Quadrature n° 137 (2025) 1-3

[Analyse]

Une autre façon de voir les réels : l'approche de Weierstrass

par Samuel NICOLAY*

Résumé.

Cet article propose une construction des nombres réels inspirée de l'approche de Weierstraß, en définissant une relation d'équivalence sur un ensemble de suites rationnelles. L'ordre et les opérations algébriques sont introduits de manière naturelle, et l'ensemble obtenu est un corps ordonné complet, équivalent aux constructions classiques de Cantor et Dedekind.

I Introduction

Weierstraß attachait une importance capitale à l'édification de son enseignement sur des fondements rigoureux. C'est dans ce contexte qu'il introduisit une définition des nombres réels antérieure à celles de Méray [12], Heine [11], Dedekind [5], Cantor [3] et Tannery [17]. Le lecteur intéressé par l'histoire de la construction des nombres réels pourra se référer à [2, 8, 13, 19], parmi d'autres références.

L'approche de Weierstraß en la matière faisait partie intégrante de son enseignement et il n'a jamais lui-même publié ses cours. Notre connaissance de sa conception des nombres réels repose exclusivement sur des notes prises par ses étudiants (notamment Dantscher, Hettner, Hurwitz, Kossak, Pincherle et Thieme [7]). Celles-ci présentent toutefois des variations notables d'une version à l'autre, et plusieurs historiens et mathématiciens ont émis des réserves quant à leur fiabilité [2, 7–10, 14]. Il n'existe donc pas de consensus clair sur le degré de rigueur avec lequel Weierstraß a défini les nombres réels [6, 18]. Il est parfaitement envisageable que les critiques formulées à l'encontre de cette approche résultent en partie d'interprétations erronées des notes de cours, rédigées par des auteurs distincts. Sans prétendre trancher ce débat, nous nous bornerons à souligner que l'existence d'opinions divergentes à ce sujet met en exergue les possibles difficultés inhérentes à l'assimilation de la théorie de Weierstraß à partir des sources à disposition. Heine lui-même a exprimé des doutes quant à l'existence de références suffisamment fiables en ce domaine (« ...so dass es keine Stelle giebt, an welcher man die Sätze im Zusammenhänge entwickelt findet. ») [11].

L'idée fondatrice de Weierstraß est relativement simple à énoncer. Par le théorème de réarrangement de Riemann, toute série réelle absolument convergente est inconditionnellement convergente. Autrement dit, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans lui-même, la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_{\sigma(j)}$$

reste absolument convergente (et donc convergente) et sa somme est indépendante de σ. L'idée implicite de Weierstraß est de définir un nombre réel x à partir des termes $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constituant une série convergeant vers x (on peut par exemple considérer son développement décimal). Bien entendu, plusieurs représentations sont possibles (le développement hexadécimal en est une autre). Cantor reconnaît d'ailleurs que Weierstraß fut le premier à éviter les erreurs logiques consistant à supposer implicitement la notion de limite dans la définition des nombres réels [4]. Il est intéressant de noter que cette approche s'inscrit dans la continuité du travail de Stevin [16], puisqu'elle généralise la construction des nombres réels via des représentations en base entière.

Dans cet article, nous présentons une construction des nombres réels inspirée de celle de Weiers-

* Université de Liège, S.Nicolay@uliege.be

traß, qui, selon nous, souffre d'un certain manque de reconnaissance et qui, à notre connaissance, n'apparaît jamais dans les manuels, contrairement aux approches de Cantor et Dedekind. Nous espérons montrer qu'aucune raison objective ne justifie ce relatif désintérêt. Il convient de souligner que, paradoxalement, Weierstraß évite ici le langage « epsilonesque » qu'il contribuera pourtant à populariser [15]. Nous nous efforcerons de reformuler ses idées dans ce cadre, désormais omniprésent dans la culture mathématique. Enfin, nous mettrons en évidence les différences entre notre construction et l'approche originale de Weierstraß, notamment en considérant les nombres rationnels comme préexistants, sans recourir aux « parties de l'unité » [7], afin d'éviter l'introduction de notions superflues.

Le lecteur désireux d'approfondir ces considérations pourra se reporter à [1], article sur lequel repose en grande partie l'exposé qui suit.

