

² Site *Reseaux-Telecoms.net* (<http://www.reseaux-telecoms.net/actualites/lire-le-gps-pourrait-etre-sujet-a-des-defaillance-a-partir-de-2010-20134.html>), consultation le 24 août 2009.

de singularité. Le point de départ d'une telle étude serait la forme analytique de la matrice normale. En développant une forme analytique du déterminant de cette matrice, nous pourrions comprendre sous quelles conditions la valeur de ce déterminant est nulle¹.

Il pourrait également être intéressant d'approfondir l'étude du comportement différencié des composantes du DOP. Lors de notre approche intuitive basée sur la considération d'une constellation fictive hautement symétrique, nous avons pu observer que certaines géométries particulières de la constellation satellitaire pouvaient influencer principalement une composante particulière du DOP. Nous pensons que ce type d'étude doit se baser sur une forme analytique de la matrice des cofacteurs. Certaines configurations géométriques très particulières de la constellation peuvent, en effet, conduire la matrice normale vers un état singulier sans affecter tous les cofacteurs (et donc toutes les composantes du DOP) de façon équivalente. Les démarches intuitives, telles que celle que nous avons menée au début du chapitre 4, constituent un point de départ essentiel à la compréhension de certains phénomènes complexes.

Bien évidemment, l'intérêt premier de notre étude concerne le domaine de la géométrie. C'est pourquoi nous avons toujours considéré une position terrestre pour nos différents sites d'observation. Il pourrait également être passionnant d'envisager la géométrie de la constellation satellitaire dans le cadre d'applications relevant du domaine de l'aviation. Cela pourrait nous amener, notamment, à considérer des satellites dont l'élévation est négative. Cette particularité peut sans doute contribuer à augmenter la précision verticale du positionnement par satellites. Dès lors, il pourrait être intéressant de vérifier la validité des conclusions issues de notre étude dans ce genre de situations particulières.

¹ Si le déterminant d'une matrice est nul, alors cette matrice est dite « singulière » et il existe une relation linéaire entre les lignes (resp. colonnes) de cette matrice.

BIBLIOGRAPHIE

- AUTERRA s.d. *Computing the distance between your position and the GPS Satellites*. (http://www.dashdyno.net/tech/GPS/gps_location.html), consultation le 9 août 2009.
- BILLEN R. 2007. *Topographie Appliquée*, notes de cours, Université de Liège, Faculté des Sciences, inédit 44.
- GARBER S. 2007. *Sputnik and the dawn of the space age*. Site de la NASA (<http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/sputnik/index.html>), consultation le 28 juillet 2009.
- GENDE M., MOHINO E., BRUNINI C., RADICELLA S. & HERRAIZ M. 2005. Ionospheric biases correction for coordinates derived from GPS single point positioning, *Annals of Geophysics*, **48**(3), pp.439-444.
- DAGHAY S., MOINS M., BRUYNINX C., ROLAIN & ROOSBEEK F. 2007. *Impact of the Combined GPS+Galileo Satellite Geometry on Positioning Precision*, Observatoire Royal de Belgique, Publication de presse, 9 p.
- DOONG S. 2008. A closed-form formula for GPS GDOP computation, *GPS Solutions*, **13**(3), pp.183-190.
- DONNAY J.-P. 1997. *Consignes de rédaction des mémoires et TFE en Géomatique et Géométrie*, notes de cours, Université de Liège, Faculté des Sciences, inédit 71.
- ENS 2009. *GPS : comment et pour quoi faire ?* Site du laboratoire de Géologie de l'ENS (<http://www.geologie.ens.fr/spiplabocnrs/>), consultation le 21 août 2009.
- ESA 2009. *Galileo*. Site de l'agence spatiale européenne (<http://www.esa.int/esaCP/France.html>), consultation le 20 août 2009.
- GÉOFRI s.d. *Site des enseignants de Géographie du canton de Fribourg*. (<http://www.geofri.ch/moodle1/>), consultation le 13 août 2009.
- HOFMANN-WELLENHOF B., LICHTENEGGER H. & COLLINS J. 2001. *GPS: Theory and Practice*, 5^{ème} édition. Springer Wien New York, 382 p.
- HOFMANN-WELLENHOF B., LICHTENEGGER H. & WASLE E. 2008. *GNSS: Global Navigation Satellite System: GPS, GLONASS, Galileo & more*. Springer Wien New York, 516 p.
- IGN 2007. *Site de l'Institut Géographique National* (<http://www.ngi.be/agn/FR/FR2-1.shtm>), consultation le 19 août 2009.
- KAPLAN E. 1996. *Understanding GPS Principles and Applications*. Londres: Artech House, 554 p.
- KOPP C. 2008. *GPS Aided Guided Munitions*. Site Air Power Australia (<http://www.ausairpower.net/TE-GPS-Guided-Weps.html>), consultation le 8 août 2009.
- LEICK A. 2004. *GPS: Satellite Surveying*, 3^{ème} édition. New-Jersey : Wiley, 435 p.

