

ACADEMIE ROYALE *des sciences, des lettres & des beaux-arts* DE BELGIQUE



Cette œuvre littéraire est soumise à la législation belge en matière de droit d'auteur. Elle a été publiée et numérisée par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.

Utilisation

L'Académie royale de Belgique met gratuitement à la disposition du public les copies numérisées d'œuvres littéraires appartenant au domaine public : aucune rémunération ne peut être réclamée par des tiers ni pour leur consultation ni au prétexte du droit d'auteur.

Pour les œuvres ne faisant pas encore partie du domaine public, l'Académie royale de Belgique aura pris soin de conclure un accord avec les ayants droit afin de permettre leur numérisation et mise à disposition.

Les documents numérisés peuvent être utilisés à des fins de recherche, d'enseignement ou à usage privé.

Quiconque souhaitant utiliser les documents à d'autres fins et/ou les distribuer contre rémunération est tenu d'en demander l'autorisation à l'Académie royale de Belgique (Palais des Académies, rue Ducale, 1 - B-1000 Bruxelles), en joignant à sa requête, l'auteur, le titre et l'éditeur du ou des documents concernés.

Pour toutes les utilisations autorisées, l'utilisateur s'engage à citer, dans son travail, les documents utilisés par la mention « Académie royale de Belgique » accompagnée des précisions indispensables à l'identification des documents.

Par ailleurs, quiconque publie un travail – dans les limites des utilisations autorisées – basé sur une partie substantielle d'un ou plusieurs document(s) numérisé(s) s'engage à remettre ou à envoyer gratuitement à l'Académie royale de Belgique, un exemplaire ou à défaut, un extrait justificatif de cette publication.

Responsabilité

Malgré les efforts consentis pour garantir les meilleures conditions d'accessibilité et de qualité des documents numérisés, des défauts peuvent y subsister. L'Académie royale de Belgique décline toute responsabilité concernant les coûts, dommages et dépenses entraînés par l'accès et l'utilisation des documents numérisés. Elle ne pourra en outre être mise en cause dans l'exploitation subséquente des documents numérisés et la dénomination « Académie royale de Belgique » ne pourra être ni utilisée, ni ternie au prétexte d'utiliser des documents numérisés mis à disposition par elle.

Les liens profonds, donnant directement accès à une copie numérique particulière, sont autorisés si :

1. les sites pointant vers ces documents informent clairement leurs utilisateurs qu'ils y ont accès via le site web de l'Académie royale de Belgique ;
2. l'utilisateur, cliquant sur un de ces liens profonds, devra voir le document s'ouvrir dans une nouvelle fenêtre. Cette action pourra être accompagnée de l'avertissement « Vous accédez à un document du site web de l'Académie royale de Belgique ».

Reproduction

Sous format électronique

Pour toutes les utilisations autorisées mentionnées dans ce règlement, le téléchargement, la copie et le stockage des données numériques sont permis ; à l'exception du dépôt dans une autre base de données, qui est interdit.

Sous format papier

Pour toutes les utilisations autorisées mentionnées dans le présent texte, les fac-similés exacts, les impressions et les photocopies, ainsi que le copié/collé sont permis.

Références

Quel que soit le support de reproduction, la suppression des références à l'Académie royale de Belgique dans les copies numériques est interdite.

RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR;

PAR
J. PLATEAU.

HUITIÈME SÉRIE.

RECHERCHE DES CAUSES D'OU DÉPENDENT LE FACILE DÉVELOPPEMENT ET LA PERSISTANCE DES LAMES LIQUIDES;
TENSION DES SURFACES LIQUIDES; PRINCIPE NOUVEAU CONCERNANT CES SURFACES.

(Présenté le 4 juillet 1868.)

¹ Voir, pour les sept séries précédentes, les tomes XVI, XXIII, XXX, XXXI, XXXIII et XXXVI des *Mémoires de l'Acad.*





RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE
D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

RECHERCHE DES CAUSES D'OÙ DÉPENDENT LE FACILE DÉVELOPPEMENT ET LA PERSISTANCE DES LAMES LIQUIDES; TENSION DES SURFACES LIQUIDES; PRINCIPE NOUVEAU CONCERNANT CES SURFACES.

§ 1. — En discutant, dans la série précédente, les divers procédés de réalisation des lames liquides, j'ai cherché à faire bien comprendre que toujours la cohésion et la viscosité président à cette réalisation, en ce que la première s'oppose au déchirement du liquide, tandis que la seconde rend difficiles les mouvements relatifs des molécules quand le liquide est amené à un certain degré d'atténuation, et ralentit ainsi l'atténuation ultérieure; j'ai conclu de là que la propriété de s'étendre en lames minces devait appartenir à tous les liquides, et j'ai tâché de montrer qu'il en est réellement ainsi.

Mais si tous les liquides peuvent se développer en lames minces, ils présentent néanmoins, quant à la facilité de ce développement et quant à la persistance des lames engendrées, des différences considérables : on gonfle aisément, par exemple, de grosses bulles à l'orifice d'une pipe avec de l'eau



de savon, et personne ne s'aviserait d'essayer avec de l'eau pure; les lames transversales dans un flacon persistent un temps énorme si le liquide employé est du liquide glycérique, et elles éclatent presque immédiatement si c'est de l'eau (7^{me} série, § 25).

On attribue généralement à la viscosité l'extension aisée de l'eau de savon et de quelques autres liquides en lames minces de grande étendue; je ferai voir que la viscosité, du moins telle qu'on l'entend, ne joue qu'un rôle minime dans cette facilité d'extension, et je tâcherai d'arriver à la véritable cause du phénomène; cette étude nous conduira d'ailleurs à des faits nouveaux, qui me paraissent fort remarquables.

§ 2. — M. Gladstone est, je pense, le seul qui se soit occupé un peu sérieusement de la question; avant lui, on y avait simplement touché, comme nous le verrons. Ce savant a publié, en 1857, une note sur la mousse qui se forme, par l'agitation ou autrement, à la surface de certains liquides¹. J'ai déjà fait allusion à cette note dans le § 41 de la série précédente, et je vais en traduire ici les passages qui se rapportent à notre sujet :

« Tous les liquides, » dit M. Gladstone, « lorsqu'on les secoue avec de l'air, forment des bulles; mais, sur les uns, ces bulles éclatent et s'évanouissent dès que l'agitation cesse, tandis que, sur d'autres, se montre une mousse plus ou moins permanente. Cette différence entre les liquides paraît tenir à un caractère spécifique, et l'on ne peut, jusqu'ici, la faire dépendre d'aucune autre qualité.

» En règle générale, les solutions aqueuses de corps organiques sont les plus propres à donner de la mousse.....

» Les solutions des acétates sont particulièrement disposées à la production d'une mousse persistante; elles possèdent cette propriété à un tel degré, que j'ai pu quelquefois, parmi différents mélanges de solutions salines, reconnaître par ce moyen ceux qui contenaient un acétate. L'acétate de fer est au premier rang; mais les acétates de cuivre, de plomb et d'autres métaux présentent la même propriété d'une manière très-prononcée. Cependant l'acide acétique lui-même ne montre aucune disposition à la formation de la

¹ *Note on froth* (PHILOS. MAGAZ., 4^{me} série, vol. XIV, p. 514).



mousse. Les bulles développées par l'agitation de l'alcool ou de l'éther disparaissent instantanément..... Le citrate de fer est analogue à l'acétate.

» Cette faculté de mousser est complètement indépendante de la densité : une solution dense d'acide sulfindigotique mousse par l'agitation, mais une solution de chlorure d'ammonium d'une grande densité ne produit aucune mousse durable, tandis que, d'un autre côté, une faible solution de savon, qui diffère peu de l'eau distillée, donne lieu, comme chacun le sait, à une mousse très-persistante. »

Dans cette note, on le voit, il s'agit surtout de la mousse; mais, nous les savons, celle-ci n'est qu'un assemblage de lames, et il paraît naturel d'admettre qu'un liquide qui se recouvre, par l'agitation, d'une mousse abondante et persistante, doit se laisser gonfler aisément en bulles à l'orifice d'une pipe ou d'un tube; c'est ce dont l'eau de savon nous offre un exemple familier. J'ai cependant rencontré, à cet égard, de curieuses exceptions; je les ferai connaître plus loin.

M. Gladstone signalant l'acétate de fer comme remarquable au point de vue de la mousse, je me suis procuré une solution concentrée et aussi neutre que possible d'acétate de peroxyde de fer; elle moussait très-bien, et l'on a pu effectivement en gonfler sans peine, à l'orifice d'une pipe, des bulles de cinq et même quelquefois de six centimètres de diamètre. Je dirai ici, une fois pour toutes, que le diamètre de l'orifice des pipes qui servent à mes expériences est de deux centimètres environ.

M. Gladstone attribue principalement aux solutions aqueuses de composés organiques la faculté de donner de la mousse; je ferai observer toutefois qu'avec le verre fondu on gonfle fort bien des bulles, et qu'ainsi, très-probablement, si l'on pouvait agiter du verre fondu avec de l'air, il produirait une mousse volumineuse.

Ce qu'il nous importe surtout de remarquer, c'est que M. Gladstone déclare ne pouvoir faire dépendre la faculté de mousser d'aucune propriété connue des liquides, et qu'il regarde conséquemment les différences de viscosité, de cohésion, de volatilité et de densité comme insuffisantes pour rendre raison de la diversité que présentent les liquides à cet égard.

§ 3. — Reprenons la question où il l'a laissée, et commençons par étudier



un élément dont l'influence sur le facile développement et sur la persistance des lames doit paraître évidente; je veux parler de la tension. Afin de mettre dans tout son jour cette curieuse propriété des surfaces liquides, je vais en tracer l'historique.

L'idée d'une tension dans la couche superficielle des liquides a été émise pour la première fois, en 1751, par Segner, qui l'emploie surtout à la détermination de la figure des gouttes. Dans un mémoire ¹ fort remarquable pour l'époque où il a été écrit, Segner considérant une goutte liquide posée sur une surface solide qu'elle ne mouille pas, discute les actions mutuelles des molécules qui la composent, et arrive à des résultats dont la vérité est aujourd'hui démontrée : il trouve que les actions d'où dépend la figure de la goutte résident dans une couche superficielle dont l'épaisseur est égale au rayon de l'attraction moléculaire, et que ces mêmes actions produisent des pressions normales dont l'intensité est d'autant plus grande qu'elles émanent de portions plus courbes de la surface; enfin il conclut à l'existence, dans la couche dont il s'agit, d'une tension ayant partout la même intensité, tension qu'il fait dériver des attractions des molécules suivant le sens tangentiel, et de la courbure. Mais cette discussion, toute de raisonnement, est longue, embarrassée, peu intelligible, selon moi, en plusieurs points, et je doute qu'elle ait pu convaincre personne de la réalité de la tension; elle renferme, en outre, des erreurs qui tiennent à l'insuffisance des notions qu'on possédait alors; aussi Young dit-il à ce sujet : « Segner..... a montré de quelle manière le principe peut être déduit de la doctrine de l'attraction; mais sa démonstration est compliquée et n'est pas parfaitement satisfaisante. »

Quoi qu'il en soit, Segner, appliquant ensuite à ses déductions une méthode ingénieuse de calcul et d'expérience, parvient à cet autre résultat, que, dans des gouttes formées du même liquide, mais ayant des figures et des dimensions différentes, la tension a la même valeur, ce qui revient à dire qu'elle est indépendante des courbures; ce principe est également reconnu vrai aujourd'hui.

Enfin, Segner va jusqu'à chercher le rapport entre la tension du mercure

¹ *De figuris superficialium fluidarum* (COMMENTAR. GÖTTING., vol. I, 1751).



et celle de l'eau, et il le trouve égal à 3,5 environ; mais comme il manque de la notion de la courbure moyenne, et ne tient compte, dans ses calculs, que de la courbure méridienne, ses résultats numériques sont nécessairement inexacts, et le rapport ci-dessus est notablement trop petit ¹.

§ 3^{bis}. — En 1756, Leidenfrost ² a signalé la force contractile des bulles de savon; il se fonde sur le fait qu'il a, je pense, décrit le premier, que si on laisse ouvert le tube d'insufflation, la bulle revient graduellement sur elle-même jusqu'à s'annuler, en expulsant par le tube l'air qu'elle contient.

Mais Leidenfrost ne rapporte pas cette force contractile à une propriété générale des surfaces liquides; il l'attribue à la partie graisseuse du savon, laquelle, selon lui, se sépare des autres éléments de la solution, et constitue une pellicule mince sur la face extérieure de la bulle; d'ailleurs, selon lui encore, la partie aqueuse de la lame possède une force de nature opposée, savoir une force explosive; c'est cette dernière qui fait éclater la bulle.

§ 4. — Young, dans un travail célèbre ³, publié en 1805, part du principe de la tension pour expliquer un grand nombre de phénomènes capillaires. Il ne tombe pas dans la même erreur que Segner, c'est-à-dire qu'il considère à la fois les effets des deux courbures rectangulaires: la tension détermine, en chaque point de la surface liquide, une pression ou une traction normale proportionnelle à la somme de ces deux courbures, et c'est de

¹ En examinant ce mémoire, j'y ai trouvé, à ma grande surprise, un passage dont voici la traduction:

« Si un liquide tombe librement dans un milieu non résistant, l'action due au poids des portions supérieures sur celles qui les précèdent est complètement nulle. Et si deux liquides sont donnés non susceptibles de se mêler et de densités parfaitement égales, et que l'on verse une petite quantité de l'un d'eux dans un vase contenant une quantité plus grande de l'autre, le poids du premier sera soutenu par la pression du second de telle manière qu'il ne pourra exercer aucune action pour conserver ou pour changer la figure du liquide. La goutte qui tombe, ou la goutte immergée comme nous venons de le dire, prendra donc identiquement la même figure qu'une goutte qui serait sans pesanteur. »

Ainsi l'idée première du procédé au moyen duquel on soustrait une masse liquide pleine à l'action de la pesanteur, idée que je croyais mienne, avait été nettement avancée dès 1751; seulement Segner se borne à l'énoncer, il n'en essaie pas l'application, et n'en tire aucun parti.

² *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*. Duisburg.

³ *An essay on the cohesion of fluids* (PHILOS. TRANSACT., 1805).



là que naissent les phénomènes : dans un tube capillaire, par exemple, lorsque le liquide est soulevé et présente ainsi une surface concave, les tractions normales dues à la tension soutiennent le poids de la colonne, et lorsque le liquide est déprimé, sa surface étant alors convexe, les pressions normales produites par la tension font équilibre à la pression hydrostatique du liquide environnant, qui tend à faire monter la colonne.

Quant à la légitimité du principe de la tension, Young s'appuie simplement sur ce que les phénomènes capillaires, pouvant être rapportés aux attractions mutuelles des seules particules superficielles, les surfaces liquides « doivent être composées de courbes de la nature de la chaînette, lesquelles sont supposées être le résultat d'une tension uniforme dans une surface qui résiste à la pression d'un fluide. » Enfin il essaie de faire voir qu'on peut trouver une cause de pressions et tractions normales dans le seul jeu des attractions et répulsions des molécules, et il laisse ainsi dans le doute si la tension existe en réalité, ou si, par l'effet de ces actions normales, les choses se passent comme sous l'influence d'une tension.

§ 5. — Le docteur Hough ¹, dont j'ai déjà mentionné (3^{me} série, § 25) les recherches, publiées en 1830, paraît être arrivé, de son côté, sans connaître les travaux de Segner et de Young, à l'idée d'une force contractile ou tension existant à la surface des liquides et faisant constamment effort pour amoindrir cette surface; il semble y avoir été conduit simplement par la considération de la forme sphérique des gouttes liquides et des bulles de savon. Il donne comme exemple des effets de cette tension l'élasticité des globules de mercure, lesquels, lorsqu'on augmente leur surface en les comprimant et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes, reprennent la forme sphérique.

Pour expliquer la tension, Hough fait remarquer que les molécules de la surface ne sont pas en présence de molécules extérieures de même espèce qui puissent contrebalancer leurs attractions mutuelles, tandis qu'à l'intérieur du liquide chaque molécule étant complètement entourée de molécules simi-

¹ *Inquiries into the principles of liquid attraction* (JOURN. DE SILLIMAN, 1^{re} série, vol. XVII, p. 86).



lares, les attractions sont neutralisées dans tous les sens. Il ajoute qu'on peut, jusqu'à un certain point, estimer les tensions relatives des différents liquides, en comparant les grandeurs des plus grosses gouttes de ces liquides qui conservent sensiblement la forme sphérique quand elles reposent sur des substances qui ont pour elles la moindre attraction, ou quand elles sont suspendues à des corps qui ont pour elles la plus forte attraction.

Il fait dépendre aussi de la force contractile l'élévation et la dépression des liquides dans les espaces capillaires, ainsi que les attractions et répulsions apparentes des corps légers flottants; mais, ignorant les recherches antérieures, il essaie d'établir une théorie de ces phénomènes, théorie erronée, dans laquelle intervient la pression atmosphérique. Enfin il admet, comme conséquence de la tension, une pression exercée soit sur l'air qui constitue une bulle dans l'intérieur d'un liquide, soit sur celui que renferme une sphère ou une calotte laminaire; mais, ainsi que je l'ai dit dans ma 5^{me} série, il parvient, à l'égard de la relation entre cette pression et le diamètre, à une loi tout à fait inexacte.

§ 6. — M. Henry, dans sa communication verbale, faite en 1844, à la Société américaine *Sur la cohésion des liquides*¹, communication dont j'ai déjà parlé au § 25 de ma 5^{me} série, part, au contraire, du principe de Young, et, considérant une bulle de savon, rappelle qu'en conséquence du principe dont il s'agit, la tension détermine une pression dirigée vers le centre, et dont l'intensité est en raison inverse du rayon. Il ajoute : « On manifeste aisément la force contractile de la surface de la bulle en soufflant une grosse bulle à l'extrémité d'un large tube (soit d'un pouce de diamètre); dès qu'on éloigne la bouche, on voit la bulle diminuer rapidement, et en même temps un courant d'air intense est chassé par le tube contre le visage. Cet effet n'est pas dû à l'ascension de l'air chaud des poumons qui a servi à gonfler la bulle, car il se produit de même quand on emploie de l'air froid, et aussi quand on tient la bulle verticalement au-dessus du visage, de sorte que le courant soit descendant. »

¹ *Philos. Magaz.*, 1845, vol. XXVI, p. 541.



Il est, en effet, impossible de concevoir ce retrait de la lame et cette expulsion de l'air intérieur, sans admettre que la lame soit tendue; le fait sur lequel s'appuie M. Henry peut donc être regardé comme une preuve expérimentale de la réalité de la tension, au moins dans les lames.

Seulement, ainsi que je l'ai dit au paragraphe cité de la 5^{me} série, M. Henry commet une petite erreur en considérant simplement la bulle comme une sphère pleine dont on aurait remplacé le liquide intérieur par de l'air, et en ne tenant compte, de la sorte, que de la tension de la surface extérieure.

Conduit par ses expériences à la conclusion que la cohésion est moindre dans l'eau de savon que dans l'eau pure, il s'exprime ainsi : « Le manque de persistance dans une bulle d'eau pure n'est conséquemment pas dû à la faiblesse de l'attraction, mais à la mobilité parfaite des molécules, d'où il résulte, comme dans une voûte où le frottement n'existerait pas, que l'équilibre est détruit par la plus petite force étrangère. » On verra, dans la suite de ce Mémoire, que M. Henry se trompe ici complètement.

§ 7. — Dans un mémoire qui a paru en 1845, et auquel j'ai déjà fait plusieurs fois allusion ¹, M. Hagen applique, comme Young, d'une manière rigoureuse, aux phénomènes capillaires le principe de la tension. Il ne considère également cette force que comme hypothétique, mais il fait faire à la question plusieurs pas importants :

Prenant pour point de départ la seule condition qu'il doit y avoir équilibre entre les actions hydrostatiques et la tension, il démontre mathématiquement l'uniformité de cette dernière force dans deux cas simples, savoir celui d'un liquide soulevé ou abaissé entre deux plans solides, et celui d'un liquide soulevé ou abaissé dans un tube cylindrique.

Son analyse nous apprend, en outre, quelle est la signification précise du coefficient constant qui, dans l'expression générale de la pression capillaire, multiplie la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ des deux courbures principales; elle permet, en effet, de conclure que ce coefficient n'est autre chose que la tension par unité

¹ *Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten.* (MÉM. DE L'ACAD. DE BERLIN, 1845, et ANN. DE M. POGGENDORFF, 1846, vol. LXVII, pp. 1 et 152).



de longueur. A la vérité, M. Hagen n'applique le calcul qu'aux deux cas ci-dessus, mais cela suffit pour faire admettre déjà que cette interprétation du coefficient constant s'étend à tous les autres cas.

Et de là résulte encore évidemment la conséquence que la tension est indépendante des courbures, comme tendaient à l'établir les recherches ingénieuses, mais incomplètes de Segner.

M. Hagen va plus loin : il cherche, par trois procédés différents, la valeur de la tension à la surface de l'eau. En premier lieu, il effectue une série de mesures de l'élévation du liquide entre deux plans verticaux parallèles, dont il fait varier la distance dans des limites étendues. Par des moyens qu'il indique, il détermine chaque fois, dans une section verticale perpendiculaire aux deux plans, l'écartement de ceux-ci, la hauteur du point le plus bas de la surface liquide comprise entre eux, et celle des points où cette surface vient les toucher ; puis, appliquant à ces trois éléments une méthode rigoureuse de calcul, il en tire une valeur de la tension.

En second lieu, il mesure également l'élévation de l'eau dans des tubes cylindriques dont le diamètre intérieur varie de 1^{mm},23 à 3^{mm},42, et, par un calcul également précis, il en déduit encore la tension. Ce second procédé lui fournit des résultats plus concordants que le premier, et il en tire, en moyenne, pour la température de 10°, une valeur qui, traduite en milligrammes pour un millimètre de longueur, est égale à 7,53 ; c'est-à-dire que si, dans la couche superficielle de l'eau, on conçoit une section d'un millimètre de longueur, la couche exerce, de part et d'autre de cette section, une traction équivalente au poids de 7,55 milligrammes.

Il constate, en même temps, qu'une variation de quelques degrés dans la température est sans influence sensible sur la tension.

Le troisième procédé est fondé sur l'écoulement du liquide goutte à goutte : la tension est égale au poids d'une goutte divisé par le périmètre extérieur de l'orifice. Le poids d'une goutte s'obtient en recevant un nombre déterminé de ces gouttes dans un petit vase, et pesant le liquide recueilli. M. Hagen fait remarquer que ce procédé est moins exact que les précédents, parce que chaque goutte, en se détachant, laisse à l'orifice une petite portion de son volume.



Les mesures ci-dessus conduisent le physicien allemand à cette conclusion singulière, que la tension de l'eau va en décroissant jusqu'à une certaine limite, quand le liquide demeure exposé à l'air : la valeur 7,53 correspond à une surface fraîche.

Enfin M. Hagen avance que la couche superficielle des liquides a moins de mobilité que l'intérieur; il s'appuie sur ce que, dans un cours d'eau, la vitesse est plus faible à la surface qu'un peu au-dessous, et sur la production des calottes laminaires par l'ascension de bulles gazeuses; selon lui, et contrairement aux idées de Poisson, la couche superficielle est plus dense que le reste, et il attribue la tension à ce que les molécules étant ainsi plus rapprochées, elles s'attirent avec plus d'énergie. Nous reviendrons sur ces idées.

L'année d'après, le même savant a donné à ce mémoire une suite ¹ où il reprend la mesure des tensions. Il détermine d'abord, par le procédé de l'élévation entre deux plans parallèles, la tension de l'eau qui a séjourné pendant plusieurs heures dans un vase ouvert, et la valeur qu'il trouve, rapportée au millimètre ², n'est plus que de 4,69, au lieu de 7,53 qui correspond à une surface fraîche; ainsi se confirme le fait de la diminution progressive de la tension de l'eau.

M. Hagen soumet au même procédé l'alcool absolu et l'huile d'olive; les tensions obtenues ont été respectivement, par millimètre de longueur, 2,32 et 3,42. Il n'a pas remarqué, à l'égard de ces deux liquides, de décroissement dans la tension.

Il décrit ensuite un nouveau procédé : un anneau plat horizontal en bois est suspendu à une balance sensible, et équilibré; on établit le contact entre sa face inférieure et la surface du liquide, puis, au moyen de poids ajoutés très-graduellement de l'autre côté de la balance, on fait monter peu à peu l'anneau, qui soulève de la sorte une certaine quantité de liquide, et l'on s'arrête lorsque la surface de celle-ci aboutit verticalement aux bords extérieur et intérieur de l'anneau. La force avec laquelle le liquide tire alors l'anneau

¹ *Mém. de l'Acad. de Berlin, 1846, et Ann. de M. Poggendorff, 1849, vol. LXXVII, p. 449.*

² Dans ce second mémoire, M. Hagen exprime les tensions en fractions de gramme; mais, je ne sais pourquoi, il prend pour unité de longueur la ligne de Paris; j'ai donc ramené toutes les valeurs au millimètre, en les divisant par 2,256, valeur de la ligne de Paris en millimètres.



de haut en bas, se compose de deux parties, savoir : 1° le poids de la portion du liquide soulevé située directement sous l'anneau, c'est-à-dire celui d'un cylindre annulaire de ce liquide ayant pour base la face inférieure de l'anneau et pour hauteur la distance de celle-ci au niveau; 2° la tension des surfaces courbes qui aboutissent aux deux bords de l'anneau. En soustrayant du poids ajouté de l'autre côté de la balance la première de ces deux quantités, le reste représente donc la tension totale, et, pour avoir la tension par unité de longueur, il suffit de diviser ce reste par la somme des longueurs des deux bords.

Ce procédé, employé à l'égard de l'alcool absolu et de l'huile d'olive, a fourni les valeurs respectives 2,34 et 3,41, qui sont, on le voit, à fort peu près identiques aux précédentes. M. Hagen ajoute alors : « La concordance de ces résultats avec ceux déduits de l'élévation entre des plans parallèles, ou du phénomène capillaire proprement dit, ne laisse rien à désirer, et ainsi se vérifie l'hypothèse que la tension superficielle, qu'on a mesurée directement dans le dernier cas, est la seule cause du phénomène capillaire. »

Ici donc M. Hagen cesse de considérer la tension comme une simple hypothèse, et croit voir dans les résultats ci-dessus une preuve de sa réalité. Cette conclusion me semble un peu hasardée, car en introduisant la tension dans ces dernières expériences, on lui fait évidemment jouer le même rôle qu'entre des plans parallèles, et l'on doit, par conséquent, lui trouver la même valeur.

M. Hagen essaie aussi la détermination de la tension du mercure; le procédé de la dépression dans les tubes cylindriques lui donne, par millimètre de longueur, 36, 26, et celui des gouttes 41, 14. Comme, dans ce dernier procédé, la surface est nécessairement plus fraîche, M. Hagen infère de la différence des deux résultats que, sur le mercure de même que sur l'eau, la tension décroît graduellement.

Des solutions aqueuses d'empois et de gomme arabique à différents degrés de viscosité lui fournissent des tensions très-rapprochées de celle de l'eau.

Présumant, en conséquence de ses idées sur l'origine de la tension, que l'eau de savon devait à une tension plus forte que celle de l'eau pure la propriété de donner une mousse persistante et de se laisser aisément gonfler en bulles, il mesure la tension d'une faible solution de savon, et ne la trouve



que de 3,72. Il s'était donc déjà enquis, avant M. Gladstone, de la cause du facile développement en mousse et en bulles, et il avait cru la voir dans l'énergie de la tension; mais, comme il l'avoue lui-même, il s'était trompé.

Disons ici que toutes les mesures rapportées dans ce second mémoire ont été prises à la température de 18° à 19°.

M. Hagen termine en déduisant de l'ensemble de son travail les deux conséquences suivantes, qu'il présente, du reste, avec réserve, vu le petit nombre des liquides soumis à l'observation :

1° Le degré de fluidité n'a pas d'influence sur la tension;

2° La tension est d'autant plus faible que le liquide mouille mieux les autres corps. En effet, l'alcool mouille mieux que l'huile, car de l'alcool déposé sur une plaque enduite d'huile déplace la couche de ce dernier liquide; l'huile mouille évidemment mieux que l'eau, et celle-ci mieux que le mercure; or la tension va en croissant du premier au dernier de ces liquides.

Le § 30 de ma 7^{me} série contient le résumé d'une portion d'un troisième mémoire ¹ où le même savant encore cherche dans la tension la cause qui limite le diamètre des disques liquides de Savart. Ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe que je viens de citer, cette conception traduite en formule reproduit les deux lois constatées par l'illustre physicien français, et, de plus, M. Hagen en tire une valeur de la tension de l'eau qui s'accorde assez bien avec celle obtenue dans le premier mémoire pour une surface fraîche; on remarquera d'ailleurs que, dans l'expérience des disques liquides, la surface est nécessairement fraîche, puisqu'elle est toujours renouvelée. La valeur dont il s'agit, valeur qui, d'après la nature des données, ne pouvait être qu'approximative, est 7,74. Toutes ces concordances, on le comprend, constituent une preuve ultérieure de l'existence de la tension; ici, en effet, le rôle assigné à cette force est absolument autre que dans les expériences des deux mémoires précédents.

§ 8. — J'ai déjà appelé l'attention (6^{me} série, § 2) sur ce point, que si la couche superficielle d'une masse liquide pleine est dans un état de

¹ *Ueber die Scheiben welche sich beim Zusammenstossen von zwei Wasserstrahlen bilden, und über die Auflösung einzelner Wasserstrahlen in Tropfen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1849, vol. LXXVIII, p. 451).



tension, les lames liquides doivent être assimilées à des membranes tendues, puisque la tension existe à leurs deux faces. On voit, d'après cela, que la tension d'une lame est double de celle de la couche superficielle d'une masse pleine formée du même liquide : en adoptant, par exemple, pour la tension de l'eau la valeur 7,53 milligrammes trouvée par M. Hagen, la tension d'une lame d'eau serait de 15,06 milligrammes.

C'est, on se le rappelle, en partant de l'idée de la tension que j'ai posé, à la fin de ma 6^{me} série, le principe général que, dans tous les assemblages de lames liquides, la somme des aires de ces lames doit être un minimum.

§ 9. — Aujourd'hui l'on possède des démonstrations théoriques de la réalité de la tension, et l'on a plusieurs moyens nouveaux de la constater par l'expérience.

La première de ces démonstrations a été donnée, en 1864, par M. Lamarle, dans la première partie de son beau mémoire *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*¹; elle suppose une masse liquide pleine, entièrement libre, soumise à ses seules attractions moléculaires, et conséquemment de forme sphérique²; M. Lamarle montre non-seulement que la couche superficielle d'une semblable masse est dans un état de tension, mais, en outre, que cette tension est indépendante du rayon de la sphère; enfin il fait remarquer que les mêmes résultats s'étendent sans difficulté à toutes les surfaces liquides d'équilibre, c'est-à-dire que, dans ces surfaces et pour un même liquide, la tension est constante et indépendante des courbures, ainsi que cela avait été établi par M. Hagen dans deux cas particuliers.

Je ne reproduirai pas la démonstration dont il s'agit telle qu'elle est exposée dans le mémoire; je la modifierai un peu, d'après les indications de M. Lamarle lui-même, pour l'appliquer directement aux lames; seulement, sous cette forme, elle n'est plus tout à fait théorique, et revient, au fond, à celle de M. Henry (§ 6), rendue plus précise et plus complète.

Supposons une sphère laminaire, une bulle de savon, par exemple, et

¹ *Mém. de l'Acad.*, tomes XXXV et XXXVI.

² L'exactitude de cette démonstration a été contestée par M. Dupré, et maintenue par M. Lamarle (voir les *Comptes rendus*, t. LXIV, pp. 595, 759 et 902).



coupons-la idéalement par un plan qui la partage en deux hémisphères; imaginons ce plan solidifié, ce qui n'altérera pas l'équilibre, et considérons en particulier l'un des hémisphères. La lame qui constitue celui-ci presse, nous le savons, sur l'air qu'elle emprisonne entre elle et le plan, et ce volume d'air réagit, par son élasticité, avec une force égale; l'hémisphère laminaire et le plan sont donc poussés l'un dans un sens, l'autre dans le sens opposé, d'où résulte une traction de la lame tout le long de la petite bande par laquelle elle adhère au plan; or une traction égale et contraire est évidemment exercée le long de la même bande par l'autre hémisphère; il y a donc, sur toute la longueur de la bande étroite dont il s'agit, traction en deux sens opposés et perpendiculaires à cette longueur; en d'autres termes, il y a tension de la lame. Enfin, comme rien ne détermine la direction de notre plan coupant, il s'ensuit que la même tension existe dans toute l'étendue de la lame, et qu'elle a la même valeur dans toutes les directions tangentielles autour de chaque point.

La tension est considérée ici comme une traction; mais la lame résistant par une force égale et contraire, on peut aussi bien regarder cette dernière force comme constituant la tension. Sous ce point de vue, la tension est une force contractile, une tendance continuelle de la lame à revenir sur elle-même en diminuant d'étendue.

Le mode de démonstration ci-dessus conduit à une expression de la tension en données mesurables. Désignons par p la pression rapportée à l'unité de surface qu'exerce la lame sur l'air emprisonné, et conséquemment aussi la pression de dedans en dehors due à la réaction de cet air. La force totale qui agit ainsi de dedans en dehors sur l'un des hémisphères laminaires et tend à le séparer du plan, est nécessairement égale à celle qui pousse le plan lui-même; elle a donc pour mesure le produit de la surface de celui-ci par la quantité p , c'est-à-dire $\pi r^2 p$, où r est le rayon de la sphère laminaire; je néglige ici la petite différence entre le rayon de la face extérieure de la lame et celui de la face intérieure, à cause de la minceur extrême des lames liquides. Cette expression représente en même temps, d'après ce que j'ai dit plus haut, la tension totale sur la longueur de la bande étroite suivant laquelle la lame est coupée par le plan, et, par conséquent, pour avoir la tension sur



l'unité de longueur, tension que je nommerai t , il suffit de diviser cette même expression par la longueur $2\pi r$ de la bande en question, ce qui donne $t = \frac{r\rho}{2}$. Mais on a vu (5^{me} série, § 24) que si d est le diamètre d'une sphère laminaire, h la hauteur en millimètres à laquelle le liquide dont la lame est formée s'élèverait dans un tube capillaire d'un millimètre de diamètre, et ρ la densité de ce liquide, la pression qu'exerce la lame équivaut, pour une surface d'une étendue quelconque, et, par suite, pour l'unité de surface, au poids d'une colonne d'eau ayant pour base cette surface et, pour hauteur, $\frac{2h\rho}{d} = \frac{h\rho}{r}$. En prenant pour unité de surface le millimètre carré, la quantité $\frac{h\rho}{r}$ exprime donc en milligrammes la pression que nous avons désignée par p ; faisant la substitution dans l'expression de t trouvée plus haut, il vient :

$$t = \frac{h\rho}{2},$$

ce qui donne, en milligrammes, la tension de la lame sur l'unité de longueur.

Cette formule résulte d'ailleurs immédiatement du calcul de M. Hagen relatif aux liquides dans les tubes cylindriques (§ 7), quand on suppose le diamètre du tube égal à 1 millimètre, et quand on considère la surface supérieure de la colonne comme formant un hémisphère concave, ce qui est permis dans le cas d'un si petit diamètre.

§ 10. — Cette même formule ne contenant pas r , on voit que la tension dont il s'agit est indépendante du rayon et conséquemment de la courbure de la lame.

La constance de la valeur de la tension quelle que soit la courbure de la sphère laminaire, est pleinement confirmée par des expériences de ma 6^{me} série. En effet, après avoir essayé de démontrer (6^{me} série, § 8) sans faire intervenir la tension, que trois lames unies par une même arête liquide doivent aboutir à celle-ci sous des angles égaux, j'ai vérifié (*ibid.*, §§ 11 et 15) l'égalité de ces angles pour des combinaisons de lames de liquide glycérique appartenant à des sphères de rayons différents; or, ces trois lames tirant respectivement à elles, en vertu de leurs tensions, l'arête liquide commune, les trois angles en question ne peuvent évidemment être égaux que si les trois tensions sont égales.



Maintenant si l'on imagine que le rayon de la sphère laminaire croisse jusqu'à l'infini, la lame deviendra plane, et il résulte de ce qui précède qu'elle aura encore la même tension. Cependant on n'arrive de cette manière à la tension d'une lame plane qu'en considérant cette lame comme indéfiniment étendue, et en lui assignant ainsi des conditions irréalisables; on pourrait dès lors se demander si une lame plane limitée, par exemple une lame de liquide glycérique formée dans un anneau en fil de fer, lame qui n'exerce aucune pression sur l'air, possède effectivement une tension; or, parmi les combinaisons de lames soumises aux expériences rappelées ci-dessus, il y en avait où deux seulement des trois lames étaient de courbure sphérique, tandis que la troisième était plane, et les trois angles compris entre ces lames à l'arête commune étaient encore égaux; la lame plane limitée tirait donc à elle avec la même force que les deux lames sphériques, et avait conséquemment la même tension.

D'un autre côté, la plupart des systèmes laminaires qu'on réalise à l'intérieur des charpentes polyédriques en fil de fer en retirant celles-ci du liquide glycérique, contiennent, nous le savons, des lames courbes à courbure moyenne nulle combinées avec des lames planes; or j'ai vérifié aussi, au moins approximativement (*ibid.*, § 20), dans tous ces cas, l'égalité des trois angles; ce qui vérifie, par suite, l'égalité entre la tension des lames planes et celle des lames courbes à courbure moyenne nulle. Enfin, dans le mémoire dont j'ai parlé, M. Lamarle parvient à déduire rigoureusement de mon principe du minimum de la somme des aires, les lois que j'avais constatées à l'égard des assemblages de lames, et confirme ainsi ce principe d'une manière générale; or ce même principe ne serait évidemment pas vrai si les tensions respectives des lames qui composent un même système étaient différentes. L'expérience est donc d'accord avec la théorie, qui veut que, pour un même liquide, la tension soit constante et indépendante des courbures.

Il est inutile de faire remarquer que la confirmation du principe dont il s'agit concourt encore à établir l'existence de la tension.