II Définition d'un aggrégat

Nous noterons l'ensemble des nombres naturels incluant 0 par $\mathbb{N}$. L'ensemble des nombres rationnels sera noté $\mathbb{Q}$.

Définition 1. *Un aggrégat est une suite de nombres rationnels $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$. L'ensemble des aggrégats sera noté $\mathscr{A}$.*

Un aggrégat sera parfois simplement noté x. Si l'aggrégat $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles, il représente un nombre rationnel via la somme $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$. Dans le cas contraire, Weierstraß remarque (en allemand) qu'un aggrégat n'est « pas nécessairement associé à une valeur finie. »

Définition 2. *Un aggrégat $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est à valeur finie si l'ensemble*

$$\{\sum_{j\in J} |x_j| : J \subset \mathbb{N},\ J \text{ fini}\} \tag{1}$$

est borné dans $\mathbb{Q}$. L'ensemble des aggrégats à valeur finie sera noté $\mathbb{K}$.

Bien entendu, $\mathbb{K}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{A}$.

III Somme d'aggrégats

Introduisons l'addition d'aggrégats sur $\mathbb{K}$. Remarquons que nous pourrions considérer $\mathscr{A}$.

Si E_1 et E_2 sont deux ensembles non vides, notons

$$E_1 \sqcup E_2 = (E_1 \times \{1\}) \cup (E_2 \times \{2\})$$

pour représenter la réunion disjointe de E_1 et E_2. Cette opération définit l'« union juxtaposée » de Weierstraß, où aucun élément de E_1 ne peut se retrouver dans E_2 et inversement. La somme de deux aggrégats x et y est simplement l'aggrégat obtenu en concaténant les éléments de x et y.

Définition 3. *Si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\mathbb{K}$, leur somme $(z_k)_{k\in\mathbb{N}\sqcup\mathbb{N}}$ est définie comme suit : $z_{(j,1)} = x_j$ et $z_{(j,2)} = y_j$. Nous écrirons naturellement*

$$(z_k)_{k\in\mathbb{N}\sqcup\mathbb{N}} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} + (y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Remarquons que $\mathbb{N}\sqcup\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$, et on peut aisément montrer que la somme de deux éléments de $\mathbb{K}$ appartient encore à $\mathbb{K}$. Il est alors aisé de vérifier que l'opération d'addition ainsi définie est commutative.

La soustraction de deux aggrégats se définit naturellement. Weierstraß, quant à lui, ne considère d'abord que les nombres positifs avant de s'intéresser à la soustraction d'un aggrégat plus grand par un plus petit.

IV L'ensemble des nombres réels

Pour pouvoir construire l'ensemble des nombres réels, nous avons besoin de rendre deux éléments de $\mathbb{K}$ qui représentent la même valeur indistinguables. Deux éléments de $\mathbb{K}$ sont dits équivalents si leurs différences finies sont suffisamment petites lorsqu'on somme sur suffisamment d'indices. Plus rigoureusement, on a la définition suivante :

Définition 4. *Si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\mathbb{K}$, nous écrirons $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pour signifier que, pour tout nombre rationnel $\varepsilon > 0$, il existe deux parties finies J_1^ε et J_2^ε de $\mathbb{N}$ telles que, pour toutes parties finies J_1 et J_2 comprenant J_1^ε et J_2^ε respectivement, on a*

$$|\sum_{j\in J_1} x_j - \sum_{j\in J_2} y_j| < \varepsilon.$$

On vérifie facilement que la relation $\sim$ introduite dans la Définition 4 est une relation d'équivalence.

Définition 5. *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est le quotient de l'ensemble $\mathbb{K}$ par la relation d'équivalence $\sim$.*

Comme il est d'usage, nous identifierons souvent un élément $[x] = \{x' \in \mathbb{K} : x \sim x'\}$ de $\mathbb{R}$ à un élément x' de $[x]$. En d'autres mots, nous ne ferons pas systématiquement la distinction entre $[x]$ et un représentant de $[x]$.

Remarque 6. *Dans son cours, Weierstraß utilise des comparaisons via des « parties de l'unité » pour définir l'égalité. Les deux approches sont fondamentalement équivalentes.*

On peut montrer que $\mathbb{K}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 7. *Dans son cours, Weierstraß note subrepticement l'existence d'éléments de $\mathbb{K}$ qui ne représentent pas un nombre rationnel. Comme illustration, il considère $x_j = 1/(j+1)!$ pour $j \in \mathbb{N}$, qui représente e.*

Équipons l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ d'un ordre total.

