

Integración Numérica del Problema Viscoplastico

Susana Andía Fagés¹, Silvia Raichman^{1,2}, Aníbal Mirasso^{1,2},
Carlos García Garino^{2,3} y Jean-Philippe Ponthot⁴

¹ Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional

² Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

³ ITIC, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina

⁴ Aérospatiale et Mécanique LTAS-MN2L, Institute de Mécanique B523
Université de Liège, Chemin de Chevreuils 1, B4000 Liège, Belgium
{susana_andia, sraichman, aemirasso}@yahoo.com.ar
cgarcia@itu.uncu.edu.ar
JP.Ponthot@ulg.ac.be

Resumen. En este trabajo se discute la integración numérica para el modelo viscoplastico de Perzyna, que conduce a una ecuación de consistencia viscoplastica no lineal, de acuerdo a un trabajo previo de Ponthot. Esta ecuación no lineal se resuelve mediante el Método de Newton Raphson y el algoritmo resultante se implementa en MATLAB. Los resultados obtenidos con el programa desarrollado ajustan muy bien con soluciones cerradas disponibles en la literatura para algunos casos particulares. En este trabajo además se propone una solución cerrada para el caso de sensibilidad viscosa lineal ($m=1$) y exponente de endurecimiento viscoplastico lineal ($n=1$). Se estudia además la respuesta del algoritmo frente a la variación de diferentes parámetros como el coeficiente de viscosidad. El código obtenido en una etapa posterior del estudio se podrá utilizar para resolver otros problemas de interés y, además, permitirá su implementación en un código de elementos finitos con capacidades no lineales.

Palabras Clave: viscoplasticidad, Integración Numérica, Retorno Radial, Newton Raphson

1 Introducción

En los últimos años se han realizado considerables avances en la comprensión del funcionamiento de Problemas de Mecánica de Sólidos No Lineal como es el caso de Plasticidad y Viscoplasticidad [9,10,3,5] Muchos materiales, de los cuales los metales son un ejemplo característico, presentan un comportamiento elástico, reversible (conservativo en el sentido de la energía) hasta un cierto límite. Superado ese límite, la estructura interna del material sufre cambios irreversibles y las deformaciones son irrecuperables. En presencia de estados tensionales complejos, usuales en problemas de choque, impacto, conformado de metales, etc., se plantea la denominada *ecuación de consistencia plástica*, que relaciona una función escalar del estado de tensiones (la tensión efectiva) con un parámetro interno del material, por ejemplo la tensión de fluencia uniaxial. Los materiales viscoplasticos presentan además el fenómeno de sobretensión que añade un componente de resistencia interna del material debido al efecto de la velocidad de

deformación plástica. Ambos efectos, plasticidad y viscoplasticidad son altamente no lineales. En la práctica se resuelven problemas de interés industrial y de investigación mediante herramientas de la Mecánica Computacional en general y Elementos Finitos en particular. En este contexto la condición de consistencia plástica se impone en forma discreta en los denominados puntos de integración de los elementos. Usualmente, en un código de elementos finitos la ecuación de consistencia, generalmente no lineal, se resuelve mediante un método de Integración Numérica de Runge-Kutta, trapecios, etc., pero en la literatura se prefieren técnicas especializadas como el algoritmo de retorno radial o similares. En presencia de problemas elastoplásticos, bajo ciertas condiciones y para problemas viscoplásticos el algoritmo de retorno radial conduce a una ecuación algebraica no lineal, cuya incógnita es el denominado multiplicador plástico o viscoplástico relacionado con la deformación irreversible (plástica o viscoplástica). Generalmente se emplea el Método de Newton Raphson [6] para resolver la ecuación escalar no lineal discutida. En la literatura se pueden obtener problemas de prueba y de producción resueltos con estas técnicas, sin embargo no es frecuente encontrar estudios que analicen la resolución de la ecuación de consistencia por medio del método de Newton Raphson. Con este propósito en el trabajo se modela con MatLab la ecuación de consistencia no lineal para el modelo viscoplástico de Perzyna [8], propuesta por Ponthot[9], como una extensión del algoritmo estándar de retorno radial. Se resuelven una serie de problemas sencillos que permiten realizar un estudio de la influencia de los parámetros de la ecuación constitutiva sobre el comportamiento del algoritmo. En particular se discuten condiciones iniciales que a veces implican el empleo de criterios ingenieriles ad hoc. En la segunda sección del trabajo se introduce, de una manera más bien descriptiva, el problema viscoplástico. Una descripción detallada puede consultarse en los trabajos citados de Ponthot y García Garino [9,10,3,4,5], la Tesis Doctoral de Carosio [2], el trabajo de Alfano y coautores [1] o textos especializados [7]. En la sección 3 se discute el tratamiento numérico del problema, se deducen las expresiones de las derivadas de la función de consistencia necesarias para el Método de Newton Raphson. A partir del algoritmo propuesto, implementado en MATLAB, en la sección 4 se resuelven experimentos numéricos de interés y en la sección 5 se brindan las conclusiones del trabajo.