- LEJEUNE S. 2006. Les effets ionosphériques affectant les systèmes de positionnement par satellites, *Bulletin de la Société Géographique de Liège*, **47**, pp. 23-31.
- MATLAB® 2009. *The MathWorks* (<http://www.mathworks.fr/>), consultation le 10 août 2009.
- MOHINO E. 2007. Understanding the influence of ionospheric delay in SPSE GPS coordinates, *Journal of Geodesy*, **82**, pp. 31-45.
- NIELSEN R. 1997. Relationship between dilution of precision for point positioning and relative positioning with GPS, *Aerospace and Electronic Systems*, **33**, pp.333-338.
- PIEPLU J.-M. 2006. *Understanding GPS et Galileo: Systèmes de positionnement par satellites*. Eyrolles, 151 p.
- QUEBEC GOV. 2009. *Le positionnement et la référence*. Portail de l'information géographique gouvernementale du Québec (<http://quebecgeographique.gouv.qc.ca/education/positionnement-gps.asp>), consultation le 20 août 2009.
- RÉSEAUX-TELECOMS.NET 2009. *Le GPS menacé de défaillance à partir de 2010*. Site d'actualité Réseaux-Telecoms.net (<http://www.reseaux-telecoms.net/actualites/lire-le-gps-pourrait-etre-sujet-a-des-defaillance-a-partir-de-2010-20134.html>), consultation le 24 août 2009.
- SANTERRE R. 1991. Impact of GPS satellite sky distribution, *Manuscripta Geodaetica*, **16**, pp. 28-53.
- SANTERRE R. 2008. *Historique du positionnement par satellites GPS (GNSS)*. Site du Département des Sciences Géomatiques de l'Université de Laval (http://www.scg.ulaval.ca/gps-rs/fr/Histo/GNSS/histoGNSS_p1.htm), consultation le 26 juillet 2009.
- SILLARD P. 2001. *Estimation par moindres carrés*, collection ENSG-IGN. Paris: Lavoisier, pp. 75-100.
- WAUTELET G. 2006. *Etude des TID's à l'aide des GNSS : Influence de la géométrie de la constellation*, mémoire de licence en Sciences Géographiques option Géométrie, Université de Liège, Faculté des Sciences, inédit pp. 8-16.
- WARNANT R. 2005. *Géodésie géométrique et astronomie de position*, notes de cours, Université de Liège, Faculté des Sciences, inédit 213 p.
- WARNANT R. 2006. *Théorie des erreurs*, notes de cours, Université de Liège, Faculté des Sciences, inédit 40 p.
- WARNANT R. 2006. *Les systèmes de positionnement par satellites (GNSS)*, notes de cours, Université de Liège, Faculté des Sciences, inédit 78 p.
- WIKIPEDIA 2009. *Geodetic system*. Encyclopédie en ligne (http://en.wikipedia.org/wiki/Geodetic_system#Geodetic_versus_geocentric_latitude), consultation le 11 août 2009.
- YANG X. & BROCK R. 2000. RDOP Surface for GPS Relative Positioning, *United States Patent* 6057800, 128 p.
- YARLAGADDA R., ALI I., AL-DHAHIR N. & HERSHEY J. 2000. GPS GDOP metric, *IEE Proceedings – Radar, Sonar and Navigation*, **147**(5), pp.259-264.

ANNEXES

Annexe 1. DOPA	156
A.1.1. Manuel d'utilisation	156
A.1.2. Code source	161
 Annexe 2. DOPR	 162
A.2.1. Manuel d'utilisation	162
A.2.2. Code source	165
 Annexe 3. Autres scripts	 166
A.3.1. Conception de <i>skyplots</i>	166
A.3.2. Calcul de distributions	166
A.3.3. Ajustement d'un cône 3D	167

Annexe 1. DOPA

Cette première annexe contient l'algorithme principal (MATLAB®) implémenté dans notre programme DOPA ainsi qu'un guide permettant à l'utilisateur d'utiliser notre interface. Ce guide est conçu autour d'un exemple type de traitement.

A1.1. Manuel d'utilisation

- Eléments de l'interface

The screenshot shows the DOPA software interface. At the top left, it says 'LONCHAY Matthieu M2 GEOM.' and at the top right, 'Année académique 2008-2009'. The title 'DOPA' is centered, with the subtitle 'Variation de la géométrie de la constellation en fonction de la latitude/longitude' below it. The interface is divided into several sections: 1. 'Sélection' (1) with input fields for 'Latitude (°):' (value 'v') and 'Longitude (°):' (value '15'). 2. A green button labeled 'Données' (2). 3. A green button labeled 'Résultats' (3). 4. An 'Infos' panel (4) containing a table of data: 'Dossier de données: Data', 'Dossier de résultats:', 'Nb fichiers: 11', 'Latitude (°): v', 'Longitude (°): 15', 'Durée ép. obs (s): 30', 'Durée obs (s): 86400', 'Nb époques: 2881', 'YY: 2009', 'DOY: 001'. 5. A 'Graphiques' section (5) with a checked box 'Graphique PRN/Time'. 6. A 'Masque (°)' input field with the value '15' (6). 7. An 'Ok' button (7). 8. A 'Progression' bar showing '0/11' (8). 9. A 'Paramètres de sortie' section (9) with radio buttons for 'GDOP', 'PDOP', 'TDOP' (selected), 'HDOP', 'VDOP', and 'NB SAT'. 10. A blue button labeled 'M/S/G/D' (10). 11. An orange button labeled 'Initialisation' (11).