§ 11. — Je ne dois pas négliger de mentionner un second point de vue sous lequel M. Lamarle, toujours dans le même mémoire, envisage la tension; le voici : Suivant les idées admises en général aujourd'hui, la densité de la



couche superficielle est moindre que celle de l'intérieur du liquide, et conséquemment, dans cette couche, l'écartement des molécules est plus grand; si donc, par un changement de forme sans changement de volume, l'étendue de la couche superficielle vient à décroître et qu'ainsi une partie des molécules de cette couche se rendent dans l'intérieur, ces molécules se rapprochent davantage; or l'attraction, par sa nature même, fait incessamment effort pour rapprocher les molécules; elle doit donc réduire la couche superficielle au minimum d'étendue, puisque, par là, elle exerce sa tendance d'une manière active.

Ainsi, d'après M. Lamarle, la tension est due à ce que, par une diminution de la couche superficielle, la tendance constante de l'attraction au rapprochement des molécules trouve à se satisfaire autant que possible.

§ 12. — M. Dupré a publié par parties, de 1865 à 1868, un travail extrêmement remarquable ¹, où il traite par des méthodes nouvelles une suite de questions concernant les actions moléculaires, et où il donne aussi une démonstration de l'existence réelle de la tension :

Il établit d'abord que, pour séparer en deux une masse liquide soit par arrachement perpendiculaire, soit par glissement, il faut vaincre une résistance, et que, réciproquement, lorsque deux surfaces liquides peuvent se réunir, il y a une force résidant dans leurs couches superficielles qui provoque la réunion; il la nomme *force de réunion*.

Partant de ce principe, il démontre qu'une masse liquide ne peut changer de forme avec diminution dans l'étendue de sa surface, sans qu'un travail moléculaire proportionnel à cette diminution soit produit par la force de réunion ². Or cette force toujours présente doit tendre sans cesse à opérer le travail dont il s'agit, et, par suite, à rendre la surface minima; la couche superficielle des liquides possède donc une force contractile, ou une tension.

M. Dupré indique plusieurs expériences fort simples au moyen desquelles on rend la tension manifeste soit dans la surface libre d'une masse

¹ Cinquième, sixième et septième mémoire *Sur la théorie mécanique de la chaleur* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 4^e série, tomes VI, VII, IX, XI et XIV).

² Dans le septième mémoire, M. Dupré décrit un instrument au moyen duquel il a vérifié expérimentalement cette proportionnalité entre le travail produit et la diminution de surface.



liquide pleine, soit dans une lame liquide. Dans l'une de ces expériences, par exemple, un poids est soulevé par la tension d'une lame plane : qu'on se figure une plaque métallique rectangulaire verticale, dont le bord horizontal inférieur présente, en son milieu, une échancrure également rectangulaire. Cette plaque étant préalablement mouillée d'eau de savon, si l'on applique contre elle devant l'échancrure, et à la hauteur du bord supérieur de celle-ci, une bande solide étroite et très-légère, un peu plus longue que la largeur de l'échancrure et mouillée aussi d'eau de savon, puis qu'on fasse glisser cette petite bande de haut en bas, une lame liquide se forme nécessairement dans la portion de l'échancrure ainsi balayée; or, dès qu'on abandonne la petite bande à elle-même, elle remonte brusquement malgré son poids.

M. Dupré attribue la tension à ce que, dans l'épaisseur de la couche superficielle, les actions moléculaires seraient, en moyenne, plus intenses suivant le sens tangentiel que suivant le sens normal; c'est, selon lui, l'excès des premières sur les secondes qui constitue la tension.

Désignant celle-ci par F , il trouve, d'une manière générale, pour la pression capillaire normale provenant des courbures en un point quelconque d'une surface liquide, l'expression $F\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$; le coefficient constant de l'expression de Laplace est donc bien la tension dans tous les cas, et, pour un même liquide, celle-ci est toujours uniforme, c'est-à-dire complètement indépendante du point considéré de la surface, ainsi que des courbures.

J'ai présenté, dans le § 9, l'expression $t = \frac{h\rho}{2}$ de la tension d'une lame liquide comme découlant de la démonstration qui la précède, et j'ai dit (*ibid.*) qu'elle résultait d'ailleurs immédiatement d'un calcul de M. Hagen; j'ajoute maintenant que cette même expression se déduit aussi d'une formule à laquelle arrive M. Dupré en traitant par ses méthodes le phénomène de l'élévation et de la dépression dans les tubes capillaires.

Ce dernier savant fait remarquer que la tension des lames liquides est indépendante de leur épaisseur, du moins tant que cette épaisseur n'est pas inférieure à une certaine limite. En effet, la tension n'existant que dans les deux couches superficielles, couches excessivement minces, nous le savons, il est clair que le liquide compris entre elles est sans influence, et qu'ainsi lorsque, par une atténuation de la lame, il diminue en quantité, la tension doit demeurer invariable.



Cette déduction se trouve vérifiée par les expériences de ma 5^{me} série relatives à la pression exercée par une bulle creuse sur l'air qu'elle emprisonne. On a vu, en effet (§ 9) que, dans ce cas, la tension de la lame est liée à la pression sur l'air intérieur par la relation $t = \frac{rp}{2}$, d'où il suit que, pour une bulle d'un rayon r donné, si, malgré l'amincissement de la lame, la pression p ne change pas, il en sera de même de la tension t ; or j'ai constaté, on se le rappelle (5^{me} série, § 32), cette constance de la pression à l'égard d'une lame sphérique qui s'amincissait spontanément et n'a éclaté que lorsque sa couleur, sous l'incidence normale, avait atteint le passage du jaune au blanc du premier ordre.

Mais, ainsi que je l'ai fait observer (*ibid.*, § 30), l'invariabilité de la pression suppose à la lame une épaisseur suffisante pour qu'il y ait du liquide interposé entre les deux couches superficielles, c'est-à-dire une épaisseur supérieure au double du rayon de l'attraction moléculaire; car si la lame s'amincit assez pour que les deux couches superficielles arrivent au contact, puis se pénètrent mutuellement, il est naturel d'admettre que la pression, et conséquemment la tension, diminue par suite de la diminution dans le nombre des molécules agissantes; on est donc conduit à cette conséquence que la limite au-dessous de laquelle la tension commence à décroître, est égale au double du rayon de l'attraction moléculaire.

Dans son cinquième mémoire, où il fait abstraction de la différence de constitution entre la couche superficielle et le reste de la masse, M. Dupré avait trouvé que, pour un même liquide à diverses températures, la tension est proportionnelle au carré de la densité; mais, dans son sixième mémoire, où il tient compte de la différence dont il s'agit, il reconnaît que cette proportionnalité n'est pas exacte.

L'expression $t = \frac{h\rho}{4}$ de la tension d'une seule couche superficielle montre, du reste, que la tension varie en sens inverse de la température, puisqu'il en est ainsi à la fois de h et de ρ ; mais comme, pour la plupart des liquides, l'influence de la température sur ces deux quantités n'est pas très-considérable, il s'ensuit que la tension change peu par les fluctuations de la température ordinaire: pour l'eau, par exemple, d'après un tableau que donne M. Dupré, de 10° à 32°, la tension ne décroît que de 7,48 à 7,15. On a vu que ce peu de variabilité avait déjà été observé par M. Hagen.



M. Dupré fait remarquer que, par suite de l'influence de la température sur la tension, si l'on chauffe une partie seulement d'une surface liquide, l'équilibre doit être altéré, et il ajoute : « Dans le cas des lames, le liquide formant les deux couches superficielles de la partie chauffée est entraîné vers les parties froides par des différences de forces contractiles..... La lame s'amincit et finit par crever. » Il ne décrit aucune expérience, mais, comme nous le verrons bientôt, on peut en faire à ce sujet de fort curieuses.

Quand une lame liquide éclate, cette lame, ou chacune de ses parties si elle se divise, revient rapidement sur elle-même, pour se transformer en une petite masse; c'est ce que montrent les expériences de la fin du § 52 de ma 7^{me} série sur les lames d'huile formées au sein du liquide alcoolique; or M. Dupré, rapportant ce phénomène à la tension, le traite par ses méthodes, et arrive, pour exprimer la vitesse v de ce retrait, à la formule :

$$v = \sqrt{\frac{4gF}{e\Delta}},$$

dans laquelle F est la tension d'une seule couche superficielle, g la gravité, e l'épaisseur de la lame et Δ la densité du liquide; d'où l'on voit que cette vitesse est uniforme, qu'elle est en raison directe de la racine carrée de la tension et en raison inverse des racines carrées de l'épaisseur et de la densité. M. Dupré trouve, de cette manière, que la vitesse de retrait d'une lame de liquide glycérique de $\frac{1}{9000}$ de millimètre d'épaisseur serait d'environ 32 mètres par seconde.

On vérifierait sans doute, par des expériences convenablement instituées sur mes lames d'huile immergées, l'uniformité de la vitesse et la loi concernant l'épaisseur. Quant à la valeur absolue de la vitesse, celle que lui assigne la formule ci-dessus est probablement assez exacte pour la plupart des liquides; mais, ainsi que nous le verrons plus loin, il y a des liquides à l'égard desquels il en est autrement, parce que le phénomène est influencé par un élément dont M. Dupré ne pouvait tenir compte.

M. Dupré cherche aussi les lois d'un autre phénomène qu'on peut également rapporter à la tension, savoir la diminution progressive du diamètre



d'une bulle quand on laisse ouvert le tube qui a servi à la gonfler ; il parvient à ce résultat que, pour deux bulles formées du même liquide, toutes choses égales d'ailleurs, les carrés des temps pendant lesquelles elles se vident sont entre eux comme les 7^{mes} puissances de leurs diamètres. Il vérifie cette loi par une suite d'expériences sur des bulles de liquide glycérique.

Les mémoires que nous résumons renferment encore, à l'égard de la tension, d'autres résultats généraux qui auraient un moindre intérêt ici, par exemple à certaines relations avec des faits du domaine de la chimie.

Enfin M. Dupré décrit plusieurs procédés au moyen desquels il a mesuré la tension d'un grand nombre de liquides.

Le premier consiste dans l'emploi d'un aréomètre de Nicholson modifié de la manière suivante : le plateau supérieur est remplacé par une cuvette cylindrique dans laquelle on verse le liquide à essayer ; deux fils de laiton partant horizontalement des extrémités d'un diamètre de cette cuvette, se replient ensuite pour descendre à l'extérieur du vase contenant l'eau, et se réunir au-dessous du fond par l'intermédiaire d'un plateau destiné à recevoir le lest et les poids. Après avoir établi l'affleurement, on descend verticalement dans la cuvette une lame solide mince, susceptible d'être mouillée par le liquide, et dont le bord inférieur est bien horizontal ; dès que ce bord touche le liquide, celui-ci s'élève par l'action capillaire le long des deux faces de la lame, et sa tension soulève l'aréomètre d'une certaine quantité ; on ajoute alors des poids pour ramener l'affleurement, et de ces poids on déduit la tension en divisant leur valeur par le périmètre du bord de la lame. J'omets ici quelques détails de moindre importance qu'on trouvera dans le mémoire, ainsi qu'une petite correction à faire subir au résultat quand on veut une grande exactitude.

Le second procédé est, à quelques différences près dans l'appareil, celui dont j'ai fait usage (5^{me} série, §§ 26 à 28) pour l'évaluation de la pression exercée par une bulle creuse sur l'air emprisonné : il se réduit, on s'en souvient, à gonfler une bulle à l'extrémité d'un petit ajutage qui communique avec un manomètre indiquant la pression, puis à mesurer le diamètre de la bulle¹. La tension est donnée alors par la relation, rappelée plus

¹ Ainsi que je l'ai dit dans ma 5^{me} série, l'idée première de ce procédé, en ce qui concerne la relation entre la pression et le diamètre, est due à M. Henry ; quant à M. Dupré,



haut, $t = \frac{rp}{2} = \frac{pd}{4}$. D'après cela, pour la tension de la surface d'une masse pleine formée du même liquide, on a $t = \frac{pd}{8}$, expression que trouve également M. Dupré. Ce physicien a disposé son appareil de manière à pouvoir opérer sur de très-petites bulles (2^{mm},5 à 3^{mm},5 de diamètre), ce qui lui a permis de soumettre à l'expérience des liquides tels que l'eau dont les bulles un peu grosses ne se formeraient pas.

A l'aide de ce même appareil, M. Dupré a vérifié, comme je l'avais fait (3^{me} série, § 28), la constance du produit pd de la pression par le diamètre de la bulle.

Le troisième procédé n'est qu'une modification du précédent : au moyen du même appareil encore, une très-petite bulle d'air est gonflée au sein du liquide à essayer, mais aussi près que possible de la surface de celui-ci; dans ce cas, on n'a à considérer que la tension d'une seule couche superficielle; seulement il faut tenir compte de la petite pression hydrostatique due au liquide ambiant.

Un quatrième procédé est basé sur ce que la hauteur d'un jet de liquide lancé de bas en haut par un orifice de très-petit diamètre, doit être notablement diminuée par la tension de la surface de ce jet. M. Dupré parvient à lier, au moyen d'une formule, cette tension aux autres éléments du phénomène. La formule dont il s'agit contient des termes qui dépendent de quantités dont l'évaluation est impossible, telles que le frottement contre le bord de l'orifice; mais M. Dupré, à l'aide d'un artifice ingénieux, écarte la difficulté, et les résultats de l'expérience s'accordent d'une manière très-satisfaisante avec ceux des autres procédés. Ces résultats viennent donc appuyer l'idée avancée par M. Hagen (§ 7) d'une action retardatrice de la tension sur le développement des nappes liquides.

M. Dupré tire aussi un procédé de l'écoulement goutte à goutte, et sa méthode évite l'inconvénient signalé par M. Hagen (*ibid.*).

Enfin, dans le cas d'une goutte liquide déposée sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas, il obtient une relation entre la tension, le poids de la goutte, la densité du liquide et le diamètre du cercle de contact avec le plan;

lorsqu'il a rédigé son cinquième mémoire, il ne connaissait pas la partie de mes recherches rappelée ci-dessus (voir le *Mémoire*, note du § 196).



d'où un dernier procédé, qui, du reste, n'est applicable qu'au mercure et aux métaux fondus.

Le cinquième mémoire donne, dans un tableau, les tensions de dix-huit corps, la plupart liquides à la température ordinaire, d'autres liquéfiés par la chaleur.

§ 13. — Les expériences de M. Dupré ont conduit M. Van der Mensbrugghe¹ à imaginer trois nouveaux procédés pour constater la tension des lames liquides, procédés dont deux permettent, en outre, d'évaluer cette tension. Voici le premier :

Dans un contour plan et horizontal en fil de fer, on réalise une lame de liquide glycérique; on noue ensemble les deux bouts d'un fil de soie très-fin de longueur convenable, puis, après avoir mouillé ce fil du même liquide, on le dépose avec précaution sur la lame, où il forme un contour irrégulier. Cela fait, on crève la portion de la lame comprise à l'intérieur de ce contour; à l'instant même le fil de soie se tend et prend une figure exactement circulaire. C'est que la portion restante de la lame se contracte en vertu de sa tension, de manière à occuper la moindre étendue, ce qui exige que l'ouverture limitée par le fil devienne aussi grande que possible, et conséquemment circulaire.

M. Van der Mensbrugghe se demande quelle disposition le fil doit adopter si l'on effectue la même expérience sur une surface laminaire courbe, en choisissant, bien entendu, une surface à courbure moyenne nulle. Il soumet la question au calcul, et arrive aux lois suivantes :

- 1° Le fil est également tendu dans toute sa longueur;
- 2° La courbe représentée par le fil a partout le même rayon de courbure;
- 3° Le rapport entre la tension du fil et le rayon de courbure est indépendant de la forme de la surface et de la longueur du fil, et est égal à la tension de la lame.

Le second procédé est une modification du premier. Le contour solide qui contient la lame est rectangulaire et vertical; le fil de soie, au lieu de constituer un contour fermé, est attaché par l'une de ses extrémités en un point du côté horizontal inférieur du rectangle solide, il quitte la lame en un

¹ Sur la tension des lames liquides (BULLE. DE L'ACAD., 1866, 2^{me} série, tome XXII, p. 508).



autre point de ce même côté, et son extrémité libre soutient un poids léger. Après la rupture de la portion de lame ainsi interceptée, le fil se tend, et prend, si le poids suspendu n'est pas trop fort, la forme d'une demi-circonférence. A la vérité, l'équilibre est instable, mais il se maintient par le petit frottement du fil contre le côté du rectangle. Dans ces conditions, qu'on réalise au moyen de certaines précautions, le poids suspendu donne la tension du fil, et le rayon de la demi-circonférence dessinée par celui-ci se mesure directement au compas; pour avoir la tension de la lame liquide, il suffit donc, d'après la troisième loi ci-dessus, de diviser la première quantité par la seconde.

Dans le troisième procédé, la lame est une portion de caténoïde, attachée par son bord supérieur à un anneau solide horizontal et fixe, et, par son bord inférieur, à un anneau solide plus petit, également horizontal, qu'elle tient suspendu. Ce dernier anneau soutient lui-même un plateau très-léger, sur lequel on verse doucement du sable; le système solide suspendu descend au fur et à mesure, en étendant la lame, et l'on s'arrête lorsque l'élément de la chaînette méridienne qui aboutit à l'anneau mobile est devenu vertical ou à très-peu près; on le reconnaît à ce que l'équilibre devient alors instable. Ce point atteint, on a la tension de la lame en divisant par la circonférence de l'anneau mobile le poids total du système suspendu.

M. Lamarle, dans son rapport ¹ sur la note que je viens d'analyser, signale une quatrième loi relative à la forme que prend le fil après la rupture de la portion de lame interceptée; cette loi consiste en ce que la direction du fil doit être partout celle suivant laquelle la courbure de la surface est nulle. Or M. Lamarle fait observer que la coïncidence de cette même loi avec les trois autres est généralement impossible sur les surfaces à courbure moyenne nulle; il le montre en particulier pour le caténoïde, et il en conclut que, dans les cas de cette nature, la forme de la lame doit nécessairement être altérée; il ne connaît, pour le moment, que deux surfaces, savoir le plan et l'hélicoïde gauche à plan directeur, susceptibles de satisfaire à l'ensemble des quatre lois.

M. Van der Mensbrugge a donc repris ses expériences ²; il a vérifié

¹ *Bullet. de l'Acad.*, 1866, 2^{me} série, t. XXII, p. 272.

² *Sur la tension des lames liquides*, 2^{me} note (BULL. DE L'ACAD., 1867, 2^{me} série, t. XXIII, p. 448).



la conclusion de M. Lamarle sur la non-déformation de l'hélicoïde gauche, et il a constaté, par un procédé ingénieux, la déformation du caténoïde; il trouve, du reste, que cette déformation n'est bien notable que dans le voisinage du fil. Ces faits remarquables montrent une fois de plus l'accord constant de l'expérience avec la théorie.

Cette deuxième note se termine par la description d'une expérience curieuse : une lame de liquide glycérique est réalisée dans un anneau vertical en fil de fer; on dépose à l'intérieur de cet anneau, sur son point le plus bas, une sphère creuse en verre très-légère, de deux centimètres environ de diamètre, préalablement mouillée du même liquide; celle-ci se place aussitôt d'elle-même de manière à être coupée en deux parties égales par le plan de la lame; elle demeure ainsi dans un état d'équilibre stable, et si l'on fait tourner l'anneau sur lui-même, elle roule à l'intérieur sans le quitter. M. Van der Mensbrugghe explique le phénomène par l'effort que fait constamment la lame pour occuper une étendue minima; cette condition exige, en effet, que la lame aboutisse à la sphère de verre suivant un grand cercle de celle-ci.

§ 13^{bis}. — Enfin M. Quincke a présenté récemment à l'Académie de Berlin une note¹ dans laquelle il étend aux surfaces solides le principe de la tension. A l'aide de considérations ingénieuses, il détermine cette tension, par millimètre de longueur, pour un certain nombre de métaux, et trouve ainsi des valeurs énormes; pour le fer en fils, par exemple, la tension équivaldrait à près de 6 kilogrammes.

§ 14. — Les recherches successives dont l'analyse est exposée dans ce qui précède, fournissent donc ces résultats généraux :

1° La tension existe bien réellement dans toute surface liquide, et, par suite, dans toute lame liquide;

2° Cette tension est indépendante des courbures de la surface ou de la lame, elle est la même dans toute l'étendue d'une même surface ou d'une même lame, et la même aussi, en chaque point, dans toutes les directions tangentielles autour de ce point;

¹ *Ueber die Capillaritäts-Constanten fester Körper* (COMPTES RENDUS DE L'ACAD. DE BERLIN, 1868, p. 152).



3° Elle est indépendante de l'épaisseur des lames, du moins tant que cette épaisseur n'est pas inférieure au double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire ¹;

4° Elle varie avec la nature des liquides;

5° Pour un même liquide, elle varie en sens inverse de la température; mais, aux températures ordinaires, elle éprouve peu de changements;

6° On possède un grand nombre de procédés pour la mesure expérimentale de la tension, et chacun de ces procédés conduit à une expression de la tension en fonction des données de l'expérience. Le plus commode, en même temps que le plus précis, est sans contredit le premier de M. Dupré, c'est-à-dire celui de l'aréomètre;

7° Quant à la cause de la tension, cinq hypothèses ont été proposées : en premier lieu, celle de Segner, que je n'ai pas bien comprise, et suivant laquelle la tension proviendrait de l'attraction mutuelle des molécules de la couche superficielle dans le sens tangentiel et de la courbure de cette couche; en second lieu, celle du Dr Hough, qui essaie d'expliquer la tension en remarquant que les molécules de la surface sont abandonnées à leurs attractions mutuelles par l'absence de molécules de même espèce en dehors de cette surface; en troisième lieu, celle de M. Hagen, qui attribue la tension à une densité plus grande de la couche superficielle; en quatrième lieu, celle de M. Lamarle, qui fait dépendre la tension de ce que, par une contraction de la couche superficielle, une portion des molécules de cette couche passant dans l'intérieur et diminuant ainsi d'écartement, la tendance générale de l'attraction au rapprochement des molécules se satisfait en partie; enfin celle de M. Dupré, qui considère la tension comme due à un excès des actions tangentielles sur les actions normales dans la couche superficielle.

§ 15. — Selon moi, la vraie cause de la tension, si elle n'est pas énoncée d'une manière tout à fait explicite, est du moins suffisamment indiquée par MM. Henry et Lamarle dans leurs démonstrations de l'existence de la tension par les sphères laminaires (§§ 6 et 9). Il est incontestable, depuis le travail de Laplace, que, si l'on considère seulement l'effet des courbures, une couche

¹ Je signalerai, à ce propos, une faute grave à la page 40, ligne 4, de la 5^{me} série : au lieu de *inférieures ou doubles*, il faut lire : *inférieures au double*.



superficielle convexe exerce sur le liquide une pression normale en chaque point, et une couche superficielle concave exerce, au contraire, une traction normale aussi en chaque point; mais, dans l'état d'équilibre, cette pression ou cette traction lutte contre une résistance provenant en général d'actions hydrostatiques; or il est visible qu'une couche superficielle courbe ainsi pressant ou tirant et qui rencontre une résistance opposée, doit être tendue, comme l'est une vessie gonflée qui presse sur l'air intérieur, ou, en d'autres termes, que les molécules de cette même couche doivent être dans un état d'écartement forcé suivant le sens tangentiel. Si l'on veut, c'est la réciproque de la théorie de Young : celui-ci suppose la tension, et fait voir que les tractions tangentielles qu'elle détermine autour d'un même point donnent pour résultante une pression normale si la surface est convexe, et une traction normale si la surface est concave; or, comme l'a montré Laplace, cette pression ou cette traction existe par le seul effet des attractions moléculaires; on peut donc la décomposer, autour de chaque point, en tractions tangentielles, lesquelles constituent une tension.

La tension est donc un résultat nécessaire des courbures, et dès lors on doit se demander comment elle subsiste dans les surfaces liquides planes ou à courbure moyenne nulle; mais il faut remarquer que ces surfaces sont toujours raccordées à d'autres par des portions à fortes courbures transversales : c'est, par exemple, ce qui a lieu, nous le savons, aux arêtes de jonction des lames qui composent un système; or la tension qui existe dans ces portions de raccordement doit, en vertu de la continuité, se propager à toute l'étendue des surfaces qu'elles bordent. Cette explication m'a été suggérée par M. Lamarle.

§ 16. — J'ai dit (§ 12) que je décrirais des expériences curieuses relatives à l'action de la chaleur sur les lames liquides; voici ces expériences, dont la première est due à mon fils :

Une bulle de liquide glycérique d'un décimètre de diamètre étant déposée sur un anneau, on attend qu'elle ait pris, au moins à son sommet (7^{me} série, § 11), une teinte autre que le rouge ou le vert des derniers ordres; alors il suffit d'approcher avec précaution le bout du doigt aussi près que possible de ce sommet, pour voir la teinte de ce même sommet se modifier sur un espace de trois à quatre centimètres de diamètre, de manière à accuser



un amincissement : si, par exemple, le sommet est jaune, il passe au vert; quand le doigt est assez chaud, il y a quelquefois production de deux teintes successives; enfin dès qu'on enlève le doigt, la teinte originale reparaît.

En second lieu, on développe, au moyen du liquide glycérique, le système laminaire de la charpente cubique en fil de fer, système qui se compose, nous le savons, de douze lames partant respectivement des douze arêtes solides et aboutissant toutes à une lamelle centrale quadrangulaire; on introduit ensuite l'extrémité fortement chauffée d'une baguette de verre dans l'espèce de pyramide creuse formée par les lames qui partent des quatre arêtes de l'une des faces du cube, et l'on choisit l'une des pyramides dont le fond est une arête de la lamelle; aussitôt on voit cette lamelle diminuer, d'étendue. C'est que, par suite de la position de la baguette, la lamelle s'échauffe moins qu'une partie des lames environnantes, et conserve ainsi un excès relatif de tension. On ne peut attribuer l'effet à la dilatation des lames les plus chauffées, car, si toutes les tensions demeureraient égales, la forme du système ne pourrait évidemment se modifier; les lames qui tendraient à se dilater enverraient seulement une portion de leur liquide dans la lamelle centrale.

J'ajouterai ici une expérience étrangère à l'action de la chaleur. Je m'étais dit que si l'on pouvait réaliser un système dont une partie des lames fussent formées d'un liquide et l'autre d'un autre liquide à tension différente, le système ne pourrait plus satisfaire à mes lois quant à l'égalité des angles entre les lames et entre les arêtes liquides. Une telle réalisation est sans doute impossible d'une manière complète, mais on peut en approcher par le moyen suivant : on produit encore le système de la charpente cubique, et on le pose de manière que la lamelle centrale soit horizontale. Cela fait, si l'on introduit au milieu de cette lamelle l'extrémité d'un petit pinceau imbibé de liquide glycérique, la lamelle n'éprouve aucun changement; mais si le pinceau est imprégné d'un liquide à tension plus forte, on voit la lamelle se contracter très-notablement. J'ai obtenu le meilleur résultat avec une solution d'albumine préparée simplement en battant un blanc d'œuf, puis laissant la neige se convertir partiellement en liquide : la lamelle qui, dans ma charpente, a environ 13^{mm} de hauteur et de largeur, se resserre alors jusqu'à



n'avoir plus que 8^{mm}; quand on enlève le pinceau, elle reprend rapidement 9^{mm}, puis semble rester en cet état pendant quelques secondes, après quoi elle revient lentement à ses dimensions originaires. Dans ces expériences, le liquide du pinceau s'étend sur les deux faces de la lamelle, de sorte que celles-ci ont alors la tension qui lui appartient, et qui ne peut plus être équilibrée sans modification du système par les tensions des autres lames. Un liquide de moindre tension que le liquide glycérique doit déterminer, au contraire, un agrandissement de la lamelle, mais je n'ai pas fait cet essai. On verra, par la suite de ce mémoire, que la solution d'albumine a effectivement une tension de beaucoup supérieure à celle du liquide glycérique.

§ 17. — Appliquons maintenant à l'objet principal de la série actuelle, c'est-à-dire au développement et à la persistance des lames, les connaissances que nous venons d'acquérir sur la tension.

Et d'abord, tandis que la cohésion s'oppose à la rupture des lames, la tension constitue, au contraire, une force qui agit sans cesse pour provoquer cette rupture. Mais la tension est nécessairement inférieure à la cohésion des couches superficielles, sans quoi il est évident que la réalisation des lames serait tout à fait impossible.

En second lieu, puisque la tension est indépendante de l'épaisseur, il s'en suit qu'une lame n'a, par elle-même, pas plus de tendance à se rompre lorsqu'elle est mince que lorsqu'elle est épaisse.

Cette déduction semble, au premier aperçu, s'accorder mal avec l'observation; en effet, on voit ordinairement les lames diminuer beaucoup d'épaisseur avant de crever: quand on gonfle une bulle de savon, elle atteint souvent de grandes dimensions, et n'éclate conséquemment que lorsque la lame est devenue très-mince; si l'on dépose sur la surface de l'eau de savon une bulle de ce liquide, bulle qui se transforme aussitôt en calotte sphérique, la teinte du sommet de celle-ci peut aller, on le sait, jusqu'au noir intense, ce qui correspond à une épaisseur d'environ 0,^{mm}00001, etc.

Cependant examinons la chose de plus près. Les bulles de savon et les calottes du même liquide éclatent fréquemment aussi avant que les lames qui les constituent se soient beaucoup atténuées; quand une grosse bulle formée d'un bon liquide glycérique est déposée sur un anneau, la lame va d'abord en



s'amincissant, puis reprend (7^{me} série, § 14) une épaisseur croissante, et c'est seulement lorsque celle-ci approche de nouveau de sa valeur originaire, que la bulle se brise; on peut réaliser des lames d'eau pure de différentes manières: par exemple en calottes sphériques à la surface du liquide par l'ascension de bulles d'air, sous la forme plane en travers d'un flacon, etc.; or, sauf de rares exceptions, ces lames d'eau demeurent parfaitement incolores jusqu'à leur disparition, d'où il suit qu'elles se rompent lorsqu'elles ont encore, comme lames, une épaisseur considérable. Nous verrons d'ailleurs que beaucoup d'autres liquides sont dans le même cas.

Si donc les lames paraissent plus disposées à éclater lorsqu'elles sont plus tenues, c'est qu'alors probablement elles résistent moins à des causes extérieures telles que de petits ébranlements, etc.

§ 18. — Comme j'aurai à comparer les lames d'un grand nombre de liquides, je vais décrire les procédés que j'ai employés pour leur production et leur observation.

Les lames formées d'un même liquide et dans les mêmes circonstances persistent, en général, d'autant plus qu'elles ont moins d'étendue; or, pour la très-grande majorité des liquides, les lames de dimensions un peu considérables éclatent presque à l'instant de leur développement; il fallait donc se borner à de petites lames. J'ai choisi les calottes produites à la surface des liquides par l'ascension de bulles d'air, et l'on n'a porté son attention que sur celles dont la base avait 10^{mm} à 12^{mm} de diamètre. Voici le procédé qui m'a le mieux réussi :

On pose au fond d'un bocal en verre un petit vase en porcelaine ou en verre, dont le bord a environ quatre centimètres de diamètre, on le remplit, jusqu'un peu au-dessus de ce bord, du liquide à essayer, puis on y introduit l'extrémité inférieure d'un tube de verre façonné comme je vais le dire: celui qui a servi à mes expériences a 5^{mm} de diamètre intérieur; son extrémité inférieure, repliée à angle droit sur une très-petite longueur, va en se rétrécissant, et son orifice n'a que 2^{mm},5; une portion courte en caoutchouc relie l'autre extrémité à un second tube de verre qui peut ainsi prendre toutes les directions et auquel on applique la bouche. Cette disposition permet à l'expérimentateur de se placer commodément: il tient la portion en caout-



chouc appuyée sur le bord du goulot du bocal, et il donne au tube de verre extérieur une direction obliquement descendante; ce dernier tube est d'ailleurs replié, vers son extrémité libre, sous un angle obtus, afin d'aboutir horizontalement à la bouche; là il est fermé par un tampon de papier à filtre qui serre assez pour ne laisser entrer l'air qu'en petite quantité et rendre l'insufflation aussi modérée qu'on le veut; ajoutons que la profondeur la plus convenable de l'orifice au-dessous de la surface du liquide, dépend de la nature de celui-ci; l'expérimentateur trouve aisément de lui-même ces petites modifications, et il acquiert bientôt l'habitude de produire à peu près à volonté des calottes du diamètre requis.

Quand un liquide fournit des calottes d'une persistance suffisante, il faut, dès que l'une d'elles est formée, soulever doucement le tube hors du liquide, afin qu'elle n'aille pas s'y attacher; comme elle ne peut d'ailleurs aller se heurter contre le bord du petit vase à cause de la légère convexité qu'y présente le liquide, elle reste vers le milieu de la surface de celui-ci, et conséquemment dans les conditions les plus favorables; en effet elle est alors entièrement libre, et la paroi du bocal la protège contre les petites agitations de l'air ambiant, et contre l'haleine de l'expérimentateur quand celui-ci observe de près.

Enfin la plupart des liquides exigent d'autres précautions encore, si l'on veut soustraire leurs calottes à toute influence étrangère. L'une de ces influences est l'évaporation, qui enlève de la matière aux lames des liquides plus ou moins volatils. Pour l'écarter, on verse dans le bocal une petite couche du liquide à essayer, ou simplement d'eau si le liquide à essayer ne fournit que de la vapeur d'eau; puis on applique contre la paroi intérieure, depuis le fond jusqu'au haut, à droite et à gauche de la direction par où doit passer la lumière, de larges bandes de papier à filtre imprégnées du même liquide, ou bien, si ce liquide est caustique, on le promène sur toute la paroi intérieure pour qu'elle en soit mouillée; on descend alors le petit vase vide au fond du bocal, et l'on ferme celui-ci avec une plaque de caoutchouc fortement serrée au goulot et percée de deux trous; par l'un de ces trous passe, à frottement, le tube servant à l'insufflation; par l'autre on introduit le col d'un petit entonnoir, col qui doit être assez long pour atteindre à peu



près l'orifice du petit vase, et l'on ferme, par l'extérieur, cet entonnoir avec un petit bouchon de liège. Cela fait, on abandonne l'appareil pendant un temps qu'on juge suffisant pour que l'atmosphère intérieure soit saturée de vapeur. Après ce temps, qui, dans mes expériences, était au moins de deux heures, on débouche l'entonnoir, et, par son canal, on remplit le petit vase, puis on replace le bouchon, et l'on commence immédiatement les essais.

Avec les liquides très-volatils, tels que l'alcool, l'éther sulfurique, etc., ces précautions mêmes sont insuffisantes, à cause, sans doute, de la difficulté de saturer l'atmosphère du bocal. Dans ce cas, on produit les calottes en secouant simplement le liquide dans un flacon abandonné préalablement pendant plusieurs heures après avoir été fortement agité. Mais si ce dernier procédé permet d'opérer dans une atmosphère aussi saturée que possible, il présente des inconvénients qui doivent le faire rejeter toutes les fois qu'on le peut : le liquide est en mouvement lors de l'apparition des calottes, ce qui rend l'observation difficile, et, si les calottes n'ont pas une très-courte persistance, elles vont souvent s'attacher à la paroi, où elles se déforment plus ou moins.

Certains liquides non volatils, tels que la glycérine, l'acide sulfurique, etc., absorbent l'humidité de l'air, ce qui constitue une autre influence étrangère. Pour s'en garantir, on introduit au fond du bocal une substance qui elle-même absorbe l'humidité, telle que du chlorure de calcium ou de l'acide sulfurique, tout le reste étant disposé comme précédemment. Après un temps regardé comme suffisant pour que l'atmosphère du bocal soit desséchée, on remplit le petit vase, et l'on opère aussitôt.

§ 19. — Mes expériences, effectuées avec toutes les précautions que je viens de décrire, m'ont conduit à partager les liquides, au point de vue de leurs lames, en trois catégories principales.

Les liquides qui composent la première, présentent les caractères suivants : fortement agités dans un flacon, ils ne produisent jamais de mousse très-abondante, plusieurs même n'en donnent pas du tout ; ils ne se laissent point gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe, ou si l'on obtient quelquefois des bulles, elles dépassent à peine l'orifice en diamètre ; leurs calottes n'ont qu'une durée assez courte, durée très-variable pour chaque liquide, et très-différente, quant à son maximum, d'un liquide à un autre, mais ne dépassant



jamais un petit nombre de minutes; pour plusieurs de ces liquides, toutes les calottes demeurent incolores jusqu'à leur rupture; pour d'autres, la plupart restent également blanches, mais un nombre relativement petit montrent, après un intervalle plus ou moins long, un faible commencement de coloration. Celui-ci consiste ordinairement dans l'apparition, au sommet de la calotte, d'un système exigü d'anneaux rouges et verts, qui n'excède pas 1^{mm},5 en diamètre; ce système se développe en un temps très-court, puis conserve la même dimension minime jusqu'à ce que la calotte éclate; quelquefois, en outre, les calottes les plus durables finissent par se revêtir, sur tout le reste de leur surface, d'un moiré pâle rose et vert; pour certains liquides ce moiré se manifeste seul, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu préalablement formation des petits anneaux. Enfin, chose bien singulière, les liquides aqueux chez lesquels on observe, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, ces phénomènes de couleurs naissantes, n'en laissent plus voir aucune trace lorsqu'ils sont placés dans une atmosphère desséchée, et qu'ainsi leur évaporation, au lieu d'être supprimée, est au contraire activée.

En résumé donc, les caractères généraux de cette première catégorie sont: peu ou point de mousse, impossibilité de gonfler des bulles, courte durée des lames, absence de couleurs sur les calottes ou coloration tardive, seulement naissante et n'offrant que le rouge et le vert des derniers ordres.

Parmi les nombreux liquides qui se rangent dans la catégorie dont il s'agit, je citerai l'eau, la glycérine, les acides sulfurique et azotique, l'ammoniaque, des solutions saturées d'acide tartrique, d'azotate de potasse, de carbonate de soude et de chlorure de calcium.

Les liquides de la deuxième catégorie, comme les précédents, développent peu de mousse ou n'en développent aucune, et ne se laissent pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe; leurs calottes ont, en général, des durées beaucoup plus courtes encore; mais, pour un même liquide, toutes les calottes, ou au moins une partie d'entre elles, se revêtent, à l'instant de leur formation ou très-peu de temps après, de teintes prononcées des différents ordres sur toute leur surface; ces teintes peuvent se disposer en anneaux horizontaux, et alors, pour certains liquides, elles indiquent quelquefois que l'épaisseur de la lame va en croissant de la base au sommet de la calotte. Ajoutons



que; par suite du peu de persistance, il faut souvent l'habitude que donne la répétition multipliée de semblables expériences pour bien juger des teintes et de leur arrangement.