2 El problema viscoplástico

En cualquier material, ante la aparición de fuerzas externas, se producen distorsiones y el mismo puede reaccionar de distinta forma:

- El material tiene un comportamiento *elástico*, cuando se deforma ante la acción de una fuerza, y recupera la forma original cuando desaparece la acción externa.
- El material tiene un comportamiento *plástico*, cuando al desaparecer la fuerza externa, no recupera, o al menos no totalmente, su forma original.
- El material tiene un comportamiento *viscoso* cuando en la recuperación o no de la forma original interviene el tiempo.

La denominada ecuación de consistencia establece el límite del comportamiento elástico o elasto-viscoplástico. Si la medida de las acciones externas, llamada también

tensión efectiva, es menor que la tensión de fluencia del material (que depende del mismo), el comportamiento es elástico.

Es necesario medir las deformaciones para ver, en cada material, cuáles son las tensiones externas que puede soportar, permaneciendo en régimen elástico. Por ello, los ingenieros y los físicos definen la deformación efectiva ε que da una idea de las deformaciones internas de la pieza en estudio debidas a una acción externa.

2.1 Ejemplos 1D:

Ejemplo 1: Si se tiene un resorte que cuelga de un punto fijo y se le aplica una fuerza hacia abajo, el resorte se estira. Si al eliminar esa fuerza, el resorte recupera su forma original, se dice que el material tiene un comportamiento elástico. (Figura 1)

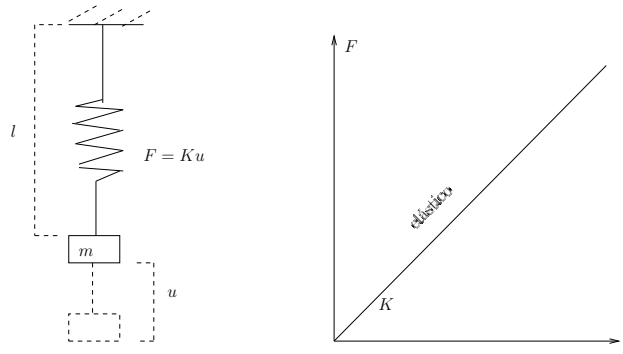


Fig. 1. Relación fuerza-desplazamiento para un modelo elástico.

Se definen, por un lado, la tensión $\sigma = \frac{F}{A}$, donde F es la fuerza aplicada ($F = mg$) y A la superficie sobre la cual se aplica esa fuerza y por otro, la deformación efectiva $\varepsilon = \frac{u}{l}$, siendo l la longitud de la pieza en estudio y u la variación de esta longitud ante la aparición de una fuerza externa. (Figura 2)

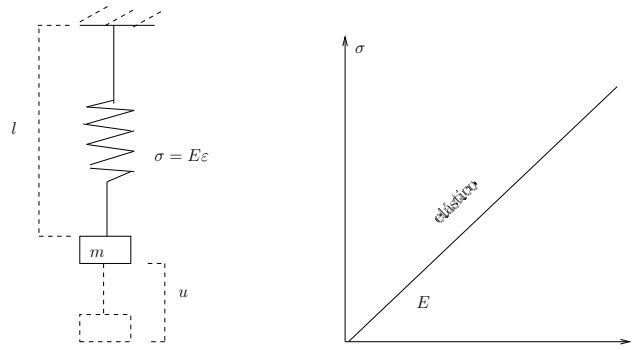


Fig. 2. Relación tensión-deformación para un modelo elástico.

Ejemplo 2: Si al resorte anterior se le continúa aplicando esa fuerza, más allá del límite del comportamiento elástico, llegará un momento en que se estire tanto, que ya no recuperará su forma original. En este caso, el material tiene un comportamiento plástico. (Figura 3)

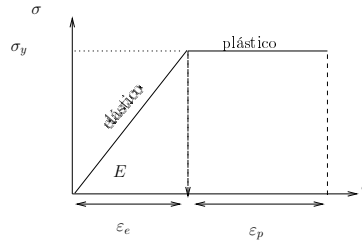


Fig. 3. Relación tensión-deformación para un modelo elasto-plástico perfecto.

En el gráfico cartesiano, E representa la pendiente de la porción de recta correspondiente al comportamiento elástico del material; ϵ_e la deformación elástica y ϵ_p la deformación plástica, siendo la deformación total $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$. En este caso, la pendiente de la recta correspondiente al comportamiento plástico, llamada parámetro de endurecimiento del material H , es nula. Por lo tanto el comportamiento del material es elasto-plástico perfecto.

σ_y es el valor de la tensión de fluencia del material (depende de cada material), a partir de la cual su comportamiento pasa a ser plástico. En la figura se observa que el valor de σ_y permanece constante a medida que evoluciona la deformación plástica.

Ejemplo 3 En este caso, se considera un resorte igual que en el caso anterior, también con comportamiento elasto-plástico, pero con el parámetro de endurecimiento H distinto de cero. Este parámetro de endurecimiento tiene el efecto de aumentar la resistencia interna del material, la cual evoluciona con la deformación plástica.