1. Champs de sélection des données
2. Choix du dossier de données
3. Choix du dossier de résultats
4. Panneau d'informations
5. Choix de la génération de graphiques de visibilité
6. Champs de sélection du masque d'élévation
7. Calcul du DOP
8. Progression du traitement
9. Choix du paramètre à étudier
10. Calcul de paramètres statistiques et génération de graphiques
11. Initialisation de l'interface

- **Exemple type de traitement**

Supposons que l'utilisateur de notre interface souhaite étudier l'influence de la **latitude** sur le **HDOP** pour une **longitude fixée à 15°E**. Il souhaite appliquer **un masque d'élévation de 15°**. Il est par ailleurs intéressé d'obtenir un **graphe de visibilité** de la constellation GPS pour les différentes latitudes envisagées. Pour son étude, l'utilisateur a besoin de **paramètres statistiques** de la variabilité du HDOP aux différentes latitudes.

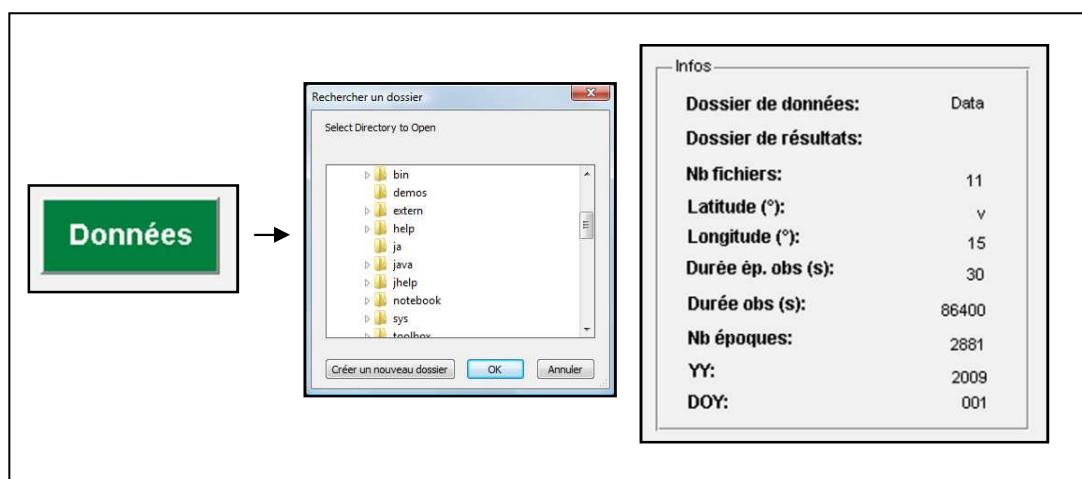
La procédure à suivre est alors la suivante (les numéros entre crochets [] renvoient le lecteur vers les différents éléments de l'interface) :

1. Choix de la position du site d'observation

L'utilisateur commence par préciser, dans les champs de texte prévus à cet effet [1], la position du site d'observation. Pour spécifier que l'étude porte sur la comparaison du DOP à plusieurs latitudes, l'utilisateur marque un « v » (variable) dans le champs de texte censé accueillir la valeur de latitude.

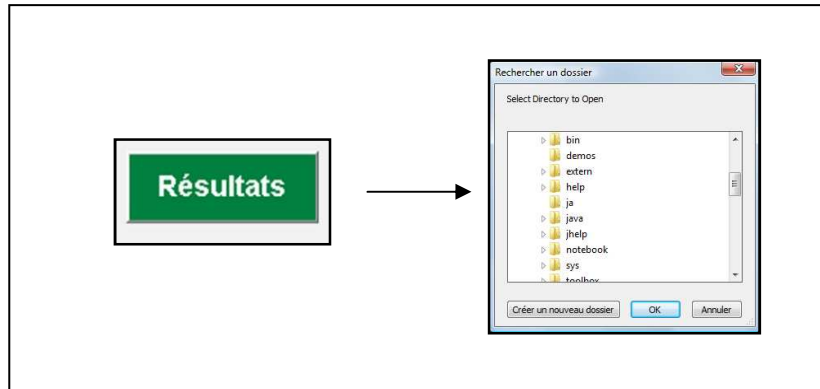
2. Choix du dossier contenant les données

A l'aide du bouton « Données » [2], l'utilisateur peut spécifier, à l'aide d'un *browser*, dans quel dossier du disque dur de sa machine se situent les données sources. Imaginons que le dossier sélectionné est le dossier « Data » qui contient tous les fichiers de données sources relatives aux 266 intersections d'un quadrillage du globe d'une résolution de 15°. Le programme DOPA effectue automatiquement un tri sur les données en fonction des critères introduits précédemment. L'utilisateur peut contrôler sa sélection grâce aux informations contenues dans le panneau d'affichage prévu à cet effet [4]. Il peut également consulter les métadonnées des fichiers retenus par sa sélection. Dans le cas présent, sa sélection contient 11 fichiers (-90° : 15° : 90°).



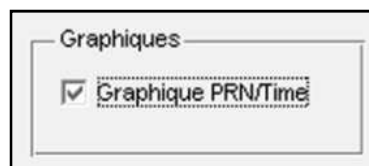
3. *Choix du dossier contenant les résultats*

Le bouton « Résultats » [3] permet à l'utilisateur de préciser, au moyen d'un *browser*, à quel emplacement du disque dur le programme DOPA doit stocker les fichiers contenant les résultats du calcul du DOP. Supposons que le dossier dans lequel doivent être stockés les résultats est le dossier « RES ».



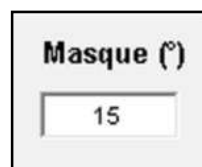
4. *Activation de la génération des graphiques de visibilité*

Afin d'indiquer au programme DOPA que la génération des graphiques de visibilité doit être effectuée, l'utilisateur coche l'option « Graphique PRN/Time » [5].