Ainsi, d'une manière générale, les liquides en question se distinguent de ceux de la catégorie précédente par une coloration des lames prompt, prononcée, et montrant les teintes de tous les ordres.

Les liquides de cette deuxième catégorie sont : les huiles grasses, l'acide lactique, l'acide acétique cristallisable, l'essence de térébenthine, l'alcool, la benzine, la liqueur des Hollandais, le chloroforme, l'éther sulfurique, le sulfure de carbone, et sans doute un grand nombre d'autres.

Les liquides qui appartiennent à la troisième catégorie se recouvrent, par l'agitation, d'une mousse volumineuse et très-persistante; on les gonfle aisément en bulles à l'orifice d'une pipe; leurs calottes se maintiennent beaucoup plus longtemps que celles des deux catégories précédentes, ordinairement plusieurs heures, quelquefois même plusieurs jours; elles ont d'abord, en général, une phase incolore très-notable, dont la durée diffère beaucoup d'un liquide à un autre, puis se teintent graduellement, mais d'une manière qui varie un peu avec les liquides.

Ces liquides sont peu nombreux; ils se réduisent, je pense, aux solutions des différents savons, à la solution de saponine et à celle d'albumine; on peut y joindre la solution d'acétate de peroxyde de fer. Je ne parle pas de la solution d'oléate de soude, parce qu'elle doit se placer avec celles des savons, ni du liquide glycérique, dont la propriété de s'étendre aisément en grosses bulles résulte du savon qu'il renferme.

Quelques substances solides à la température ordinaire, mais que la chaleur rend liquides, possèdent aussi, sous ce dernier état, la propriété de donner sans peine des bulles de grand diamètre : telles sont le verre, la colophane, ou mieux un mélange de colophane avec de l'huile de lin, comme l'a indiqué M. Böttger ¹, et un mélange de colophane et de gutta-percha.

Enfin, on le comprend, les trois catégories ci-dessus ne sont pas tellement tranchées qu'il n'y ait certains liquides formant pour ainsi dire passage

¹ *Beiträge zur Physik und Chemie*. Frankfurt a. M., 1838, p. 13.



de l'une d'elles à une autre : je citerai comme exemples une solution d'une partie de gomme arabique dans dix parties d'eau, qui participe à la fois de la première et de la troisième catégorie, et une solution convenable de colophane dans l'huile d'olive, qui participe de la deuxième et de la troisième.

§ 20. — Avant d'aller plus loin, je vais exposer avec quelques détails les faits particuliers relatifs aux calottes de chacun des liquides que j'ai soumis à l'expérience. Les substances employées étaient, à peu d'exceptions près, telles qu'on les trouve dans le commerce; il eût été inutile pour l'objet de mon travail de chercher à les avoir chimiquement pures. Commençons par la première catégorie.

Eau distillée. 1° Dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Sur cent calottes successives, quatre-vingt-trois, dont les durées ont varié d'une fraction de seconde à 7'', sont demeurées incolores jusqu'à leur rupture, seize ont montré, après des phases incolores respectives de 1'' à 6'', le système de petits anneaux rouges et verts; parmi ces dernières, les deux qui ont eu les plus longues durées, savoir 11'' et 13'', ont fini par se recouvrir du moiré pâle rouge et vert; dans celle de 14'', le rouge et le vert des petits anneaux ont peu à peu fait place à d'autres teintes; enfin une calotte, dont la durée a été de 10'', a présenté, en approchant de sa rupture, le moiré pâle sans petits anneaux.

2° Dans une atmosphère desséchée au moyen de l'acide sulfurique. Cent calottes, dont les durées ont varié d'une fraction de seconde à 12'', sont restées complètement blanches.

Glycérine de Price, dans une atmosphère desséchée. Cent calottes produites à la manière ordinaire, toutes demeurant incolores, mais ne persistant au maximum que 2''. On en obtient de plus durables en en formant rapidement les unes sous les autres plusieurs petites, qui se confondent en une seule à laquelle on donne sans peine le diamètre requis; quarante calottes ont été engendrées par ce procédé, et sur l'une d'elles qui a persisté 80'', on a distingué après 46'' le petit système d'anneaux.

Acide sulfurique, dans une atmosphère desséchée. Cent calottes d'une fraction de seconde à 28'', dont six, de 3'' à 8'', offrent, après des intervalles de 2'' à 5'', le petit système d'anneaux; dans l'une de celles-ci, les petits anneaux ont fini par devenir pourpres et bleus.



Acide azotique, dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Cent calottes d'une fraction de seconde à 4'', toutes demeurant incolores.

Ammoniaque, dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Cent calottes d'une fraction de seconde à 4'', toutes demeurant incolores.

Solution saturée d'acide tartrique, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Quarante-deux calottes d'une fraction de seconde à 142'', toutes demeurant incolores.

*Solution saturée d'azotate de potasse*¹, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Cent calottes d'une fraction de seconde à 6'', toutes demeurant incolores.

*Solution saturée de carbonate de soude*². 1° Dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Cent calottes d'une fraction de seconde à 26'', dont cinq avec le petit système d'anneaux après des intervalles de 3'' à 9''.

2° Dans une atmosphère desséchée par du chlorure de calcium. Cent calottes d'une fraction de seconde à 30'', une de 58'', toutes demeurant incolores.

Solution saturée de chlorure de calcium. Comme ce liquide ne tendait probablement ni à émettre, ni à absorber de vapeur aqueuse, on l'essaie en laissant le bocal ouvert. Soixante-dix calottes de 1'' à 229'', dont cinq de 116'' à 229'', ont montré, après des intervalles de 100'' à 150'', le moiré pâle rose et vert, sans le petit système d'anneaux; les durées de celles qui sont demeurées incolores, ont été de 1'' à 148''.

Je dois dire ici que, pour quelques-uns de ces liquides, pour l'acide sulfurique, par exemple, les calottes beaucoup moindres, comme de 3^{mm} à 4^{mm}, persistant souvent beaucoup plus longtemps, finissent par se colorer.

§ 21. — Agissons de même à l'égard de la deuxième catégorie.

Huile d'olive, dans le bocal ouvert. Les calottes persistent, au maximum, 0'',7; toutes, après un intervalle si court que l'existence en est douteuse, manifestent des couleurs : on voit descendre jusqu'à la base, et très-rapidement, des anneaux rouges et verts suivis d'anneaux bleus et pourpres, puis d'un anneau orangé, puis d'un jaune, lequel laisse dans son intérieur un espace blanc; cet espace se fonce, devient d'un gris bleuâtre, et envahit pres-

¹ Le sel avait été purifié par une seconde cristallisation.

² Même observation.



que toute la calotte; enfin le sommet s'assombrit encore, et la calotte éclate. Les teintes sont donc rangées de manière à indiquer une épaisseur décroissante de la base au sommet des calottes, disposition que nous nommerons directe.

Huile d'amande douce, dans le bocal ouvert. Durée maxima 0'',2; phénomènes analogues, mais plus difficiles à observer, à cause du peu de persistance; on peut cependant s'assurer que les teintes sont également directes.

Acide lactique. Ce liquide absorbant l'humidité de l'air, on l'essaie dans une atmosphère desséchée par du chlorure de calcium. Durée de 1'' à 18''; après un intervalle très-court, mais appréciable, phénomènes analogues à ceux de l'huile d'olive; seulement le temps de la descente des anneaux est de 1'' à 2'', après quoi la calotte entière est blanche, puis passe au gris légèrement bleuâtre en commençant par le sommet, etc.; les teintes ont donc encore la disposition directe.

Le même liquide essayé dans le bocal ouvert, n'a donné que des calottes de 0'',6 au maximum, et toutes ont montré les teintes dans la disposition inverse¹, d'où il suit que, dans ces calottes, l'épaisseur allait en croissant de la base au sommet.

Acide acétique cristallisable. 1° Dans une atmosphère saturée de sa vapeur, procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 0'',8; toutes les calottes, après une phase blanche très-courte, se montrent colorées, la plupart en anneaux horizontaux, et offrant les teintes directes.

2° Dans le bocal ouvert. Durée d'une fraction de seconde à 2'; phase incolore extrêmement courte, puis subitement teintes inverses nettement accusées, depuis le blanc du premier ordre à la base, jusqu'au rouge et au vert des derniers ordres au sommet; ces teintes persistent sans se modifier, et sans descendre ni monter; seulement les anneaux supérieurs éprouvent des trépidations.

Essence de térébenthine. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée d'une fraction de seconde à 6''; toutes les calottes sont colorées dès leur formation, et, dans presque toutes celles où la disposition est régulière, les teintes sont directes et descendent très-vite; dans quelques-unes on a observé

¹ Ce liquide, tel qu'il m'avait été fourni, était peu visqueux, et devait conséquemment renfermer de l'eau; on l'a concentré en le chauffant au bain-marie pendant plusieurs heures.



le gris bleuâtre sur toute la surface, parfois seul, parfois succédant à la descente d'autres couleurs; sur un grand nombre, une seule a présenté la disposition inverse.

2° Dans le bocal ouvert. Durée de 12'' à 4'; dès l'instant de la formation, teintes inverses, comme pour les acides lactique et acétique dans les mêmes circonstances; mais, après un temps qui varie de 4'' à 30'', on voit se produire un phénomène singulier : tout le système d'anneaux se relève rapidement d'un côté en s'abaissant de l'autre, de façon à ne plus constituer que des demi-anneaux verticaux, ayant leur centre commun au niveau du liquide; en même temps les anneaux colorés les plus éloignés de ce centre se resserrent de telle sorte que leur système occupe moins de la moitié de la calotte, dont tout le reste est alors blanc du premier ordre, et les choses demeurent en cet état jusqu'à la rupture.

Alcool. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 1'',3; toutes les calottes sont colorées, après une phase blanche très-courte; dans celles à anneaux horizontaux, les teintes sont directes.

2° Dans le bocal ouvert. Durée d'une fraction de seconde à 10''; après une phase incolore extrêmement courte, teintes inverses subites, et ne changeant pas, comme pour les deux liquides précédents dans la même condition.

Benzine¹ et liqueur des Hollandais. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Pour chacun de ces deux liquides, durée maxima 1''; après une phase blanche plus longue, et quelquefois beaucoup, que la phase colorée, la plupart des calottes offrent des anneaux, et les teintes de ces derniers sont presque toujours directes.

2° Dans le bocal ouvert. Toutes les calottes sont incolores; pour la benzine, elles éclatent à l'instant ou presque à l'instant de leur formation, et, pour la liqueur des Hollandais, elles ont une durée maxima de 0'',6.

Chloroforme et éther sulfurique. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 1''; presque toutes incolores, les régulièrement colorées extrêmement rares, et offrant tantôt la disposition directe, tantôt la disposition inverse; phase blanche plus longue que la phase colorée.

¹ C'était de la benzine à fort peu près pure, préparée par M. Donny.



2° Dans le bocal ouvert. Toutes incolores; pour le chloroforme, éclatant à l'instant de leur formation; pour l'éther, persistant au maximum 0'',4.

Sulfure de carbone. On n'obtient jamais de couleurs, du moins aux températures ordinaires. Dans le flacon, la durée maxima est de 0'',8; dans le bocal ouvert, toutes les calottes éclatent à l'instant de leur formation.

On comprendra nettement plus loin pourquoi, malgré l'absence de coloration, j'ai rangé ce liquide dans la deuxième catégorie. On voit, d'ailleurs, qu'il appartient à celle-ci par la courte persistance; dans le bocal ouvert, il se comporte comme le chloroforme, et l'on admettra sans peine que, dans le flacon, l'absence des couleurs tient au peu de durée des calottes, qui éclatent avant la fin de la petite phase blanche.

§ 22. Passons à la troisième catégorie.

*Solution de savon de Marseille*¹, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Les calottes demeurent d'abord incolores pendant un intervalle de 6'' à 20'', puis se recouvrent d'un moiré extrêmement pâle rouge et vert, qu'on voit quelquefois naître au sommet; ce moiré se fonce, et alors on reconnaît qu'il est formé de trois larges zones, dans chacune desquelles l'une des deux couleurs domine sous la forme de têtards; ceux-ci ont un mouvement ascensionnel, et changent de teinte en passant d'une zone à une autre; les couleurs dominantes des zones, toujours dues à des têtards qui montent, varient ensuite, et indiquent la disposition directe. Après un temps de 3' à 20' à partir de la formation de la calotte, on voit apparaître, au sommet, une petite tache noire qui s'entoure de blanc, grandit très-lentement et finit, après un intervalle d'une demi-heure à deux heures, par envahir toute la calotte; celle-ci persiste alors en cet état, et sa durée totale est de plusieurs heures; des calottes ont persisté au delà de vingt-quatre heures, avec une particularité dont nous parlerons plus loin.

Dans le bocal toujours fermé, mais sans eau au fond ni sur les parois, les calottes ne durent que 4' à 5', et la tache noire n'atteint, au maximum, que 5^{mm} de diamètre.

¹ Ce liquide a été préparé en dissolvant, à une chaleur modérée, une partie de savon dans 40 parties d'eau distillée, filtrant la solution après refroidissement, et la reversant dans le filtre jusqu'à ce qu'on l'obtient limpide. Il faut l'employer le jour même de sa préparation; dès le lendemain, elle est déjà plus ou moins altérée.



*Solution de savon mou de ménage*¹, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Phase incolore de 5'' à 14''; les phénomènes ultérieurs n'ont été suivis que sur une seule calotte; elle s'est d'abord comportée sensiblement comme celles de savon de Marseille, jusqu'à ce qu'elle fût devenue entièrement noire; mais, en l'observant une heure et demie plus tard, on a constaté avec surprise qu'elle était de nouveau incolore, avec quelques points jaunes, et n'offrait plus qu'une tache noire très-petite. Elle a éclaté peu de temps après, et avait persisté au delà de trois heures.

*Solution de savon de colophane à base de potasse*², dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Les calottes présentent une particularité exceptionnelle dans cette catégorie: elles n'ont pas de phase incolore; dès leur apparition, elles sont couvertes d'anneaux rouges et verts qui, peu de temps après, se transforment en un moiré général des mêmes couleurs; un peu plus tard, ce moiré prend d'autres nuances, ou fait place à une teinte uniforme vert jaunâtre pointillée de bleu. Sur plusieurs calottes, 10' à 30' après

¹ Elle a été préparée comme celle de savon de Marseille, avec cette différence qu'elle contenait une partie de savon pour 50 parties d'eau; j'ai cru nécessaire d'employer cette proportion un peu plus forte, à cause de la grande humidité du savon mou.

Ce savon, de qualité très-inférieure, étant sans doute assez impur, la solution, bien que rendue parfaitement limpide par filtration, ne tarde pas à se ternir à sa surface, où vient probablement se rassembler quelque substance étrangère; il faut donc, avant de s'en servir, en enlever les couches supérieures au moyen d'une cuiller, ou recueillir, avec un siphon, le liquide sous-jacent.

² Ce savon ne se trouvant pas, je pense, dans le commerce, on l'a préparé en dissolvant, à chaud, de la colophane en poudre fine dans une solution de potasse caustique formée d'une partie de potasse solide et de 20 parties d'eau distillée. Pour avoir un liquide neutre, on a continué à ajouter de la colophane jusqu'à ce qu'il en restât un dépôt notable au fond; par le refroidissement, il s'est précipité une quantité considérable de savon non dissous; on a ajouté alors à l'ensemble la moitié de son volume d'eau distillée, on a chauffé de nouveau, puis on a abandonné le mélange à lui-même jusqu'au lendemain, après quoi on a décanté. Ce liquide a donné, avec la pipe, des bulles dont le diamètre maximum était de 18 centimètres.

Je dois ajouter qu'une nouvelle préparation, effectuée avec un autre échantillon de colophane, m'a donné des résultats différents: la solution, au lieu de laisser déposer, par le refroidissement, du savon non dissous, s'est prise en gelée, et l'addition d'eau y a déterminé un abondant précipité; on a fait disparaître complètement celui-ci en dissolvant dans le liquide quelques petits fragments de potasse; mais, avec la solution ainsi obtenue, le diamètre maximum des bulles n'était que de 12 centimètres. Je me suis donc contenté des essais de calottes faits en employant la première solution.



leur formation, une tache noire apparait au sommet, grandit assez rapidement, et envahit la totalité ou la presque totalité de la calotte. Durée maxima une heure.

Solution de saponine ¹, idem. Phase incolore de 25' à 40', puis apparition d'un moiré général rouge et vert, dans lequel on voit quelquefois, plus tard, un peu de pourpre et de bleu. Durée maxima douze heures.

Solution d'albumine ², idem. Phase incolore de plusieurs heures, puis apparition d'un moiré général rouge et vert. La calotte persiste ensuite dans le même état, et sa durée totale peut comprendre plusieurs jours.

Solution d'acétate de peroxyde de fer, idem. La plupart des calottes manifestent un phénomène bizarre : après une phase incolore de 15'' à 30'', on voit naître, à la base de la calotte, des anneaux rouges et verts qui bientôt se convertissent en un moiré des mêmes couleurs; ce moiré s'étend graduellement à plus ou moins de hauteur, pâlit, et disparaît pour donner lieu à une seconde phase incolore; à celle-ci succède, une demi-heure environ après la formation de la calotte, un nouveau moiré rouge et vert qui se montre partout à la fois, et qui, lorsque la calotte persiste assez longtemps, prend ensuite d'autres teintes. Ces calottes peuvent se maintenir au delà de vingt-quatre heures. Pour quelques autres, il n'y a qu'une seule phase incolore, mais qui peut atteindre une heure.

§ 23. — Restent les deux liquides intermédiaires mentionnés à la fin du § 19.

Solution d'une partie de gomme arabique dans 10 parties d'eau. — Cette solution ne donne pas de bulles avec la pipe. On a fait, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, onze calottes, parmi lesquelles sept, dont les

¹ Une partie environ de saponine dans 100 parties d'eau distillée. Je dis environ, parce qu'une circonstance m'a empêché de connaître la proportion exacte. Cette solution donnait, avec la pipe, des bulles de 12 centimètres de diamètre maximum.

Avec d'autres échantillons de saponine, j'ai dû, pour obtenir ces grosses bulles, employer une proportion d'eau un peu moindre. Il faut avoir soin d'amener le liquide, par des filtrations, à l'état de limpidité parfaite; un trouble léger amoindrit considérablement les bulles.

² Pour préparer cette solution, on a simplement battu des blancs d'œufs frais en neige, puis on a attendu que cette neige eût reformé du liquide en quantité suffisante; enfin on a ajouté à celui-ci $\frac{1}{10}$ de son volume d'eau distillée. Ce mélange donne, avec la pipe, des bulles de 15 centimètres de diamètre maximum.



durées ont été de 20'' à 60'', sont restées incolores jusqu'à leur rupture; sur deux autres, qui ont duré 4' environ, il y a eu, après une phase incolore de 20'', apparition, au sommet, d'un peu de moiré rouge et vert demeurant dans le même état; mais deux ont persisté respectivement seize heures et vingt et une heures, et se sont couvertes en totalité, après de longues phases incolores, d'un moiré rouge et vert qui, plus tard, a passé au jaune, pourpre et bleu. Enfin ce liquide fournit une mousse assez abondante, et extrêmement durable.

Parmi les calottes, on le voit, la plupart se comportent comme celles de la première catégorie, mais quelques-unes comme celles de la troisième; l'abondance et la persistance de la mousse appartiennent à la troisième catégorie, et la non-formation des bulles à la première.

La solution dont il s'agit constitue l'un des liquides exceptionnels auxquels j'ai fait allusion dans le § 2, comme fournissant une mousse volumineuse et persistante, et ne se laissant cependant pas gonfler en bulles.

*Solution de colophane dans l'huile d'olive*¹, dans le bocal ouvert. Après une phase incolore très-courte, toutes les calottes manifestent des phénomènes de coloration pareils à ceux de l'huile d'olive pure (§ 21), seulement ils sont moins rapides; la durée des calottes est très-variable, et peut atteindre 2',5. Ces faits sont de la deuxième catégorie; mais, à l'orifice de la pipe, on obtient des bulles de 3,5 centimètres au maximum, ce qui est une tendance vers la troisième.

Avec plusieurs autres liquides encore, tels que des solutions saturées ou convenablement concentrées de borates neutres de soude et de potasse, de perchlorure de fer, de chlorure d'or, etc., on obtient de petites bulles de 3 à 4 centimètres, et, si l'on examinait ces liquides au point de vue de leurs calottes, on trouverait, sans doute, qu'ils appartiennent aussi à des catégories intermédiaires, ou, tout au moins, qu'ils sont à la limite de l'une des trois catégories principales.

¹ On n'a pas mesuré la proportion de colophane; seulement on a constaté qu'elle ne devait pas dépasser une certaine limite, sans doute parce qu'alors le liquide est trop visqueux. La solution a été préparée à chaud, puis, après refroidissement, filtrée à travers un papier suffisamment perméable.



§ 24. — Bien que les expériences dont les résultats sont rapportés dans les quatre paragraphes précédents aient été effectuées sur des lames de petites dimensions, elles nous ont révélé des faits très-remarquables, tels qu'une partie des caractères qui distinguent nos trois catégories, la grande influence des atmosphères dans lesquelles les lames sont produites, l'inversion des teintes sur les calottes de la plupart des liquides de la deuxième catégorie, etc., et plusieurs de ces faits jettent, on le verra, un grand jour sur la question que j'essaie de résoudre dans la série actuelle.

Considérons une calotte au moment où elle vient d'être développée, et cherchons ce qui doit s'y passer. Nous savons que le liquide, entraîné par la pesanteur, descend de tous les côtés autour du sommet, d'où résulte un amincissement progressif de la lame; mais nous allons examiner de plus près comment s'opère cet amincissement.

Pour simplifier, portons d'abord notre attention sur l'une des deux faces de la lame, sur la face convexe, par exemple, et concevons-la partagée en anneaux moléculaires horizontaux, depuis le sommet jusqu'à la base. Tous ces anneaux descendent, et conséquemment chacun d'eux va en augmentant toujours de diamètre, ce qui exige que ses molécules s'écartent davantage et que d'autres molécules, appartenant à la couche sous-jacente, viennent se loger dans les interstices pour rétablir un arrangement uniforme. La même chose doit s'entendre de la face concave, et il est clair, en outre, que des mouvements moléculaires analogues se produisent dans l'épaisseur même de la lame. C'est évidemment au sommet et dans son voisinage que les phénomènes dont il s'agit sont le plus prononcés; c'est là que les écarts des molécules sont surtout considérables et que, par suite, l'appel du liquide intérieur est le plus abondant.

Si donc la cause que je viens de signaler agissait seule, l'amincissement serait toujours le plus rapide au sommet et dans ses environs, et la lame présenterait toujours une épaisseur décroissante à partir de la base. Mais, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer (7^{me} série, § 12), ces inégalités d'épaisseur donnent elles-mêmes naissance à une seconde cause, qui tend à les effacer, ou au moins à les diminuer; en effet, les portions plus épaisses étant plus pesantes, surmontent plus aisément les résistances de frottement qui



s'opposent à leur descente, et celle-ci doit conséquemment être accélérée du sommet à la base; or, par suite de cette accélération, les molécules vont en s'écartant de plus en plus dans le sens méridien, à partir du sommet, d'où résulte un appel de liquide intérieur de plus en plus abondant jusqu'à la base, et l'accroissement de ce dernier appel doit compenser, en tout ou en partie, le décroissement de celui qui provient de la première cause.

Enfin une dernière cause s'ajoute à la seconde: c'est que, plus on se rapproche de la base, plus est rapide la pente sur laquelle glisse le liquide.

Si la première des trois causes prédomine, la lame présentera nécessairement une épaisseur décroissante de la base au sommet; s'il arrive que cette première cause soit contre-balancée par l'ensemble des deux autres, l'épaisseur de la lame deviendra uniforme, et continuera ensuite à s'amoinrir également partout; enfin si l'ensemble des deux dernières causes l'emporte, l'épaisseur sera croissante de la base au sommet; or nous avons vu ces trois cas se réaliser:

En effet, le premier s'est montré, immédiatement ou peu de temps après le développement de la lame, dans les calottes de tous les liquides de la deuxième catégorie, sauf, bien entendu, celles de sulfure de carbone; il s'est montré sans doute aussi dans celles de savon de colophane, quoiqu'on n'ait pu le déduire nettement des teintes des anneaux; enfin il s'est montré encore, après la longue phase blanche, dans les calottes de savon de Marseille. Le phénomène se produit probablement, dans les autres calottes de la troisième catégorie, pendant la phase blanche, et dans toutes celles de la première; mais l'absence de couleurs ne permet pas d'en acquérir la certitude.

Le second cas a suivi le premier dans les calottes d'huile d'olive, d'huile d'amande douce et d'acide lactique, puisque, en approchant de la rupture, la totalité ou la presque totalité de leur surface présentait le blanc du premier ordre ou le gris bleuâtre qui précède le noir. Quelques calottes d'essence de térébenthine ont offert un résultat analogue; dans celles de savon de colophane, le moiré fin rouge et vert qui a succédé aux anneaux peut être regardé comme à peu près équivalent à une teinte uniforme, car la moyenne des épaisseurs des petites portions rouges et vertes juxtaposées est sans doute la même sur toute l'étendue de la calotte; et ceci doit s'entendre, à plus forte



raison, du moiré semblable qui apparaît après la phase blanche dans d'autres calottes de la troisième catégorie et dans quelques-unes de celles de la première, moiré qui ordinairement naît partout à la fois.

Enfin le troisième cas est celui des calottes de la deuxième catégorie sur lesquelles les teintes ont pris la disposition inverse.

§ 25. — Insistons un moment sur ce troisième cas. Pour peu qu'on y réfléchisse, on comprendra que l'accélération de vitesse due à l'excès d'épaisseur des portions inférieures de la lame peut tout au plus effacer cette inégalité, et qu'un décroissement d'épaisseur du sommet à la base, décroissement qui donne l'inversion des teintes, doit nécessairement provenir des variations de la pente; c'est ce que prouve, en effet, une expérience simple :

Dans un tube de verre de 1,5 centimètre de diamètre et de 15 de longueur, fermé à une extrémité, on a introduit une petite quantité d'essence de térébenthine; puis, tenant ce tube incliné à environ 45°, on y a produit, par des secousses convenables, une lame transversale, lame conséquemment inclinée aussi, mais qui étant plane, présentait la même pente du haut jusqu'au bas. La lame ainsi placée ayant sa face inférieure tournée vers le liquide et sa face supérieure vers l'ouverture du tube, se trouvait, à l'égard de l'évaporation, sensiblement dans les mêmes conditions que les calottes du même liquide formées dans le bocal ouvert; or, tandis que ces dernières s'étaient nettement revêtues de teintes inverses (§ 21), la lame plane du tube a, dans tous les essais successifs, montré des teintes directes : au premier moment, ces teintes étaient, en partant de la bande inférieure, le bleu, l'indigo, le violet, l'orangé et le jaune, et celui-ci occupait plus de la moitié de la hauteur de la lame, puis on voyait naître immédiatement, vers le haut, du blanc qui s'étendait rapidement en refoulant les autres teintes, et envahissait la presque totalité de la lame.

§ 26. — Les calottes de la deuxième catégorie se colorent, on l'a vu, immédiatement ou après fort peu de temps, sur toute leur surface, et leurs teintes atteignent en un instant, soit au sommet, soit à la base, le jaune ou le blanc du premier ordre, et même quelquefois un gris voisin du noir; d'où il faut conclure que les lames de cette deuxième catégorie s'amincissent avec une extrême vitesse. Pour plusieurs liquides, il est vrai, c'est seulement dans



une partie des calottes que l'atténuation est poussée si loin; mais comme, à l'égard de ces liquides, la durée maxima n'excède guère 1'', on peut admettre que les calottes qui restent blanches sont formées de lames accidentellement plus épaisses, et revêtiraient bientôt toutes les teintes, si elles persistaient un peu plus longtemps. C'est, en effet, ce que nous avons observé dans les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais, de chloroforme et d'éther, où la phase incolore approchait quelquefois de 1''. Je reviendrai d'ailleurs sur ce point.

Dans les calottes de la première catégorie, il n'y a jamais, on l'a vu aussi, coloration immédiate ou presque telle; la très-grande majorité restent blanches jusqu'à leur rupture, bien que, pour certains liquides, elles puissent durer au delà de 2'; sur les rares calottes où l'on observe des phénomènes de coloration, ces phénomènes se réduisent, en général, à un système minime d'anneaux occupant le sommet et conservant ses petites dimensions; enfin, dans le nombre de cas fort restreint où il y a coloration totale, celle-ci ne se montre qu'après plusieurs secondes, quelquefois après deux minutes. Il résulte évidemment de tout cela que les lames de la première catégorie s'amincissent, au contraire, très-lentement.

Dans les calottes de la troisième catégorie, il y a également, nous le savons encore, une phase blanche généralement longue, et la coloration qui se manifeste ensuite ne varie jamais avec rapidité. Il suit de là que, dans la troisième catégorie, comme dans la première, l'amincissement des lames est fort lent. A la vérité, par exception, les calottes de la solution de savon de colophane n'ont pas de phase incolore, et sont d'abord couvertes d'anneaux rouges et verts; mais elles peuvent persister une heure, en changeant progressivement d'aspect.

Faut-il attribuer à la viscosité, telle qu'on l'entend, cette grande différence dans la vitesse d'amincissement des lames entre la deuxième catégorie et les deux autres? Nullement, car les huiles grasses et l'acide lactique, qui appartiennent à la deuxième catégorie, sont des liquides beaucoup plus visqueux que la plupart de ceux de la première et de la troisième; l'essence de térébenthine, de la deuxième également, est plus visqueuse que l'eau, qui est de la première; enfin, si l'on en juge par certains faits, l'alcool, de la deuxième aussi, possède réellement, malgré l'apparence contraire, une viscosité un peu supérieure à celle de l'eau.



Or ce qui caractérise une lame, c'est l'étendue considérable des surfaces relativement au volume; force nous est donc de reconnaître ici une influence des faces de la lame, et de chercher la cause de la grande différence dont il s'agit dans une sorte de viscosité propre des couches superficielles, indépendante, ou à peu près, de la viscosité intérieure, et qui, très-faible dans les liquides de la deuxième catégorie, est, au contraire, très-forte dans ceux de la première et de la troisième.

M. Hagen avait déjà, on le sait (§ 7), émis une opinion analogue, et, il y a peu de temps, une idée du même genre encore a été avancée par M. Meunier¹; on verra plus loin en quoi mon principe s'écarte de ceux de ces deux savants.

§ 27. — Ce principe admis, appliquons-le aux phénomènes. Prenons de nouveau une calotte au moment de sa génération, concevons encore ses deux faces partagées en anneaux moléculaires horizontaux qui descendent en s'élargissant, et considérons en particulier l'un d'eux à son départ du sommet. Il est clair que, pour un petit trajet effectué, les distances entre les molécules de cet anneau s'accroissent considérablement: par exemple, de la position où son diamètre est de 0^{mm},01 à celle où il est de 0^{mm},1, ces distances sont devenues décuples. On admettra, de plus, sans peine que les mouvements dont il s'agit ne s'exécutent pas avec une régularité mathématique, et qu'ainsi, dans un même anneau, les intervalles moléculaires ne demeurent pas absolument égaux entre eux. Cela posé, imaginons que quelque cause mette obstacle à la libre arrivée des molécules sous-jacentes dans les interstices; l'un ou l'autre de ceux-ci deviendra bientôt assez grand pour que l'attraction des molécules qu'il sépare ne puisse plus contre-balancer la tension; alors ces molécules entraineront aisément leurs voisines plus intérieures, qui, elles aussi, subissent des écartements, la séparation s'approfondira de proche en proche, et la lame se déchirera en ce point. Or, dans les calottes de la première catégorie, les couches superficielles ont, d'après mon principe, une très-forte viscosité, les mouvements moléculaires y sont difficiles, et l'on comprend dès lors que, très-près du sommet de l'une ou de l'autre

¹ *Comptes rendus*, 1866, t. LXIII, p. 265.



des faces, un intervalle moléculaire agrandi peut n'avoir pas le temps d'être comblé avant que la tension, si elle est assez énergique, y détermine le déchirement ci-dessus. Telle est, selon moi, l'explication de la rupture de presque toutes les calottes de la première catégorie avant qu'on distingue sur elles aucune coloration.

Mais, on le comprend aussi, ce déchirement peut ne pas être complet; il peut ne provoquer qu'une atténuation locale, autour de laquelle les molécules prendront un arrangement régulier; on aura alors le système de petits anneaux au sommet. Ce système doit donc apparaître brusquement, ce qui est conforme à l'expérience, et il doit conserver ensuite sensiblement ses dimensions, la cause qui l'a fait naître ayant produit tout son effet, ce qui est également conforme à l'expérience. Mais rien n'empêche évidemment le reste de la lame de continuer à s'amincir par degrés, et, en effet, deux de nos calottes d'eau distillée qui avaient le petit système en question, ont offert, peu avant leur rupture, le moiré général.

Quant à la rupture définitive en présence de ce petit système, elle provient de ce que la portion exigüe de lame qui occupe le centre de celui-ci s'amincit ultérieurement et éprouve ainsi elle-même un déchirement qui, cette fois, est complet par suite de la minceur; ou bien de ce que la lamelle dont il s'agit s'atténue à tel point qu'elle ne peut plus résister aux trépidations venues de l'extérieur.

Si ces idées sont exactes, toute cause qui tendra à imprimer des mouvements irréguliers aux molécules des faces de la lame, devra favoriser le déchirement; or c'est ce que confirme une expérience curieuse: si l'on produit les calottes d'eau distillée dans une atmosphère saturée de vapeur d'alcool, vapeur dont l'absorption par la surface extérieure des lames doit nécessairement y occasionner des mouvements désordonnés, toutes éclatent à l'instant même de leur formation.

Mais pourquoi les calottes d'eau ne présentent-elles jamais le petit système d'anneaux quand on les développe dans une atmosphère desséchée? C'est que, sans doute, lorsqu'un déchirement tend à se produire avec assez peu de force pour ne donner lieu qu'à ce petit système, les molécules extérieures dont l'écartement aurait amené le déchirement partiel, sont enlevées par



l'évaporation avant que le phénomène ait pu progresser; dans ce cas donc, les déchirements assez énergiques pour briser la lame sont les seuls qui s'accompliront.

Enfin comment se fait-il que les calottes d'eau, qui ont persisté aussi longtemps dans une atmosphère desséchée que dans une atmosphère humide, n'aient jamais, dans la première, présenté le moiré général, bien que l'évaporation dût, semble-t-il, activer l'amincissement? Essayons de rendre raison de cette singularité. Chacune des deux couches superficielles ayant l'une de ses faces libre dans l'air, les molécules qui occupent cette face éprouvent beaucoup moins de résistance dans leurs mouvements que celles plus profondément situées dans la même couche; ces molécules doivent conséquemment descendre avec moins de lenteur, et communiquer une partie de leur petit excès de vitesse aux molécules sous-jacentes; dès lors l'évaporation, en enlevant incessamment les molécules de la face extérieure de la calotte, empêche cette communication de vitesse, et retarde ainsi la descente. Si donc l'évaporation tend à accélérer l'amincissement en soustrayant de la matière à la lame, elle tend en même temps à le ralentir en ralentissant la descente, et l'on comprend que le second effet peut l'emporter sur le premier. Nous verrons bientôt cette conjecture appuyée.

On voit maintenant pourquoi il est impossible de gonfler des bulles avec les liquides de la première catégorie : c'est que la lame ne peut s'étendre sous l'action du souffle sans que les molécules de ses deux faces s'écartent continuellement pour appeler dans leurs interstices des molécules plus intérieures, ce qui donne lieu à des chances multipliées de déchirement.

Souvent même la lame plane qu'on puise avec l'orifice de la pipe, éclate avant qu'on ait eu le temps de commencer à souffler. C'est que cette lame est attachée au pourtour de l'orifice par l'intermédiaire d'une petite masse à courbures transversales concaves extrêmement fortes, et que celle-ci, en vertu de ces fortes courbures, attire puissamment à elle le liquide de la lame (6^{me} série, § 41); or de là résultent, surtout dans le voisinage du pourtour, de grands mouvements moléculaires qui, à cause encore de la liberté relative des molécules des deux faces extrêmes, déterminent, dans ces dernières, des écarts considérables avec l'appel du liquide intérieur.



Enfin c'est par la même raison que les liquides dont il s'agit ne donnent jamais de mousse abondante et persistante, chacune des lamelles dont l'ensemble compose la mousse étant également attachée aux lamelles environnantes par l'intermédiaire de petites masses à très-fortes courbures concaves.

Remarquons ici, en passant, que nos calottes sont garnies aussi, à leur base, d'une petite masse du même genre, dont la succion contribue à l'amincissement de la lame; mais je n'en ai pas tenu compte, parce que ses courbures concaves, bien qu'assez prononcées, le sont cependant beaucoup moins que dans les cas ci-dessus.

§ 28. — Dans les lames de la deuxième catégorie, les déchirements par les causes que j'ai signalées doivent être infiniment plus rares; ici, en effet, d'après mon principe, la mobilité moléculaire des couches superficielles est très-grande, et conséquemment il y a peu d'obstacle à l'arrivée des molécules intérieures dans les interstices agrandis des extérieures. Aussi avons-nous vu les lames de cette catégorie atteindre rapidement une extrême ténuité, soit dans toute l'étendue d'une même calotte, soit surtout au sommet ou à la base. Si les lames se brisent ensuite, c'est sans doute sous l'influence des petites vibrations propagées par le sol, et l'on comprend que les lames des différents liquides doivent résister inégalement à cette cause accidentelle de rupture; ainsi, tandis que les calottes d'huile d'amande douce ne persistent au maximum que 0'',2, celles d'acide lactique peuvent durer 18'', et celles d'essence de térébenthine 6'' dans le flacon, et jusqu'à 4' dans le bocal ouvert.