En la Figura 4, σ_{y_0} representa la tensión de fluencia inicial del material y σ_y el valor de la tensión de fluencia para un estado plástico, es decir, que ha superado el comportamiento elástico. Luego,

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} + H \cdot \epsilon_p \quad (1)$$

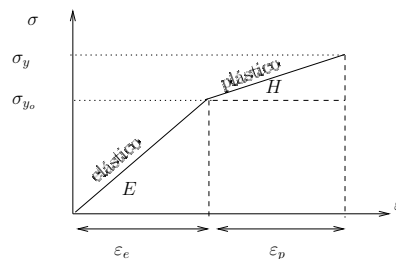


Fig. 4. Relación tensión-deformación para un modelo elasto-plástico con $H \neq 0$.

Ejemplo 4 Se considera un resorte igual que en los casos anteriores, con el parámetro de endurecimiento H distinto de cero, pero con comportamiento elasto-visco-plástico, lo que quiere decir que aparecen efectos viscosos, que dependen del tiempo. (Figura 5)

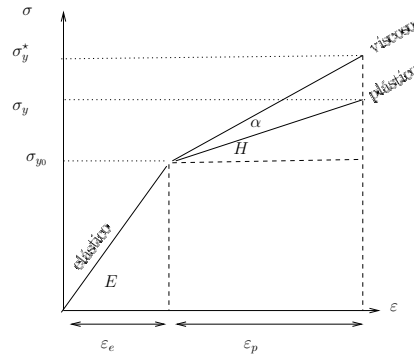


Fig. 5. Relación tensión-deformación para un modelo elasto-visco-plástico con $H \neq 0$.

En este caso, además de aumentar la resistencia interna del material debida al coeficiente de endurecimiento H , también participa en la tensión de fluencia σ_y el componente viscoso. Luego,

$$\sigma_y^* = \sigma_{y0} + H \cdot \epsilon_p + \alpha \dot{\epsilon}_p$$

donde $\dot{\epsilon}_p = \frac{d\epsilon_p}{dt}$ y $\alpha \dot{\epsilon}_p$ es la sobretensión.

2.2 El Problema del Continuo

Los cuatro ejemplos analizados son unidimensionales. En general, la fuerza no está aplicada en una sola dirección, e interesan estos casos más generales.

Para estados multiaxiales, se debe comparar la tensión efectiva con la tensión de fluencia del material. Si la tensión efectiva es mayor que la tensión de fluencia del material, $\sigma_{ef} \geq \sigma_y$, el mismo falla, en el sentido de producirse la plastificación. En particular, Von Mises propone que un material falla cuando el valor de su energía de distorsión (energía necesaria para modificar la red cristalina del material) iguala al valor de la energía de fluencia del mismo material (energía a partir de la cual el material comienza a plastificar) en un ensayo uniaxial. Esto es muy importante debido a que la energía de fluencia sí se puede medir.

Recordemos que en el caso de un ensayo uniaxial, la tensión efectiva coincide con la tensión unidireccional o uniaxial (debida a las acciones externas) que soporta el material. En cambio, en el caso de estados multiaxiales, la tensión efectiva representa las acciones conjuntas de las tensiones que se aplican en distintas direcciones. Luego, a efectos prácticos, un estudio complejo de tensiones se mide por una función escalar del mismo llamada tensión efectiva.

Para determinar el estado en un punto y decidir si en el mismo el material falla o no, se introduce la llamada ecuación de consistencia plástica:

$$\bar{f} = \sigma_{ef} - \sigma_y = 0$$

El conjunto de puntos que pertenecen al dominio de la función cuando $\bar{f} < 0$, se denominan dominio elástico. La frontera de dicho dominio se llama superficie de fluencia y en ella se cumple que $\bar{f} = 0$. No son admisibles los estados con $\bar{f} > 0$. Esto se muestra en la Figura 6.

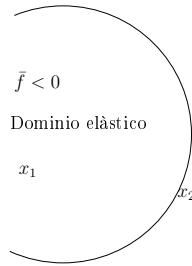


Fig. 6. Dominio elástico de la función de consistencia.

2.3 Ejemplo: El caso de metales bajo comportamiento viscoplástico

El criterio de Fluencia de Von Mises se emplea para el caso de metales y el mismo es bien conocido en la literatura. Al respecto pueden consultarse las tesis doctorales de Ponthot [10] y García Garino [3]. Sin embargo el problema viscoplástico ha sido más difícil de tratar debido a la componente viscosa que presenta la influencia del tiempo. Para este problema Ponthot [9], propuso la ecuación (2) escrita en función parámetro viscoplástico λ_{vp} .

$$\bar{f}(\lambda^{vp}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\beta_{ij} : \beta_{ij})} - \sigma_y(\lambda^{vp}) - \eta \left[\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right]^{1/n} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{1/m} = 0 \quad (2)$$

donde la tensión efectiva se escribe en función del tensor desviador de tensiones \mathcal{S} y el término corrector $2\mu\lambda^{vp}\mathbf{n}$ como $\beta_{ij} = [\mathcal{S} - 2\mu\lambda^{vp}\mathbf{n}]$, cuya evaluación se discute en la sección 3. En la ecuación (2) σ_y es la tensión de fluencia, que se expresa en función de la deformación viscoplástica efectiva $\bar{\epsilon}^{vp}$ y del módulo de endurecimiento H . La deformación viscoplástica efectiva se relaciona con el multiplicador viscoplástico según $\Delta\bar{\epsilon}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp}$. El parámetro de viscosidad del material se denota mediante η . Los escalares n y m indican los exponentes de endurecimiento y de viscosidad, respectivamente y Δt es el incremento de tiempo t .