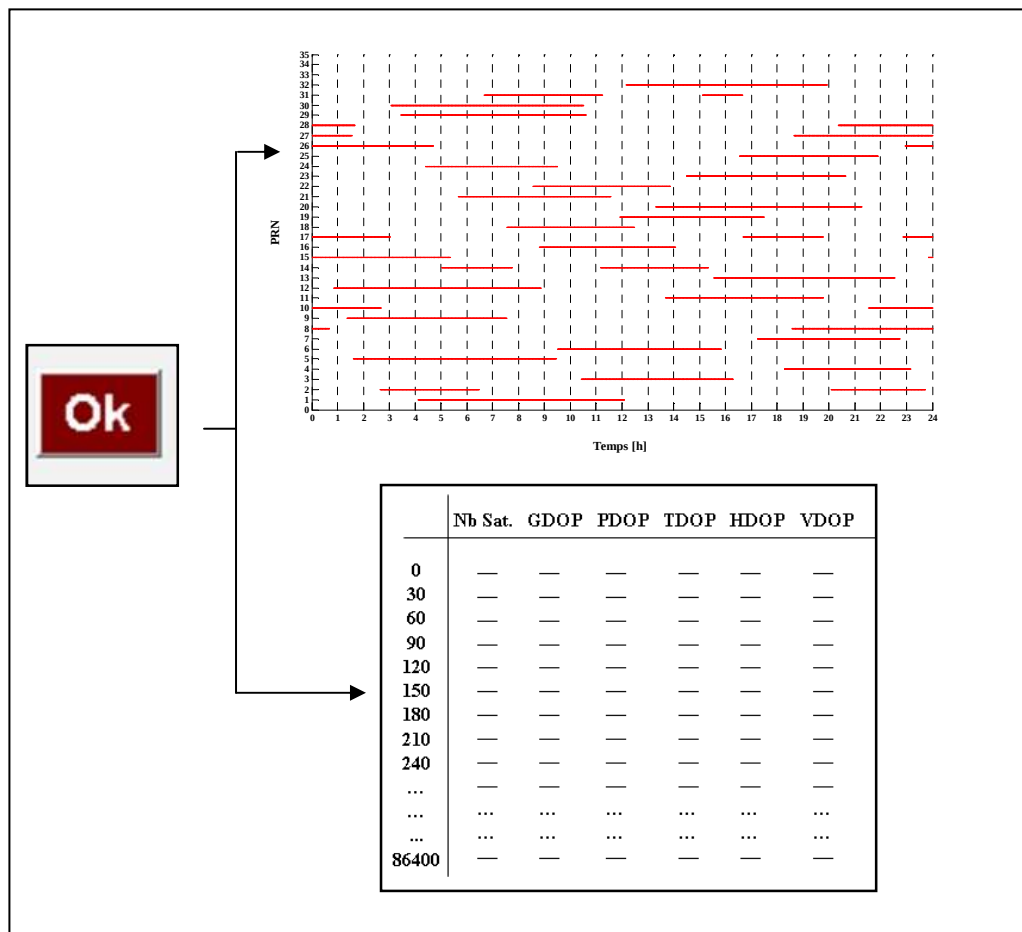
5. *Choix du masque d'élévation*

L'utilisateur doit ensuite préciser la valeur (en °) du masque d'élévation qu'il souhaite appliquer aux données [6].



6. Lancement du calcul du DOP

A l'aide du bouton « OK » [7], l'utilisateur peut alors lancer le calcul du DOP ainsi que la génération des graphiques de visibilité. Pour chacun des 11 fichiers retenus dans la sélection de l'utilisateur, un graphe de visibilité sera généré (fichier « .eps ») ainsi qu'un fichier (« .txt ») contenant les valeurs de GDOP, de PDOP, de VDOP, de HDOP, de TDOP ainsi que le nombre de satellites visibles pour chaque époque d'observation. Au total, 22 fichiers sont générés. Durant l'exécution de ces traitements, l'utilisateur peut contrôler l'avancement des traitements effectués par le programme DOPA au moyen d'un panneau d'affichage spécifique [8]. On retrouve les différents paramètres de sélection dans le nom des fichiers.



7. Choix du paramètre à étudier

L'utilisateur précise ensuite sur quelle composante du DOP porte son étude au moyen d'un panneau de sélection [9]. Il sélectionne « HDOP ».

Paramètres de sortie

- ☐ GDOP
- ☐ PDOP
- ☐ TDOP
- ☒ HDOP
- ☐ VDOP
- ☐ NB SAT

8. Génération des paramètres statistiques et du graphique de comparaison

L'utilisateur demande ensuite au programme, à l'aide du bouton « MSGD » [10], de sortir un graphique permettant de comparer la variabilité journalière du HDOP aux différentes latitudes, pour une longitude fixée de 15°E ainsi qu'un fichier reprenant toute une série de paramètres statistiques.

Le programme va alors créer quatre fichiers distincts permettant la comparaison des résultats obtenus pour chaque latitude envisagée. Le nom de ces fichiers contient les paramètres de sélection mais est précédé d'un préfixe indiquant la nature des données contenues dans le fichier.