Définition 8. *Si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\mathbb{K}$, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est strictement plus grand que $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ce que nous noterons $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} > (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, s'il existe un nombre rationnel $\varepsilon > 0$, des parties finies J_1^ε et J_2^ε de $\mathbb{N}$ tels que pour toutes parties finies J_1 et J_2 contenant J_1^ε et J_2^ε respectivement, on ait*

$$\sum_{j\in J_1} x_j - \sum_{j\in J_2} y_j > \varepsilon.$$

De là, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est plus grand ou égal à $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ce que nous noterons $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \geq (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, si soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} > (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Bien entendu, $x \leq y$ (resp. $x < y$) signifie $y \geq x$ (resp. $y > x$). La relation d'ordre $\leq$ définie ci-dessus définit un ordre total sur l'ensemble des nombres réels.

On peut montrer que les opérations relatives à la somme de deux éléments de $\mathbb{K}$ sont compatibles avec la relation d'équivalence définissant les nombres réels et que la relation d'ordre est compatible avec l'addition sur $\mathbb{R}$. Enfin, on peut naturellement introduire le produit de deux éléments de $\mathbb{R}$, via le produit de Cauchy par exemple.

Afin de montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ introduit ci-dessus, considéré comme un corps commutatif, est équivalent à l'ensemble des nombres réels tel que construit par Cantor ou Dedekind, il faut établir qu'il est complet, c'est-à-dire que toute suite de $\mathbb{R}$ (il s'agit donc ici d'une suite de suites) qui est de Cauchy converge vers un élément de $\mathbb{R}$. Ce point est moins immédiat, mais s'établit sans problème.

On peut montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et ainsi retrouver l'approche de Méray et Cantor pour définir les nombres réels [13].

Références

[1] S. Bennabi et S. Nicolay. A construction of the real numbers based on Weierstrass's approach *Rocky Mt. J. Math.*, à paraître.

[2] J. Boniface. *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. IREM-Histoire des mathématiques. Ellipses, Paris, 2002.

[3] G. Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *J. für die Reine und Angew. Math.*, 77:258–262, 1874.

[4] G. Cantor. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883.

[5] R. Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Friedrich Vieweg und Sohn, 1872.

[6] R. Dedekind. *Gesammelte mathematische Werke*. Dritter Band, 1932.

[7] P. Dugac. Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for history of exact sciences*, 10(1-2):41–174, 1973.

[8] P. Dugac. *Abrégé d'histoire des mathématiques*, chapitre VI, pages 335–392. Hermann, 1978.

[9] G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik, Band II*. Georg Olms Verlag, 1962.

[10] H. Hahn. Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen : Von V. v. Dantscher. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908. VI und 80 S. Preis geh. M. 2.80, 1909.

[11] E. Heine. Die Elemente der Functionenlehre. *J. für die Reine und Angew. Math.*, 74:172–188, 1872.

[12] Ch. Méray. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir les limites à des variables données. *Revue des sciences savantes*, 4:280–289, 1869.

[13] S. Nicolay. *Les nombres : construction basée sur la théorie des ensembles en vue d'ériger les fondements de l'analyse*. Hermann, 2015.

[14] G.I. Sinkevich. Formirovanie topologicheskikh ponyatiy v lektsiyakh Veyershtrassa 1886 goda [Formation of topological concepts in Weierstrass's lectures of 1886]. *Mathematical Modeling, Numerical Methods, and Software Complexes*, 19:4–23, 2013.

[15] G.I. Sinkevich. On the history of epsilontics. *Antiquitates Math.*, 10:183–204, 2016.

[16] S. Stevin. *De Thiende*. Hes & de Graaf Publishers, 1965.

[17] J. Tannery. *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Hermann, 1886.

[18] J.C. Tweddle. Weierstrass's construction of the irrational numbers. *Math. Semesterber*, 58:47–58, 2011.

[19] I. Weiss. The real numbers – a survey of constructions. *Rocky Mt. J. Math.*, 45:737–762, 2015.