Para calcular \mathcal{S} , se parte de las componentes del tensor de tensiones que depende de las acciones externas. Las mismas se indican como σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} y σ_{12} . El tensor de tensiones resulta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

las componentes no nulas se agrupan en el vector de tensiones:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12}]$$

A partir del estado de tensiones, se evalúa el invariante I_1 como

$$I_1 = \frac{1}{3} [\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}]$$

Las componentes del tensor desviador de tensiones \mathbf{S} resultan

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - I_1 \\ \sigma_{22} - I_1 \\ \sigma_{33} - I_1 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{12} \end{bmatrix}$$

3 Implementación numérica

Ante un incremento de carga puede suceder que un punto pase del estado elástico ($\bar{f} < 0$) al estado plástico ($\bar{f} = 0$). En la práctica, es muy difícil plantear e integrar una ecuación diferencial que tenga en cuenta la evolución simultánea de todas las variables. Por ello, en la literatura es habitual descomponer el problema global en la suma de dos problemas: uno predictor y otro corrector.

3.1 Algoritmo de Retorno radial.

La solución del problema predictor brinda las condiciones iniciales del problema corrector. Para definir el problema predictor se supone un comportamiento puramente elástico, manteniendo sin cambios las variables relacionadas con la plasticidad. Esta solución es una aproximación: indicada mediante $\boldsymbol{\sigma}^{pr}$. Luego en la etapa o problema corrector solamente se ajustan las variables relacionadas con la plasticidad.

Al ajustar las variables relacionadas con la plasticidad, el punto considerado *retorna* hacia la superficie de fluencia. Al mismo tiempo, si hay endurecimiento, la superficie se agranda y el radio de la misma evoluciona con la tensión de fluencia σ_y o alguna magnitud derivada de la misma. Luego, queda determinada una nueva superficie de fluencia, como se muestra en el gráfico de la Figura 7. Se debe satisfacer la ecuación de consistencia y entonces resulta:

$$\sigma_{ef} = \sigma_y$$

Este *retorno* se efectúa en forma normal a la superficie de fluencia, por eso se habla del *algoritmo de retorno radial*. Así, la tensión efectiva queda

$${}^{(t+\Delta t)}\boldsymbol{\sigma} = {}^{(t+\Delta t)}\boldsymbol{\sigma}^{pr} - 2\mu\lambda^{vp}\mathbf{n} \quad (3)$$

donde ${}^{(t+\Delta t)}\boldsymbol{\sigma}^{pr}$ es la tensión efectiva predictora, μ es el módulo de rigidez cortante que da una idea de la resistencia del material a distorsionarse, λ^{vp} es el parámetro

viscoplástico y \mathbf{n} es el vector normal a la superficie de fluencia, que en este caso es constante y puede calcularse según la ecuación (4).

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{pr}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{pr}\|} \quad (4)$$

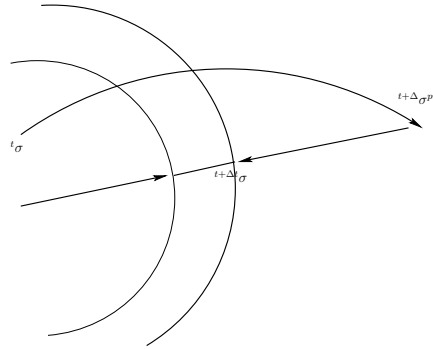


Fig. 7. Problema predictor y corrector.

3.2 Integración de la ecuación de consistencia para el problema viscoplástico de Von Mises

La ecuación de consistencia definida en la ecuación (2) se escribe para el caso discreto mediante la ecuación 5. La misma es una ecuación escalar no lineal cuya incógnita es el multiplicador viscoplástico λ_{vp} . Para ello se empleará el método de Newton Raphson, debido a su rápida convergencia. El algoritmo resultante se programará con el software MATLAB.

$$\bar{f}(\lambda^{vp}) = \sqrt{\frac{3}{2}} (\beta_{ij} : \beta_{ij}) - {}^{t+\Delta t} \sigma_y (\lambda^{vp}) - \eta \left[\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right]^{1/n} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{1/m} = 0 \quad (5)$$

La ecuación de iteración del Método de Newton-Raphson es

$$\lambda_{k+1}^{vp} = \lambda_k^{vp} - \frac{\bar{f}(\lambda_k^{vp})}{\left. \frac{d(\bar{f})}{d\lambda^{vp}} \right|_{\lambda_k^{vp}}}$$