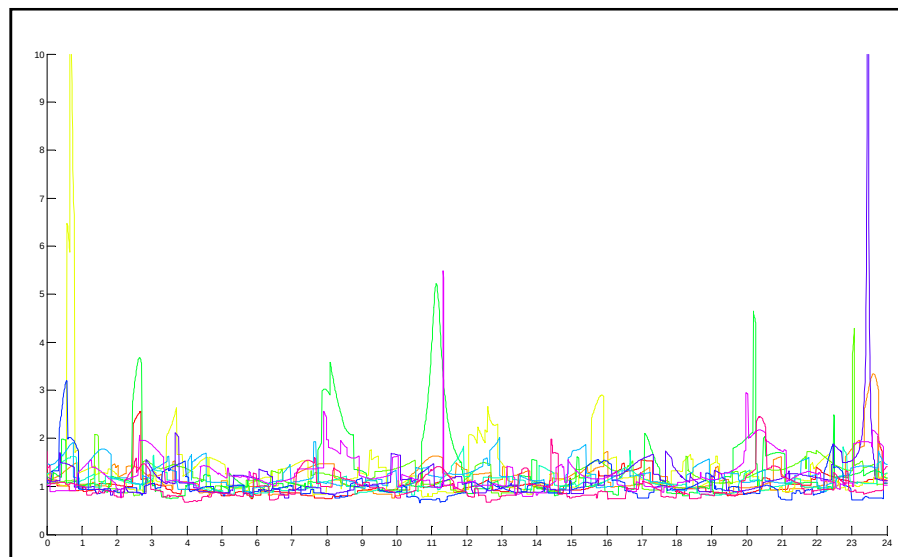
Le premier fichier (« .txt »), dont le nom est précédé de « STAT » contient les valeurs de plusieurs paramètres statistiques (colonnes) pour chacune des latitudes considérées (lignes).

<i>Lat.</i>	<i>Long.</i>	<i>Moy.</i>	<i>Med.</i>	<i>Min.</i>	<i>Max.</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Var.</i>	<i>±IC95</i>	<i>P₀₅</i>	<i>P₉₅</i>	<i>Ep. perdues</i>
0	15	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
15	15	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Le second fichier (« .txt »), dont le nom est précédé de « META » contient les métadonnées relatives aux fichiers sources sélectionnés.

Un troisième fichier (« .txt ») reprend l'ensemble des valeurs du HDOP pour toutes les époques d'observations (colonnes) à chacune des latitudes (lignes) considérées.

Enfin, le quatrième fichier (« .eps ») contient un graphique permettant de comparer la variabilité du HDOP aux différentes latitudes. Chaque courbe de ce graphique correspond à une latitude donnée.



A1.2. Code source : Algorithme de calcul du DOP

```
if j==nbl_data|data(j,1)~=data(j+1,1)
    count=count+1;
    from=to+1;
    to=from+nb_sat-1;

    if nb_sat<4
        GDOP=-9999;
        PDOP=-9999;
        TDOP=-9999;
        HDOP=-9999;
        VDOP=-9999;
    else
        Elevation=data(from:to,4)*pi()/180;
        Azimut=data(from:to,3)*pi()/180;

        %Construction de la design matrix

        A1=-cos(Elevation).*sin(Azimut);
        A2=-cos(Elevation).*cos(Azimut);
        A3=-sin(Elevation);
        A4=ones(nb_sat,1);
        A=[A1 A2 A3 A4];
        AT=A';

        %Construction de la matrice des cofacteurs

        Q=inv(AT*A);
        diago=diag(Q);

        %Calcul des composantes du DOP

        GDOP=sqrt(sum(diago));
        PDOP=sqrt(sum(diago(1:3)));
        TDOP=sqrt(diago(4));
        HDOP=sqrt(sum(diago(1:2)));
        VDOP=sqrt(diago(3));
        end

        R(count,:)=data(from,1) nb_sat GDOP PDOP TDOP HDOP VDOP];
        nb_sat=0;
    end
end
```


Annexe 2. DOPR

Cette seconde annexe contient l'algorithme principal (MATLAB®) implémenté dans notre programme DOPR ainsi qu'un guide permettant à l'utilisateur d'utiliser notre interface. Ce guide est conçu autour d'un exemple type de traitement.

A2.1. Manuel d'utilisation

- Eléments de l'interface

The screenshot shows the DOPR software interface. At the top left, it says 'LONCHAY Matthieu M2 GEOM.' and at the top right, 'Année académique 2008-2009'. The title 'DOPR' is centered. Below it, the subtitle 'Variation de la géométrie de la constellation en fonction de la latitude/longitude' is displayed. The interface is divided into several sections: 1. Selection fields for RA (Latitude and Longitude) and Time (DOY and YY). 2. A green button labeled 'Données'. 3. A green button labeled 'Résultats'. 4. A section for 'Infos' containing fields for 'Dossier de données', 'Dossier de résultats', 'Coord. A', 'Coord. B', 'Durée ép. obs', 'Durée obs', 'Nb époques', 'YY', and 'DOY'. 5. A section for 'Graphiques' with checkboxes for 'Graphique PRN/Time --A', 'Graphique PRN/Time --B', and 'Graphique PRN/Time --AB'. 6. A 'Message' text area. 7. A 'Masque (°)' input field. 8. A 'Paramètres de sortie' section with radio buttons for 'PDOP', 'HDOP', 'VDOP', and 'NB SAT'. 9. An 'Ok' button. 10. A 'Progression' bar. 11. A 'M/S/G/D' button. 12. An 'Initialisation' button. 13. A 'C' button. Red circles with numbers 1 through 13 are placed over various elements to indicate their function in the manual.