Cette atténuation si rapide nous apprend pourquoi l'on ne parvient pas non plus à gonfler des bulles avec les liquides dont il s'agit: quand on a puisé une lame plane dans l'orifice de la pipe, la succion opérée par la petite masse qui règne le long du pourtour, et la descente du liquide due à ce qu'on ne tient pas l'orifice parfaitement horizontal, rendent presque instantanément cette lame si mince qu'elle éclate souvent par les petits mouvements inévitables de la main, avant qu'on ait pu porter le tube à la bouche; et lorsque cela n'arrive pas, l'extension naissante de la lame par l'insufflation, et la descente du liquide vers le point le plus bas, amènent bientôt le même effet. Ces considérations s'appliquent également à la mousse.



Cependant on conçoit qu'il peut y avoir des liquides à couches superficielles très-mobiles, mais tels que leurs lames, même fort atténuées, aient encore assez de cohésion pour résister plus ou moins aux causes de rupture ci-dessus; ces liquides se laisseront gonfler en bulles de quelques centimètres de diamètre, et c'est ce dont la solution de colophane dans l'huile d'olive nous a offert un exemple (§ 23).

§ 29. — Le phénomène de l'inversion des teintes est également lié au peu de viscosité des couches superficielles, puisqu'il ne se manifeste qu'avec les liquides de la deuxième catégorie; et, en effet, pour que l'amincissement puisse s'opérer plus vite dans le bas d'une calotte que dans le haut, il faut que la portion inférieure de l'une au moins des deux couches superficielles n'entraîne pas la portion supérieure, il faut qu'il y ait une sorte d'indépendance entre ces deux portions, indépendance qui exige évidemment une grande mobilité moléculaire dans les couches en question. On comprend, de plus, que les causes qui peuvent apporter du trouble dans les molécules superficielles, favoriseront cette indépendance en dérangeant la liaison des différents points d'une même couche; c'est ainsi que l'absorption de l'humidité dans les calottes d'acide lactique, et l'évaporation dans celles d'acide acétique, d'essence de térébenthine et d'alcool, déterminent l'inversion des teintes.

Je ferai remarquer ici que ces causes de trouble provoquent encore le phénomène de l'inversion lors même qu'elles sont extrêmement peu intenses: par exemple, on a produit des calottes d'acide acétique et d'essence de térébenthine dans le bocal fermé, en employant toutes les précautions indiquées au § 18; pour l'essence de térébenthine, on avait même introduit dans le bas du tube de la ouate imbibée du même liquide, afin de saturer l'air amené par le souffle; dans ces circonstances, l'atmosphère intérieure devait être à fort peu près saturée, de sorte que l'évaporation était nécessairement bien faible, et cependant les teintes ont été nettement inverses. Dans ces mêmes conditions, les calottes d'acide acétique les moins durables n'avaient que du rouge et du vert à la base, ce qui montre bien que le développement des teintes inverses provient de ce que le bas de la lame commence par s'amincir plus vite que le haut.



Mais l'amincissement d'abord si rapide dans le bas, ne doit pas tarder à se ralentir, par la diminution même de l'épaisseur de cette portion de la lame, et bientôt la perte qu'éprouve cette même portion par la descente de son liquide et par l'évaporation, doit se trouver exactement compensée par le liquide qui arrive des portions supérieures; à partir de ce moment, les anneaux inférieurs doivent donc paraître stationnaires dans leurs teintes et dans leurs positions, ce que nous avons effectivement constaté, on l'a vu, dans les calottes qui persistent assez longtemps.

J'ai essayé (§ 27) de faire comprendre que l'évaporation pouvait ralentir l'amincissement; or c'est ce que confirment nos expériences sur les calottes à teintes inverses : j'ai dit, plus haut, que l'acide acétique et l'essence de térébenthine donnaient encore de semblables calottes dans une atmosphère à très-peu près saturée et lorsque, par conséquent, l'évaporation était considérablement réduite; or les durées maxima respectives ont été alors 0'',4 et 2', tandis que, dans le bocal ouvert, c'est-à-dire avec une évaporation libre, les durées maxima respectives se sont élevées à 2' et à 4'.

Quant à la chute latérale du système des anneaux dans les calottes à teintes inverses d'essence de térébenthine, on peut, je pense, l'expliquer en assimilant ce qu'il y a d'excédant en épaisseur dans la portion supérieure de la calotte, à une seconde calotte de moindre base posée sur la première; cette seconde calotte se trouve, en effet, dans un état d'équilibre instable, et les petites causes étrangères doivent la faire glisser de côté. Seulement il est singulier que les calottes d'alcool produites dans le bocal ouvert, calottes qui, nous le savons, ont aussi les teintes inverses et persistent assez longtemps, ne présentent pas le même phénomène.

§ 30. — Un fait plus obscur que l'inversion des teintes, c'est la rupture spontanée, avant la fin de la phase blanche, de la grande majorité des calottes de chloroforme et d'éther, et de toutes celles de sulfure de carbone. Ce phénomène paraît dépendre non de l'évaporation elle-même, puisqu'il se produit dans l'atmosphère aussi saturée que possible du flacon, mais plutôt de la grande tendance des liquides ci-dessus à s'évaporer. En effet, si l'on range tous nos liquides volatils de la deuxième catégorie d'après l'ordre croissant de leurs volatilités respectives, on a la série suivante : 1° l'acide acétique et



l'essence de térébenthine; 2° l'alcool; 3° la benzine et la liqueur des Hollandais; 4° le chloroforme; 5° l'éther; 6° le sulfure de carbone ¹; or nous avons vu que, dans le flacon: 1° toutes les calottes d'acide acétique, d'essence de térébenthine et d'alcool se sont colorées soit sans phase blanche, soit après une phase blanche très-courte; 2° toutes celles de benzine et de liqueur des Hollandais se sont de même colorées, mais après une phase blanche qui approchait quelquefois de 1'' et ne laissait alors à la phase colorée que la durée d'un éclair; 3° presque toutes celles de chloroforme et d'éther ont éclaté sans couleurs; 4° toutes celles de sulfure de carbone ont éclaté de cette manière; d'où l'on peut inférer que la disposition à éclater pendant la phase blanche croit avec la disposition à s'évaporer.

L'alcool employé dans ces expériences était l'alcool du commerce; j'ai voulu savoir ce que donnerait l'alcool absolu, qui se place, quant à sa volatilité, entre le précédent et le couple benzine et liqueur des Hollandais; or, dans le flacon, beaucoup de ses calottes éclatent incolores; il se trouve donc, sous ce point de vue, entre le couple ci-dessus et le couple chloroforme et éther, et constitue ainsi une légère anomalie; mais je ne pense pas que celle-ci suffise pour empêcher d'admettre d'une manière générale l'influence de la volatilité.

Maintenant comment la simple tendance à se volatiliser peut-elle occasionner la rupture? N'est-il pas permis de croire que si, dans une atmosphère libre, les liquides en question perdent avec tant de facilité leurs molécules superficielles par l'évaporation, c'est que ces molécules ont fort peu de cohérence entre elles? Dans cette hypothèse, on comprend qu'il faut peu de chose pour amener un déchirement malgré la mobilité des couches superficielles; alors aussi une cause de trouble dans les molécules extérieures, l'évaporation, par exemple, favorisera ce déchirement, et nous avons vu, en effet, que, dans le bocal ouvert, les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais, de chloroforme, d'éther et de sulfure de carbone éclatent à l'instant de leur formation, ou persistent à peine au delà d'une demi-seconde.

¹ Pour comparer sous ce point de vue les liquides dont il s'agit, on en a rempli exactement une suite de verres de montre identiques placés à distance les uns des autres sur l'appui extérieur d'une fenêtre au nord, par une température de 18°, et on les a observés de temps en temps afin de constater leurs diminutions respectives.



Enfin je me suis dit que si la volatilité exerçait réellement une influence si prononcée sur les calottes de ces liquides, les phénomènes qu'elles présentent devaient se modifier si l'on diminuait la volatilité par un grand abaissement de la température. Or c'est ce que l'expérience a confirmé : des flacons renfermant respectivement du chloroforme, de l'éther et du sulfure de carbone ont été exposés pendant deux heures à l'extérieur, par une température de -4° , puis on y a fait, toujours à l'extérieur, l'essai des calottes. Dans ces conditions, les durées n'ont augmenté qu'un peu, mais les calottes colorées de chloroforme et d'éther ont été bien plus fréquentes, et le sulfure de carbone a donné un assez grand nombre de calottes vivement teintées ; enfin les phases blanches précédant les couleurs se sont de beaucoup raccourcies. Ce dernier fait paraît indiquer que, même dans le flacon où l'on a pris toutes les précautions pour saturer l'atmosphère intérieure, la saturation n'est pas absolument complète, de sorte que les calottes subissent toujours une minime évaporation ; dès lors, en effet, on comprend qu'une température très-basse amoindrissant encore ce petit reste d'évaporation, accélère un peu l'amincissement (§ précédent), et, par suite, raccourcit la phase blanche.

On voit actuellement que le sulfure de carbone, qui, aux températures ordinaires, ne manifeste jamais de coloration, devait cependant être placé, comme je l'ai fait, dans la deuxième catégorie.

§ 31. — Arrivons enfin à la troisième catégorie, c'est-à-dire à la plus importante, à celle des liquides qui se laissent gonfler en bulles. Ici, comme dans la première catégorie, les couches superficielles ont peu de mobilité moléculaire, et l'amincissement s'effectue avec lenteur ; mais les déchirements sont rares, puisque, malgré la descente du liquide et l'action du souffle, les lames persistent et peuvent recevoir une grande extension. Si l'on admet les idées exposées au § 27, on en conclura que, dans les liquides de la catégorie actuelle, la tension est insuffisante pour produire les déchirements, et c'est ce que vient appuyer la comparaison des tensions respectives de l'eau et de notre solution de savon de Marseille : la tension d'une lame d'eau à la température ordinaire, est, d'après M. Dupré, 14,6, et celle d'une lame de la solution de savon n'est, d'après le même savant, qui a bien voulu la déterminer pour moi, que 5,64, c'est-à-dire entre la moitié et le tiers de la précédente.



Cependant, pour qu'un liquide puisse s'étendre en bulles, il n'est pas indispensable que sa tension soit faible d'une manière absolue; il suffit qu'elle le soit relativement à la viscosité des couches superficielles, ou, en d'autres termes, que le rapport entre la viscosité superficielle et la tension soit assez grand. Par exemple, les tensions respectives des lames de la solution saturée de chlorure de calcium et de la solution d'albumine, tensions mesurées, à ma prière, par M. Van der Mensbrugghe ¹, sont 11,06 et 11,42, c'est-à-dire à peu près égales et toutes deux assez fortes, et pourtant le premier de ces liquides ne donne pas de bulles, et, avec le second, on en obtient qui atteignent 13 centimètres de diamètre; mais comme, dans les calottes de chlorure de calcium qui se sont moirées (§ 20), la phase incolore n'a été, au maximum, que de 150'', et que, dans celles d'albumine (§ 22), elle a été de plusieurs heures, on voit que la viscosité superficielle de ce dernier liquide doit être regardée comme de beaucoup supérieure à celle du premier, et qu'ainsi le rapport entre cette viscosité et la tension est aussi beaucoup plus grand à l'égard du second liquide qu'à l'égard du premier.

Si l'on compare de même, au point de vue de leurs tensions et des visco-

¹ La plupart des tensions dont nous aurons à faire usage dans la suite de cette série, ont été évaluées par M. Van der Mensbrugghe, au moyen de deux procédés différents: le premier revient à celui de l'aréomètre de M. Dupré (§ 12); le second, qui est dû à M. Van der Mensbrugghe, présente cet avantage qu'il permet d'opérer sur une quantité extrêmement petite de liquide; voici en quoi il consiste essentiellement:

Un fil fin de coton est tendu horizontalement entre deux points fixes distants d'environ 12 centimètres. D'autre part, un tube en verre d'un décimètre de longueur et de 1^{mm} à peu près de diamètre extérieur, est garni, près de chacune de ses extrémités, d'un petit anneau en fil de fer mince, et soutient, par un fil de coton attaché en son milieu, un petit plateau en papier. Pour mesurer une tension, on mouille d'abord du liquide à essayer le fil horizontal, puis on transporte le tube sous celui-ci, de manière à le toucher par les deux petits anneaux; entre ce tube et le fil horizontal règne ainsi un espace étroit, qu'on remplit du même liquide avec un pinceau; après quoi on abandonne le tube, qui demeure suspendu par la tension des deux faces de la petite masse liquide. On verse alors doucement du sable fin sur le petit plateau, jusqu'à ce que le tube se détache. Enfin on pèse l'ensemble du tube, du plateau et du sable, et l'on divise le poids, exprimé en milligrammes, par la longueur comprise entre les deux petits anneaux; le quotient est la valeur, en milligrammes, de la tension, par millimètre, d'une lame du liquide.

M. Van der Mensbrugghe a mesuré plusieurs tensions par les deux procédés successivement, et toujours les résultats se sont trouvés sensiblement d'accord.



sités propres de leurs couches superficielles, la solution de savon et celle d'albumine, les valeurs ci-dessus montrent que la tension des lames de la seconde est double de celle des lames de la première; mais, dans les calottes de savon, la phase incolore n'est, au maximum, que de 20'', tandis que, dans celles d'albumine, elle est, comme je viens de le rappeler, de plusieurs heures; ainsi, en passant du premier liquide au second, la tension et la viscosité des couches superficielles augmentent toutes deux considérablement, de sorte que leur rapport demeure suffisamment grand.

C'est que les déchirements exigent des mouvements relatifs des molécules, et que la viscosité propre des couches superficielles, viscosité qui rend ces mouvements difficiles, gêne aussi bien ceux qui mènent aux déchirements que ceux qui apportent des molécules intérieures dans les interstices agrandis des extérieures. Ainsi, en passant du savon à l'albumine, la tension, c'est-à-dire la force qui tend à déchirer les lames, devient double, mais la résistance à ce déchirement augmente en même temps par l'augmentation de la viscosité des couches superficielles, et les lames d'albumine s'étendent en bulles comme celles de savon, seulement à un moindre degré.

§ 32. — Telle est donc la théorie que je propose comme solution de la question principale traitée dans la série actuelle : pour qu'un liquide puisse se développer en lames à la fois grandes et persistantes, et conséquemment se laisser gonfler en bulles, il faut d'abord que la viscosité propre des couches superficielles de ses lames soit forte, afin que l'amincissement s'opère avec lenteur; mais il faut, en outre, que sa tension soit relativement faible, afin qu'elle ne puisse vaincre la résistance opposée au déchirement par la viscosité ci-dessus lorsque, dans les mouvements superficiels, des molécules s'écartent outre mesure. Les liquides qui ont en même temps une forte viscosité superficielle et une tension relativement forte, ne donnent pas de bulles, parce que, chez eux, la tension est toujours capable de surmonter la résistance en question. Enfin les liquides qui n'ont qu'une faible viscosité superficielle ne donnent pas non plus de bulles, parce que leurs lames atteignent en trop peu de temps une ténuité extrême, et qu'alors elles se brisent par les petits ébranlements venus de l'extérieur, ou par d'autres causes étrangères.

Seulement, j'ai à présenter ici une remarque. Considérons deux liquides



dont l'un ait une viscosité superficielle moins énergique que l'autre. Si l'on s'en tenait simplement aux principes ci-dessus, on devrait admettre que la tension suffisante pour opérer un déchirement est nécessairement plus faible suivant la même proportion dans le premier de ces liquides que dans le second, ou, en d'autres termes, qu'à chance égale de déchirement, le rapport des deux éléments, viscosité superficielle et tension, est le même dans les deux liquides; mais il faut faire attention que, lorsqu'un intervalle superficiel est trop agrandi, les molécules sous-jacentes viennent le remplir avec moins de difficulté dans le premier liquide que dans le second, de sorte que le déchirement exige plus de tension pour s'accomplir. Nous arrivons donc à cette conséquence qu'à égalité de chances de déchirement, ou, ce qui revient au même, à égalité de diamètre maximum des bulles quand les liquides sont de la troisième catégorie, le rapport des deux éléments est moins grand à l'égard du liquide dont la viscosité superficielle est moins forte. Et de là découle évidemment une deuxième conséquence, c'est que si le rapport des deux éléments est le même pour les deux liquides, les chances de déchirement deviennent moindres pour celui qui a la moindre viscosité superficielle, de sorte qu'il doit donner des bulles plus grosses que l'autre, ou que, tandis qu'il en donne, l'autre n'en donne pas. Nous verrons plus loin (§ 64) les résultats des expériences s'accorder avec ces déductions.

Enfin une dernière conséquence, que nous connaissons déjà et que nous savons être vérifiée par les faits, c'est que, dans la deuxième catégorie, où la viscosité superficielle est extrêmement faible, les chances de déchirement sont, en général, pour ainsi dire nulles quelle que soit la tension, de sorte que les lames arrivent librement à une excessive ténuité; aussi beaucoup de liquides de cette catégorie se laisseraient-ils façonner en grosses bulles, si la rapidité de l'amincissement n'y mettait obstacle. Seulement, chez les plus volatils, intervient une propriété qui ramène les chances de déchirement, et qui paraît consister (§ 30) en un défaut de cohésion dans les couches superficielles.

Notre théorie permet, on a pu s'en convaincre, d'expliquer d'une manière satisfaisante tous les phénomènes observés dans les expériences précédemment décrites; jusqu'ici cependant elle est encore trop hypothétique, mais



nous allons voir de nouveaux faits se grouper autour d'elle, et lui donner, j'espère, un appui solide.

§ 33. — Avant d'exposer ces nouveaux faits, je dois, pour compléter ce qui concerne nos petites calottes, mentionner un phénomène fort curieux que m'ont présenté celles de la solution de savon de Marseille. Ainsi que je l'ai dit (§ 22), ces calottes deviennent entièrement noires après deux heures au maximum, et persistent ensuite, en cet état, quelquefois au delà de vingt-quatre heures; or, dans ces calottes si persistantes, j'ai constaté avec surprise une diminution progressive et continue du diamètre, de sorte qu'elles finissent par s'annuler complètement. Pendant cette diminution graduelle, la lame demeure toujours noire, d'où il faut conclure que la descente du liquide est sans cesse compensée par le resserrement de la calotte; c'est ce qui explique la longue durée de celle-ci.

J'ai déjà rappelé (5^{me} série, § 25) l'un des principaux arguments par lesquels on a cherché à prouver l'impossibilité de l'état vésiculaire dans la vapeur d'eau visible. Cet argument consiste en ce que l'air emprisonné dans l'intérieur d'une vésicule si minime serait soumis, de la part de la lame, à une pression considérable, et, par suite, passerait graduellement à travers cette lame, de sorte que la vésicule se réduirait bientôt à une gouttelette pleine; or, on le voit, mes calottes noires de savon de Marseille réalisent ce passage graduel de l'air intérieur à travers l'enveloppe liquide. A la vérité, si la vapeur d'eau visible était à l'état vésiculaire, les enveloppes ne seraient évidemment pas noires, et auraient conséquemment une épaisseur beaucoup plus grande que les lames qui constituent les calottes dont il s'agit; mais, d'autre part, la pression sur l'air intérieur des vésicules d'eau serait plus de mille fois aussi forte que dans nos calottes récemment formées.

§ 34. — Je passe maintenant aux nouveaux faits annoncés plus haut. J'ai cherché d'abord à établir, par des expériences directes, l'existence de la viscosité propre des couches superficielles, et les différences qu'elle présente d'un liquide à un autre. Voici le mode d'expérimentation que j'ai adopté, et qui m'a parfaitement réussi.

Au centre d'une capsule cylindrique en verre d'environ 41 centimètres de diamètre intérieur et 6 de profondeur est fixé un pivot de $2\frac{1}{2}$ centimè-



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

61

tres de hauteur, portant une aiguille aimantée; celle-ci, en forme de losange très-allongé, comme à l'ordinaire, a 10 centimètres de longueur, 7^{mm} de largeur en son milieu, et à peu près 0,^{mm}3 d'épaisseur; la durée de chacune de ses petites oscillations sous la seule influence du magnétisme de la terre, est approximativement de 1'',7. La capsule est munie de vis calantes afin qu'on puisse rendre le pivot vertical, et tout le système est placé sur une table devant une fenêtre exposée au nord. Un petit chevalet en fil de laiton, servant de repère, pince le bord de la capsule au point situé dans le méridien magnétique, du côté du Sud; un autre chevalet semblable se trouve du côté Est à 90° du précédent, et il y en a un troisième entre eux à 5° du premier, de sorte que de ce troisième chevalet au chevalet Est, la distance angulaire est de 85°. Enfin une bande de papier divisée en degrés est collée sur la paroi extérieure de la capsule, à partir du chevalet Sud et allant vers l'Ouest.

Tout étant bien réglé, lorsqu'on veut procéder à une expérience, on verse dans la capsule du liquide à essayer, jusqu'à ce qu'il affleure simplement la face inférieure de l'aiguille; on s'assure d'ailleurs, en regardant à travers la paroi de la capsule, que la face dont il s'agit est, aussi exactement que possible, dans le prolongement de la surface du liquide, et que de petites bulles d'air n'y sont point adhérentes. Cela fait, on amène, au moyen d'un barreau aimanté, la pointe de l'aiguille qui était dirigée vers le Sud, exactement en face du chevalet Est, et on l'y maintient en posant le barreau sur un support extérieur, à la hauteur de l'aiguille et près de la capsule; on attend quelques moments pour que la surface du liquide soit redevenue immobile, puis on enlève brusquement le barreau, en le retirant dans le sens de la longueur de l'aiguille, et l'on compte le temps qu'emploie cette dernière pour atteindre le chevalet suivant, c'est-à-dire pour parcourir un angle de 85°; enfin on note l'angle qu'elle décrit, en continuant sa course, au delà du méridien magnétique, angle qu'on mesure à l'aide des divisions de la bande de papier. On ne compte le temps que jusqu'à 85° du point de départ, et non jusqu'au méridien magnétique, parce qu'avec certains liquides visqueux, l'aiguille ralentit tellement sa marche en approchant de ce dernier point, que l'instant où elle l'atteint ne peut être précisé.



On ajoute alors du même liquide jusqu'à deux centimètres environ au-dessus de l'aiguille, puis, saisissant cette dernière avec une pince en laiton, on la retourne dans l'intérieur du liquide, on fait sortir de la chape la bulle d'air qui s'y trouve engagée, en l'absorbant avec une pipette, on replace l'aiguille sur le pivot, et l'on effectue les déterminations de durée et d'angle comme ci-dessus.

En général, lorsque l'aiguille, soit sur la surface, soit dans l'intérieur du liquide, dépasse le méridien magnétique, elle se borne à y revenir ensuite lentement pour s'y arrêter.

Dans ces expériences, mon fils exécutait la manœuvre du barreau, et observait l'aiguille; il prononçait un premier *tope* à l'instant où il enlevait le barreau, et un second *tope* à l'instant où la pointe de l'aiguille passait devant le repère suivant. De mon côté, tenant près de l'oreille une montre qui battait les 5^{mes} de seconde, je pouvais estimer le temps du parcours à moins d'un 10^{me} de seconde près. Chaque observation était répétée en général dix fois, et l'on prenait la moyenne des résultats, lesquels étaient toujours très-concordants. Ajoutons que lorsqu'il s'agissait de liquides volatils ou absorbants, on recouvrait la capsule d'une cloche en verre, à travers laquelle on observait, et que, dans le cas des solutions aqueuses, on appliquait, à l'intérieur de cette cloche, des morceaux de papier à filtre imbibés d'eau et placés de manière à ne pas empêcher la vue du parcours de la pointe considérée de l'aiguille; dans ce cas aussi, la capsule était posée sur une assiette dans laquelle on versait un peu d'eau.

§ 35. — Commençons par les résultats relatifs à l'eau distillée; ils ont été obtenus à la température de 18° à 19°.

Sur la surface de ce liquide, la durée du parcours de l'angle de 85° a été trouvée, comme moyenne de dix observations, égale à 4'',59; la plus petite et la plus grande des valeurs partielles étaient respectivement 4'',5 et 4'',7.

A l'intérieur du liquide, dix observations aussi ont donné, en moyenne, pour la durée du même parcours, 2'',37; les valeurs partielles extrêmes étaient 2'',3 et 2'',5.

Ainsi, bien que, sur la surface, une seule des faces de l'aiguille frotte contre l'eau, tandis qu'à l'intérieur les deux faces frottent simultanément et que, par



suite, l'aiguille semble devoir rencontrer une résistance double, cependant elle marche près de deux fois moins vite sur la surface qu'à l'intérieur. On doit donc conclure de là que la surface de l'eau oppose une résistance particulière, qu'il faut bien attribuer à une viscosité propre de la couche superficielle de ce liquide.

A la vérité, dans l'intérieur, l'ensemble de l'aiguille et de sa chape perd une petite partie de son poids, et conséquemment appuie un peu moins sur la pointe du pivot; mais, d'autre part, la chape frotte alors par toute sa surface contre l'eau, et, en outre, la tranche de l'aiguille, tranche qui a, comme je l'ai dit, 0^{mm},3 de hauteur, pousse directement le liquide, d'où naissent des résistances bien plus que suffisantes pour compenser la légère diminution du frottement à la pointe.

D'ailleurs ce n'est pas tout. Sur la surface, l'aiguille, en continuant sa course, a décrit, en moyenne, au delà du méridien magnétique, un angle de près de 8°, tandis qu'à l'intérieur, malgré sa vitesse plus grande, elle n'a dépassé le méridien magnétique que de 3° $\frac{1}{2}$. Ces faits en apparence contradictoires m'ont beaucoup étonné d'abord; mais je n'ai pas tardé à en avoir l'explication, et ils m'ont fourni une preuve nouvelle de la forte viscosité superficielle de l'eau: on a recommencé l'expérience sur la surface, mais après avoir saupoudré celle-ci d'un léger nuage de lycopode; alors on a reconnu que cette surface tout entière tournait en même temps que l'aiguille, seulement avec une vitesse moindre; c'est donc la couche superficielle qui, en tournant ainsi, entraîne l'aiguille si loin au delà du méridien magnétique, et dès lors il est tout simple qu'à l'intérieur du liquide, où cette action n'existe pas, l'aiguille n'atteigne qu'une distance beaucoup plus petite.

J'ai dit que la surface tourne moins vite que l'aiguille; c'est qu'elle a à vaincre, sur toute son étendue, le frottement contre le liquide sous-jacent. En observant le lycopode, on constate, le long du bord antérieur de chacune des moitiés de l'aiguille, un courant allant de la chape à la pointe; et, en effet, l'aiguille ne pouvant glisser sur la couche superficielle à cause de la résistance de celle-ci, et possédant assez de force pour marcher malgré cet obstacle, il faut bien que les parties de la couche en question sur lesquelles elle agit immédiatement soient déviées et forment les courants dont j'ai parlé.



Enfin j'ai réfléchi qu'en entravant la rotation de la couche superficielle, on augmenterait la résistance au mouvement de l'aiguille, et que, par suite, on ralentirait encore ce dernier. J'ai donc fait construire deux petites cloisons rectangulaires en verre, propres à être installées dans la capsule suivant des directions allant de la paroi de celle-ci vers l'axe. Ces cloisons ont l'une et l'autre 40^{mm} de longueur, 12 de hauteur et 2 d'épaisseur; chacune d'elles est fixée à un fil de laiton ployé en forme de chevalet, qui pince le bord de la capsule, mais qui s'élève au-dessus de ce bord, de sorte qu'on a la faculté de descendre plus ou moins la cloison dans le liquide. Les deux cloisons ont été placées à l'opposé l'une de l'autre, la première dans la partie Sud de la capsule, à 42° environ à l'Ouest du méridien magnétique, et la seconde, par conséquent, dans la partie Nord, à 42° à l'Est de ce même méridien; enfin, pour qu'elles ne pussent exercer aucune action capillaire sur l'aiguille, on les a enfoncées jusqu'à ce que leur petite surface supérieure affleurât celle de l'eau. Dans ces conditions, la durée moyenne du parcours des 85°, sur la surface, s'est élevée à 6'',44; alors aussi l'aiguille n'a plus dépassé le méridien magnétique.

Ces expériences ne laissent, on le voit, aucun doute sur l'existence, dans la couche superficielle de l'eau, d'une viscosité propre, supérieure de beaucoup à la viscosité de l'intérieur du même liquide, et si l'on considère que l'épaisseur de la couche superficielle d'un liquide est égale au rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire et conséquemment d'une excessive petitesse, on devra conclure des faits ci-dessus que la viscosité propre de la couche superficielle de l'eau est extrêmement grande. Remarquons ici que cette couche si mince doit entraîner dans sa rotation le liquide sous-jacent jusqu'à une certaine profondeur, de sorte que la masse totale qui tourne excède, en réalité, de beaucoup celle de la couche en question; c'est ce qui explique comment cette masse possède assez de vitesse acquise pour emporter l'aiguille au delà du méridien magnétique.

§ 36. — J'ai essayé ensuite la glycérine de Price. Ici, à cause de la forte viscosité intérieure, le frottement soit d'une des faces, soit des deux faces de l'aiguille contre le liquide, devait produire des résistances considérables, et les durées devaient conséquemment être beaucoup plus grandes qu'à l'égard



de l'eau. Je dois ajouter que les expériences ont été faites en janvier, à la température de 15°, et qu'à cette température peu élevée, la glycérine est beaucoup plus visqueuse qu'en été. On n'a fait que deux observations sur la surface, et deux à l'intérieur.

Dans le premier cas ¹, les valeurs de la durée ont été 36' et 35' 30''; dans le second, elles ont été l'une et l'autre de 19' 30''.

Ainsi, pour la glycérine, comme pour l'eau, la vitesse du parcours de l'angle de 85° est beaucoup plus grande à l'intérieur que sur la surface, d'où il faut conclure de même à l'existence, dans la couche superficielle, d'une viscosité propre énergétique.

Quant à l'angle au delà du méridien magnétique, il est nul, tant sur la surface qu'à l'intérieur, par suite des faibles vitesses de l'aiguille; celle-ci atteint simplement ce méridien, en approchant duquel sa marche devient d'une extrême lenteur.

Pour s'assurer si la couche superficielle tournait avec l'aiguille, on n'a pas employé le lycopode, dont il eût été difficile de débarrasser ensuite la glycérine; on a d'abord ramené l'aiguille à son point de départ, puis, pendant qu'elle y était maintenue, on a déposé sur la surface du liquide, dans le méridien magnétique et à 14^{mm} environ de la paroi de la capsule, un petit fragment de feuille d'or; ensuite, après avoir recouvert l'appareil de la cloche, on a rendu la liberté à l'aiguille, et l'on a observé la paillette. A peine l'aiguille avait-elle parcouru 1° ou 2°, qu'on a vu la paillette se mettre en mouvement, comme si elle était repoussée; après le parcours des 85° de l'aiguille, cette même paillette avait décrit, vers l'Ouest, un arc d'environ 30°. La couche superficielle de la glycérine tourne donc, comme celle de l'eau, en même temps que l'aiguille, et aussi avec une vitesse moindre.

§ 37. — Avec la solution saturée de carbonate de soude, à la température de 17°, les durées, obtenues chacune par la moyenne de huit observations très-concordantes, ont été : sur la surface 8'',04, et à l'intérieur 4'',59. Sur la surface, l'aiguille a dépassé d'environ 6° le méridien magnétique, et,

¹ Pour éviter autant que possible l'absorption de l'humidité de l'air, on avait enduit de glycérine l'intérieur de la cloche, sauf la portion à travers laquelle on devait observer.



à l'intérieur, elle l'a simplement atteint. Pour l'essai de la rotation de la couche superficielle, on a eu recours, comme ci-dessus, à la paillette d'or; celle-ci a commencé à se mouvoir en même temps que l'aiguille, et a décrit un arc d'environ 30° . La conclusion est donc encore la même.

Je ferai remarquer que la durée $4'' 59$ du parcours des 85° à l'intérieur de cette solution, est précisément égale à celle que nous avons trouvée plus haut pour le même parcours sur la surface de l'eau distillée; or, ainsi que je l'ai dit, à l'intérieur de notre solution l'aiguille s'arrête au méridien magnétique; c'est donc une preuve nouvelle que, sur la surface de l'eau, l'aiguille ne va au delà de ce méridien que parce qu'elle est entraînée par le mouvement de la couche superficielle.

§ 38. — Avec la solution saturée d'azotate de potasse, on a obtenu, par la moyenne de dix observations, à la température de 19° : sur la surface, durée $4'' 41$, angle au delà du méridien magnétique $5^\circ \frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée $2'' 38$, angle 3° ; donc toujours même conclusion; on a jugé inutile de faire l'essai de la paillette d'or.

§ 39. — En soumettant aux mêmes essais la solution saturée de chlorure de calcium, on a vu la durée, sur la surface, aller progressivement en augmentant: elle s'est élevée, en six observations, de $15''$ à $21''$. Soupçonnant que ce résultat pouvait provenir d'une faible action chimique exercée sur l'aiguille, action donnant lieu à un composé de fer qui, balayé sur la surface par l'aiguille, accroîtrait la viscosité superficielle, on a enduit d'un vernis à la gomme laque l'aiguille, ainsi que le pivot jusque près de la pointe, puis on a recommencé. Alors, en effet, l'augmentation ne s'est plus montrée, et l'on a eu, en moyenne, à la température d'environ 19° : sur la surface, durée $14'' 85$, angle $2^\circ \frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée $8'' 52$, angle 0° ; ainsi, même conclusion également.

J'ai cru pouvoir me borner, à l'égard de la première catégorie, aux cinq liquides précédents; d'ailleurs les acides sulfurique, azotique et tartrique, ainsi que l'ammoniaque, auraient fortement agi sur l'aiguille ou sur la couche de vernis dont on l'aurait recouverte. Je passe actuellement à la deuxième catégorie.

§ 40. — Voyons, en premier lieu, ce qui concerne l'alcool. Les expé-



riences ¹ ont donné, avec ce liquide, pour la durée moyenne du parcours des 85°, sur la surface, 1'', 48, et, pour celle du même parcours à l'intérieur, 3'', 30. Ici donc, à l'inverse des liquides précédents, c'est sur la surface que la durée est de beaucoup la plus petite. L'angle décrit au delà du méridien magnétique a été, en moyenne, sur la surface, de 21° $\frac{1}{2}$, et, à l'intérieur, de 3° $\frac{1}{2}$. Les cloisons n'ont produit absolument aucun effet; enfin le petit corps flottant ² est demeuré immobile jusqu'à ce que l'aiguille vint le heurter.

Il suit évidemment de ces résultats que, dans l'alcool, la viscosité de la couche superficielle ne surpasse aucunement celle de l'intérieur du liquide, et nous aurons à décider si elle ne lui est pas inférieure. Il suit encore des mêmes résultats que si l'aiguille, sur la surface, se transporte au delà du méridien magnétique, c'est bien en vertu de sa vitesse acquise. Les expériences ci-dessus ont été effectuées à la température de 17° à 18°.

Le jour où ont été faites sur l'eau distillée les observations du § 33, on a effectué, immédiatement après, une nouvelle détermination de la durée et de l'angle à l'intérieur de l'alcool, afin de pouvoir comparer ces éléments à ceux de l'eau dans des circonstances identiques; on a trouvé ainsi la durée égale à 2'', 66, et l'angle égal à 2° $\frac{1}{2}$; la durée, on le voit, est un peu plus grande et l'angle un peu plus petit qu'à l'égard de l'eau dans les mêmes conditions; la résistance intérieure de l'alcool au mouvement de l'aiguille paraît donc être un peu supérieure à celle de l'eau; on sait d'ailleurs que l'alcool s'écoule moins vite que l'eau par un tube étroit. De là l'opinion émise dans le § 26, savoir que la viscosité intérieure de l'alcool est, malgré l'apparence contraire, un peu plus grande que celle de l'eau. Quant aux différences entre les valeurs ci-dessus relatives au premier de ces liquides et celles précédemment obtenues, j'y reviendrai plus loin.

¹ Si l'on se borne à placer la cloche sur la capsule, le niveau du liquide baisse sensiblement, malgré cette précaution, pendant les essais, à cause de la volatilité de l'alcool; et cela influe surtout sur les angles. Afin d'écartier cet inconvénient, on a couvert l'intérieur de la cloche de papier à filtre imbibé d'alcool, en laissant à nu la portion nécessaire pour permettre l'observation; le tout était posé sur une assiette dans laquelle on a versé un peu d'alcool.

² Ce n'était pas une paillette d'or: ces paillettes déposées sur l'alcool et sur quelques autres liquides tels que l'essence de térébenthine, l'éther, etc., descendent invariablement au fond; on y a substitué un fragment d'aigrette de graine.



§ 41. — Voici les résultats avec l'essence de térébenthine, obtenus le même jour qu'avec l'alcool : durée moyenne sur la surface, $1''{,}40$; à l'intérieur, $5''{,}43$; angle moyen au delà du méridien magnétique ; sur la surface, $22^{\circ}\frac{1}{2}$; à l'intérieur, 1° . Comme avec l'alcool, l'aiguille attend, sans quitter sa place, que l'aiguille vienne la heurter ; d'après ce dernier résultat, on a jugé inutile de faire usage des cloisons. La viscosité de la couche superficielle de l'essence de térébenthine ne l'emporte donc pas non plus sur celle de l'intérieur.

La comparaison des valeurs ci-dessus avec celles qui concernent l'alcool dans les mêmes conditions, nous conduit à une conséquence importante : la durée $3''{,}43$ et l'angle 1° à l'intérieur de l'essence, sont l'une un peu plus grande et l'autre beaucoup plus petit que la durée $3''{,}30$ et l'angle $3^{\circ}\frac{1}{2}$ à l'intérieur de l'alcool ; il paraît donc que la viscosité intérieure est plus énergique dans l'essence. Maintenant rappelons-nous que, sur la surface, l'aiguille doit vaincre, par sa face en contact avec le liquide, la viscosité intérieure de celui-ci ; conséquemment si la viscosité de la couche superficielle était, dans chacun des deux liquides, simplement égale à la viscosité intérieure, l'aiguille devrait éprouver aussi une résistance plus grande à la surface de l'essence qu'à celle de l'alcool ; or, on l'a vu, il n'en est pas ainsi : sur la surface, la durée a été un peu moindre et l'angle un peu plus grand pour l'essence que pour l'alcool ; il semble dès lors nécessaire d'admettre, dans la couche superficielle de l'essence, une mobilité particulière qui diminue la résistance, et nous arrivons ainsi à cette déduction probable que, parmi les liquides de la deuxième catégorie, l'essence de térébenthine au moins a, dans sa couche superficielle, une viscosité plus faible que dans son intérieur. Pour abrégér le langage, j'exprimerai le fait en disant que la couche superficielle de ce liquide possède un *excès négatif* de viscosité. C'est, du reste, un point sur lequel je reviendrai bientôt.