Se debe calcular la derivada de la función. Para ello, es conveniente considerar:

$$\bar{f}(\lambda^{vp}) = B - A - C$$

donde

$$B = \sqrt{\frac{3}{2}} (\beta_{ij} : \beta_{ij}) \quad (6)$$

es el término que corresponde a la la tensión efectiva de la función \bar{f} . En un esquema predictor-corrector se obtiene suponiendo que el material tiene un comportamiento puramente elástico.

$$A = {}^{(t+\Delta t)}\sigma_y(\lambda^{vp}) \quad (7)$$

es el término que corresponde a la tensión de fluencia de la función \bar{f} , y por último,

$$C = \eta \left[\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

es el término que corresponde a la parte viscosa de la función \bar{f} .

Luego,

$$\frac{d\bar{f}}{d\lambda^{vp}} = \frac{dB}{d\lambda^{vp}} - \frac{dA}{d\lambda^{vp}} - \frac{dC}{d\lambda^{vp}} \quad (9)$$

a) Cálculo de $\frac{dB}{d\lambda^{vp}}$

La tensión ajustada por la componente correctora se puede escribir de acuerdo con las ecuaciones (3) y (4) como:

$$\beta_{ij} = [\mathbf{s}^{TR} - 2\mu\lambda^{vp}\mathbf{n}] = \left[\mathbf{s}^{TR} - 2\mu\lambda^{vp} \frac{\mathbf{s}^{TR}}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} \right] = \left[1 - 2\mu\lambda^{vp} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} \right] \mathbf{s}^{TR}$$

Por lo tanto,

$$\beta_{ij} : \beta_{ij} = \left[1 - 2\mu\lambda^{vp} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} \right]^2 [\mathbf{s}^{TR} : \mathbf{s}^{TR}]$$

Como

$$[\mathbf{s}^{TR} : \mathbf{s}^{TR}] = \|\mathbf{s}^{TR}\|^2$$

por definición de producto escalar y norma de un vector, queda

$$\beta_{ij} : \beta_{ij} = \left[1 - 2\mu\lambda^{vp} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} \right]^2 \|\mathbf{s}^{TR}\|^2$$

Reemplazando esta ecuación en la ecuación 6, se obtiene:

$$B = \left[\frac{3}{2} \left[1 - 2\mu\lambda^{vp} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} \right]^2 \|\mathbf{s}^{TR}\|^2 \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 - 2\mu\lambda^{vp} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} \right) \|\mathbf{s}^{TR}\|$$

Derivando esta última expresión

$$\frac{dB}{d\lambda^{vp}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}^{TR}\| \frac{(-2\mu)}{\|\mathbf{s}^{TR}\|} = -\sqrt{6}\mu \quad (10)$$

b) Cálculo de $\frac{dA}{d\lambda^{vp}}$

Se sabe que

$$A = {}^{(t+\Delta t)}\sigma_y(\lambda^{vp})$$

donde

$${}^{(t+\Delta t)}\sigma_y = \sigma_y^0 + H {}^{(t+\Delta t)}\bar{\epsilon}^p = \sigma_y^0 + H \left({}^{(t)}\bar{\epsilon}^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right)$$

para lo cual se ha aproximado $\bar{\epsilon}^p = {}^{(t)}\bar{\epsilon}^p + \Delta\bar{\epsilon}^p$.

Derivando,

$$\frac{dA}{d\lambda^{vp}} = H\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (11)$$

b) Cálculo de $\frac{dC}{d\lambda^{vp}}$

Se sabe que

$$C = \eta \left[\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}}$$

Derivando esta expresión respecto del parámetro viscoplástico, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\lambda^{vp}} &= \eta \frac{1}{n} \left[\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right]^{\frac{1}{n}-1} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}} + \eta \left[\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{m} \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}-1} \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\Delta t} \\ &= \eta \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right)} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} \left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}}}{\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{dC}{d\lambda^{vp}} = \eta \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{ \frac{1}{n \left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp} \right)} + \frac{1}{m\Delta t \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right]} \right\} \quad (12)$$

La expresión completa de la derivada se obtiene reemplazando 10, 11 y 12 en 9.

$$\frac{d\bar{f}}{d\lambda^{vp}} = -\sqrt{6}\mu - H\sqrt{\frac{2}{3}} - \eta\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t}\right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{ \frac{1}{n\left(\bar{\epsilon}_0^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{vp}\right)} + \frac{1}{m\Delta t\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda^{vp}}{\Delta t}\right]} \right\} \quad (13)$$

Si al calcular la función, ésta es menor que 0 (la tensión efectiva es menor que la tensión de fluencia del material), esto significa que el material tiene todavía un comportamiento elástico, y no tiene sentido encontrar los ceros de la misma (los valores de λ^{vp} a partir de los cuales el comportamiento del material deja de ser elástico).