1. Champs de sélection des données
2. Choix du dossier de données
3. Choix du dossier de résultats
4. Panneau d'informations
5. Choix de la génération de graphiques de visibilité
6. Affichage des messages d'erreur
7. Champs de sélection du masque d'élévation
8. Calcul du RDOP suivant plusieurs combinaisons des DD
9. Calcul du RDOP
10. Progression du traitement
11. Choix du paramètre à étudier
12. Calcul de paramètres statistiques et génération de graphiques
13. Initialisation de l'interface

- **Exemple type de traitement**

Supposons que l'utilisateur de notre interface souhaite étudier la corrélation entre le **RPDOP** et le **PDOP** pour une **ligne de base alignée sur l'équateur entre 15°E et 30°E** de longitude. Il ne souhaite pas appliquer de masque d'élévation et n'a pas besoin de graphique de visibilité. Le jour d'observation sur lequel porte son étude est le **1^{er} janvier 2009 (001/09)**.

La procédure à suivre est alors la suivante (les numéros entre [] renvoient le lecteur vers les différents éléments de l'interface) :

1. Choix de la ligne de base et du jour d'observation

L'utilisateur commence par préciser, dans les champs de texte prévus à cet effet [1], la position de la ligne de base et le jour d'observation considéré. Par convention, la station *A* est la station de position connue et la station *B* est la station de position inconnue.

Sélection: RA	Time	Sélection: RB
Latitude (°): 0	DOY: 1	Latitude (°): 0
Longitude (°): 15	YY: 9	Longitude (°): 30

2. Choix du dossier contenant les données

A l'aide du bouton « Données » [2], l'utilisateur peut spécifier, à l'aide d'un *browser*, dans quel dossier du disque dur de sa machine se situent les données sources.

3. Choix du dossier contenant les résultats

Le bouton « Résultats » [3] permet à l'utilisateur de préciser, au moyen d'un *browser*, à quel emplacement du disque dur le programme DOPR doit stocker les fichiers contenant les résultats du calcul du RDOP.

4. Lancement du calcul du RDOP

A l'aide du bouton « OK » [9], l'utilisateur peut alors lancer le calcul du RDOP. Pour chacune des deux extrémités de la ligne de base, le programme calcule d'abord les composantes du DOP (cf. § A1.1.1). Le programme calcule ensuite le RDOP propre à la ligne de base considérée. La structure des fichiers est identique à la structure des fichiers présentés précédemment.

5. *Choix du paramètre à étudier*

L'utilisateur précise ensuite sur quelle composante du DOP porte son étude au moyen d'un panneau de sélection [11]. Il sélectionne « RPDOP ».

6. *Génération des paramètres statistiques et du graphique de comparaison*

L'utilisateur demande ensuite au programme, à l'aide du bouton « MSGD » [12], de sortir un graphique permettant de comparer le DOP et le RDOP.

Le programme va alors créer quatre fichiers distincts permettant la comparaison du DOP et du RDOP. Le premier fichier (« .txt »), dont le nom est précédé de « STAT » contient les valeurs de plusieurs paramètres statistiques (colonnes) concernant les PDOP aux deux stations et le RPDOP. Le second fichier (« .txt »), dont le nom est précédé de « META » contient les métadonnées relatives aux fichiers sources sélectionnés. Un troisième fichier (« .txt ») reprend l'ensemble des valeurs de RPDOP et de DOP pour toutes les époques d'observations (colonnes) et pour chacune des extrémités de la ligne de base. Enfin, le quatrième fichier (« .eps ») contient un graphique permettant de comparer la variabilité du RPDOP et du PDOP.

A2.2. Code source

- *Combinaisons des doubles différences dans le modèle mathématique*

```
if satAinit~=0 & satBinit~=0
    rep=0;
    for k=1:nblmb
        b=k-rep;
        sat_prn=mb(b,2);
        index=find(ma(:,2)==sat_prn);
        [y1 y2]=size(index);
        if y1==0
            mb(b,:)=[];
            rep=rep+1;
        end
    end
end
```

- ➔ *Algorithme de calcul du RDOP*

```
end
```

- *Calcul du RDOP*

```
if nb_sat>3
    perteA=satAinit-nb_sat;
    perteB=satBinit-nb_sat;
    E_ref=max(mb(:,4));
    line_sr=find(mb(:,4)==E_ref);
    line_sr=line_sr(1);
    A_ref=mb(line_sr,3);
    mb(line_sr,:)=[];
    Elevation=mb(:,4)*pi/180;
    Azimut=mb(:,3)*pi/180;
    nblmb nbcmb=size(mb);

    %Construction de la design matrix
    AR1=cos(E_ref*pi/180)*sin(A_ref*pi/180)-cos(Elevation).*sin(Azimut);
    AR2=cos(E_ref*pi/180)*cos(A_ref*pi/180)-cos(Elevation).*cos(Azimut);
    AR3=sin(E_ref*pi/180)-sin(Elevation);
    AR=[AR1 AR2 AR3] ;
    %Construction de la matrice des poids
    C=[ones(nblmb,1) -ones(nblmb,1)];
    for u=1:(nb_sat-1)
        c=zeros(nblmb,2);
        c(u,1:2)=[-1 1];
        C=[C c];
    end
    CovP=zeros(nb_sat*2,nb_sat*2);
    for u=1:nb_sat*2
        CovP(u,u)=1;
    end
    P=C*CovP*C';
    AT=AR';
    %Construction de la matrice des cofacteurs
    Q=inv(AT*P*AR);
    diago=diag(Q);

    %Calcul des composantes du RDOP
    PDOP=sqrt(sum(diago(1:3)));
    HDOP=sqrt(sum(diago(1:2)));
    VDOP=sqrt(diago(3));
    GDOP=NaN;
    TDOP=NaN;
end
```

Annexe 3. Autres scripts

La complexité de certains traitements effectués au cours de notre étude ont nécessité la programmation de plusieurs scripts (MATLAB®). Le lecteur peut retrouver dans cette troisième annexe, les algorithmes principaux implémentés dans les scripts que nous avons conçus.