§ 42. — Dans l'huile d'olive, on pourrait croire, au premier aperçu, qu'on retrouve un faible excès positif. En effet, les résultats avec ce liquide, à la température de 15° , ont été, en moyenne : durée sur la surface, $30''{,}30$, et, à l'intérieur, $79''{,}54$; dans les deux cas, l'aiguille atteint simplement le méridien magnétique ; en présence des cloisons, la durée sur la



surface a été de $31''{,}42$, c'est-à-dire quelque peu supérieure à celle obtenue sans leur emploi ; enfin la paillette d'or s'est mise en marche, mais seulement après un parcours de l'aiguille de plus de 30° , et elle ne s'était éloignée que de 4° du méridien magnétique à la fin du parcours des 85° .

Cependant le petit excès positif que semblent révéler ces expériences n'est pas réel : on a ajouté un peu d'huile dans la capsule de manière que l'aiguille fût plongée dans le liquide, mais seulement à 1^{mm} au-dessous de la surface, et l'on a refait, dans ces conditions, l'essai de la paillette. On a vu alors celle-ci se déplacer dès que l'aiguille a commencé à se mouvoir ; seulement elle marchait avec beaucoup plus de lenteur ; elle s'est arrêtée en même temps que l'aiguille lorsque cette dernière a atteint le méridien magnétique, et elle n'avait parcouru que 20° . La hauteur de l'huile au-dessus de l'aiguille ayant été successivement augmentée, l'effet a diminué, mais, même pour une hauteur de deux centimètres, il était encore très-notable : la paillette partait lorsque l'aiguille avait décrit environ 30° , et elle se déplaçait de 9° .

Il résulte de ces faits que, dans le cas d'un liquide très-visqueux comme l'huile, l'aiguille entraîne avec elle une masse considérable qui pousse le liquide devant elle, et que cette action se fait sentir immédiatement à une grande distance en avant de l'aiguille. Si l'effet est moins prononcé quand l'aiguille est simplement sur la surface, c'est qu'alors une seule de ses faces agit pour entraîner et pousser le liquide. On le voit donc, la viscosité propre de la couche superficielle de l'huile n'est pour rien dans le mouvement de la paillette et dans le petit retard apporté par les cloisons, et l'excès positif de ce liquide n'est qu'une apparence due aux effets de la viscosité intérieure¹. Bien plus, la rapidité de l'amincissement des calottes (§ 21) doit faire présumer que l'huile a, au contraire, un excès négatif.

Dans les liquides peu visqueux, tels que l'eau, l'alcool, etc., l'aiguille doit communiquer aussi un certain mouvement aux portions voisines, et il

¹ Le même entraînement et une semblable poussée doivent avoir eu lieu à l'égard de la glycérine (§ 56) ; mais, avec ce dernier liquide, l'excès positif était nettement accusé par la circonstance que la durée sur la surface était beaucoup plus grande que dans l'intérieur, et par le mouvement considérable de la paillette.



était important de savoir ce que donneraient, avec ces liquides, les mêmes expériences. On a essayé d'abord l'eau distillée; or, quand l'aiguille était plongée de 4^{mm}, elle n'a imprimé de mouvement à la paillette qu'au moment où elle passait dessous; mais pendant qu'elle revenait lentement au méridien magnétique après avoir décrit environ 2° au delà, la paillette a continué à marcher, et a parcouru 30°. Tout effet cesse lorsqu'il y a au-dessus de l'aiguille une hauteur d'eau de 7^{mm}. Dans l'alcool, les résultats ont été analogues; seulement, à 4^{mm} au-dessous de la surface, comme l'aiguille dépassait de beaucoup le méridien magnétique, le petit corps flottant l'accompagnait jusqu'à l'extrémité de sa course, puis allait encore un peu plus loin; en outre, pour qu'il n'y eût plus d'action, il a fallu une hauteur d'alcool de 9^{mm}, ce qui constitue un nouvel indice d'une viscosité intérieure un peu plus forte dans l'alcool que dans l'eau (§ 26). Ainsi, avec les liquides peu visqueux, soit qu'ils aient, comme l'eau, un excès positif, soit que, comme l'alcool, ils n'en possèdent pas, la masse entraînée par l'aiguille n'exerce aucune impulsion sensible en avant, de sorte qu'elle n'influe nullement sur les déductions tirées des essais de la paillette et des cloisons.

Ces derniers faits m'ont suggéré l'idée d'une expérience propre à mettre complètement hors de doute l'absence d'excès positif dans la couche superficielle de l'huile: je me suis dit que si l'on recouvrait l'eau de la capsule d'une mince couche d'huile sur la surface supérieure de laquelle l'aiguille exécuterait son mouvement, les effets décrits plus haut de la viscosité intérieure de l'huile ne pourraient se produire, et que, par conséquent, si l'huile n'a pas d'excès positif, la paillette resterait immobile. Or l'expérience a pleinement confirmé cette prévision; seulement, à ma grande surprise, j'ai reconnu que si la couche d'huile est très-mince, l'excès positif de l'eau se fait sentir: la paillette alors part en même temps que l'aiguille, et décrit un grand angle. L'épaisseur d'huile pour laquelle la paillette ne bouge plus du tout, est d'environ 4^{mm}.

§ 43. — Pour l'éther sulfurique¹, j'ai trouvé, à la température de 16° :

¹ Ici, plus encore qu'avec l'alcool, la volatilité du liquide tend à produire un abaissement du niveau. Le moyen employé à l'égard de l'alcool (voir la première note du § 40) aurait exposé l'observateur à respirer trop de vapeur d'éther; on a donc procédé de la manière suivante: on a



sur la surface, durée 1'',12, angle au delà du méridien magnétique 47°; à l'intérieur, durée 1'',49, angle 12°. L'expérience de l'aigrette présente des difficultés, parce que ce petit corps, avant qu'on ait rendu la liberté à l'aiguille, se promène constamment à la surface du liquide; cependant, en lâchant l'aiguille le plus tôt possible après avoir placé l'aigrette, on a pu constater par plusieurs essais que celle-ci était simplement heurtée. La couche superficielle de l'éther ne possède donc non plus aucun excès positif.

Quant aux mouvements en apparence spontanés de l'aigrette, ils proviennent, sans aucun doute, de l'évaporation du liquide, bien qu'on place, à chaque essai, la cloche sur l'appareil.

§ 44. — Le sulfure de carbone ¹ a fourni, à la température de 16° : sur la surface, durée 1'',20, angle au delà du méridien magnétique 36°; à l'intérieur, durée 2''0, angle 8°. Avec l'aigrette, mêmes difficultés et même résultat que pour l'éther; même conclusion par conséquent, savoir absence d'excès positif.

§ 45. — Avant de rapporter les résultats des mêmes épreuves sur les liquides de la troisième catégorie, revenons à la question de l'excès négatif. Les faits qui m'ont conduit à admettre cette propriété peuvent paraître insuffisants; mais l'idée m'est venue d'un moyen simple, propre à la mettre en évidence à l'égard de l'alcool, si elle existait dans ce liquide : l'alcool, en effet, se mêle en toutes proportions à l'eau, laquelle possède, on l'a vu (§ 35), un grand excès positif; si donc on mêle avec soin à de l'eau une quantité convenable d'alcool, et si ce dernier liquide présente effectivement un excès négatif, celui-ci devra détruire l'excès positif de l'eau. Or c'est ce que l'expérience vérifie pleinement : on prépare un mélange à volumes égaux d'eau et d'alcool, et l'on effectue, sur ce mélange, l'essai de la paillette; on constate alors que celle-ci est simplement heurtée par l'aiguille.

La proportion d'alcool qui suffit pour produire la simple neutralisation de

versé un peu trop de liquide dans la capsule, et l'on a simplement recouvert celle-ci de la cloche, puis, durant la série des essais, on a enlevé de temps à autre la cloche pour observer l'affleurement de l'aiguille, et, parmi les résultats partiels obtenus, on n'a conservé que ceux qui correspondaient à un affleurement régulier.

¹ Même procédé que pour l'éther.



l'excès positif de l'eau, est inférieure à celle que je viens d'indiquer; mais, avec cette dernière, l'expérience est des plus faciles, tandis qu'avec des proportions plus faibles, elle présente des difficultés résultant de la perte d'alcool par évaporation à la surface du mélange.

Pour effectuer l'expérience ci-dessus, on a laissé la capsule découverte; de cette manière, si le mélange contenait trop d'alcool, la couche supérieure perdant de celui-ci par évaporation, devait arriver graduellement au point neutre; puis, l'évaporation continuant, l'excès positif de l'eau devait commencer à reparaitre. Or c'est ce qui est arrivé: on a mesuré d'abord l'angle décrit par l'aiguille au delà du méridien magnétique; il était de 14° , et la paillette, essayée immédiatement après, a été simplement heurtée. Quelques minutes plus tard, l'angle n'était plus que de 12° , plus tard encore de 10° , et la paillette était toujours simplement heurtée. Pour l'angle de $9^\circ \frac{1}{2}$, la paillette a été poussée en avant quand l'aiguille en était à environ un degré; enfin lorsque l'angle s'est trouvé réduit à 5° , la distance de l'aiguille à la paillette au moment où celle-ci commençait à se déplacer, a été de quatre degrés. Pendant la durée de ces essais, l'évaporation de l'alcool faisait baisser peu à peu le niveau du liquide; mais on le rétablissait de temps à autre en introduisant, au moyen d'une pipette, à une certaine profondeur au-dessous de la surface, une quantité convenable du même mélange. La température était de 18° .

On ne doit pas conclure de cette expérience que l'angle qui correspond au point neutre est de 10° environ: l'aiguille, en parcourant son trajet, mêle plus ou moins la couche supérieure avec les couches sous-jacentes, et il en résulte une cause perturbatrice dont on ne peut évaluer l'influence.

Il faut donc nécessairement reconnaître que l'alcool et, à plus forte raison, l'essence de térébenthine, ont un excès négatif, c'est-à-dire que, dans chacun de ces liquides, la viscosité de la couche superficielle est moindre que la viscosité intérieure. On voit, de plus, que les excès négatifs dont il s'agit sont considérables.

§ 46. — Enfin un moyen tout différent m'a permis non-seulement de constater encore l'existence des excès négatifs, mais même de déterminer approximativement les valeurs relatives de ces excès pour plusieurs liquides.



On sait que les oscillations de l'aiguille aimantée sont régies par la même loi que celles du pendule; les formules concernant le mouvement de ce dernier dans un milieu résistant, s'appliquent donc aussi au mouvement de notre aiguille sur ou dans un liquide. Si l'on admet que la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse du pendule, l'équation différentielle du mouvement de celui-ci peut, on le sait encore, s'intégrer une première fois, et cette intégrale est :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2amCe^{2am\theta} + \frac{2g \cos \theta}{a(1 + 4a^2m^2)} + \frac{4gm \sin \theta}{1 + 4a^2m^2} \dots \dots \dots [1],$$

dans laquelle θ est l'angle variable que fait le pendule avec la verticale, a la longueur du pendule simple correspondant, m la résistance pour l'unité de vitesse, g la gravité, et C la constante arbitraire.

Pour l'appliquer à notre aiguille, prenons pour origine des angles non la position de repos, c'est-à-dire le méridien magnétique, mais le point de départ de l'aiguille, c'est-à-dire la position à 90° de ce méridien, et désignons par ω l'angle variable; on a ainsi $\theta = 90^\circ - \omega$; remplaçons de plus $2am$ par la seule lettre k ; celle-ci représentera alors une quantité proportionnelle à la résistance; déterminons la constante arbitraire C par cette condition que, pour $\omega = 0$, la vitesse est nulle; enfin considérons ω comme représentant l'angle total décrit par l'aiguille jusqu'au point qu'elle atteint au delà du méridien magnétique, point pour lequel la vitesse est également nulle. Avec ces conventions, l'intégrale ci-dessus devient simplement :

$$\sin \omega + k \cos \omega - ke^{-k\omega} = 0 \dots \dots \dots [2].$$

Quand l'expérience a fait connaître, à l'égard d'un liquide, l'angle décrit par l'aiguille au delà du méridien magnétique sur la surface ou dans l'intérieur, il suffit d'ajouter 90° à cet angle pour avoir ω , ou l'angle total parcouru depuis le point de départ; portant alors cette valeur de ω dans l'équation [2], on en déduira par tâtonnement la valeur correspondante de k . Afin d'éviter la confusion, nous conserverons k pour la résistance sur la surface, et nous nommerons k' la résistance à l'intérieur.



Avant d'aller plus loin, je dois faire remarquer que notre formule ne peut déterminer k lorsqu'il s'agit de liquides à excès positif; avec ceux-ci, en effet, l'angle décrit sur la surface au delà du méridien magnétique est dû, en tout ou en partie (§ 35), à ce que l'aiguille est emportée par la couche superficielle. L'application complète de la formule [2] est donc restreinte aux liquides qui n'ont pas d'excès positif, c'est-à-dire à ceux sur lesquels la paillette ou l'aiguille attend simplement l'aiguille.

La résistance due à la viscosité intérieure doit, comme je l'ai déjà fait observer, être à peu près deux fois aussi grande lorsque l'aiguille se meut dans le liquide que lorsqu'elle se meut sur la surface, puisque, dans le premier cas, elle frotte par ses deux faces, tandis que, dans le second, elle ne frotte que par une seule; si donc, pour un certain liquide, l'excès superficiel était égal à zéro, ou, en d'autres termes, si la couche superficielle possédait la même viscosité que l'intérieur, on devrait avoir sensiblement, à l'égard de ce liquide, $k = \frac{1}{2} k'$; je dis sensiblement, parce que (§ 35) de petites causes, telles que l'action de la tranche de l'aiguille à l'intérieur du liquide, la perte de poids dans cette même condition, etc., altèrent sans doute quelque peu cette égalité. Pour un liquide à excès négatif, on aura conséquemment

$$k < \frac{1}{2} k', \text{ ou } k - \frac{1}{2} k' < 0;$$

or la formule [2] permet de calculer cette différence pour tous les liquides sans excès positif et sur lesquels l'aiguille dépasse le méridien magnétique; on peut donc, ainsi que je l'ai dit, constater l'existence des excès négatifs, et obtenir, en même temps, leurs valeurs relatives approchées.

§ 47. — C'est ce que j'ai fait pour les quatre liquides alcool, essence de térébenthine, éther sulfurique et sulfure de carbone; en transportant dans la formule [2] les valeurs de ω déduites, pour ces liquides, des expériences des §§ 40, 41, 45 et 44, on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

75

LIQUIDES.	Valeurs de k .	Valeurs de k' .	Valeurs de $k - \frac{1}{2} k'$.
Essence de térébenthine .	2,54	57,28	— 26,50
Alcool	2,48	16,54	— 5,69
Sulfure de carbone . . .	1,24	7,11	— 2,51
Éther sulfurique. . . .	1,05	4,71	— 1,50

Ainsi les résultats de la formule confirment pleinement nos déductions précédentes : ils signalent des excès négatifs dans l'essence de térébenthine et dans l'alcool, et montrent que celui de l'essence est plus grand que celui de l'alcool; mais ils nous apprennent, en outre, que le sulfure de carbone et l'éther possèdent également des excès négatifs. Si l'on rapproche de ces résultats le fait de l'amincissement rapide des calottes des huiles grasses, ainsi que l'analogie des phénomènes, d'une part entre les calottes des acides lactique et acétique et celles d'essence de térébenthine et d'alcool, et, d'autre part, entre les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais et de chloroforme, et celles d'éther et de sulfure de carbone (§ 21), on devra regarder comme bien probable que la propriété de présenter un excès négatif appartient à tous les liquides de la deuxième catégorie.

Dans le tableau ci-dessus, j'ai rangé les liquides suivant l'ordre décroissant de leurs excès négatifs; or cet ordre est aussi l'ordre décroissant de leurs viscosités intérieures, comme cela résulte des valeurs respectives des angles décrits par l'aiguille au delà du méridien magnétique à l'intérieur de chacun d'eux; si donc il est permis de tirer quelque conclusion de résultats relatifs à un nombre de liquides aussi restreint, nous dirons que l'excès négatif paraît être d'autant plus grand qu'il appartient à un liquide plus visqueux. S'il en est ainsi, les huiles grasses et l'acide lactique doivent avoir des excès négatifs plus considérables encore que celui de l'essence de térébenthine.

La petitesse des excès négatifs, ou, ce qui revient au même, la moins grande mobilité des couches superficielles dans le sulfure de carbone et dans l'éther, est, sans doute, la cause principale de la longueur relative des



phases blanches dans les calottes de ces deux liquides (§§ 21 et 30). Il est vrai que le froid, qui doit encore amoindrir cette mobilité, raccourcit cependant, nous l'avons vu, les phases en question; mais, il ne faut pas l'oublier, deux causes opposées paraissent être alors en présence : d'une part la basse température des lames elles-mêmes, laquelle doit, en réalité, tendre à allonger les phases blanches, et, d'autre part, la diminution du petit reste d'évaporation, qui tend, au contraire, à les raccourcir (§ 30), et il se peut que cette dernière influence l'emporte sur la première.

Dans notre tableau, les valeurs des excès négatifs sont exprimées en fonction d'une unité qui n'est pas bien déterminée; il ne faut donc y voir que des valeurs relatives; et encore ne doit-on les regarder que comme des approximations même grossières. En effet, la formule d'où elles sont déduites est fondée sur une loi des résistances qui, on le sait, n'est pas rigoureuse¹; en second lieu, mon procédé de mesure des angles laisse à désirer, de sorte que je n'ai pas cru devoir pousser la précision, même dans les moyennes, au delà du demi-degré; d'ailleurs il y a une influence dont la formule ne pouvait tenir compte, et qui doit augmenter plus ou moins tous les angles : c'est qu'en vertu de sa vitesse acquise, la portion de liquide entraînée par l'aiguille (§ 42) emporte nécessairement cette dernière un peu au delà du point qui, sans cela, constituerait la limite de l'angle.

§ 48. — Nous pouvons maintenant exposer les résultats des essais avec l'aiguille sur les liquides de la troisième catégorie. Ici encore nous aurons à constater des faits bien remarquables.

Voyons d'abord ce qui concerne la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$. Avec une solution qu'on venait de préparer, on a trouvé, à la température de

¹ Depuis la rédaction de la partie de cette série relative aux excès dont il s'agit, j'ai eu connaissance d'un travail de Coulomb (*Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, an IX de la République), dans lequel le célèbre physicien montre, par une suite nombreuse d'expériences, que, lorsqu'un plan solide se meut très-lentement dans le sens de sa surface à l'intérieur d'un liquide, la résistance est proportionnelle à la simple vitesse. Mais les vitesses qu'il emploie sont environ cinq fois moindres que la plus lente de celles de mon aiguille dans les liquides qui ont fourni les résultats du tableau. Pour avoir des résultats exacts avec les vitesses de mes expériences, il faudrait probablement considérer la résistance comme composée de deux termes, l'un proportionnel à la simple vitesse, l'autre au carré de cette vitesse; mais alors la formule ne serait sans doute pas susceptible d'intégration.



18° : sur la surface, durée 4'',82, angle au delà du méridien magnétique 10° ; à l'intérieur, durée 2'',58, angle 5°.

Ces résultats s'accordent, on le voit, avec ceux des calottes pour accuser nettement une forte viscosité superficielle. Il était nécessaire, pour une raison que l'on comprendra plus loin, de les comparer à ceux que fournit l'eau distillée dans des conditions identiques ; on a donc opéré le même jour sur l'eau distillée, et l'on a obtenu : sur la surface, durée 4'',93, angle 10° ; à l'intérieur, durée 2'',58, angle 5°.

Comme les observations de ce genre comportent inévitablement de petites erreurs dont il doit, en général, rester quelque chose dans les moyennes, on a recommencé, à une autre époque, en opérant aussi le même jour sur les deux liquides ; la température était d'environ 21°. Les résultats ont été : avec la solution de savon, sur la surface, durée 4'',14, angle $6^{\circ} \frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée 2'',32, angle $4^{\circ} \frac{1}{2}$; avec l'eau distillée, sur la surface, durée 4'',07, angle 8° ; à l'intérieur, durée 2'',08, angle 4°.

Dans le premier de ces deux couples de séries, les résultats relatifs aux deux liquides n'ont guère différé entre eux ; dans le second, ils se sont un peu éloignés, ce qui tient sans doute aux erreurs inévitables des observations, surtout à l'égard de la durée à l'intérieur ; pour celle-ci, en effet, la vitesse de l'aiguille étant beaucoup plus grande, il était fort difficile de signaler avec précision l'instant du passage de la pointe en face du repère. Quoi qu'il en soit, on peut conclure de l'ensemble de ces mêmes séries que la présence de $\frac{1}{40}$ de savon ne change que faiblement la viscosité superficielle du liquide ; nous verrons plus loin qu'elle paraît la diminuer un peu.

L'alcool nous a déjà montré (§ 40) que, pour un même liquide, les valeurs des durées et des angles obtenues par des séries d'observations effectuées à des époques différentes peuvent s'éloigner très-notablement les unes des autres ; l'eau distillée, ainsi que la solution de savon, en offrent de nouveaux exemples : pour l'eau, les séries du § 35 et celles que nous venons de rapporter ont donné, sur la surface, les valeurs respectives 4'',59, 4'',93 et 4'',07, et, à l'intérieur, 2'',37, 2'',58 et 2'',08 ; la solution de savon montre, on a pu le voir, des différences analogues. Disons ici, pour ne plus y revenir, que toutes ces différences tiennent aux variations du magnétisme de l'aiguille :



pendant le long temps qu'a exigé l'ensemble de mes expériences, ce magnétisme a plus d'une fois diminué, et lorsque la diminution paraissait trop grande, on soumettait l'aiguille à une nouvelle aimantation. Aussi, quand il s'est agi de comparer un liquide à un autre, on a toujours eu soin d'opérer le même jour sur les deux.

Quant aux angles, il semble qu'ils devraient être, pour un même liquide, d'autant plus grands que les durées sont plus petites, puisque alors l'aiguille atteint le méridien magnétique avec plus de vitesse acquise soit en elle-même, soit dans les couches qu'elle a mises en mouvement; or c'est précisément le contraire qui a lieu en général, comme le montrent nos mesures. On peut, je crois, se rendre raison de cette singularité, en observant que lorsque l'aiguille est plus fortement aimantée, sa force directrice tend à annuler sa vitesse à une moindre distance au delà du méridien magnétique. Quelques exceptions me portent cependant à penser que parfois une autre influence, dont la nature m'échappe, agit plus ou moins sur les angles.

Bien qu'on obtienne si aisément d'énormes bulles avec une solution aqueuse de savon de Marseille, on ne parvient pas à en former, même de petites, avec une solution alcoolique de la même substance. C'est ce qu'il était facile de prévoir d'après nos résultats, sachant que l'alcool possède (§§ 45 et 47) un excès négatif considérable.

§ 49. — La solution de savon mou de ménage à $\frac{1}{50}$ (voir la deuxième note du § 22) a donné, à la température de 19° : sur la surface, durée 4'',40, angle 6° $\frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée 2'',38, angle 5°; ainsi même conclusion quant à la viscosité superficielle.

§ 50. — Avec la solution de savon de colophane (voir la troisième note du § 22), on a trouvé, à la température de 18° : sur la surface, durée 7'',30, angle au delà du méridien magnétique 5°; à l'intérieur, durée 4'',48, angle 0°; arc décrit par la paillette 26°. La solution de savon de colophane a donc aussi une viscosité superficielle à excès positif.

§ 51. — Arrivons au liquide le plus extraordinaire de tous ceux que j'ai examinés; je veux parler de la solution de saponine. Celle que j'ai d'abord essayée contenait $\frac{1}{80}$ de saponine, et ne paraissait pas plus visqueuse que l'eau pure; or, sur sa surface, l'aiguille, amenée, comme toujours, à 90° du méri-



dien magnétique, puis abandonnée à elle-même, n'a pas quitté sa position, malgré des coups frappés sur la table, absolument comme si le liquide s'était recouvert d'une pellicule de nature solide. Cependant la surface présentait le poli parfait d'un liquide, et, de plus, en l'agitant légèrement avec l'extrémité d'une spatule ou d'un fil métallique, on n'a pu reconnaître la moindre trace de pellicule. Des solutions à $\frac{1}{100}$, et même à $\frac{1}{160}$, ont présenté les mêmes résultats.

On a effectué l'essai de l'aiguille à l'intérieur du liquide avec la solution d'un second échantillon de saponine, le premier ayant été épuisé par d'autres expériences. Ce second échantillon n'était pas tout à fait aussi excellent : pour obtenir les meilleurs résultats, il a fallu le dissoudre dans une moindre quantité d'eau ; la solution que j'ai employée était à $\frac{1}{60}$; elle donnait des bulles de 12 à 13 centimètres, et, sur sa surface, l'aiguille placée à 90° du méridien magnétique, demeurait de même parfaitement immobile.

A l'intérieur, la durée du parcours des 85° a été 2'',72, et l'angle au delà du méridien magnétique 2° ; la température était de 16°. On a répété aussi, le même jour, l'essai à l'intérieur de l'eau distillée, et l'on a obtenu : durée 2'',66, angle 2°. Ces résultats s'éloignent déjà bien peu les uns des autres, et l'on doit en conclure qu'avec la solution à $\frac{1}{100}$ du premier échantillon, ils auraient été plus rapprochés encore ; on peut donc admettre que la viscosité intérieure d'une bonne solution de saponine est sensiblement égale à celle de l'eau pure.

Les observations rapportées plus haut ne permettent guère de considérer la résistance au mouvement de l'aiguille sur la surface comme résultant de la formation d'une pellicule ; on est donc conduit à admettre, dans la solution de saponine, une viscosité superficielle extrêmement forte, et c'est ce que confirment les expériences suivantes :

Si la surface se recouvrait d'une pellicule, celle-ci devrait provenir soit de l'évaporation de l'eau, soit d'une action de l'oxygène de l'air sur la saponine, action que, du reste, la chimie ne signale point ; or j'ai abandonné pendant trois jours une solution à $\frac{1}{100}$ du premier échantillon dans une capsule sur laquelle un papier était simplement posé pour abriter le liquide de la poussière, et, après ce long temps, on n'a remarqué aucun changement dans la surface.



En second lieu, lorsqu'une bulle que l'on gonfle avec la pipe vient à se briser, elle ne disparaît pas comme le ferait une bulle de savon : on voit tomber de l'orifice de la pipe une masse allongée dans le sens vertical, resserrée dans le sens horizontal, et constituée par une sorte de membrane chiffonnée d'un blanc mat. Si l'on reçoit cette masse sur le liquide, elle y forme aussitôt un ensemble de calottes irrégulières agglomérées, et, si l'on examine rapidement celles-ci, on reconnaît que leur aspect mat tient à une foule de petites masses d'air très-allongées qui semblent emprisonnées dans les lames ; mais bientôt ces petites masses disparaissent, les calottes se régularisent plus ou moins et se montrent tout à fait transparentes ; enfin si l'on crève ces mêmes calottes, aucune trace de pellicule ne reste à la surface du liquide. Dans cette expérience, on le comprend, la bulle se détache de l'orifice, et alors, en vertu de la pression qu'elle exerce, chasse, par l'ouverture ainsi formée, l'air qu'elle renfermait ; mais, par suite de la rigidité de ses couches superficielles, elle ne peut revenir sur elle-même qu'en se plissant et emprisonnant ainsi de petites masses d'air dans une grande quantité de canaux cylindriques ; seulement on ne voit pas bien pourquoi ce plissement s'opère de façon à ne resserrer la bulle que dans le sens horizontal. Lorsque cette espèce de membrane plissée tombe sur le liquide, les petits canaux ci-dessus se brisent les uns après les autres, et enfin, quand on crève les petites calottes, tout reprend parfaitement son aspect liquide.

On le voit donc, ces apparences de membranes sont simplement dues à une énorme viscosité des couches superficielles, et non à la génération d'une véritable pellicule solide. Voici encore quelques faits singuliers dépendant des mêmes causes :

On gonfle, à l'orifice de la pipe, une bulle d'environ 6 centimètres de diamètre, puis on aspire par le tuyau ; la bulle alors, au lieu de revenir sur elle-même dans tous les sens, ne diminue que dans le sens latéral, et, si l'on arrête à temps l'aspiration, se transforme en un cône ayant l'orifice pour base. La surface de ce cône est d'abord ridée, puis devient parfaitement unie, et la lame persiste ensuite dans le même état avec sa forme conique.

On dépose à la surface du liquide une bulle d'environ 4 centimètres de diamètre, et, maintenant l'orifice de la pipe en contact avec la calotte dans



laquelle cette bulle s'est transformée, on souffle pour en augmenter les dimensions, jusqu'à ce qu'elle se brise. Aussitôt la lame s'affaisse sur le liquide en plusieurs grandes portions, dont chacune demeure séparée de la surface du liquide par une lame d'air, et se rapetisse peu à peu comme si elle rentrait dans la masse par la portion de son bord restée adhérente, en employant plusieurs secondes à effectuer ce retrait. Quand tout a disparu, la surface se montre aussi parfaitement liquide qu'auparavant.

La solution de saponine est certainement le liquide qui fournit la mousse la plus abondante, et peut-être la plus persistante : il suffit de dissoudre dans l'eau $\frac{1}{4000}$ de bonne saponine pour que le liquide, agité dans un flacon, donne encore une mousse de 35^{mm} de hauteur, qui exige plusieurs jours pour son annulation complète. D'autre part, l'alcool n'exerce aucune action chimique sur la saponine; il ne la dissout même, à froid, en quantité notable qu'à la faveur de l'eau. Or, si l'on ajoute à une solution de saponine un volume égal d'alcool, l'agitation ne développe plus sur le mélange qu'une mousse à peine sensible, qui disparaît presque instantanément. C'est que l'excès négatif de l'alcool neutralise complètement l'excès positif de la saponine.

§ 52. — J'ai dit ci-dessus qu'une solution de bonne saponine à $\frac{1}{4000}$ développe encore, par l'agitation, une mousse abondante et persistante; mais ce liquide refuse de se gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe; c'est donc un second exemple à ajouter à celui que présente (§ 23) la solution de gomme arabique à $\frac{1}{10}$, d'un liquide fournissant une mousse assez volumineuse et très-durable, et refusant de se façonner en bulles.

En parlant (§ 12) de la formule à laquelle arrive M. Dupré pour exprimer la vitesse de retrait d'une lame liquide qui se brise, j'ai avancé que cette formule faisait abstraction d'un élément important auquel M. Dupré ne pouvait avoir égard, et qui devait, pour certains liquides, rendre les résultats très-inexactes; l'élément dont il s'agit est la viscosité superficielle; nous avons vu plus haut, en effet, que la viscosité superficielle d'une solution de saponine exerce une telle influence sur le phénomène, qu'une lame de cette solution peut exiger plusieurs secondes pour son retrait.

§ 53. — La viscosité intérieure d'une solution de bonne saponine à $\frac{1}{100}$ est, on l'a vu, à fort peu près égale à celle de l'eau pure, bien que cette so-



lution donne, à l'orifice d'une pipe, des bulles de 12 centimètres de diamètre; on peut conclure aussi des valeurs de la durée à l'intérieur dans les séries comparatives du § 48, malgré la petite divergence qui s'y rencontre, que la viscosité intérieure de la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$ l'emporte fort peu sur celle de l'eau pure; et cependant, avec cette solution, on gonfle, à l'orifice d'une pipe, des bulles de plus de 25 centimètres de diamètre. Ajoutons qu'on forme encore des bulles de 40 centimètres avec une solution à $\frac{1}{500}$ du même savon, liquide dont la viscosité intérieure ne peut évidemment différer d'une manière appréciable de celle de l'eau; si, en outre, nous nous rappelons que des liquides très-visqueux, tels que l'huile d'olive, la glycérine et une solution de gomme, sont complètement impropres à la génération des bulles, nous ne pourrions conserver aucun doute sur l'erreur de l'opinion accréditée qui attribue à la viscosité ordinaire la propriété des liquides qui se laissent aisément développer en bulles volumineuses.

Cependant l'influence de la viscosité intérieure n'est pas tout à fait nulle, surtout à l'égard des lames de la première et de la troisième catégorie. Dans celles de la deuxième, les deux couches superficielles ayant plus de mobilité moléculaire que la couche interposée, la descente du liquide s'effectue principalement par les premières, et le plus ou moins de viscosité de la couche interposée doit avoir peu d'effet; c'est ainsi que les lames d'huile s'atténuent avec une extrême rapidité (§ 21), malgré la forte viscosité intérieure du liquide. Mais dans les lames de la première et de la troisième catégorie, où la mobilité moléculaire est moindre dans les couches superficielles que dans la couche interposée, celle-ci participe nécessairement davantage à la descente, et sa viscosité doit intervenir jusqu'à un certain point; nous en verrons plus loin (§§ 58 et 62) des exemples.

§ 54. — La solution d'albumine, préparée comme je l'ai indiqué (cinquième note du § 22), présente, bien qu'à un degré moins prononcé, des propriétés analogues à celles de la solution de saponine: sur la surface, l'aiguille, laissée libre à 90° du méridien magnétique, a employé environ trois quarts d'heure à décrire un angle de 35°, et n'a pas été plus loin; à l'intérieur, la durée du parcours des 85° n'a été que de 9'',77.

La viscosité superficielle de ce liquide, quoique moins énorme que celle



de la solution de saponine, est donc encore extrêmement énergique; aussi quand les bulles atteignent 11 à 12 centimètres, elles donnent des membranes semblables à celles des bulles de saponine.

Si l'on ajoute à notre solution d'albumine 10 fois son volume d'eau distillée, le mélange fournit encore une mousse abondante et très-persistante, mais on ne parvient plus à le façonner en bulles, ce qui constitue un troisième exemple analogue à ceux que j'ai déjà signalés; j'essaierai plus loin (§ 68) d'expliquer ce singulier phénomène.

Je n'ai pas essayé avec l'aiguille la solution d'acétate de fer; je n'en avais à ma disposition qu'une trop petite quantité.

§ 55. — Ainsi les résultats obtenus avec l'aiguille aimantée à l'égard des quinze liquides que j'ai soumis à ce genre d'essai, confirment pleinement les déductions tirées (§ 26) des expériences sur les calottes laminaires; on peut donc, je pense, regarder comme bien établi le principe suivant :

La couche superficielle des liquides a une viscosité propre, indépendante de la viscosité de l'intérieur de la masse; dans certains liquides, cette viscosité superficielle est plus forte que la viscosité intérieure, et souvent de beaucoup, comme dans l'eau et surtout dans une solution de saponine; dans d'autres liquides elle est, au contraire, plus faible que la viscosité intérieure, et souvent aussi de beaucoup, comme dans l'essence de térébenthine, l'alcool, etc.

L'idée première d'une viscosité propre de la couche superficielle appartient, on l'a vu (§ 7), à M. Hagen; mais ce savant considère la viscosité dont il s'agit comme l'emportant, dans tous les liquides, sur la viscosité intérieure. J'ai rappelé (*ibid.*) les deux faits qu'il cite; or le premier, savoir la moindre vitesse des couches supérieures dans un cours d'eau, ne se rapporte qu'à ce liquide, qui a effectivement, nous le savons, une forte viscosité superficielle; et le second, c'est-à-dire le développement des calottes laminaires, ne peut être invoqué, puisque ces calottes se forment parfaitement sur l'alcool, sur l'essence de térébenthine, etc., liquides dans lesquels la couche superficielle est, au contraire, nous le savons aussi maintenant, plus mobile que l'intérieur.

Suivant M. Meunier comme suivant M. Hagen, la couche superficielle est plus dense que l'intérieur. Je ne pense pas que M. Meunier ait publié son mé-



moire, et j'ignore sur quels faits il fonde son opinion; mais, si l'on s'en rapporte à l'article très-succinct des *Comptes rendus*¹, il regarde aussi cet excès de densité comme une propriété commune à tous les liquides.

On voit actuellement ce que le principe énoncé plus haut, principe déduit d'expériences directes, présente de particulier, et par quel point essentiel il diffère de ceux de M. Hagen et de M. Meunier.

§ 56. — Le principe en question étant, je crois, mis hors de doute, reprenons l'étude des relations entre la viscosité superficielle et la tension.

Pour pouvoir apprécier nettement ces relations dans différents liquides, il faudrait avoir un moyen précis de déterminer numériquement les valeurs de la viscosité superficielle, comme on détermine celles de la tension. Ce moyen, je l'ai cherché en vain; mais on peut, du moins, tirer un utile parti de la comparaison des durées respectives du parcours de l'aiguille sur la surface et à l'intérieur.

En effet, dans les liquides qui possèdent une viscosité superficielle extrêmement énergique, comme les solutions de saponine et d'albumine, la durée sur la surface est infinie, de sorte que le rapport à la durée intérieure est également infini; dans les liquides de la deuxième catégorie, où la viscosité superficielle est, au contraire, très-faible, le rapport de la durée extérieure à la durée intérieure n'est qu'une fraction; enfin dans les liquides tels que l'eau où la viscosité superficielle est modérée, le rapport est plus grand que l'unité, mais fini. Ainsi, bien que les rapports dont il s'agit ne puissent évidemment servir de mesure exacte aux viscosités superficielles, on doit reconnaître qu'ils en dépendent, et l'on peut admettre que lorsqu'ils présentent une différence notable d'un liquide à un autre, il y a aussi, en général, une différence de même sens entre les viscosités superficielles de ces liquides.

Cela posé; cherchons les valeurs du rapport en question pour tous les liquides de la première et de la troisième catégorie à l'égard desquels nous en avons mesuré les éléments.

Pour l'eau distillée, les rapports déduits des expériences des §§ 35 et 48 sont 1,94, 1,91 et 1,96; de plus, lorsque j'ai comparé la solution de saponine

¹ Voir la note du § 26.



à l'eau distillée (§ 51), les durées moyennes sur la surface et à l'intérieur de ce dernier liquide ont été respectivement 4'',99 et 2'',66, d'où le rapport 1,88; la moyenne des quatre rapports est donc 1,92.