Si $\eta = 0$, esto significa que se está ante un problema elastoplástico y si $\eta \neq 0$ se está ante un problema elastoviscoplastico.

Se deben definir los criterios de parada del programa de computadora. Uno de ellos establece que el error relativo que se produce comparando los distintos valores de λ^{vp} no debe ser mayor que un determinado valor (tolerancia); otro establece que la función sea mayor que determinado valor prefijado y el último se refiere al número de iteraciones, que no debe superar un número máximo preestablecido.

Para respetar el problema físico, conviene inicializar el algoritmo en $\lambda^{vp} = 0$. En este caso la derivada queda indefinida para la primera iteración y numericamente hay que imponer un valor muy pequeño para $\lambda^{vp} = 0$.

A partir de varias opciones consideradas con sus respectivos programas, y luego de analizar el problema y los resultados obtenidos con cada uno de ellos para un régimen elastoplástico, se adoptan dos posibles programas de trabajo:

Programa 1: Se comienza con un valor inicial de λ^{vp} pequeño, con lo que desaparece el problema numérico pero no se respeta el problema físico.

Programa 2: Con el fin de respetar el problema físico se hace $\lambda^{vp} = 0$ en la primera iteración. Para solucionar el problema numérico discutido se desprecia la componente viscosa de la derivada en la primera iteración.

4 Experimentos Numéricos

El objetivo del trabajo es estudiar el comportamiento de la ecuación de consistencia definida en la ecuación (2) para el problema viscoplastico de Von Mises. Para ello se mantienen constantes el módulo de elasticidad $E = 210000$ MPa; el coeficiente de poisson $\nu = 0.3$; el módulo de corte $\mu = 80769$ y la tensión de fluencia $\sigma_{y0} = 240$ MPa. Los parámetros m y n se escogen para cada experimento al igual que el módulo de endurecimiento H y la viscosidad η .

4.1 Experimento 1. Solución de un problema elastoplástico ($\eta = 0$)

En este caso se modela el comportamiento de un material elastoplástico sin endurecimiento. Para ello se fijan $\eta = 0$ y $H = 0$. El problema se resuelve utilizando los programas 1 y 2. Para este problema la ecuación 5 queda:

$$\bar{f}(\lambda^{vp}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\beta_{ij} : \beta_{ij}) - t + \Delta t \sigma_y(\lambda^{vp})} \quad (14)$$

En el programa 1 se partió con un valor de $\lambda_0^{vp} = 0,001$ y en el programa 2 con $\lambda_0^{vp} = 0$. En ambos casos, se obtuvo $\lambda^{vp} = 0,0038$ que coincide con la solución cerrada dada en la ecuación (15). Esta solución es bien conocida en la literatura y los detalles de su deducción pueden consultarse en la referencia [3]. Para ambos programas se necesitaron dos iteraciones para obtener el resultado. De los resultados obtenidos surge que en la práctica no se observan diferencias entre los dos programas para este caso.

$$\lambda^{vp} = \frac{1}{2\mu} \frac{f^*}{\left(1 + \frac{H}{3\mu}\right)} \quad (15)$$

4.2 Experimento 2. Solución de un problema elastoviscoplastico lineal

Con el fin de testear el algoritmo para el caso viscoplastico lineal se impone $m = 1$ y $n \rightarrow \infty$. También en este caso el endurecimiento es nulo y la viscosidad η varía entre 10 y 10^8 . Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1 y se comparan con la solución cerrada disponible para este problema.

Tabla 1. Resultados para un problema elasto-plástico lineal con $n \rightarrow \infty$ y η variable.

η	Solución analítica (λ^{vp})	Programa 1		Programa 2	
		Solución (λ^{vp})	no. de iter.	Solución (λ_{vp})	no. de iter.
10	0,00384	0,0038	2	0,0038	2
10^2	0,00384	0,0038	2	0,0038	2
10^3	0,00383	0,0038	2	0,0038	3
10^4	0,00369	0,0037	2	0,0037	3
$0,5 \cdot 10^5$	0,00319	0,0032	2	0,0032	3
10^5	0,00272	0,0027	2	0,0027	3
$0,5 \cdot 10^6$	0,00125	0,0013	2	0,0013	3
10^6	$7,492 \cdot 10^{-4}$	$7,492 \cdot 10^{-4}$	2	$7,492 \cdot 10^{-4}$	3
10^7	$9,087 \cdot 10^{-5}$	$9,087 \cdot 10^{-5}$	2	$9,087 \cdot 10^{-5}$	3
10^8	$9,284 \cdot 10^{-6}$	$9,285 \cdot 10^{-6}$	2	$9,285 \cdot 10^{-6}$	3

Se observa que los valores de λ^{vp} obtenidos con los programas 1 y 2 prácticamente coinciden. La única diferencia radica que en el programa 2 en algunos casos se requiere una iteración más para satisfacer la ecuación de consistencia. Este resultado posiblemente se debe a que la componente viscosa de la derivada de la función de consistencia es nula para la primera iteración. Pese a este pequeño inconveniente, para el experimento 3 se escoge el programa 2 ya que respeta el problema físico.