A3.1. Conception de *skyplots*¹

```
% Lines every 45° of azimuth
c=sqrt(2);
skyaxis.az(:,1,1)=[0;0];
skyaxis.az(:,2,1)=[-90;90];
skyaxis.az(:,1,2)=[-90/c;90/c];
skyaxis.az(:,2,2)=[-90/c;90/c];
skyaxis.az(:,1,3)=[-90;90];
skyaxis.az(:,2,3)=[0;0];
skyaxis.az(:,1,4)=[-90/c;90/c];
skyaxis.az(:,2,4)=[90/c;-90/c];

% Circles every 30° of elevation and at elevation limit
i=0:0.01:1;
[skyaxis.el(:,1,1),skyaxis.el(:,2,1)]=pol2cart(i*2*pi,90);
[skyaxis.el(:,1,2),skyaxis.el(:,2,2)]=pol2cart(i*2*pi,60);
[skyaxis.el(:,1,3),skyaxis.el(:,2,3)]=pol2cart(i*2*pi,30);

% Axes format
axis square equal
axis off
hold on
plot(skyaxis.az(:,1,1),skyaxis.az(:,2,1),'k--')
plot(skyaxis.az(:,1,2),skyaxis.az(:,2,2),'k--')
plot(skyaxis.az(:,1,3),skyaxis.az(:,2,3),'k--')
plot(skyaxis.az(:,1,4),skyaxis.az(:,2,4),'k--')
plot(skyaxis.el(:,1,1),skyaxis.el(:,2,1),'k--')
plot(skyaxis.el(:,1,2),skyaxis.el(:,2,2),'k--')
plot(skyaxis.el(:,1,3),skyaxis.el(:,2,3),'k--')
hold off
text(0,95,'N','HorizontalAlignment','Center','VerticalAlignment','Bottom')
text(95,0,'E','HorizontalAlignment','Left','VerticalAlignment','Middle')
text(0,-95,'S','HorizontalAlignment','Center','VerticalAlignment','Top')
text(-95,0,'W','HorizontalAlignment','Right','VerticalAlignment','Middle')
text(3,93,'0°')
text(3,63,'30°')
text(3,33,'60°')
XLim=get(gca,'XLim');
```

A3.2. Calcul de distributions

```
for i=2:nbl_data
    latitude=num2str(data(i,1));
    longitude=num2str(data(i,2));
    minimum=min(data(i,3:nbc_data));
    maximum=max(data(i,3:nbc_data));
    debut=fix(minimum);
    fin=ceil(maximum);
    pas=0.1;
    x=debut:pas:fin;
    nom=[dossier '\H_Lat' latitude '_Lon_' longitude];
    h=hist(data(i,3:nbc_data),x);
    h=100*h/(nbc_data-2);
    bar(x,h);
    h=h*100/(nbc_data-2);
end
```

¹ Auteur : Benoît Bidaine.