Dans le calcul du rapport relatif à la glycérine de Price, on n'a employé, pour la surface, que la première des deux durées indiquées dans le § 36; des expériences antérieures m'avaient appris, en effet, qu'avec ce liquide, les durées sur la surface vont toujours quelque peu en décroissant, à cause sans doute d'une petite absorption de vapeur d'eau, à laquelle on n'obvie pas complètement par l'enduit de glycérine appliqué à l'intérieur de la cloche. On a ainsi, pour le rapport en question, la valeur 1,85.

On a de même, par les éléments donnés dans les §§ 37, 38 et 39 :

pour la solution de carbonate de soude	1,75,
— celle d'azotate de potasse	1,85,
— celle de chlorure de calcium	1,74.

A l'égard des liquides de la troisième catégorie, on obtient :

pour la solution de savon de Marseille, par les résultats des deux séries du § 48, les rapports 1,87 et 1,78, moyenne	1,82,
pour la solution de savon de ménage (§ 49).	1,85,
— celle de savon de colophane (§ 50).	1,65.

Quant aux solutions de saponine et d'albumine, nous savons que les rapports qui les concernent ont des valeurs infinies.

§ 57. — Examinons actuellement tous ces rapports de plus près, et voyons quelles conséquences on peut en déduire.

Le rapport 1,85 de la glycérine de Price est assez peu inférieur au rapport 1,92 de l'eau distillée; cependant il ne faudrait pas en conclure que la viscosité superficielle de la glycérine est voisine de celle de l'eau, l'énorme différence des viscosités intérieures de ces deux liquides introduisant un élément considérable d'erreur au point de vue de la comparaison des rapports. En effet, à cause de la résistance énergique opposée par la viscosité intérieure de la glycérine, l'aiguille ne conserve, tant sur la surface qu'à l'intérieur de cette substance, qu'une très-petite portion de sa force directrice; mais dès lors un



excès superficiel peu intense devient très-grand relativement à ce faible reste de force, et conséquemment doit diminuer beaucoup la vitesse de l'aiguille sur la surface; or la viscosité de la couche superficielle pouvant être regardée comme égale à la viscosité intérieure plus l'excès positif, on voit qu'avec une viscosité intérieure très-forte et un excès positif très-petit, ce dernier pourrait passer du simple au double ou au triple sans que la viscosité superficielle totale changeât beaucoup, tandis que le rapport des durées subirait, au contraire, de très-grandes variations. Ainsi, comme je l'ai dit, dans le cas d'un liquide très-visqueux, le rapport des durées ne fournit plus d'indication immédiate sur l'intensité de la viscosité superficielle.

Un moyen simple se présentait pour vérifier ces déductions et s'assurer si la grande valeur du rapport de la glycérine est illusoire. Ce moyen consistait à ajouter de l'eau à la glycérine pour amoindrir suffisamment la viscosité intérieure, et à soumettre le mélange à l'essai de l'aiguille. Or, avec un mélange à volumes égaux de glycérine et d'eau distillée, les durées ont été : sur la surface, 10'',93, et, à l'intérieur, 7'',07; le rapport est donc 1,54; il est, on le voit, fort au-dessous de 1,92 appartenant à l'eau; et comme la viscosité intérieure est à peu près du même ordre que dans nos autres liquides, le rapport ci-dessus devient comparable à ceux de ces derniers, et nous pouvons en conclure que la viscosité superficielle du mélange en question est très-notablement inférieure à celle de l'eau.

Allons plus loin : la couche superficielle de ce même mélange étant nécessairement composée, comme le reste de la masse, de volumes égaux de glycérine et d'eau, le rapport 1,54 trouvé plus haut peut être regardé comme ne s'écartant guère de la moyenne entre les deux valeurs qu'on obtiendrait, d'une part, si la couche superficielle seule du liquide était formée de glycérine pure, et, d'autre part, si cette même couche était formée d'eau pure; or, dans ce second cas, le rapport s'éloignerait évidemment peu de 1,92 correspondant à l'eau, la viscosité intérieure de notre mélange ne surpassant pas assez celle de l'eau pour introduire un changement bien notable. Si, d'après cela, nous conservons, pour le second cas, la valeur 1,92, et si nous désignons par x celle que donnerait le premier, nous pourrions poser $\frac{x + 1,92}{2} = 1,54$, d'où $x = 1,16$. Tel est donc approximativement le rapport de la glycérine de Price quand on écarte l'influence de la forte viscosité de l'inté-



rieur de la masse, et il nous apprend qu'il faut regarder la viscosité superficielle de cette substance comme étant, en réalité, beaucoup moindre que celle de l'eau.

§ 58. — Le rapport 1,63 du savon de colophane est aussi assez inférieur à celui de l'eau; or les expériences du § 22, en nous montrant que ce liquide, du moins tel que je l'ai préparé, donne des calottes qui n'ont jamais de phase incolore, nous ont fait connaître que sa viscosité superficielle, bien qu'à excès positif, est peu énergique; il y a donc ici concordance entre les indications fournies par les rapports et celles qu'on déduit de résultats plus nettement interprétables.

D'un autre côté, le rapport 1,16, que nous avons obtenu d'une manière indirecte et que nous avons été conduits à regarder comme donnant une idée de la vraie viscosité superficielle de la glycérine de Price, est bien plus encore au-dessous de celui de l'eau, et cependant les calottes de glycérine, même celles qui ont duré longtemps (§ 20), n'ont manifesté aucune coloration générale; en outre, les rapports 1,75 et 1,74 des solutions de carbonate de soude et de chlorure de calcium sont inférieurs aussi à celui de l'eau, bien que de moindres quantités; or, tandis que dans les calottes d'eau qui se sont moirées de rouge et de vert la phase blanche n'a été au maximum que de 43'', le carbonate de soude a donné des calottes qui n'ont éclaté qu'après 26'' sans qu'on y observât de trace de couleurs, et les calottes de chlorure de calcium ne se sont moirées qu'après 100'' au moins (*ibid.*); à l'égard des trois liquides ci-dessus, il semble donc y avoir contradiction entre les indications des rapports et celles des calottes; mais je vais montrer que cette contradiction n'est qu'apparente.

J'ai appelé l'attention (§ 53) sur une petite influence de la viscosité intérieure dans les lames de la première et de la troisième catégorie; or il est rationnel d'attribuer à cette influence le désaccord ci-dessus; on comprend, en effet, que, dans les calottes de glycérine, la forte viscosité intérieure ralentit assez la descente du liquide, malgré le peu d'énergie de la viscosité superficielle comparée à celle de l'eau, pour que la rupture ait lieu avant l'apparition d'aucun moiré. La durée du parcours de l'aiguille à l'intérieur de la solution de carbonate de soude a (§ 37) pour partie entière 4'', tandis qu'à l'intérieur



de l'eau (§§ 35 et 48), la partie entière n'a jamais été que de 2'' ; la viscosité intérieure de la solution dont il s'agit excède donc celle de l'eau, ce qui explique pourquoi, après 26'', les calottes n'avaient pas encore de moiré ; enfin la viscosité intérieure de la solution de chlorure de calcium est plus grande encore, puisque la partie entière de la durée est (§ 39) de 8'', ce qui rend raison des 100'' de phase incolore.

Prenons maintenant, parmi les liquides à l'égard desquels nous avons pu évaluer les rapports, ceux dont la viscosité intérieure est très-voisine de celle de l'eau. Il y en a trois, savoir les solutions d'azotate de potasse, de savon de Marseille et de savon mou de ménage ; pour chacun d'eux, en effet, la partie entière de la durée à l'intérieur est, comme pour l'eau, de 2''. Les rapports 1,85, 1,82 et 1,85 qui leur appartiennent respectivement, diffèrent assez peu de celui de l'eau, d'où nous inférerons que les viscosités superficielles de ces mêmes liquides approchent aussi de celle de l'eau ; or, dans les calottes d'eau, la phase blanche qui a précédé le moiré a été de 10'' à 13'', dans celles de savon de Marseille elle a été de 6'' à 20'', dans celles de savon mou de ménage, de 5'' à 14'' (§§ 20 et 22), et l'on peut évidemment, à travers leurs irrégularités, reconnaître qu'elles sont de même ordre. Quant aux calottes d'azotate de potasse, elles n'ont pas donné de moiré, mais leur persistance n'ayant pas dépassé 6'', nous ignorons si leur phase blanche n'aurait pas été analogue. L'accord entre les rapports et les calottes reparait donc quand les viscosités intérieures sont sensiblement égales. Ainsi, comme je l'ai avancé, la contradiction que j'ai signalée à l'égard de trois liquides n'est pas réelle ; elle provient simplement de l'influence de la viscosité intérieure.

Comme exemple encore de cette influence, je rappellerai que, dans les calottes de la solution d'albumine, la phase incolore a été beaucoup plus longue que dans celles de la solution de saponine, bien que (§§ 51 et 54) la viscosité superficielle du premier de ces liquides soit moins énergique que celle du second ; c'est que le contraire a lieu à l'égard des viscosités intérieures, les durées du parcours de l'aiguille à l'intérieur de ces mêmes liquides ayant respectivement pour parties entières 9'' et 2''. J'ai rappelé aussi, dans le § 31, la grande longueur de la phase blanche dans les calottes de la solution d'albumine pour montrer, déjà alors, que la viscosité super-



ficielle de cette solution l'emporte de beaucoup sur celle de la solution de chlorure de calcium; mais j'en avais le droit, car si, dans ces deux liquides, les phases blanches diffèrent considérablement, d'autre part les viscosités intérieures sont très-rapprochées, les parties entières de la durée à l'intérieur étant respectivement 8'' et 9''.

§ 59. — Avant de faire usage de nos rapports, présentons encore une remarque. Puisque ces rapports deviennent infinis pour des viscosités superficielles très-intenses mais finies, comme celles des solutions de saponine et d'albumine, on doit en inférer qu'ils varient suivant une loi plus rapide que les viscosités superficielles; or, abstraction faite des rapports excessifs de la saponine et de l'albumine, tous sont moindres que celui de l'eau; si donc nous prenons toujours ce dernier liquide comme type, et si, adoptant le rapport 1,92 qui lui appartient pour représenter sa viscosité superficielle, nous voulons conclure des rapports des autres liquides aux viscosités superficielles de ceux-ci, il semble qu'il faut les considérer tous comme trop faibles et que, pour en déduire les viscosités en question, on devrait les augmenter un peu, et d'autant plus qu'ils sont plus petits. Mais, d'un autre côté, dans tous nos liquides, la viscosité intérieure l'emporte sur celle de l'eau; pour les uns l'excès est extrêmement faible, et pour d'autres il est notable (j'écarte ici la glycérine, sur laquelle je reviendrai); le raisonnement que nous avons fait (§ 57) à l'égard du rapport immédiat de la glycérine, est donc applicable à tous, c'est-à-dire que, pour qu'ils pussent représenter les viscosités superficielles, il faudrait, d'après ce même raisonnement, les diminuer un peu, et d'autant plus que la viscosité intérieure est plus forte. Pour adapter nos rapports aux viscosités superficielles, il faudrait conséquemment leur faire subir deux petites corrections en sens contraires, lesquelles se compenseraient ainsi partiellement.

Afin de mieux apprécier les choses, plaçons en regard des rapports les parties entières de la durée à l'intérieur; nous aurons de cette manière le tableau qui suit :



SUR LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

LIQUIDES.	PARTIES ENTIÈRES de la durée.	Rapports.
Eau	2''	1,92
Solution de savon de Marseille	2	1,82
— de savon de ménage.	2	1,85
— d'azotate de potasse.	2	1,85
— de carbonate de soude.	4	1,75
— de savon de colophane.	4	1,65
— de chlorure de calcium.	8	1,74

Il nous montre d'abord que les trois rapports les plus rapprochés de celui de l'eau appartiennent aux liquides dont la viscosité intérieure est aussi très-voisine de celle de l'eau; les deux corrections opposées que chacun d'eux devrait subir seraient donc l'une et l'autre fort petites, et, après leur compensation partielle, les rapports dont il s'agit seraient sans doute à peine modifiés. Pour les trois autres liquides, les rapports étant plus notablement inférieurs à celui de l'eau, et les viscosités intérieures étant un peu plus fortes, les corrections seraient toutes deux plus grandes, et conséquemment, après leur compensation, les rapports ne seraient pas beaucoup altérés.

Quant à la glycérine, le rapport 1,54 que l'expérience nous a donné directement (§ 57) pour un mélange à volumes égaux de glycérine et d'eau, est plus encore au-dessous de celui de ce dernier liquide; mais, d'autre part, comme la partie entière de la durée à l'intérieur est de 7'', on peut aussi admettre une compensation plus ou moins approchée, et considérer le rapport dont il s'agit comme correspondant sans trop d'erreur à la viscosité superficielle du mélange; or cette viscosité doit être moyenne entre celle de la glycérine pure et celle de l'eau pure; pour avoir le rapport correspondant à la première, il faut donc refaire identiquement le calcul du § 57, et l'on retrouve ainsi le nombre 1,16, qui peut dès lors être adopté pour représenter approximativement la valeur relative de la viscosité superficielle de la glycérine de Price.

§ 60. — Après toute cette discussion, l'on m'accordera, j'espère, qu'à défaut de moyen de mesure plus précis, nous pouvons, sans trop de témérité, considérer nos rapports comme exprimant, d'une manière approchée,



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

91

les viscosités superficielles relatives des liquides, en écartant, bien entendu, les rapports infinis, et en prenant, pour la glycérine, le rapport corrigé 1,16. Il ne nous reste donc plus qu'à comparer aux tensions les viscosités superficielles ainsi évaluées.

Seulement, pour que ces nouveaux rapports ne soient point de simples fractions, nous représenterons par 100 la viscosité superficielle de l'eau ; une simple proportion nous donnera alors, pour chaque liquide, la viscosité superficielle dans le même système d'unités. Pour la glycérine, par exemple, nous poserons : $1,92 : 1,16 = 100 : y$, d'où $y = 60,42$. Avec les nombres ainsi obtenus, nous formerons les deux tableaux suivants :

PREMIÈRE CATÉGORIE.

LIQUIDES.	Viscosités superficielles.	Tensions des lames.	Rapports des viscosités superficielles aux tensions.
Eau	100,00	14,60	6,85
Glycérine de Price	60,42	8,00	7,55
Solution saturée de carbonate de soude	91,14	8,56	10,65
— — d'azotate de potasse	96,55	11,22	8,39
— — de chlorure de calcium	90,62	11,06	8,19

TROISIÈME CATÉGORIE.

LIQUIDES.	Viscosités superficielles.	Tensions des lames.	Rapports des viscosités superficielles aux tensions.
Solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$	94,79	5,64	16,81
— de savon mou de ménage à $\frac{1}{20}$	96,55	6,44	14,96
— de savon de colophane à base de potasse.	84,89	7,68	11,05
— de saponine à $\frac{1}{100}$	Non déterminée, mais extrêmement forte.	8,74	Non déterminé, mais très-grand.
— d'albumine	Id.	11,42	Id.



§ 64. — On le voit donc à l'inspection de ces deux tableaux : en premier lieu, les rapports de la viscosité superficielle à la tension sont tous plus grands à l'égard de ceux de nos liquides qui appartiennent à la troisième catégorie, c'est-à-dire qui donnent des bulles et une mousse volumineuse, qu'à l'égard de ceux qui appartiennent à la première et ne donnent conséquemment ni bulles ni beaucoup de mousse; de plus, sauf pour un seul, l'excès est considérable.

En second lieu, parmi les liquides du premier tableau, celui pour lequel le rapport a la valeur la plus élevée est la solution de carbonate de soude; aussi, de ces cinq liquides, c'est celui qui fournit, par l'agitation dans un flacon, la mousse la plus apparente : elle atteint un centimètre de hauteur, et emploie plus d'une heure à disparaître totalement; on peut donc conjecturer que si la solution saturée de carbonate de soude est impropre à former des bulles, elle est moins éloignée d'en donner que les quatre autres liquides.

En troisième lieu, celui des liquides du second tableau qui présente le plus petit rapport, est la solution de savon de colophane, et c'est aussi celui qui m'a fourni les bulles les moins grosses : j'ai effectué plusieurs préparations successives de ce liquide avec les mêmes substances, dans les mêmes proportions, et en employant le même procédé, mais, je ne sais pourquoi, ces préparations se sont montrées de moins en moins bonnes; la solution avec laquelle ont été faits les essais à l'aiguille (§ 50), essais dont on a déduit le nombre qui, dans le tableau, représente la viscosité superficielle, ne m'a donné que des bulles de 9 centimètres au maximum, tandis qu'avec les solutions de savon de Marseille et de savon de ménage, on obtient 25 centimètres, et, avec celles d'albumine et de saponine, 43 centimètres. Les résultats de nos deux tableaux sont donc bien d'accord avec la théorie exposée dans les §§ 31 et 32. Il y a, du reste, une petite incertitude à l'égard du savon de colophane : la tension 7,68 inscrite dans le tableau n'a pas été mesurée sur la même solution, mais sur une autre, qui résultait d'une préparation précédente, et qui donnait des bulles atteignant 42 centimètres, bien qu'à grand'peine, si mes souvenirs sont exacts.

On remarquera sans doute le peu de différence entre les rapports 10,65



et 11,05 appartenant respectivement à la solution de carbonate de soude, qui ne se laisse pas gonfler en bulles, et à celle de savon de colophane, qui en a donné d'un certain diamètre. Mais ceci encore est une conséquence de notre théorie; en effet, d'après nos tableaux, la viscosité superficielle est moindre dans le second de ces liquides que dans le premier; or il suit de la remarque énoncée à la fin du § 32, que si, avec cette viscosité superficielle assez peu énergique, le rapport 11,05 permet la formation de bulles de médiocre grosseur, ce même rapport, et, à plus forte raison, le rapport un peu moindre 10,65, peut ne plus la permettre avec une viscosité superficielle plus intense.

On comprend aussi, en vertu de la même remarque, pourquoi les bulles des solutions d'albumine et de saponine n'ont pas dépassé 13 centimètres, bien qu'à l'égard de ces liquides les rapports de la viscosité superficielle à la tension soient considérables; c'est que, par suite de l'énergie des viscosités superficielles, les rapports doivent être très-grands pour amener la possibilité de bulles volumineuses, et qu'ils ne le sont sans doute pas assez.

Enfin la remarque rappelée nous explique également pourquoi, tandis que les diamètres maxima sont sensiblement les mêmes pour ces deux liquides, le rapport est plus grand à l'égard du second; c'est que la viscosité superficielle de celui-ci est plus intense encore que celle du premier. Je crois, du reste, qu'avec la solution de saponine, je n'ai pas atteint le vrai diamètre maximum: à l'époque où j'ai cherché ce diamètre, en employant la solution du meilleur échantillon de saponine (§ 54), solution qui a servi à la mesure de la tension, j'ignorais que, pour développer les plus grosses bulles, le liquide devait être parfaitement limpide; si on l'avait rendu tel, on aurait probablement porté le diamètre un peu plus loin.

Quelques-uns des liquides de la première catégorie essayés au point de vue des calottes n'ont pu l'être, nous le savons, au moyen de l'aiguille; cependant, à l'égard du plus important d'entre eux, savoir de l'acide sulfurique, nous pouvons nous assurer, d'une autre manière, que la théorie est satisfaite. Pour qu'elle ne le fût pas, il faudrait que le rapport de la viscosité superficielle à la tension eût une valeur considérable; or la tension des lames d'acide sulfurique est très-forte: elle est égale à 12,88, et approche, on le



voit, de celle de l'eau; un grand rapport exigerait dès lors une viscosité superficielle beaucoup plus énergique que dans l'eau; mais, comme je l'ai dit à la fin du § 20, celles des calottes de l'acide en question qui n'ont que quelques millimètres de diamètre, durent souvent bien plus longtemps, et manifestent des couleurs : après une phase incolore d'une demi-minute à une minute environ, elles se moient de rose et de vert, et, dans les plus durables, apparaissent ensuite d'autres teintes; maintenant si, à sa forte viscosité intérieure, l'acide sulfurique joignait une viscosité superficielle très-énergique, ces colorations ne pourraient évidemment se produire qu'après des phases blanches bien plus longues; l'acide sulfurique a donc une viscosité superficielle assez faible, quoique à excès positif, et conséquemment le rapport est petit.

Enfin, quoique la solution d'acétate de peroxyde de fer n'ait pu être soumise non plus à l'essai de l'aiguille, il est aisé de faire voir qu'elle satisfait également à la théorie. La tension de ses lames est 10,2, c'est-à-dire assez forte; or, si l'on ne tient pas compte du rouge et du vert qui apparaissent momentanément au bas de la plupart des calottes pour s'effacer ensuite (§ 22), et qui sont probablement dus à la petite quantité d'acide acétique libre que contient toujours ce composé, l'observation montre (*ibid.*) que la phase incolore est très-longue, et qu'ainsi la viscosité superficielle doit être très-intense; le rapport de celle-ci à la tension a donc lui-même une valeur élevée; seulement elle ne l'est vraisemblablement pas assez pour que les bulles puissent parvenir à un grand diamètre.

§ 62. — Maintenant que nous connaissons, pour presque tous nos liquides, la valeur approximative du rapport de la viscosité superficielle à la tension, nous pouvons signaler quelques nouveaux exemples de la petite influence de la viscosité intérieure; ils concernent, non plus la durée de la phase blanche, mais la durée totale des calottes. C'est, en effet, évidemment à cette influence qu'il faut attribuer les 80'' de persistance maxima des calottes de glycérimé, et les 229'' des calottes de la solution saturée de chlorure de calcium, malgré la petitesse des rapports; c'est elle aussi, sans doute, qui a déterminé les 142'' des calottes de la solution saturée d'acide tartrique, ce liquide étant fort visqueux; enfin c'est par elle qu'on s'explique



pourquoi la persistance des calottes de la solution de saponine est loin d'atteindre celle des calottes de la solution d'albumine, bien que le rapport soit beaucoup plus grand à l'égard de la première.

§ 63. — Les résultats auxquels nous sommes arrivés vont nous permettre de rendre complètement raison des propriétés remarquables des bulles de liquide glycérique, et l'accord de l'explication avec les phénomènes apportera de nouveaux arguments à l'appui de notre théorie.

En premier lieu, cherchons quelle doit être la valeur approchée de la viscosité superficielle du liquide glycérique. Quand on prépare ce liquide au savon, les meilleures proportions sont celles que j'ai indiquées dans la série précédente, savoir 2,2 volumes de glycérine de Price pour 3 de solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$; or on peut admettre que, dans ce mélange, les viscosités superficielles se répartissent dans le rapport des volumes; si donc on prend, dans les tableaux du § 60, les valeurs des viscosités superficielles respectives des deux ingrédients, savoir 60,42 et 94,79, la viscosité superficielle du mélange sera égale à $\frac{2,2 \times 60,42 + 3 \times 94,79}{2,2 + 3} = 80,25$; elle est, on le voit, de beaucoup inférieure à celle de l'eau.

A la vérité, je considère ici le liquide glycérique comme un simple mélange, tandis que, dans la série précédente, j'ai essayé de montrer que la glycérine forme, avec le savon et l'eau, une combinaison définie; mais si cette combinaison existe réellement, ce qui n'est pas certain, elle est trop faible pour masquer les propriétés de ses éléments.

Quant à la tension du liquide, elle ne diffère pas d'une manière appréciable de celle de la solution de savon qui en fait partie. En effet, la tension d'une lame liquide peut (§ 9) être représentée par l'expression $\frac{r\rho}{2}$ ou $\frac{\rho d}{4}$, dans laquelle p est la pression exercée par une bulle du même liquide sur l'air qu'elle emprisonne, et d le diamètre de cette bulle; or on a vu (5^{me} série, § 28) qu'à l'égard du liquide glycérique, on a, aux températures ordinaires, $\rho d = 22,56$; on en déduit $\frac{\rho d}{4} = 5,64$, valeur qui est aussi celle de la tension d'une lame de notre solution de savon¹. Cette iden-

¹ M. Van der Mensbrugge a trouvé, pour le liquide glycérique (voir la première note du § 15), une valeur un peu plus forte, savoir 6; mais le liquide dont il s'est servi était ancien, et avait conséquemment subi plus ou moins d'altération.



tité ne doit pas surprendre : d'après les recherches de M. Dupré, la tension d'une solution de savon varie à peine par des changements même très-considérables dans la proportion d'eau, et sans doute la même chose a lieu quand on étend la solution avec de la glycérine; aussi, bien que la tension ci-dessus ait été mesurée à l'égard du liquide de ma 5^{me} série, lequel contenait un peu moins de glycérine, elle convient également à celui de ma 7^{me} série.

Dans le liquide glycérique, le rapport de la viscosité superficielle à la tension est donc égal à $\frac{80.25}{5.6.4} = 14,22$; or, avec une viscosité superficielle si peu intense et un rapport si élevé, le liquide dont il s'agit doit nécessairement se laisser développer en très-grosses bulles; et c'est ce que confirme l'expérience.

§ 64. — En second lieu, rappelons-nous (7^{me} série, § 44) que lorsqu'une bulle est réalisée avec un bon liquide glycérique, la lame, après s'être graduellement atténuée jusqu'à un certain point, reprend ensuite peu à peu une nouvelle épaisseur et revient en général, avant d'éclater, au rouge et au vert des derniers ordres. J'ai montré que cette marche rétrograde est due à ce que le liquide glycérique absorbe l'humidité de l'air, et j'ai annoncé (*ibid.*, § 42) que j'étudierais de plus près la cause du phénomène; c'est ce que je vais faire actuellement.

Dès le moment où la bulle est formée, la lame qui la constitue se trouve évidemment soumise à deux actions différentes, savoir celle de la pesanteur, qui tend à l'amincir en faisant incessamment glisser les molécules depuis le sommet jusqu'au bas, et celle de l'absorption, qui tend, au contraire, à l'épaissir. Cela posé, la marche des teintes montre que la cause d'amincissement est d'abord prépondérante, mais que, plus tard, c'est la cause d'épaississement qui prédomine; il y a donc une époque de l'existence de la bulle où ces deux causes se contrebalancent, c'est-à-dire où la lame gagne autant qu'elle perd. Or on ne peut s'expliquer, à moins d'une cause particulière, pourquoi l'équilibre entre le gain et la perte ne continue pas à subsister; en effet, les épaisseurs par lesquelles la lame repasse ensuite sont égales à celles qu'elle avait antérieurement; mais, à ces époques antérieures, elle allait en s'amincissant; comment donc concevra-t-on qu'avec les mêmes épaisseurs elle ne s'amincisse plus, surtout si l'on réfléchit qu'en devenant plus aqueux,

le liquide devient plus fluide? A la vérité, il devient aussi moins dense; mais comme la densité du liquide glycérique non altéré ne surpasse que d'un dixième environ celle de l'eau pure (5^{me} série, § 29), elle ne peut éprouver qu'une diminution très-faible, diminution compensée d'ailleurs par l'augmentation de fluidité.

§ 65. — Voici, du reste, une expérience qui prouve que le changement de densité n'est aucunement la cause du phénomène : un anneau horizontal en fil de fer est attaché par sa fourche sous le bras, d'un support muni de vis calantes; on soulève jusqu'à cet anneau une capsule contenant du liquide glycérique dans lequel on le fait plonger, puis on abaisse assez rapidement la capsule; l'anneau se trouve alors occupé par une lame à laquelle une goutte demeure suspendue; si cette lame est bien horizontale, il est clair que la goutte se tient exactement en son milieu; dans le cas contraire, on l'y amène au moyen des vis du support. Cela fait, on crève la lame, et l'on en réalise une autre par le même procédé; seulement on abaisse d'abord la capsule d'une quantité insuffisante pour que le caténoïde laminaire qui se développe entre l'anneau et la surface du liquide (7^{me} série, § 22) devienne instable, et on la maintient dans cette position pendant un temps qu'on a déterminé par un essai préalable; la lame caténoïde s'atténue alors graduellement, et, par l'abaissement ultérieur de la capsule, elle va remplir l'anneau sous une forme parfaitement plane, sans goutte suspendue, et bien horizontale.

Cette lame est d'abord incolore, mais, après quelques minutes, on la voit se barioler de rouge et de vert, puis, plus tard, prendre une teinte jaune parsemée de petites taches d'une autre couleur; plus tard encore, le jaune est remplacé par le bleu, puis par l'indigo, puis par le pourpre, après quoi les teintes rétrogradent, de sorte qu'à la fin reparait le bariolage rouge et vert des derniers ordres.

L'anneau qui m'a donné la meilleure réussite n'avait que 2 centimètres de diamètre; avec des anneaux plus grands, de 7 centimètres, par exemple, il y avait bien un commencement de rétrogradation des teintes, mais la lame éclatait toujours avant le retour au rouge et au vert; je dois dire, du



reste, que le liquide employé n'était pas excellent. Indiquons encore une précaution indispensable : les soudures des points où l'anneau s'attache aux deux branches de la fourche et celle du point où il se ferme, doivent ne présenter aucune saillie à l'intérieur de ce même anneau ; quand il y a de telles saillies, la lame perd de sa forme plane dans leur voisinage, elle montre, en ces endroits, des systèmes de bandes colorées qui occupent une assez grande étendue, et elle éclate beaucoup plus tôt.

Dans cette expérience, on le voit, la lame commence également par s'amincir jusqu'à un certain point, pour aller ensuite en s'épaississant ; or, comme elle est plane et horizontale, les variations de densité ne jouent évidemment aucun rôle, d'où il faut nécessairement conclure qu'elles sont de même sans influence à l'égard de la bulle, ainsi que je l'ai avancé. Quant à l'amincissement de la lame plane horizontale, il résulte de l'appel incessant opéré par les surfaces fortement concaves de la petite masse qui rattache cette lame à l'anneau (6^{me} série, § 41), et notre expérience offre un exemple curieux de ce genre d'action.

§ 66. — Actuellement, dans le cas de la bulle, comme dans celui de la lame plane, puisqu'une résistance nouvelle se développe au fur et à mesure de l'absorption de l'humidité, on est contraint de reconnaître que cette résistance s'engendre dans les deux couches superficielles, ou, en d'autres termes, que tandis que le liquide interposé devient plus fluide, les couches superficielles le deviennent moins. Alors, en effet, tout s'explique : le liquide descend avec une difficulté et une lenteur croissantes, et la lame s'épaissit librement par l'absorption.

Or l'augmentation de viscosité superficielle par une addition progressive d'eau, suppose nécessairement que la viscosité superficielle du liquide original est très-inférieure à celle de l'eau, et c'est ce que nous avons effectivement trouvé (§ 63).

Mais tandis que la viscosité superficielle de la lame qui constitue notre bulle devient de plus en plus forte, la tension change très-peu (*ibid.*), de sorte que le rapport va en croissant.

Ainsi, d'une part, à cause de l'absorption continue de la vapeur d'eau, la lame ne peut, dans aucune phase de son existence, arriver à être très-



ténue, et, d'autre part, le rapport entre la viscosité superficielle et la tension demeure assez grand pour rendre les déchirements difficiles jusqu'à ce que la lame se soit assimilée une très-grande proportion d'eau. Ces deux circonstances, on le voit, rendent pleinement raison de la longue persistance de la bulle.

Arrêtons-nous un moment sur la cause qui amène enfin la rupture. Le rapport de la viscosité superficielle à la tension va, il est vrai, en croissant; mais on peut admettre qu'il ne croît pas assez en comparaison de cette viscosité, de sorte qu'il finit par être insuffisant pour le maintien de la lame. Il y a, du reste, une autre cause à assigner à la rupture : on sait que les solutions de savon très-étendues se décomposent spontanément, ce qu'on reconnaît à ce qu'elles se troublent. Cette décomposition a lieu après un temps variable, mais j'ai cru remarquer qu'elle se produit beaucoup plus tôt et pour des proportions d'eau beaucoup moindres quand la solution a été faite à chaud : ainsi, par exemple, on avait préparé, le même jour et avec le même savon, deux solutions, l'une à chaud à $\frac{1}{50}$, l'autre à froid à $\frac{1}{100}$; après refroidissement de la première, on les a étendues toutes deux jusqu'à $\frac{1}{500}$; celle qui avait été faite à chaud s'est troublée immédiatement, et l'autre est demeurée limpide; on a pu amener ensuite cette dernière, sans qu'elle s'altérât, jusqu'à $\frac{1}{1000}$, puis à $\frac{1}{2000}$, et, le lendemain, elle était encore limpide. Ajoutons qu'une autre solution, faite également à froid et amenée à $\frac{1}{2000}$, s'est troublée moins d'une heure après sa formation. Or, dans mes diverses préparations de liquide glycérique, les solutions de savon avaient toujours été faites à chaud; on peut donc croire que lorsque la lame qui constitue la bulle s'est emparée d'une grande quantité d'eau, le savon qu'elle contient se décompose, et dès lors la bulle doit évidemment éclater.

§ 67. — J'ai dit (7^{me} série, § 17), à propos des bulles de liquide glycérique réalisées en vase clos, que, pour obtenir le plus de durée, les dimensions du vase devaient être considérables relativement à celles de la bulle; et, en effet, j'avais inutilement essayé en employant un vase de petite capacité. J'ai fait voir, en outre (*ibid.*), qu'on allait beaucoup plus loin encore si l'on plaçait préalablement des morceaux de chlorure de calcium au fond du vase; mais j'ai ajouté qu'il ne fallait pas trop dessécher l'atmos-



phère de celui-ci. L'explication de ces particularités m'avait échappé alors; aujourd'hui elle me paraît fort simple : une juste relation est nécessaire entre la cause d'amincissement et la cause d'épaississement; quand la lame trouve beaucoup de vapeur d'eau à absorber, les teintes rétrogradent trop tôt, et le liquide devient en moins de temps assez aqueux pour que la bulle éclate; quand, au contraire, la quantité de vapeur est insuffisante, soit parce que le vase est petit, soit parce qu'on en a trop desséché l'atmosphère, la lame s'atténue davantage, et se brise ainsi plus tôt par les causes accidentelles.

§ 68. — Il me reste à rendre raison du fait singulier des liquides qui fournissent une mousse épaisse et tenace, et refusent cependant de se développer en bulles à l'orifice de la pipe (§§ 23, 52 et 54). Supposons un liquide ayant une très-forte viscosité superficielle; pour qu'on puisse en former des bulles notables, il faudra, d'après la remarque du § 32, que le rapport de cette viscosité à la tension soit aussi très-grand; or imaginons qu'il ne le soit pas assez, mais qu'il se trouve à très-peu près à la limite au delà de laquelle il commencerait à permettre la réalisation des bulles. Un semblable liquide, bien que ne donnant pas de bulles ou en donnant dont le diamètre n'excède celui de l'orifice que de quelques millimètres, se recouvrira, par l'agitation, d'une mousse copieuse et durable. En effet, puisque, dans les conditions que nous lui assignons, notre liquide est peu éloigné de se laisser gonfler en bulles à un orifice de 2 centimètres environ, il doit se façonner aisément en lamelles très-petites comme celles dont se compose la mousse; de plus, par suite de l'énergie de la viscosité superficielle, ces lamelles ne peuvent s'amincir qu'avec une extrême lenteur; enfin, à cause de cette lenteur, et de la faiblesse relative de la tension, les déchirements doivent être fort rares dans les lamelles dont il s'agit, malgré l'appel opéré par les petites masses concaves dont elles sont bordées; la mousse se formera donc en abondance, et persistera longtemps.

Or les solutions de saponine et d'albumine qui ont présenté la propriété dont nous nous occupons, étaient sensiblement à la limite de la génération des bulles, et leurs viscosités superficielles devaient être suffisamment fortes, puisque ces solutions résultaient du mélange de liquides à viscosités superficielles énormes avec de l'eau, qui en possède déjà une assez intense; ces



mêmes solutions se trouvaient conséquemment dans les conditions que nous venons de discuter, et l'on admettra sans peine qu'il en est de même de la solution de gomme arabique du § 23.

§ 69. — Ainsi que nous le savons, quand une bulle d'air d'un centimètre environ de diamètre monte dans un liquide quelconque et atteint la surface, elle ne traverse pas celle-ci comme elle avait traversé les couches de l'intérieur, mais elle la soulève, comme si elle rencontrait là une pellicule résistante, et une calotte laminaire apparaît; c'est ce qui a fait penser à M. Hagen que la couche superficielle de tous les liquides est plus dense et plus visqueuse que l'intérieur. Or, nous le savons aussi maintenant, dans les liquides de notre deuxième catégorie, cette couche a, au contraire, plus de fluidité que l'intérieur; ce n'est donc pas à la viscosité propre de la couche superficielle qu'il faut recourir pour expliquer la simple génération des lames: j'ai fait voir, dans ma 6^{me} et dans ma 7^{me} série, que lorsqu'il s'agit seulement de cette génération en elle-même, sans avoir égard aux dimensions et à la persistance, on rend complètement raison du phénomène par la viscosité intérieure et la cohésion; mais j'ai montré, dans la série actuelle, que, pour le développement de lames grandes et assez durables, telles que celles d'eau de savon, la viscosité intérieure n'a qu'une influence très-secondaire. Quant à la cohésion, elle varie, on le sait, dans le même sens que le coefficient de la somme des courbures dans l'expression de la pression capillaire, coefficient qui, d'après les recherches de M. Hagen et de M. Dupré, n'est autre chose que la tension ¹; or cette dernière étant beaucoup plus faible dans l'eau de savon que dans l'eau pure, il en est nécessairement de même de la cohésion; conséquemment ce n'est pas non plus l'intensité de celle-ci qui rend possible la réalisation de grosses bulles, et, pour cette réalisation, des propriétés de nature toute différente doivent intervenir: j'espère avoir, sinon rigoureusement démontré, du moins rendu extrêmement probable, que

¹ J'ai admis, dans le § 24 de ma 5^{me} et dans le § 27 de ma 7^{me} série, que la cohésion est proportionnelle au produit $h\rho$ de la hauteur capillaire par la densité, et je ne suis pas le seul de cette opinion; dans ce cas, comme la tension est elle-même proportionnelle à ce produit, la cohésion et la tension varieraient non-seulement dans le même sens, mais encore dans le même rapport.



ces propriétés sont la viscosité superficielle et la tension; que, pour qu'un liquide se laisse facilement étendre en lames de grandes dimensions et d'une certaine persistance, il faut 1° une viscosité superficielle qui surpasse notablement la viscosité intérieure; 2° une tension relativement faible; 3° un rapport d'autant plus grand entre ces deux éléments que le premier est lui-même plus énergique.



RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR;

PAR
J. PLATEAU.

NEUVIÈME SÉRIE.

CAUSES ACCESSOIRES QUI INFLUENT SUR LA PERSISTANCE DES LAMES LIQUIDES. — FIGURES LAMINAIRES DE TRÈS-GRANDE DURÉE. — HISTORIQUE CONCERNANT LES LAMES LIQUIDES. — ASCENSION CAPILLAIRE A DE GRANDES HAUTEURS DANS DES TUBES DE GRANDS DIAMÈTRES. — CONSTITUTION D'UN COURANT GAZEUX QUI TRAVERSE UN LIQUIDE.

(Présenté le 11 octobre 1868.)

¹ Voir, pour les huit séries précédentes, les tomes XVI, XXI, XXX, XXXI, XXXIII, XXXVI et XXXVII des *Mém. de l'Acad.*





RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE
D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

CAUSES ACCESSOIRES QUI INFLUENT SUR LA PERSISTANCE
DES LAMES LIQUIDES.

§ 1. Dans la série précédente, j'ai tâché de montrer que si la cohésion et la viscosité intérieure président au développement de toute lame liquide, ces causes sont insuffisantes lorsqu'il s'agit de lames à la fois étendues et durables, comme celles d'eau de savon, et qu'alors des éléments tout différents doivent concourir, savoir une viscosité superficielle énergique et une tension relativement faible¹. Mais quand de semblables lames sont réalisées, leur persistance est influencée par un certain nombre de causes accessoires que je vais passer en revue.

¹ A l'époque où j'ai publié ma 6^{me} série, je ne songeais pas encore à chercher la vraie cause pour laquelle certains liquides seulement se laissent gonfler en grosses bulles; aussi ai-je énoncé, dans le § 6 de la série dont il s'agit, l'opinion fautive qu'il faut attribuer à la faiblesse de la viscosité de l'eau le défaut de persistance des lames de ce liquide. J'aurais dû signaler et rectifier la chose à la fin du § 6 de la 8^{me} série, en parlant de la même erreur commise par M. Henry; mais je m'en suis malheureusement aperçu trop tard; je prie donc maintenant le lecteur de regarder comme supprimée cette partie du § 6 de la 6^{me} série.



La première consiste dans les petits ébranlements que communiquent aux lames les agitations de l'air ambiant et les vibrations propagées par le sol. Ces petits ébranlements agissent sans doute en surmontant l'inertie et la résistance de frottement des molécules; ils hâtent ainsi la descente de ces dernières, et, par suite, accélèrent l'amincissement; en outre, ils déterminent, comme je l'ai avancé plusieurs fois, la rupture des portions très-atténuées. C'est en partie pour cela que les lames dont il s'agit se maintiennent en général beaucoup plus longtemps en vase clos; alors, en effet, l'une des causes d'ébranlements, savoir les mouvements de l'air, se trouve supprimée.

§ 2. Une deuxième cause est l'évaporation, quand le liquide en est susceptible. L'évaporation, comme je l'ai montré (8^{me} série, §§ 27 et 29), produit deux effets opposés, dont l'un tend à accélérer et l'autre à ralentir l'amincissement, parce que si elle soustrait incessamment de la matière aux lames, d'autre part les molécules qu'elle enlève sont celles qui, appartenant aux faces extrêmes, descendraient le plus vite et feraient partager plus ou moins leur excès de vitesse aux molécules sous-jacentes. Les faits sur lesquels je me suis appuyé sembleraient indiquer que le second effet, celui de ralentissement, prédomine en général, d'où résulterait la conséquence singulière que l'évaporation est plutôt favorable que nuisible à la persistance; cependant voyons :

Les faits dont il s'agit se rapportent les uns à des lames d'eau, et les autres à des lames de la deuxième catégorie (8^{me} série, § 19) présentant les teintes inverses; or les premières éclatent toujours avant de s'être beaucoup atténuées, et, dans les secondes, l'atténuation des portions les plus minces, c'est-à-dire des inférieures, s'arrête bientôt, on l'a vu, par l'arrivée continuelle du liquide découlant des portions supérieures plus épaisses; mais considérons maintenant une lame de la troisième catégorie, lame où l'amincissement peut progresser sans obstacle, par exemple une bulle de savon déposée sur un anneau. L'effet de la pesanteur est évidemment d'autant moindre sur une semblable lame que celle-ci est plus atténuée; conséquemment les quantités de liquide qui, dans des temps égaux successifs, abandonneraient, sous la seule action de la pesanteur, le haut de cette lame, iraient en diminuant au fur et à mesure de l'atténuation; mais les quantités successivement enlevées, dans les mêmes



temps, par l'évaporation sont sensiblement égales; or il suit de là que si, au commencement de l'existence de la lame, les secondes de ces quantités de liquide peuvent n'être qu'une fraction des premières, elles leur deviennent plus tard supérieures, et alors nécessairement l'évaporation active l'amincissement. On comprend même que, lorsque l'épaisseur du haut de la lame est devenue extrêmement minime, l'évaporation peut, à elle seule, l'annuler en un point, et occasionner ainsi la rupture.

On voit, d'après cette discussion, que, dans les lames de la troisième catégorie, l'instant de la rupture est hâté par l'évaporation; aussi nos calottes de solution de savon de Marseille (8^{me} série, § 22) qui, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, persistaient plusieurs heures, ne durèrent que quatre à cinq minutes lorsqu'elles étaient produites dans le bocal toujours fermé, mais sans saturation de son atmosphère; si on les avait formées à l'air entièrement libre, nul doute qu'elles n'eussent éclaté plus tôt encore.

En supprimant l'évaporation par un procédé un peu différent du mien, le Dr Reade ¹ a réalisé des lames planes d'eau de savon se conservant au delà de 24 heures. Voici comment il opérait: il introduisait une petite quantité d'eau de savon dans une fiole allongée qu'il faisait ensuite chauffer à 100° au bain-marie; quand il présumait que la vapeur produite à l'intérieur avait expulsé tout l'air de la fiole, il bouchait hermétiquement celle-ci, puis, après l'avoir laissée refroidir, il y formait une lame plane transversale. Par ce moyen, on le voit, la lame se trouve, comme nos calottes, dans un espace saturé de vapeur d'eau; si donc la fiole est posée verticalement, de sorte que la lame soit horizontale et qu'ainsi l'action de la pesanteur soit éliminée en même temps que l'évaporation, cette lame est dans les conditions du § 25 de la 7^{me} série, c'est-à-dire qu'il ne reste plus, pour l'amincir et en amener la rupture, que l'action des surfaces concaves de la petite masse qui la borde, plus les petits ébranlements du sol; elle doit conséquemment, comme celles du paragraphe cité, persister fort longtemps.

Le liquide glycérique, nous le savons, non-seulement n'émet pas de vapeurs, mais absorbe, au contraire, l'humidité de l'air ambiant, et c'est

¹ *On a permanent soap bubble, illustrating the colours of thin plates.* (PHILOS. MAGAZ., 1857, nouvelle série, vol. XI, p. 375.)



(8^{me} série, § 66) en partie à cause de cela que les lames de ce liquide ont une si grande persistance, même à l'air libre.

§ 3. En troisième lieu, dans le cas particulier du liquide glycérique, la température a , nous le savons aussi, une influence notable : comme on l'a vu par les tableaux des §§ 8 et 10 de la 7^{me} série, ces lames montrent des persistances beaucoup plus inégales en hiver qu'en été.

§ 4. En quatrième lieu, puisque la pesanteur fait incessamment descendre le liquide vers le bas des lames, il est clair qu'en supprimant, d'une manière ou d'une autre, l'action de cette force, on doit augmenter la persistance. La condition dont il s'agit se trouve évidemment remplie, ainsi que je l'ai fait remarquer plusieurs fois, à l'égard d'une lame plane et horizontale; mais, pour juger de son efficacité, il faut comparer, au point de vue de la durée, une semblable lame avec une lame inclinée ou verticale, formée du même liquide et ayant les mêmes dimensions. J'ai effectué cette comparaison sur des lames réalisées à l'air libre, dans des anneaux en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, avec la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$. Pour la lame horizontale, j'ai employé le procédé du § 65 de la série précédente; quant à l'anneau vertical, il était porté par une simple tige fixée en un point de son contour dans le prolongement d'un diamètre, et on l'attachait sous la potence par l'autre extrémité de cette tige; pour former la lame, on amenait sous lui un vase plein du liquide, dans lequel on le faisait plonger entièrement, et qu'on abaissait ensuite. Avec chaque anneau, l'expérience a été répétée vingt fois.

Dans l'anneau horizontal, les lames ont persisté de 16'' à 30'', et la moyenne a été de 25''; dans l'anneau vertical, les valeurs extrêmes ont été 9'' et 18'' et la moyenne 13''. Ainsi, parmi les causes accessoires dont nous nous occupons, il faut ranger la position, ou mieux le plus ou moins d'inclinaison des lames.

Avec certains liquides, on annule encore l'action de la pesanteur en développant les lames au sein d'un autre liquide de même densité, et alors l'inclinaison est indifférente : c'est ainsi que les lames d'huile, qui s'atténuent si rapidement et durent si peu dans l'air (8^{me} série, § 21), acquièrent, au contraire, une grande persistance quand elles sont engendrées dans le liquide alcoolique (2^{me} série, §§ 34 à 35, et 5^{me} série, §§ 3 à 7).



§ 5. En cinquième lieu, j'ai déjà dit (6^{me} série, § 41) que les assemblages de lames liquides se maintiennent toujours beaucoup moins longtemps que les figures formées d'une seule lame, et j'en ai indiqué la raison : c'est que les surfaces fortement concaves des petites masses qui constituent les arêtes liquides, et surtout celles qui existent aux points de jonction de ces arêtes tant entre elles qu'avec les fils solides de la charpente, déterminent un appel incessant du liquide des lames, et contribuent de la sorte puissamment à l'atténuation de celles-ci. La combinaison des lames en systèmes est donc également au nombre des causes accessoires qui modifient la persistance.

§ 6. En sixième lieu, j'ai rappelé (8^{me} série, § 18) que les lames persistent en général d'autant plus qu'elles sont moins grandes. Bien que le fait soit plus ou moins connu, je ne crois pas inutile de rapporter quelques résultats obtenus par moi :

1° On a réalisé, avec le liquide glycérique, des systèmes laminaires dans deux charpentes prismatiques triangulaires semblables, mais dont l'une avait toutes ses arêtes longues de 7 centimètres, et l'autre des dimensions moitié moindres. Chacune de ces charpentes était fixée, par la queue de sa fourche, sous une potence, de manière que ses arêtes latérales fussent verticales, et, pour former le système, on se servait du même procédé qu'à l'égard de l'anneau vertical dans les expériences du § 4. Avec l'une et avec l'autre charpente, on a répété sept fois l'observation; les persistances se sont montrées très-variables; mais, avec la grande charpente, les plus longues ont été 32' et 37', et, avec la petite, 60' et 75'.

On a essayé aussi, de la même manière, les systèmes de deux charpentes tétraédriques, l'une de 8 centimètres d'arête, l'autre de 5; on a répété également les observations plusieurs fois; mais, pour la grande charpente, l'instant de la rupture a échappé à l'attention, sauf à l'égard de la plus longue persistance, qui a été de 2 heures; pour la petite, les plus longues persistances ont été 2 heures et 2 heures 36 minutes.

2° On a produit, avec le liquide glycérique encore, des lames planes horizontales dans deux anneaux en fil de fer, l'un de 7, l'autre de 2 centimètres de diamètre; dans le premier, la durée maxima a été d'une heure environ, et, dans le second, elle a dépassé 12 heures.



3° Une bulle de 10 centimètres de diamètre, gonflée avec la solution de savon de Marseille, a été déposée sur un anneau dans l'intérieur d'un vase dont l'atmosphère était saturée de vapeur d'eau; elle a persisté à peu près une heure. On y a substitué une bulle du même liquide, mais d'un diamètre moitié moindre, et celle-ci n'a disparu qu'après 2 heures.

La durée plus grande des lames de moindres dimensions est, comme je l'ai dit, ce qui a lieu ordinairement; mais quelquefois cette influence de l'étendue ne se manifeste pas: j'ai fait, par exemple, plusieurs séries d'observations sur des lames de solution de savon réalisées dans des anneaux de 10, 7, 2 et 1 centimètres de diamètre, et les durées moyennes n'ont pas présenté de différences notables.

Si la persistance diminue en général quand les lames augmentent en dimensions, cela tient simplement, je pense, à ce que plus une lame est grande, plus il y a de chances pour que l'un ou l'autre de ses points cède à quelque cause de rupture; mais il faut tenir compte d'une autre influence, qui agit en sens opposé: l'amincissement dû à l'appel des petites surfaces concaves qui règnent tout le long du contour d'une lame est nécessairement d'autant plus lent, à égalité de contour, que la lame a plus de surface, et, à égalité de surface, qu'elle a moins de contour; on déduit aisément de là que, dans un anneau circulaire, la lenteur de l'amincissement croît avec le diamètre. Si donc cette dernière influence agissait seule, la persistance irait en augmentant avec la grandeur; or, on le comprend, il peut se faire, dans certaines circonstances, que les deux influences contraires dont je viens de parler se compensent plus ou moins.

§ 7. En septième lieu enfin, il faut encore faire entrer en ligne de compte la nature du solide auquel adhère une lame, et l'état de la surface de ce solide: nous savons, par exemple, que si l'on n'a pas oxydé les anneaux ou les charpentes en fil de fer, les lames de liquide glycérique qu'on y réalise se brisent immédiatement, ou n'ont qu'une très-courte durée. J'ai signalé, dans les §§ 31 et 32 de la 5^{me} série, un autre fait de même nature: une bulle de liquide glycérique de 2 centimètres de diamètre, gonflée à l'orifice d'un tube de verre et enfermée dans un petit bocal, s'est maintenue pendant 24 heures, tandis que d'autres bulles du même diamètre, formées du même liquide et



enfermées dans le même bocal, mais gonflées à l'orifice d'un tube en fer oxydé ayant même diamètre extérieur que le tube de verre, n'ont persisté au maximum que 14 heures.

M. l'abbé Florimond ¹ a annoncé qu'on peut gonfler des bulles de savon beaucoup plus grosses avec une pipe de verre qu'avec une pipe de terre; il attribue cette différence à ce que l'argile happe ou retient le liquide, de sorte que la lame sphérique naissante ne se développe qu'aux dépens de son épaisseur, tandis qu'avec la pipe en verre, le liquide glisse aisément jusqu'à l'extrême bord de l'orifice, et que la bulle acquiert ainsi un certain volume avant que la lame qui la constitue s'amincisse.

§ 8. Il suit de cet examen de toutes les influences accessoires qu'avec une lame de dimensions données, on obtiendra la plus grande persistance si cette lame est plane, horizontale, attachée par tout son contour à une paroi de verre, soustraite à toute évaporation, à l'abri des agitations de l'air ambiant et, autant que possible, des trépidations propagées par le sol. Or toutes ces conditions étaient satisfaites à l'égard de la lame de liquide glycérique de 7 centimètres de diamètre dont j'ai parlé dans le § 25 de ma 7^{me} série; aussi elle a persisté 18 jours, et n'a probablement éclaté que par suite d'un ébranlement assez violent imprimé au plancher. Les mêmes conditions étaient également satisfaites à l'égard des lames d'eau de savon dans l'expérience du Dr Reade (§ 2), et, nous l'avons vu, la persistance de ces dernières était de plus de 24 heures.

Figures laminaires de très-grande durée.

§ 9. La beauté des figures laminaires de liquide glycérique inspire naturellement le désir d'avoir les mêmes figures tout à fait permanentes. Pour l'une d'elles, la sphère, on atteint ce but avec du verre fondu; chacun sait, en effet, qu'on souffle des bulles sphériques en verre, bulles qui, une fois refroidies, se maintiennent indéfiniment; on peut même atténuer tellement la lame qui les constitue, qu'elle montre des couleurs; mais la réalisation, avec la même substance, des autres figures, surtout de celles qui consistent

¹ Journal *Le Cosmos*, 1862, vol. XX, p. 72.



en un assemblage de lames, offrirait des difficultés, et, dans tous les cas, serait peu commode.

La première idée qui se présente, est d'employer un liquide dont les lames se solidifient par simple évaporation à froid, tel que le collodion, une solution d'albumine, etc.; mais, avec un semblable liquide, on ne parvient à quelques résultats qu'en se bornant à des figures de très-petites dimensions. Le liquide qui m'a donné la meilleure réussite est une solution de gutta-percha dans le sulfure de carbone : avec cette solution, j'ai obtenu un très-joli petit système dans une charpente cubique dont les arêtes avaient deux centimètres de longueur; ce petit système s'est conservé plusieurs mois, après quoi il s'est réduit spontanément en poudre. J'ai essayé inutilement avec une charpente de trois centimètres de côté. Pour tâcher d'arriver à des figures plus grandes, il faut donc recourir à des substances qui, ainsi que le verre, ne sont liquides qu'à chaud, et en chercher une qui remplisse la double condition de ne pas exiger, pour se fondre, une très-haute température, et de se laisser développer, à l'état fondu, en lames d'une étendue suffisante.

On verra, plus loin, que Morey a obtenu, avec de la résine, des bulles allongées atteignant la grosseur d'un œuf, formées d'une lame assez mince pour montrer des couleurs, et qui paraissaient devoir être indéfiniment permanentes.

M. Böttger ¹ a trouvé qu'avec un mélange de 8 parties de colophane et d'une partie d'huile de lin purifiée, fondu au bain-marie et maintenu à la température d'environ 97°, on gonfle aisément de grosses bulles qui persistent longtemps; seulement il n'indique pas leur durée. Avec ce même mélange, M. Rottier a essayé, à ma prière, la réalisation du système laminaire d'une charpente prismatique triangulaire dont les bases avaient 4 centimètres de côté, et dont la hauteur était de 7 centimètres; le système se formait toujours très-bien, et gardait certainement son intégrité un grand nombre d'heures; mais, toujours aussi, on trouvait, le lendemain, l'une des lames trouée.

M. Mach ² a obtenu, avec de la colophane purifiée fondue, sans mélange

¹ *Beiträge zur Physik und Chemie*. Frankfurt a. M., 1858, p. 15.

² *Ueber die Molecularwirkung der Flüssigkeiten*. (Comptes rendus de l'Académie de Vienne, 1862, vol. XLVI, 2^{me} section, p. 125.)



d'huile, le système laminaire du tétraèdre régulier dans une charpente de 5 centimètres de côté; mais il n'en a pas observé la durée, les expériences qu'il avait en vue exigeant qu'il détachât le système.

Enfin j'ai réussi d'une manière à peu près complète au moyen d'un mélange d'une partie de gutta-percha pure et de 5 parties de colophane, maintenu à la température d'environ 150°. On avait purifié préalablement la colophane en la fondant à une température suffisante, et attendant que la faible quantité d'essence qu'elle contenait encore se fût dégagée sous forme de petites bulles, et que toutes les impuretés solides eussent gagné le fond. M. Donny a bien voulu faire l'expérience à son laboratoire: la charpente était celle d'un cube de 5 centimètres de côté; le système laminaire ne s'est pas réalisé sans une certaine difficulté, et, lorsqu'on l'a obtenu complet, il était plus ou moins irrégulier; mais, en le maintenant ensuite pendant quelques instants dans une étuve chauffée à 70° environ, et l'y retournant en différents sens, on a vu les irrégularités s'effacer. Dans le système tel qu'il s'est montré après cette dernière opération, les lames étaient fort transparentes, mais les arêtes n'avaient pas une grande finesse, et différaient, sous ce rapport, les unes des autres. Ce même système était très-solide, et s'est conservé pendant plus de deux ans, je pense; après ce temps, un choc léger l'a réduit en fragments, d'où il faut conclure que la constitution de ses lames s'était lentement altérée. Je crois qu'on réussirait mieux encore et que l'altération progressive serait moindre, si l'on employait une proportion un peu plus forte de colophane.

Historique concernant les lames liquides.

§ 10. Terminons la partie de notre travail spécialement consacrée aux lames liquides, par un exposé succinct de tout ce qui, à notre connaissance, a été fait sur ces mêmes lames en dehors de nos propres recherches.

On lit dans les *Petites chroniques de la science* de M. Henry Berthoud ¹:

« Le musée du Louvre possède un vase étrusque de la plus haute antiquité, provenant de la collection Campana, et sur les flancs duquel se trou-

¹ Année 1866, p. 265.



vent représentés des enfants qui soufflent dans des chalumeaux et qui s'amuse à faire des bulles de savon. »

Il paraît donc que les anciens connaissaient les sphères laminaires complètes obtenues par insufflation à l'extrémité d'un tube; néanmoins leurs ouvrages ne contiennent, que je sache, rien ayant trait à ces bulles; ils parlent seulement des calottes laminaires développées à la surface de l'eau :

Intumuit sic, ut pluvio perlucida caelo

Surgere bulla solet.....

(OVIDE, *Métamorph.*, liv. X, v. 752.)

..... offense bulla tumescit aequae.

(MARTIAL, liv. VIII, épigr. 55, v. 18.)

§ 14. Suivant une hypothèse très-ancienne, mais dont, je pense, on ignore l'auteur, la vapeur d'eau visible, celle qui constitue les nuages et les brouillards, serait formée de très-petites bulles creuses, auxquelles on a donné le nom de vésicules. Cette hypothèse, fondée principalement sur la légèreté apparente des nuages et sur le fait qu'on n'observe jamais d'arc-en-ciel dans un nuage qui ne se résout pas en pluie, est bien connue des physiciens, et je me bornerai ici à la mentionner; mise en vogue par Saussure, elle a été fortement combattue depuis, et aujourd'hui elle n'a plus guère de partisans.

Boyle paraît être le premier qui ait dirigé l'attention des savants sur les couleurs des lames minces, et spécialement des lames liquides. Dans un écrit ¹ de l'année 1663, il s'exprime ainsi :

« Pour montrer aux chimistes qu'on peut faire apparaître ou disparaître des couleurs là où il n'y a ni augmentation ni changement du principe sulfureux, salin ou mercuriel des corps, je ne recourrai pas à l'iris produit par le prisme de verre, ni aux couleurs qu'on voit, par une matinée sereine, dans celles des gouttes de rosée qui réfléchissent ou réfractent convenablement vers l'œil les rayons de la lumière; mais je leur rappellerai ce qu'ils peuvent observer dans leurs laboratoires : car si l'on secoue une huile essentielle chimique ou de l'esprit-de-vin concentré jusqu'à ce que des bulles se développent à sa surface, celles-ci offrent des couleurs brillantes et variées qui

¹ *Experiments and observations upon colours.*



s'évanouissent toutes à l'instant où le liquide qui constitue les lames retombe dans le reste de l'huile ou de l'esprit-de-vin; on peut donc faire en sorte qu'un liquide incolore montre des couleurs diverses et les perde en un moment, sans augmentation ni diminution de l'un quelconque de ses principes hypothétiques. Et, pour le dire en passant, il est digne de remarque que certains corps, soit incolores, soit colorés, étant amenés à une grande minceur, acquièrent des couleurs qu'ils n'avaient pas auparavant; en effet, sans insister sur la variété de couleurs que l'eau rendue visqueuse par le savon acquiert lorsqu'elle est gonflée en bulles sphériques, la térébenthine, quand on y insuffle de l'air d'une certaine manière, fournit des bulles diversement colorées, et, bien que ces teintes s'évanouissent dès que les bulles éclatent, celles-ci continueraient probablement à manifester des nuances variées sur leur surface si leur texture était suffisamment durable. »

Boyle cite comme exemple de ces couleurs permanentes, celles qu'il a vues sur des lames extrêmement minces de verre soufflé.

En 1672, Hooke communiqua à la Société royale une curieuse note ¹, dont voici la traduction presque entière :

« Plusieurs petites bulles furent gonflées, au moyen d'un petit tube de verre, avec une solution de savon. On observa aisément qu'au commencement de l'insufflation de chacune d'elles, la lame liquide orbiculaire, qui emprisonnait un globe d'air, se montrait blanche et limpide, sans aucune apparence de couleur; mais, après quelque temps, la lame s'amincissant par degrés (une partie de sa substance descendant vers le bas et une autre partie se dissipant dans l'air par l'évaporation), on vit naître sur sa surface toutes les variétés de couleurs qu'on peut observer dans l'arc-en-ciel... Après que ces couleurs eurent subi leurs derniers changements, la lame commença à se montrer de nouveau blanche, et alors, dans cette seconde lame blanche, apparurent, vers le haut et vers le bas, des trous, qui augmentèrent graduellement en diamètre, et plusieurs d'entre eux se confondirent, jusqu'à ce qu'à la fin ils devinssent très-grands. Il était singulier de voir comment ces trous étaient poussés çà et là, par les mouvements de l'air ambiant, sur le

¹ Birch, *History of the Royal Society*, vol. III, p. 29.



globe d'air emprisonné, sans que la bulle perdit sa forme orbiculaire ou tombât. Il est singulier aussi qu'après cela, quand la bulle éclate, sa rupture ait lieu avec une espèce d'explosion, en dispersant ses parties en une sorte de poussière ou de brouillard. Il est plus singulier que ces portions de la bulle qui se montrent comme des trous, en se mouvant de côté et d'autre sur la surface du globe aérien, changent de forme, et de circulaires deviennent elliptiques ou affectent des figures ondulées..... Il est plus singulier encore que, quoiqu'il soit très-certain que l'air enveloppant et l'air enveloppé ont des surfaces, cependant, par aucun des moyens dont j'ai fait usage, elles ne m'ont présenté ni la réflexion ni la réfraction que manifestent les autres parties de l'air emprisonné. Il est assez difficile d'imaginer quel curieux réseau ou corps invisible pourrait ainsi maintenir la forme de la bulle, ou quelle espèce de magnétisme pourrait empêcher la lame liquide de tomber ou les parties de l'air enveloppant et de l'air enveloppé de s'unir..... »

Tous les physiciens savent que Newton a fait servir les bulles de savon à ses admirables recherches sur les couleurs des lames minces. Les expériences qu'il effectua par ce moyen, et qui sont décrites dans son *Optique* ¹ (année 1704), sont trop connues pour que je les rappelle ici; j'insisterai seulement sur les points suivants : Newton employait, non des bulles complètes, mais des calottes laminaires développées à la surface du liquide; il a observé la tache noire du sommet, les petites taches colorées qui montent et descendent sur la calotte, ainsi que les petites taches noires qui grimpent jusqu'à celle du sommet, à laquelle elles s'unissent; il n'a constaté l'apparition du bleu du 1^{er} ordre qu'avec une solution très-chargée de savon, et, dans ce cas, il a vu quelquefois le bleu dont il s'agit envahir toute la calotte; enfin on peut inférer de sa description que l'uniformité de teinte, et conséquemment l'uniformité d'épaisseur de la lame, s'est montrée quelquefois aussi pour des couleurs autres que le bleu du 1^{er} ordre.

Leidenfrost, qui, on le sait aussi, a découvert le phénomène de l'état sphéroïdal des liquides, consacre une grande portion du mémoire ² où il

¹ Livre II, 1^{re} partie, obs. 17 à 24.

² *De aquæ communis nonnullis qualitatibus tractatus*. Duisburg.



expose ce sujet, à une étude détaillée des bulles de savon. Ce travail, publié en 1756, et dont j'ai déjà dit quelques mots au § 3^{bis} de la série précédente, est un singulier mélange d'ingénieuses expériences et de déductions judicieuses avec quelques observations qui doivent être inexactes, et des opinions bizarres dont l'erreur est aujourd'hui évidente.

Si Leidenfrost s'occupe des bulles de savon, c'est, on aurait peine à le croire, en partie pour fournir une preuve ultérieure en faveur de cette proposition qu'il a précédemment soutenue, que l'eau peut passer à l'état solide sans l'action du froid. Pour lui, en effet, une bulle de savon, lorsqu'on a enlevé avec le doigt la goutte qui y demeure quelquefois suspendue, c'est-à-dire le liquide excédant la quantité précise nécessaire à sa formation, possède les propriétés des solides : 1° elle a par elle-même, comme eux, une figure déterminée; 2° de même qu'on renferme un liquide dans un flacon de verre, de même aussi on peut renfermer dans la bulle, non un liquide, à cause de la fragilité de la lame, mais de la fumée de tabac, par exemple, fumée qui y demeure parfaitement emprisonnée comme dans une enveloppe de verre; 3° la bulle, débarrassée de tout liquide excédant, est sèche, car elle ne mouille pas le doigt qui la touche; 4° enfin si l'on dépose doucement sur une semblable bulle une petite goutte d'eau, celle-ci, loin de se mêler à la substance de la lame, glisse jusqu'au bas, comme elle glisserait sur du verre, et tombe ensuite ou peut être enlevée avec le doigt. D'après cela, comme un solide ne saurait couler, Newton doit s'être trompé en attribuant les couleurs de la bulle à ce que la lame s'amincit par l'écoulement graduel du liquide qui la constitue.

Cette nature solide de la lame s'explique de la manière suivante : dans les liquides, les molécules sont attirées également de tous les côtés, de sorte qu'elles sont également mobiles dans tous les sens, tandis que, dans les solides, il y a des centres particuliers d'attraction qui font que les molécules se groupent d'une manière déterminée, comme on le voit dans les cristaux; de là résulte qu'il suffit d'un certain mouvement, d'une certaine direction imprimée aux molécules d'un liquide pour déterminer chez elles l'arrangement qui fait passer le corps à l'état solide. C'est ainsi que l'araignée et les chenilles, en expulsant par leurs filières, dans une direction commune, les molécules d'une



substance liquide, changent celle-ci en une matière solide, et c'est encore ce qui se produit quand on gonfle une bulle.

A propos de la bulle pleine de fumée, Leidenfrost dit : « sur une bulle ainsi rendue opaque au moyen d'une fumée intérieure, les couleurs décrites par Newton sont réfléchies avec beaucoup plus d'éclat, de sorte que la bulle ressemble à un astre brillant; mais toute cette gloire s'évanouit à l'instant de la rupture : la fumée fétide qui s'échappe alors apprend de quelle ordure la bulle était remplie, et cette dernière nous offre ainsi un emblème frappant des misères dorées de l'humanité. »

Il signale la grande élasticité des bulles, celles-ci reprenant toujours spontanément leur forme sphérique dès que la cause extérieure qui la leur avait fait perdre vient à cesser.

On lui doit aussi l'observation du fait important que les bulles persistent bien plus longtemps en vase clos qu'à l'air libre : les siennes avaient environ 5 centimètres de diamètre, il les gonflait à l'intérieur d'un ballon de verre, et elles se maintenaient au delà d'une heure. Il attribue cette grande persistance à ce que les bulles sont alors soustraites aux agitations de l'air ambiant et à toutes les causes accidentelles de rupture. Il énonce, du reste, cet autre fait, que les bulles durent d'autant plus qu'elles sont plus petites : il en a réalisé qui n'avaient guère que $\frac{1}{5}$ de millimètre en diamètre, et elles se sont conservées plus de deux jours à l'air libre et pendant l'été.

Le premier encore il a remarqué que lorsque, après avoir gonflé une bulle à l'extrémité d'un tube, on laisse ouvert l'autre bout de celui-ci, la bulle diminue graduellement de grosseur, avec une vitesse accélérée, jusqu'à s'anuler, en chassant par le tube l'air qu'elle renfermait; il dit, en outre, que si l'on a rempli la bulle de fumée, on voit cette dernière sortir du tube comme d'une cheminée. Il conclut de là que la bulle fait constamment effort pour se contracter. Il ajoute les observations suivantes :

La bulle, au commencement de sa formation, tant qu'elle ne montre pas de vives couleurs, est à la fois si molle et si tenace, qu'on peut y faire pénétrer et en retirer impunément une pointe solide, même obtuse; l'ouverture se referme toujours spontanément. Mais plus les couleurs prennent d'éclat, plus la lame devient rigide, de sorte que si on la perce, elle se brise. C'est sur-



tout dans les taches noires que cette rigidité est extrême : là le moindre contact d'une pointe d'aiguille suffit pour déterminer la rupture; alors la bulle éclate avec un bruit perceptible, et se dissipe en une infinité de très-petites parties projetées de tous les côtés jusqu'à trois ou quatre pieds de distance. Ce phénomène se constate le mieux dans un rayon de soleil; il est tout à fait analogue à celui que présentent les larmes bataviques. Ainsi la bulle, outre sa force contractile, possède en même temps une force opposée, une force explosive. Cette dernière force agit toujours de dedans en dehors, car si à l'intérieur d'une bulle on en gonfle une autre, la rupture de celle-ci fait éclater l'extérieure, tandis que si l'extérieure se brise la première, elle laisse l'autre parfaitement intacte. Il y a donc, dans une bulle, deux forces contraires, l'une centripète, qui réside surtout dans les portions incolores, l'autre centrifuge, qui a son siège dans les portions colorées, et qui est à son maximum dans les taches noires.

La force explosive est d'autant plus intense que la solution contient une plus forte proportion d'eau, car la bulle éclate d'autant plus tôt et lance d'autant plus loin les particules dans lesquelles elle se résout; en même temps la force contractile est d'autant plus faible. Au contraire, plus il y a de savon, moins la force explosive a d'intensité, et plus est énergique la force contractile ¹. De là la conséquence que la force explosive provient de l'eau, et la force contractile du savon, ou plutôt de l'huile de ce dernier, les bulles variant en persistance suivant la nature de l'huile qui entre dans la composition du savon.

Dès que la lame qui constitue une bulle passe à l'état solide, il s'y produit une séparation de ses éléments, et alors elle se trouve formée de trois membranes superposées; l'extérieure consiste dans la partie huileuse du savon; c'est elle qui possède la force contractile; elle protège les deux autres contre la rupture, car c'est pendant qu'elle s'étend encore sur la totalité de la bulle,

¹ Ces dernières observations sont évidemment en partie inexactes : la force contractile, c'est-à-dire la tension, ne peut augmenter, et doit plutôt diminuer quand on augmente la proportion de savon (8^{me} série, § 63); Leidenfrost, qui ne donne aucune mesure à cet égard, juge sans doute du plus ou moins d'intensité de la force dont il s'agit, uniquement par le plus ou moins de persistance de la bulle.



que celle-ci est difficile à briser. Mais bientôt cette membrane extérieure perd son égalité, s'ouvre du haut, descend en devenant graduellement plus épaisse vers le bas, et laisse ainsi à découvert la partie supérieure de l'ensemble des deux autres; on doit conclure de cette descente progressive et de cette accumulation au bas, que la membrane en question n'est pas véritablement solide; enfin c'est à elle que sont dues les couleurs. La membrane intermédiaire, qui est saline et en partie terreuse, se montre toujours blanche, mais sans beaucoup d'éclat; elle s'ouvre ensuite à son tour, et met à nu des portions de la plus intérieure. Celle-ci est d'une transparence extrême, ne réfléchit aucune couleur et, pour ainsi dire invisible, paraît comme une tache noire; elle est tout entière aqueuse.

Pour établir que la membrane extérieure est de nature huileuse, Leidenfrost se fonde surtout sur les apparences successives que présentent les portions colorées dans une bulle gonflée avec une solution contenant peu de savon; il affirme que, lorsque toute la substance de cette membrane s'est rassemblée au bas de la bulle, son seul aspect montre qu'elle est formée d'une matière grasse. Il indique, en outre, l'expérience suivante : si l'on trempe dans la solution l'orifice d'un large tube, puis qu'on l'en retire, on le trouve occupé par une lame plane, et si l'on place cette lame verticalement, on ne tarde pas à y voir naître des couleurs qui manifestent d'une manière indubitable la séparation des trois membranes. Leidenfrost a donc réalisé aussi des lames planes, et en a observé les bandes colorées. C'est encore, dit-il, par la même raison que les couleurs apparaissent plus tôt et plus vivement aux températures basses de l'hiver, l'huile se séparant plus aisément par le froid. D'après lui, si l'on emploie un liquide dans lequel les parties huileuse, saline et aqueuse sont unies avec plus de force que dans l'eau de savon, de sorte que la séparation de l'élément gras ne puisse s'effectuer, on ne distingue plus de couleurs. Comme exemples de semblables liquides, il cite surtout la salive d'un homme jeune, sain et à jeun, et une solution de savon à laquelle on a ajouté un peu d'esprit-de-vin. Il infère de tout cela que, très-probablement, l'eau parfaitement pure ne peut jamais donner de lames colorées.

Il indique comme preuve ultérieure de l'erreur commise, selon lui, par Newton, en ce qui concerne la génération des couleurs, que les taches noires,



au lieu de se fondre insensiblement dans le blanc qui les entoure, sont nettement terminées à leurs bords, et qu'elles naissent non-seulement au haut de la bulle, mais aussi sur les côtés.

Il mesure, par un moyen simple indépendant des couleurs, l'épaisseur de la lame au moment où la bulle vient d'être formée : il se sert, pour gonfler celle-ci, d'un tube de thermomètre, et trouve qu'en employant seulement la quantité de liquide qui s'élève dans ce tube par la capillarité, la bulle, dont le diamètre maximum est de deux pouces, ne porte aucune goutte suspendue; il considère l'épaisseur de la lame comme étant alors uniforme, et il l'évalue d'après le diamètre de la bulle et le poids du liquide que contenait le tube; il obtient de cette manière $\frac{1}{15624}$ de pouce (environ $\frac{1}{600}$ de millimètre).

Partant toujours de son principe des trois membranes et de l'idée que la plus intérieure n'est formée que d'eau pure, il calcule, par le même procédé, l'épaisseur de cette dernière connaissant la proportion d'eau de la solution, et trouve cette épaisseur égale à $\frac{1}{17577}$ de pouce (environ $\frac{1}{670}$ de millimètre); or comme ses bulles ont leur diamètre maximum, de telle sorte qu'elles éclatent et se réduisent en une espèce de poussière si l'on continue à souffler, il en conclut que, jusqu'à cette limite de minceur seulement, les molécules d'eau peuvent demeurer unies, et qu'ainsi le diamètre d'une de ces molécules n'excède pas la valeur ci-dessus. Il déduit de la même méthode encore que le diamètre des molécules de l'huile n'est pas supérieur à $\frac{1}{505851}$ de pouce (environ $\frac{1}{12000}$ de millimètre). Leidenfrost a donc eu la pensée de chercher des limites supérieures aux diamètres moléculaires.