En la Tabla 2 se muestra la influencia de la viscosidad η en la solución obtenida. Para ello se incluyen los valores de λ^{vp} , el valor de la función de consistencia y el error, así como el número de iteraciones. También se observa que los valores obtenidos para

λ^{vp} disminuyen a medida que aumenta η . Esta tendencia se debe a que la sobretensión o resistencia viscosa del material crece con el aumento de la viscosidad.

Tabla 2. Comparación de parámetros para un problema elasto-plástico lineal con $n \rightarrow \infty$ y η variable.

η	Solución analítica (λ^{vp})	Solución (λ^{vp})	valor función	error	no. de iter.
10	0,00384	0,0038413	-0,314	$4,127 \cdot 10^{-5}$	2
10^2	0,00384	0,0038398	-0,313	$4,127 \cdot 10^{-4}$	2
10^3	0,00383	0,0038256	$6,2172 \cdot 10^{-15}$	0	3
10^4	0,00369	0,0036892	$-6,039 \cdot 10^{-14}$	$1,175 \cdot 10^{-16}$	3
$5 \cdot 10^4$	0,00319	0,0031843	$-2,8422 \cdot 10^{-14}$	0	3
10^5	0,00272	0,0027192	$-2,8422 \cdot 10^{-14}$	0	3
$5 \cdot 10^5$	0,00125	0,0012539	$1,7053 \cdot 10^{-13}$	$1,724 \cdot 10^{-16}$	3
10^6	$7,492 \cdot 10^{-4}$	$7,4926 \cdot 10^{-4}$	$-2,2737 \cdot 10^{-13}$	$2,894 \cdot 10^{-16}$	3
10^7	$9,087 \cdot 10^{-5}$	$9,0879 \cdot 10^{-5}$	$9,094 \cdot 10^{-13}$	$1,193 \cdot 10^{-15}$	3
10^8	$9,28 \cdot 10^{-6}$	$9,2856 \cdot 10^{-6}$	$1,6598 \cdot 10^{-11}$	$2,18910 \cdot 10^{-14}$	3

Cabe señalar que los valores obtenidos ajustan muy bien con la solución cerrada indicada en el trabajo de Ponthot [9]:

$$\lambda^{vp} = \frac{1}{2\mu} \frac{f}{\left[1 + \frac{H + \frac{\eta}{\Delta t}}{3\mu}\right]}$$

4.3 Experimento 3. Solución de un problema elastoviscoplastico no lineal con $n = 1$ y $m = 1$

Este es otro caso de interés para probar el algoritmo ya que imponiendo $n = 1$ y $m = 1$ la ecuación de consistencia definida en la ecuación (5) se reduce a una ecuación de segundo grado y entonces se dispone de una solución cerrada. Se considera $H = 100$ y en este caso η varía entre 10 y 10^8 . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.

Es importante destacar que en todos los casos estudiados los valores de λ^{vp} obtenidos computacionalmente, ajustan muy bien con los valores calculados en forma cerrada, que se han obtenido resolviendo la ecuación de segundo grado en λ^{vp} que resulta de imponer los parámetros $m = 1$ y $n = 1$ en la función de consistencia general dada en la ecuación (5). La ecuación de segundo grado resultante se observa en la ecuación (16). La solución cerrada obtenida para este caso, si bien es simple, hasta el conocimiento de los autores no se ha discutido previamente en la literatura.

$$-\frac{2}{3} \frac{\eta}{\Delta t} \lambda^{vp2} + \left(-\sqrt{6}\mu - H\sqrt{\frac{2}{3}} - \eta\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varepsilon_0^{vp}}{\Delta t} \right) \lambda^{vp} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \|S^{TR}\| - \sigma_0^y - H^t \varepsilon_p \right) = 0 \quad (16)$$

Otro resultado de interés práctico, esta vez relacionado con el comportamiento del problema, surge al comparar la evolución de λ^{vp} obtenida para este caso ($n = 1$), con

Tabla 3. Comparación de parámetros para un problema elasto-plástico no lineal con $n = 1$, $m = 1$ y η variable.

η	Solución analítica (λ^{vp})	Solución (λ^{vp})	valor función	error	no. de iter.
10	0,0038	0,0038398	$-9,8296 \cdot 10^{-5}$	$1,2934 \cdot 10^{-7}$	2
10^2	0,0038	0,0038398	$-9,8296 \cdot 10^{-4}$	$1,2934 \cdot 10^{-6}$	2
10^3	0,0038	0,0038398	-0,0098	$1,2933 \cdot 10^{-5}$	2
10^4	0,0038	0,0038393	-0,0983	$1,2932 \cdot 10^{-4}$	2
10^5	0,0038	0,0038349	$-1,6358 \cdot 10^{-6}$	$2,149 \cdot 10^{-9}$	3
10^6	0,0038	0,0037914	-0,0016	$-2,0302 \cdot 10^{-6}$	3
10^7	0,0034	0,0034441	$-1,2076 \cdot 10^{-4}$	$1,4394 \cdot 10^{-7}$	4
10^8	0,0022	0,0022039	-0,0043	$3,9454 \cdot 10^{-6}$	5
10^9	$9,29333 \cdot 10^{-4}$	$9,2953 \cdot 10^{-4}$	-0,4358	$3,2613 \cdot 10^{-4}$	6
10^{10}	$3,23043 \cdot 10^{-4}$	$3,2312 \cdot 10^{-4}$	-0,0396	$2,7169 \cdot 10^{-5}$	8
10^{11}	$1,05271 \cdot 10^{-4}$	$1,0530 \cdot 10^{-4}$	-0,0020	$1,3316 \cdot 10^{-6}$	10