A3.3 Ajustement d'un cône sur une constellation satellitaire

```
%Sélection du fichier contenant les positions des satellites

[fn fp]=uigetfile;
data=load([fp fn]);
[nbsat a]=size(data);

%Calcul des composantes des vecteurs unitaires des satellites dans le système NEU

eta_rad=pi*data(:,4)/180;
chi_rad=pi*data(:,3)/180;

cos_eta=cos(eta_rad);
cos_chi=cos(chi_rad);
sin_eta=sin(eta_rad);
sin_chi=sin(chi_rad);

comp1=cos_eta.*sin_chi;
comp2=cos_eta.*cos_chi;
comp3=sin_eta;

V=[comp1 comp2 comp3];
VT=V';

%Calcul des composantes du vecteur « gravitaire » dans le système NEU

e=mean(comp1);
n=mean(comp2);
u=mean(comp3);

%Calcul des valeurs pivots de la linéarisation

[az el rad]=cart2sph(e,n,u);
alpha_0=el;           → %Valeur à priori de l'élévation de l'axe du cône
beta_0=pi/2-az;       → %Valeur à priori de l'azimut de l'axe du cône
gamma_0=pi/2-alpha_0; → %Valeur à priori de l'angle zénithal de l'axe du cône

%Redressement de la gerbe de satellites selon un cône vertical

R_beta_0=[cos(beta_0) -sin(beta_0) 0;sin(beta_0) cos(beta_0) 0;0 0 1];
R_gamma_0=[1 0 0;0 cos(gamma_0) -sin(gamma_0);0 sin(gamma_0) cos(gamma_0)];
Rot=R_gamma_0*R_beta_0;
Vnew=(Rot*VT)';

for i=1:nbsat
    [az el rad]=cart2sph(Vnew(i,1),Vnew(i,2),Vnew(i,3));
    Elevation(i)=el;
end

teta_0=pi/2-mean(Elevation) → %Valeur à priori de l'angle d'ouverture du cône
```

```

%Adjustement par moindres carrés d'un cône 3D sur la constellation satellitaire (MMixte)

oldsigma02=1;
delta=1;
it=0;
ITER=[];
DELTA=[];
while abs(delta)>0.00000001    → %Critère de convergence sur sigma02
    it=it+1;
    MatA=zeros(nbsat,3);
    MatB=zeros(nbsat,2*nbsat);
    MatW=zeros(nbsat,1);

    for j=1:nbsat
        k=j*2;

%Construction de la matrice A de l'ajustement

        MatA(j,1:3)=[-sin(beta_0)*cos(eta_rad(j))*sin(chi_rad(j))*sin(alpha_0)-
            cos(beta_0)*cos(eta_rad(j))*cos(chi_rad(j))*sin(alpha_0)+sin(eta_rad(j))*cos(alpha_0)
            cos(eta_rad(j))*sin(chi_rad(j))*cos(alpha_0)*cos(beta_0)-
            cos(alpha_0)*cos(eta_rad(j))*cos(chi_rad(j))*sin(beta_0) sin(teta_0)];

%Construction de la matrice B de l'ajustement

        MatB(j,k-1:k)=[-sin(chi_rad(j))*cos(alpha_0)*sin(beta_0)*sin(eta_rad(j))-
            cos(alpha_0)*cos(beta_0)*cos(chi_rad(j))*sin(eta_rad(j))+sin(alpha_0)*cos(eta_rad(j))
            cos(alpha_0)*sin(beta_0)*cos(eta_rad(j))*cos(chi_rad(j))-
            cos(alpha_0)*cos(beta_0)*cos(eta_rad(j))*sin(chi_rad(j))];

%Construction de la matrice W de l'ajustement

        MatW(j,1)=cos(eta_rad(j))*sin(chi_rad(j))*cos(alpha_0)*sin(beta_0)+cos(eta_rad(j))*cos(chi_rad(j))*cos(alpha_0)*cos(beta_0)+sin(eta_rad(j))*sin(alpha_0)-
            cos(teta_0);

    end

%Estimation des paramètres inconnus

    MatM=MatB*MatB';
    MatN=MatA'*inv(MatM)*MatA;
    Matu=MatA'*inv(MatM)*MatW;
    Matx=-inv(MatN)*Matu;

    alpha_0=alpha_0+Matx(1);
    beta_0=beta_0+Matx(2);
    teta_0=teta_0+Matx(3);

%Calcul des résidus et de la variance de poids unitaire à posteriori

    Matv=-MatB'*inv(MatM)*(MatA*Matx+MatW);
    sigma02=(Matv'*Matv)/(nbsat*2-3);

%Calcul de la matrice des cofacteurs des paramètres inconnus

    MatQ=inv(MatN);

    delta=sigma02-oldsigma02;
    oldsigma02=sigma02;

end

%Représentation de l'axe du cône 3D ajusté

xG=(90-alpha_0*180/pi)*sin(beta_0);
yG=(90-alpha_0*180/pi)*cos(beta_0);
scatter(xG,yG,40,'filled','g');

sigma02=(Matv'*Matv)/(nbsat-3)

% Coordonnées xy de chaque satellite dans le skyplot
PRN=data(:,2);
x=(90-data(:,4)).*sin(data(:,3).*pi./180);
y=(90-data(:,4)).*cos(data(:,3).*pi./180);
s=100.*ones(1,nbsat);

```

➔ *Algorithme de conception d'un skyplot*

```

%Visualisation du cône sur le skyplot

Az_c=[];
El_c=[];
C1_c=[];
C2_c=[];
C3_c=[];
V_c=[];
VT_c=[];
V_c_new=[];
Az_c_new=[];
El_c_new=[];
Xskyp=[];
Yskyp=[];
Xskyp_new=[];
Yskyp_new=[];
Rot=[];

%Création des points du cercle (cône vertical)
j=0:0.01:1;
[Xskyp(:,1),Yskyp(:,1)]=pol2cart(j*2*pi,teta_0*180/pi);

%Calcul des "vecteurs" formant le cône vertical

for j=1:101
    Az_c(j,1)=0.01*(j-1)*2*pi;
    El_c(j,1)=pi/2-teta_0;
end

C1_c=cos(El_c).*sin(Az_c);
C2_c=cos(El_c).*cos(Az_c);
C3_c=sin(El_c);

V_c=[C1_c C2_c C3_c];
VT_c=V_c';

beta=beta_0;
alpha=alpha_0;
gamma=pi/2-alpha;

%Application d'une rotation aux vecteurs constituant le cône vertical

R_beta=[cos(beta) sin(beta) 0;-sin(beta) cos(beta) 0;0 0 1];
R_gamma=[1 0 0;0 cos(gamma) sin(gamma);0 -sin(gamma) cos(gamma)];
Rot=R_beta*R_gamma;

V_c_new=(Rot*VT_c)';
[Az_c_new El_c_new Rad_c_new]=cart2sph(V_c_new(:,1),V_c_new(:,2),V_c_new(:,3));
Az_c_new=pi/2-Az_c_new;

%Tracé du cône 3D ajusté sur le skyplot

Xskyp_new=(90-El_c_new*180/pi).*sin(Az_c_new);
Yskyp_new=(90-El_c_new*180/pi).*cos(Az_c_new);
plot(Xskyp_new,Yskyp_new,'g--');

hold off

```