la del experimento 2 ($n = \infty$) que modeló un problema viscoplástico lineal. De la comparación surge que el efecto de la viscosidad se retrasa significativamente para este experimento. Por ejemplo, para $\eta = 10^8$ se obtiene $\lambda^{vp} = 0,0022$, mientras que para el experimento 2 (problema elastoviscoplástico lineal) se obtuvo un valor mucho más pequeño igual a $9,28510^{-6}$. La evolución del multiplicador λ_{vp} en función del parámetro de viscosidad η se muestra en la Figura 8, para los dos casos comparados.

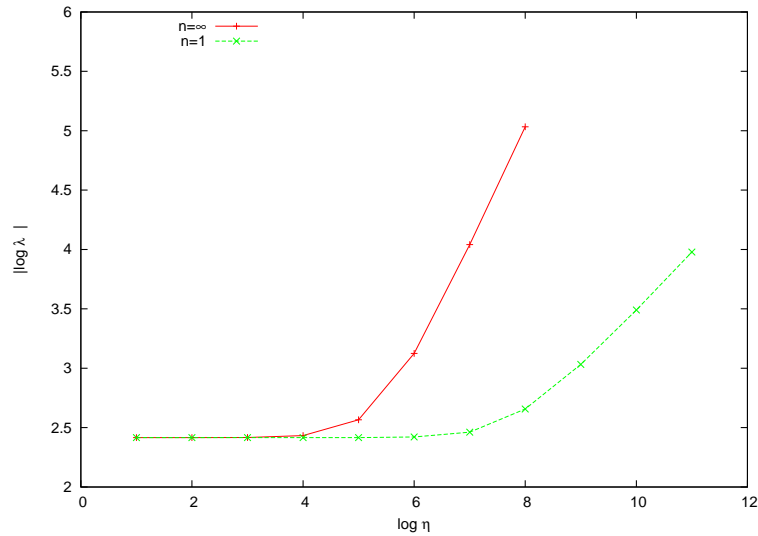


Fig. 8. Evolución de λ^{vp} en función del parámetro de viscosidad η para $n = 1$ y $n = \infty$

5 Conclusiones

Se ha diseñado un algoritmo para resolver mediante el método de Newton Raphson la ecuación de consistencia escalar no lineal propuesta por Ponthot para el modelo de Perzyna.

Los valores obtenidos con el algoritmo diseñado, implementado en MATLAB, ajustan muy bien con las soluciones cerradas disponibles para algunos casos particulares.

Para el caso que se obtiene imponiendo los parámetros $m = n = 1$, la ecuación de consistencia se reduce a una ecuación de segundo grado en λ^{vp} , resultado que, hasta el conocimiento de los autores, no se había informado en la literatura.

Cabe comentar que el algoritmo presenta resultados que concuerdan con la física del problema para los experimentos estudiados. En una segunda etapa de este trabajo se procesarán otros casos de interés.

Finalmente es importante destacar que el algoritmo presentado puede implementarse en un código de elementos finitos con capacidades no lineales, como es el caso de SOGDE, desarrollado por los autores, o incluso llevar a cabo estudios paramétricos con SOGDE-CONDOR.

References

1. Alfano, G., Angelis, F.D., Rosati, L.: General solution procedures in elasto/viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 5123–5147 (2001)
2. Carosio, A.: Viscoplasticidad Continua y Consistente. Ph.D. thesis, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina (2001)
3. García-Garino, C.: Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Ph.D. thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona (1993)
4. Garino, C.G., Oliver, J.: Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte i formulación teórica y aplicación a metales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 11, 105–122 (1995)
5. Garino, C.G., Oliver, J.: Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte ii implementación numérica y ejemplos de aplicación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 12, 147–169 (1996)
6. Nakamura, S.: *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB*. Prentice Hall (1997)
7. Ottosen, N., Ristinmaa, M.: *The Mechanics of Constitutive Modelling*. Elsevier (2005)
8. Perzyna, P.: Fundamental problems visco-plasticity. In: Kuerti, G. (ed.) *Advances in Applied Mechanics*, vol. 9, pp. 243–377. Academic Press (1966)
9. Ponthot, J.P.: Unified stress update algorithm for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity* 18, 91–126 (2002)
10. Ponthot, J.: *Traitement unifié de la Mécanique des Milieux Continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. Ph.D. thesis, University of Liège, Liège, Belgium (1995)