Il avance que la lame qui constitue une bulle a des pores d'une grandeur notable, et il essaie de le prouver par les deux observations suivantes, qui sont évidemment erronées : quand on commence à gonfler une bulle, une grande partie de l'air qu'on y fait entrer s'échappe par ces pores, car, si l'on souffle avec force, un courant d'air perceptible se fait sentir à l'extérieur de la bulle; de la fumée introduite ne passe pas ainsi au dehors, mais si une bulle qui ne contient que de l'air est maintenue au-dessus de la flamme d'une lampe, la fumée noire de celle-ci pénètre à travers la lame et rend opaque l'air intérieur.



Leidenfrost voit des lames et des bulles partout : pour lui, l'air atmosphérique est composé de petites bulles, ou plutôt de petites lamelles aqueuses ; c'est une sorte de mousse qui s'est élevée de la surface des eaux ; enfin les animaux et les plantes sont formés de petites bulles de savon et de petits tubes de la même matière. On me permettra de passer sous silence les motifs sur lesquels il appuie de semblables opinions.

J'ai lu quelque part qu'un physicien avait autrefois essayé, mais sans succès, de solidifier des bulles de savon en les congelant. J'ai fait d'inutiles recherches pour retrouver ce renseignement, de sorte que je ne puis indiquer ni le nom du physicien ni l'époque de son expérience.

§ 12. Passons au siècle actuel. En 1820, Morey annonça ¹ qu'on peut gonfler, avec de la résine fondue, des bulles dont les dimensions atteignent celles d'un œuf, et qui présentent des couleurs. D'après lui, on obtient ainsi, en général, une file de bulles dont chacune est attachée à la suivante par un mince filet ; il ajoute qu'il en conserve depuis huit mois sans qu'elles aient subi d'altération. Il raconte ensuite qu'une petite fille accourut un soir vers lui et lui montra une semblable file parfaitement régulière de 22 à 23 petites bulles, ayant chacune environ un tiers de pouce (8^{mm}) de longueur et un quart de pouce (6^{mm}) de largeur ; les minces filets intermédiaires avaient, en longueur, moins d'un huitième de pouce (3^{mm}). Morey déclare qu'il n'a aucune idée de la cause qui produit cette succession alternative de bulles et de filets.

J'ai dit, au § 5 de la série précédente, que, dans un mémoire ² de 1830, le Dr Hough paraît être amené à l'idée de la tension des surfaces liquides, uniquement en partant de la forme sphérique des gouttes liquides et des bulles de savon ; que cette idée le conduit à celle d'une pression exercée sur l'air intérieur par la lame qui constitue une bulle ou une calotte, mais qu'en cherchant la loi qui lie cette pression au diamètre, il se trompe complètement.

¹ *Bubbles blown in melted rosin* (JOURN. DE SILLIMAN, 1^{re} série, vol. II, p. 179).

² *Inquiries into the principles of liquid attraction* (Même journal, 1^{re} série, vol. XVII, p. 86).



J'ajoute ici qu'il a observé la petite masse à courbures transversales concaves qui garnit le bord des calottes laminaires; il a constaté, en outre, que ces calottes manifestent les attractions et répulsions apparentes des corps légers flottants.

Les §§ 26 à 28 de ma 7^{me} série contiennent le résumé des belles expériences de Savart ¹, publiées en 1833, sur le développement de grandes lames de différentes formes par le choc de la partie continue d'une veine liquide contre un petit disque solide, et par le choc mutuel des parties continues de deux veines directement opposées.

J'ai rappelé, dans le § 39 de la même série, les résultats obtenus, en 1836, par Le François ² à l'égard de la lame à bord rectiligne oblique que j'avais décrite, et qui se forme quand un liquide s'échappe d'une fente rectiligne étroite percée dans la paroi latérale du réservoir depuis le fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau.

J'ai rappelé aussi, dans le § 2 de la série actuelle, le procédé du D^r Reade (année 1837) pour rendre très-durables les lames d'eau de savon, procédé se réduisant à développer ces lames dans une atmosphère uniquement formée de vapeur d'eau à saturation.

En 1836 et 1837, M. Draper a fait connaître de curieuses expériences sur le passage des gaz à travers les lames liquides. Les premières, qui ont été exposées dans le journal américain des sciences médicales et dans le journal de l'Institut Franklin, consistent à gonfler, avec un certain gaz, une bulle de savon dans une atmosphère d'un autre certain gaz; la bulle alors augmente ou diminue graduellement en diamètre, et le phénomène s'arrête lorsque la composition des gaz des deux côtés de la membrane liquide est devenue la même. Les gaz employés sont, par exemple, le protoxyde d'azote à l'intérieur

¹ *Mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. de Paris, t. LIV, p. 55), et *Mémoire sur le choc de deux veines liquides animées de mouvements directement opposés* (IBID., t. LV, p. 237).

² *Bulletin de l'Académie*, t. III, p. 222.



et l'azote à l'extérieur; dans ce cas, la bulle va en diminuant. L'auteur varie l'expérience de la manière suivante ¹: on fait en sorte qu'une lame plane d'eau de savon occupe l'orifice d'un petit bocal de la contenance d'environ 60 centimètres cubes, puis on place ce bocal dans une atmosphère de protoxyde d'azote; après quelques secondes, on voit la lame se bomber vers l'extérieur, et, en une ou deux minutes, constituer la plus grande partie d'une sphère de 6 centimètres de diamètre.

J'ai mentionné, au § 9 de la série actuelle, les bulles grosses et très-persistantes que M. Böttger a gonflées (année 1838) avec un mélange fondu de colophane et d'huile de lin.

En 1843, M. Marianini a décrit ² une expérience analogue à celles de M. Draper : on laisse tomber une bulle de savon, gonflée avec la bouche, dans une large éprouvette en verre remplie aux deux tiers environ de gaz acide carbonique; après quelques oscillations, cette bulle demeure suspendue; mais bientôt on la voit augmenter en diamètre, et descendre au fur et à mesure, jusqu'à ce qu'elle éclate. En disparaissant, elle lance dans toutes les directions une quantité de petites gouttelettes qui vont arroser les parois du vase. M. Marianini tire de ce dernier fait la conséquence que le gaz contenu dans la bulle est dans un état de compression.

Il s'exprime ainsi au commencement de l'article : « Pour rendre sensible la grande différence de densité qui existe entre l'air atmosphérique et le gaz carbonique, on fait depuis longtemps, dans les cours de physique, l'expérience suivante. » L'idée ingénieuse de faire flotter une bulle de savon sur le gaz carbonique paraît donc ne pas être due à M. Marianini; j'ignore quel en est l'auteur, et à quelle époque elle a été mise en avant.

On a vu, au § 25 de ma 5^{me} série, et au § 6 de la série précédente, que M. Henry, dans une communication verbale ³ de 1844, regarde la tension des

¹ *Gaseous diffusion* (PHILOS. MAGAZ., nouvelle série, vol. XI, p. 559).

² *Sur un phénomène offert par les bulles de savon flottant sur le gaz carbonique* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. de Paris, 5^{me} série, t. IX, p. 582).

³ *Cohesion of liquids* (PHILOS. MAGAZ., 1843, vol. XXVI, p. 541).



surfaces liquides comme déterminant la forme sphérique des bulles laminaires, par la condition du minimum de surface; qu'il fait dépendre de la même cause la pression exercée sur l'air intérieur, pression dont il énonce le rapport inverse au rayon de la bulle; qu'il indique comme manifestation curieuse de la tension et de la pression qui en est la conséquence, le retrait rapide de la lame et le courant d'air intense qu'on reçoit au visage quand, après avoir gonflé une grosse bulle à l'extrémité d'un large tube, on ôte celui-ci de la bouche; qu'il a mesuré cette même pression à l'aide d'un manomètre à eau; enfin qu'il s'est légèrement trompé en attribuant toute l'action à la surface extérieure de la bulle.

M. Henry avait fait, peu de temps auparavant, une première communication concernant des mesures approximatives de la cohésion des liquides: il a cherché à évaluer cette cohésion dans l'eau de savon « en pesant la quantité d'eau qui adhérait à une bulle de cette substance immédiatement avant la rupture, et en déterminant l'épaisseur de la lame par l'observation de la couleur qu'elle présentait, d'après l'échelle des lames minces de Newton. » Je traduis ici littéralement le passage du compte rendu, parce qu'il n'est pas clair. M. Henry conclut de ses expériences que la cohésion de l'eau, loin d'être aussi faible qu'on le croyait, s'élève à plusieurs centaines de livres par pouce carré, et est probablement égale à celle de la glace.

J'ajoute à ce que j'ai dit relativement à la seconde communication, que, dans ses mesures de la pression au moyen du manomètre à eau, M. Henry estime de la même manière l'épaisseur de la lame immédiatement avant la rupture, et arrive également, par ce mode d'expérimentation, à des valeurs approchées de la cohésion, valeurs qui sont de l'ordre de celles qu'il avait déduites des pesées. Il a employé, dit le compte rendu, pour mesurer la ténacité de la lame, plusieurs autres méthodes dont les résultats généraux ont encore été les mêmes.

Le § 20 de ma 7^{me} série donne succinctement la description des curieuses expériences par lesquelles M. Melsen a réalisé ¹, en 1845, des bulles creuses

¹ Comptes rendus, t. XX, p. 1658, et journ. *l'Institut*, n° 605.



de mercure, bulles qui sont transparentes dans leur partie la plus mince et colorent en bleu ardoisé la lumière qui les traverse; M. Melsens les produisait, on l'a vu, en obligeant des bulles d'air à passer d'une couche de mercure dans une couche d'eau superposée, et elles atteignaient jusqu'à 45^{mm} de diamètre.

J'ai analysé, dans le § 30 de la même série, un travail de M. Hagen ¹, publié en 1849, où ce savant attribue la limitation des disques liquides de Savart à la tension des deux faces de la lame, cette tension donnant lieu à une force dirigée en sens contraire du mouvement du liquide.

Dans les §§ 31 et 34 de la même série encore, j'ai parlé des recherches que M. Magnus a faites aussi ² sur ces disques, et sur les phénomènes résultant du choc des parties continues de deux veines qui se rencontrent en formant un angle entre elles, phénomènes où se produisent également des lames (année 1855).

Dans le § 25 de ma 5^{me} série, j'ai reproduit la détermination donnée par M. De Tesson ³ (année 1856) de la valeur de la pression qu'éprouverait l'air emprisonné dans une vésicule de vapeur d'eau, si ces vésicules existaient. C'est, je pense, la première évaluation théorique de la pression à l'intérieur d'une sphère laminaire d'un diamètre donné et formée d'un liquide donné, bien que cette évaluation soit de moitié trop faible, ainsi que je l'ai fait remarquer; on ne doit pas tenir compte de celles du D^r Hough, qui sont absolument fausses.

M. Eisenlohr ⁴ (même année) appelle l'attention sur le saut brusque qu'on observe, dans une lame d'eau de savon qui présente des bandes colorées,

¹ *Ueber die Scheiben welche sich beim Zusammenstossen von zwei Wasserstrahlen bilden, und über die Auflösung einzelner Wasserstrahlen in Tropfen* (ANN. de M. Poggendorff, vol. LXXVIII, p. 451).

² *Hydraulische Untersuchungen* (Ibid., vol. XCV, p. 1).

³ Comptes rendus, t. XLVIII, p. 1045.

⁴ *Bericht über die XXIX^{te} Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte*, p. 86.



entre le noir et le blanc qui le suit, particularité déjà signalée par Leidenfrost; il essaie de l'expliquer par la considération que la lame se résout en différentes couches de l'épaisseur d'une molécule, et en cherchant à faire voir que, de la bande noire à la bande blanche contiguë, la différence d'épaisseur est beaucoup plus considérable relativement à l'épaisseur de cette bande noire que dans les passages entre les autres bandes.

N'ayant pas eu à ma disposition l'ouvrage cité, je rends compte de l'explication ci-dessus d'après M. Van der Willigen.

M. Eisenlohr a développé de grands et beaux anneaux colorés, en faisant tourner rapidement, dans leurs plans et autour de leurs centres, des lames circulaires d'eau de savon. Il engendre ces lames, par une agitation convenable, dans un ballon de verre qui peut avoir jusqu'à 12 centimètres de diamètre, après avoir, suivant le procédé du Dr Reade, chassé par l'ébullition la totalité ou la presque totalité de l'air intérieur, et avoir bouché hermétiquement le ballon; il imprime ensuite à celui-ci un mouvement rapide de rotation autour d'un axe vertical passant par le centre.

Je trouve cette expérience décrite dans l'édition de 1860 du *Traité de physique* de M. Eisenlohr; mais elle doit avoir été publiée dans une édition antérieure, entre 1844 et 1860.

J'ai traduit, dans le § 2 de la série précédente, une partie de la note de M. Gladstone sur la mousse ¹ (année 1857), note où l'auteur avance que tous les liquides sont susceptibles de donner, par l'agitation, des calottes laminaires à leur surface, mais que la faculté de mousser paraît être *sui generis* et ne dépendre d'aucune propriété connue. M. Gladstone fait remarquer, en outre, que la mousse produite sur un liquide coloré est toujours d'une teinte plus claire que le liquide lui-même, et il ajoute que, dans certains cas, cette teinte est toute différente de celle du liquide; par exemple, la mousse d'une solution de rouge de cochenille est d'un pourpre bleuâtre pâle; il explique ces effets par l'absorption inégale des différents rayons qui composent la lumière blanche, dans une lame mince et dans une couche épaisse du liquide.

¹ *Note on froth* (PHILOS. MAGAZ., 4^{me} série, vol. XIV, p. 514).



M. Tyndall (même année 1857) ¹, en plongeant la main dans l'écume de la mer par un temps âpre et humide, a trouvé que cette écume avait la température du sang, tandis que l'eau de la mer d'où elle provenait était très-froide. Il attribue la chaleur dont il s'agit à ce que les masses d'air, avant de former l'écume, avaient été fortement comprimées entre des vagues tombant les unes sur les autres.

En 1857 aussi, M. Van der Willigen ² a proposé, pour rendre raison du saut brusque entre le noir et le blanc contigu dans une lame d'eau de savon, une explication qui coïncide, à peu de chose près, avec une hypothèse de Leidenfrost; il regarde comme probable que, dans la lame, s'opère une séparation de la partie huileuse du savon; que celle-ci glisse sur la couche de nature aqueuse et produit les bandes colorées, tandis que la portion mise à nu de cette couche aqueuse constitue le segment noir.

En 1861, M. Faye, après m'avoir fait l'honneur de répéter, devant l'Académie des sciences de Paris, mes expériences sur les systèmes laminaires des charpentes en fil de fer ³, a décrit une expérience consistant à agiter, à l'aide d'un anneau en fil de fer, de l'huile et de l'eau de savon dans un vase de verre; chaque fois que l'anneau passe de l'eau de savon dans l'huile, il emporte une lame du premier de ces liquides, laquelle, par les mouvements imprimés à l'anneau, donne lieu à une bulle laminaire complète pleine d'huile et nageant dans ce dernier liquide. En continuant à battre les liquides, ces sphères laminaires se multiplient et se subdivisent en sphérules de même nature de plus en plus petites et de plus en plus nombreuses, jusqu'à ce que le mélange devienne une émulsion. M. Faye pense qu'on peut faire l'application de ce phénomène à certaines questions de physiologie.

C'est en 1861 également que j'ai reçu la lettre où M. Van Rees a bien

¹ *Remarks on foam and hail* (PHILOS. MAGAZ., 4^{me} série, vol. XIII, p. 552).

² *Ueber die Constitution der Seifenblasen* (ANN. de M. Poggendorff, vol. CII, p. 629).

³ COMPTES RENDUS, t. LIII, p. 465. — Cet article est précédé d'une note rédigée par moi sur les systèmes laminaires, note au commencement de laquelle le nom de M. l'abbé Moigno se trouve, par erreur, substitué à celui de M. Faye.



voulu me communiquer les procédés au moyen desquels il change à volonté la position de la lamelle centrale dans le système laminaire de la charpente cubique, et détermine la formation des polyèdres laminaires intérieurs (6^{me} série, § 40).

Dans une seconde lettre, écrite en 1862, le même savant m'a donné connaissance d'un principe nouveau et fort remarquable concernant les systèmes laminaires des charpentes prismatiques; je vais l'exposer ici; seulement il ne sera compris sans difficulté que des personnes qui ont vu les systèmes dont il s'agit.

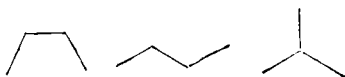
J'ai montré, on se le rappelle, dans ma 6^{me} série, que lorsque, dans une charpente prismatique, le rapport de la hauteur au diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base n'est pas trop grand, le système laminaire se compose toujours d'une lame plane polygonale ayant le même nombre de côtés que les bases, parallèle à ces dernières, située à la moitié de la hauteur de la charpente, et reliée par d'autres lames à toutes les arêtes solides; mais que, pour des prismes dont le nombre des côtés n'excède pas sept, on peut, lorsque le rapport ci-dessus demeure compris entre certaines limites, obtenir des systèmes tout différents. Dans ceux-ci, sur chacune des bases de la charpente s'appuie une sorte de pyramide rentrante, laquelle a pour sommet de petites arêtes liquides unies entre elles soit bout à bout en formant des angles, soit de manière qu'il y en ait trois aboutissant à un même point; de chacune de ces petites arêtes appartenant à l'une des deux pyramides part une lame parallèle à l'axe du prisme et allant s'attacher, par son autre extrémité, à la petite arête homologue de l'autre pyramide; enfin ces lames longitudinales, ainsi que celles qui constituent les pyramides, sont rattachées par d'autres lames aux arêtes solides latérales. C'est aux systèmes de ce genre que s'applique le principe de M. Van Rees, principe dont voici l'énoncé :

Si n désigne le nombre des côtés des bases du prisme, 1° le nombre des petites arêtes formant le sommet de chacune des deux pyramides rentrantes, et conséquemment aussi le nombre des lames longitudinales allant des petites arêtes de l'une des pyramides à celles de l'autre, est $n - 3$; 2° le nombre des systèmes de cette espèce réalisables dans une même charpente est égal à celui des figures ouvertes différentes qu'on peut former avec les $n - 3$.

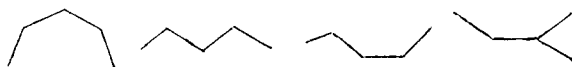


petites arêtes, sous la condition qu'il n'y en ait jamais plus de trois aboutissant à un même point.

Ainsi, pour le prisme triangulaire, on a $n - 3 = 0$, et nous savons, en effet, que, dans le système laminaire de cette charpente, le sommet de chacune des pyramides rentrantes est un simple point. Pour le prisme quadrangulaire, $n - 3$ est égal à 1, il y a une seule petite arête au sommet de chaque pyramide, et conséquemment un seul système possible de l'espèce que nous considérons. Pour le prisme pentagonal, $n - 3$ est égal à 2, il y a deux petites arêtes, et comme on ne peut former avec celles-ci qu'une seule figure ouverte, savoir un angle, il n'y a également qu'un seul système possible de l'espèce en question. Pour le prisme hexagonal, le principe indique trois petites arêtes, et, par suite, les figures :



il y a donc trois systèmes; j'en avais produit deux, et M. Van Rees les a produits tous les trois. Pour le prisme heptagonal, le principe conduit aux figures :



d'où quatre systèmes; mes expériences ne m'en avaient fourni que deux, et tous les quatre ont été obtenus par M. Van Rees. Pour le prisme octogonal, il y a au moins treize figures, et partant treize systèmes; je n'avais réussi à en développer aucun; M. Van Rees en a fait naître plusieurs, et croit qu'on peut les réaliser tous, mais il pense que la plupart sont instables.

Pour provoquer la génération des systèmes dont il s'agit ici, M. Van Rees amène d'abord le système de la première espèce, c'est-à-dire celui qui contient, au milieu de sa hauteur, une lame polygonale parallèle aux bases; puis, à l'aide du replongement de la base inférieure, il détermine la production du polyèdre laminaire intérieur, après quoi il crève une des faces latérales de celui-ci, et le système résultant est alors celui dans lequel les petites arêtes dont j'ai parlé constituent une ligne brisée dont tous les angles sont de même sens. Il passe ensuite de ce système à l'un quelconque des autres qui



conviennent à la charpente, en soufflant sur l'une ou l'autre des arêtes liquides parallèles à l'axe, suivant le plan de l'une des lames longitudinales intérieures auxquelles cette arête appartient. Il ajoute qu'on parvient quelquefois plus facilement au premier système de ce genre sans réaliser d'abord le polyèdre laminaire intérieur, en soufflant simplement sur l'une des arêtes de la lame polygonale.

Le principe de M. Van Rees s'applique sans doute à toutes les charpentes prismatiques, quel que soit le nombre de leurs faces latérales; mais je ne pense pas qu'on puisse pousser la vérification expérimentale au delà du prisme octogonal, pour lequel elle est déjà difficile.

J'ai rapporté, dans le § 7 de la série actuelle, la remarque de M. l'abbé Florimond (année 1862) sur le diamètre maximum plus grand que prennent les bulles de savon quand on emploie, pour les gonfler, une pipe de verre au lieu d'une pipe de terre.

M. Florimond fait observer, en outre, que plus est large l'orifice de l'évasement du tube, plus grand aussi est le diamètre des bulles, pourvu que le tube lui-même ne soit pas trop étroit. Je suis convaincu qu'en attachant un entonnoir en verre de 10 à 15 centimètres d'ouverture à un tube de 2 centimètres de diamètre intérieur communiquant avec une soufflerie, et s'en servant pour gonfler des bulles avec un bon liquide glycérique, on donnerait à ces bulles des dimensions énormes. Je trouve, du reste, dans la suite du passage des *Petites chroniques de la science* cité au § 10 de la série actuelle, que M. Vivier, le célèbre musicien, obtient des bulles de savon gigantesques en soufflant dans un cornet en carton, cornet qui, sans doute, est fort évasé. On verra plus loin que M. Boettger a obtenu aussi de très-grosses bulles en employant un large orifice.

MM. Minary et Sire ont décrit, en 1862 aussi, leur expérience de petites bulles laminaires complètes, engendrées par la vive agitation de l'acide sulfurique avec l'huile d'olive ¹, expérience que j'ai rappelée avec plus de détails dans le § 37 de ma 7^{me} série.

¹ *Sur un mode particulier de formation de bulles liquides* (COMPTES RENDUS, t. LV, p. 515).



Dans la note à laquelle j'ai fait allusion au § 9 de la série actuelle, note publiée en 1862 encore, M. Mach, partant du fait que mes systèmes laminaires ne satisfont pas à la condition générale de l'équilibre, puisqu'ils ont, sur les arêtes liquides, des surfaces à courbure transversale fortement concave, tandis que les surfaces des lames sont à courbure moyenne nulle, émet l'opinion que l'étude de ces systèmes pourrait conduire à des conséquences importantes sur les lois de l'attraction moléculaire dans les liquides. Selon lui, j'aurais cherché à expliquer le fait en question en admettant que l'épaisseur des lames est inférieure au double du rayon de la sphère d'attraction, ce qui fait supposer que je regarde ces mêmes systèmes comme étant à l'état d'équilibre complet; or ce que j'ai dit (2^{me} série, §§ 23 à 26), c'est que, dans un système où des lames à courbure moyenne nulle sont ainsi rattachées à des masses à courbure concave, l'équilibre n'est qu'apparent, ou plutôt n'existe que dans la forme générale de l'ensemble; que, par suite des différences de pression capillaire, les lames envoient continuellement leur liquide à ces masses, et vont conséquemment en s'amincissant; enfin que le système *tend* vers un état d'équilibre dans lequel les lames auraient une épaisseur moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire, mais que cet équilibre paraît ne pouvoir être atteint, les lames éclatant toujours auparavant.

M. Mach croit qu'il pourra tirer un parti intéressant de la comparaison des épaisseurs des lames de différents liquides (probablement à l'instant de leur formation); c'est dans ce but qu'il a réalisé, ainsi que je l'ai dit au paragraphe cité plus haut, le système laminaire du tétraèdre régulier, en employant de la colophane fondue; il a formé aussi de petites lames avec une solution d'un silicate alcalin, lames qui se sont solidifiées par l'évaporation de l'eau. Ces différentes lames ayant été détachées des fils solides, M. Mach les a pesées, et a mesuré la surface de chacune d'elles, puis, connaissant en outre leurs densités, il a calculé leurs épaisseurs moyennes. Il a trouvé de cette manière que l'épaisseur moyenne des lames de la solution de silicate, à l'état liquide, était de 0^{mm},142, et que celle des lames de colophane était de 0^{mm},027.



En 1862 également, M. Kaul a fait paraître un article ¹ relatif aussi à mes systèmes laminaires. Il démontre, par une méthode qui revient à la mienne, la nécessité de l'égalité des angles entre les lames qui aboutissent à une même arête liquide et entre les arêtes liquides qui aboutissent à un même point liquide. Il fait remarquer ensuite que si la charpente qu'on retire du liquide consiste simplement en deux polygones plans ayant un côté commun, et si les plans de ces deux polygones forment entre eux un angle moindre que 120° , le système obtenu se compose de deux lames courbes s'appuyant respectivement sur les contours libres des deux polygones, et d'une troisième lame, en forme de faucille, partant du côté commun pour s'unir aux deux premières par une arête liquide courbe; il en conclut que de semblables lames en faucille tendent toujours à se produire dans les différentes charpentes, mais que leur forme est altérée par les autres lames du système, et il croit qu'en partant de ce principe et des lois concernant les angles, on peut prévoir quel sera le système qui se montrera dans une charpente donnée.

Mon fils (même année 1862) a déterminé la formation de grosses bulles laminaires en lançant obliquement en l'air de l'eau de savon ², expérience que j'ai citée plus au long dans le § 35 de ma 7^{me} série.

Dans un mémoire ³ de l'année 1863, M. Sire indique quelques expériences curieuses concernant la pression exercée par une bulle creuse sur l'air emprisonné: il fait en sorte que deux bulles de liquide glycérique soient respectivement gonflées aux deux extrémités d'un même tube convenablement disposé; l'appareil est construit de façon qu'on puisse établir ou interrompre à volonté la communication entre les deux moitiés du tube. Quand cette communication est fermée ainsi que l'orifice d'insufflation, les bulles n'éprouvent aucun changement de dimensions; mais quand elle est ouverte, l'orifice d'in-

¹ *Ueber die Plateau'schen Figuren* (SITZUNGSBERICHTE DER KOENIGSBERGER GESELLSCHAFT, t. III, p. 7).

² *Sur un mode particulier de production de bulles de savon* (BULLETIN DE L'ACAD., 2^{me} série, t. XIII, p. 286).

³ *Étude sur la forme globulaire des liquides*, thèse présentée à la Faculté des sciences de Besançon.



sufflation demeurant bouché, les bulles ne persistent dans le même état que si leurs diamètres sont égaux ; dans le cas contraire, on voit la plus petite diminuer avec une vitesse accélérée, jusqu'à s'annuler, l'excès de sa pression chassant son contenu gazeux dans la plus grosse, qui augmente ainsi en volume. L'auteur varie l'expérience en modifiant l'appareil de manière à pouvoir gonfler l'une des bulles à l'intérieur de l'autre.

Ainsi que je l'ai dit dans le § 35 de ma 7^{me} série, M. Van der Mensbrughe a étendu (année 1864) l'expérience de mon fils, en montrant que, par le même procédé convenablement employé, on peut forcer un grand nombre de liquides, peut-être tous, à s'arrondir en bulles creuses complètes ¹.

En 1864 encore, M. Laroque ² s'est proposé d'étudier la constitution d'une veine d'eau lancée verticalement de haut en bas par un orifice circulaire, quand le liquide du vase est animé d'un mouvement gyrateur autour de l'axe de l'orifice. Le vase était cylindrique et de grande dimension; l'orifice, percé au centre du fond, avait un centimètre de diamètre; le mouvement de rotation était imprimé au liquide par un moyen que l'auteur indique. Parmi les observations de M. Laroque, je dois citer ici la suivante : Sous une charge suffisamment réduite, une excavation formée au milieu de la surface du liquide du vase, après avoir atteint l'orifice, pénétrait dans la veine, et celle-ci, jusqu'à une certaine distance, devenait laminaire; elle se composait alors de renflements et d'étranglements creux occupant des positions fixes. Avec une charge de 15 centimètres, il y avait trois de ces renflements, dont les deux supérieurs, de forme régulière, avaient chacun 8 centimètres de longueur et 16 millimètres de largeur; le troisième était un peu plus petit et moins régulier; au-dessous, la veine s'éparpillait en gouttes. Seulement, d'après les figures dont le mémoire est accompagné, la lame qui constituait toute cette portion de la veine était beaucoup moins mince aux étranglements qu'aux renflements.

¹ *Sur quelques effets curieux des forces moléculaires des liquides* (BULLETIN DE L'ACAD., 2^{me} série, t. XVIII, p. 161).

² *Ann. de chim. et de phys.* de Paris, 4^{me} série, t. 1, p. 276.



J'ai déjà parlé (§§ 9 à 11 de la série précédente) de la première partie du mémoire de M. Lamarle ¹ sur mes systèmes laminaires, publié en 1864 et 1865. Le résumé détaillé de toute cette partie, dans laquelle l'auteur démontre mathématiquement les lois que j'avais trouvées à l'égard des assemblages de lames, aura sa place dans une série ultérieure, spécialement consacrée aux questions de stabilité; mais je vais rendre compte ici des principaux résultats contenus dans la deuxième partie.

Ces résultats concernent surtout les polyèdres laminaires fermés à faces convexes, qu'on produit, par le procédé de M. Van Rees, au milieu des systèmes laminaires des charpentes.

1° Un second procédé consiste à gonfler une bulle de grosseur convenable et à l'introduire dans le système; elle s'attache aux lames de celui-ci, et, quand on retire le tube qui a servi à la souffler, elle forme aussitôt le polyèdre laminaire intérieur. On peut augmenter ou diminuer à volonté les dimensions de ce polyèdre : pour cela, on y introduit l'extrémité effilée d'un tube, après l'avoir mouillée de liquide glycérique, et on souffle ou on aspire par ce tube.

2° Dans la charpente tétraédrique, les faces du tétraèdre laminaire réalisé à l'intérieur sont de courbure sphérique, et conséquemment les arêtes de ce même tétraèdre sont de courbure circulaire; le centre de la sphère à laquelle appartient l'une quelconque des faces est situé au sommet opposé; enfin le centre de la circonférence à laquelle appartient l'une quelconque des arêtes est situé au milieu de la corde de l'arête opposée.

3° Dans la charpente du prisme triangulaire, quand le rapport entre la hauteur du prisme et le côté de la base est compris entre certaines limites, on peut, à volonté, par des manœuvres convenables, obtenir, au milieu de la figure résultant d'une seule immersion, une lame triangulaire parallèle aux bases ou une arête liquide parallèle aux arêtes latérales. Entre certaines limites aussi, on peut développer un prisme triangulaire intérieur, mais les faces de celui-ci ne sont jamais de courbure sphérique.

¹ *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces* (MÉM. DE L'ACADÉMIE, t. XXXV et XXXVI).



4° Dans la charpente cubique, les faces de l'hexaèdre laminaire intérieur sont de courbure sphérique, et le rayon des sphères auxquelles elles appartiennent est égal à une fois et demie la droite qui joint deux sommets opposés de l'une d'elles.

5° Dans la charpente du prisme pentagonal, pour un rapport entre la hauteur et le côté de la base compris entre certaines limites très-resserrées, on peut obtenir, ad libitum, dans le résultat d'une seule immersion, ou bien une lame pentagonale très-petite au milieu de la figure, ou bien l'autre système, c'est-à-dire celui qui présente des espèces de pyramides rentrantes s'appuyant sur les bases. Quant au polyèdre laminaire intérieur, il ne prend des faces de courbure sphérique que dans certaines conditions de volume.

6° Dans la charpente du dodécaèdre régulier, le dodécaèdre laminaire intérieur a ses faces de courbure sphérique, mais d'un très-grand rayon.

7° Dans tous les systèmes ci-dessus avec polyèdre laminaire intérieur, quand les faces de celui-ci sont de courbure sphérique, toutes les lames qui s'étendent de ses arêtes à celles de la charpente, sont planes, et conséquemment toutes les arêtes liquides qui joignent ses sommets à ceux de la charpente, sont droites.

8° A l'égard de la charpente octaédrique, un artifice de raisonnement conduit a priori à cinq systèmes différents, systèmes qui sont très-probablement les seuls possibles, et dont je n'avais observé que deux; les trois nouveaux, qui sont composés de lames courbes, contiennent, en leur milieu, l'un une lame pentagonale, un autre une lame quadrangulaire trapézoïdale, et le dernier une lame quadrangulaire équilatérale. Tous ces systèmes se réalisent à volonté, et on peut les faire passer, également à volonté, des uns aux autres. Dans le premier de ces cinq systèmes, qui n'a que des lames planes, les dimensions des différentes parties ont entre elles et avec les dimensions de la charpente, des rapports numériques fort simples.

La théorie convenablement traitée indique, dans ce même système à lames planes, la possibilité de 15 polyèdres intérieurs différents; elle les fait dériver les uns des autres, et le tout se vérifie par l'expérience.

9° Quand on réalise l'un de ces polyèdres intérieurs, on voit se former six petites lames triangulaires qui y aboutissent; en crevant deux ou quatre de



ces lamelles, on obtient des systèmes d'un genre particulier, et qu'on peut nommer incomplets. Pour trois de ceux-ci, qui résultent de la disparition de deux lamelles opposées, les polyèdres intérieurs, primitivement octaédriques, sont devenus des hexaèdres, et ont des formes très-élégantes; la disparition de deux autres lamelles opposées transforme l'un de ces hexaèdres en un tétraèdre d'un aspect curieux à raison du contournement de ses faces.

M. Broughton ¹ (année 1866) rappelle le fait, suivant lui bien connu, que, dans une bulle de savon, les portions qui, vues d'une certaine distance, paraissent d'une teinte uniforme, montrent, quand on les examine de plus près, une foule de petites bandes de couleurs variées et brillantes; il est rare qu'on y trouve un espace d'un millimètre carré qui ne contienne pas plusieurs de ces petites bandes, et l'uniformité apparente est due simplement à la prédominance des petites bandes d'une teinte déterminée. M. Broughton dépose sur un anneau une petite bulle de liquide glycérique à l'oléate de soude, et, lorsqu'une tache noire s'est formée au sommet ², il observe celle-ci et ses environs à l'aide d'un microscope composé, la bulle étant éclairée par une lumière vive et convenablement dirigée; il constate alors la production d'un grand nombre de petites figures colorées, très-variées et très-mobiles, offrant, dit-il, un spectacle de la plus grande magnificence.

M. Broughton essaie ensuite de déterminer, par une méthode particulière, l'épaisseur moyenne de la lame qui constitue une bulle : il gonfle la bulle avec un mélange d'hydrogène et d'air, en variant les proportions de ce mélange et le diamètre de la bulle jusqu'à ce que celle-ci, débarrassée de la goutte qui y adhère ordinairement, flotte dans l'atmosphère sans grande tendance à monter ou à descendre; connaissant alors le diamètre de cette bulle, la densité du liquide, et la proportion du mélange gazeux intérieur, il en déduit, au moyen d'une formule, le poids de la bulle et l'épaisseur moyenne cherchée.

¹ *On some properties of soap-bubbles* (PHILOS. MAGAZ., 4^{me} série, vol. XXXI, p. 228).

² L'apparition de cette tache noire sur une bulle de liquide glycérique me paraît singulière : on a fait chez moi une quantité innombrable de bulles de ce liquide préparé soit au savon, soit à l'oléate de soude, et jamais on ne m'a signalé de semblables taches, quelque grande qu'ait été la persistance. Les bulles de M. Broughton devaient être fort petites, et c'est peut-être à cette circonstance qu'était due la production de la tache noire.



Par exemple, une bulle de 90^{mm} de diamètre, gonflée avec un mélange de 1 vol. d'hydrogène et de 16 vol. d'air, s'est trouvée dans les conditions requises, et M. Broughton est arrivé, pour l'épaisseur moyenne de la lame, à la valeur 0^{mm},000965.

Dans le 5^{me}, le 6^{me} et le 7^{me} de ses mémoires *Sur la théorie mécanique de la chaleur* (de 1865 à 1868) ¹, M. Dupré, nous le savons, a traité, par des méthodes nouvelles, certaines questions relatives aux lames liquides. Ainsi qu'on l'a vu au § 12 de la série précédente, outre des expériences simples au moyen desquelles il constate l'existence de la tension dans les lames, il arrive à plusieurs résultats généraux concernant cette force : il fait remarquer que la tension est indépendante de l'épaisseur de la lame, du moins tant que cette épaisseur n'est pas au-dessous d'une certaine limite extrêmement petite ; il établit que la tension diminue, mais assez faiblement, quand la température augmente, et il signale un fait qui montre cette variation dans les lames ; il cherche les lois que suit la vitesse de retrait d'une lame qui éclate, et celles qui régissent la diminution progressive du diamètre d'une bulle quand on laisse ouvert le tube d'insufflation ; enfin l'un des nombreux procédés qu'il décrit pour évaluer la tension des surfaces liquides en général, est fondé sur la mesure de la pression à laquelle est soumis l'air emprisonné dans une bulle.

J'ajoute ici une expérience curieuse exposée dans le même travail : si on laisse tomber d'une hauteur modérée une petite boule de liège sur une lame plane horizontale de liquide glycérique, la lame est traversée, mais n'éclate pas et conserve son intégrité. Pour savoir ce qui se passe dans cette circonstance, M. Dupré fixe la boule de liège à l'extrémité d'une aiguille, et, tenant cette dernière en main, il fait passer la boule avec lenteur à travers la lame ; il voit alors cette dernière s'enfoncer, former une poche de plus en plus profonde, puis cette poche s'étrangle au-dessus de la boule, l'étranglement se ferme, se sépare en deux, et la lame plane est restituée. Le phénomène est donc tout à fait analogue à celui qui a lieu quand on sépare, par une secousse, une bulle du tube qui a servi à la gonfler (7^{me} série, § 25).

¹ *Ann. de chim. et de phys.* de Paris, 4^{me} série, t. VI, VII, IX, XI et XIV.



M. Van der Mensbrugghe a fait ¹, en 1866, l'application du principe général qui termine ma 7^{me} série à la réalisation, en lame, d'une surface à courbure moyenne nulle dont M. Scherk avait trouvé l'équation en coordonnées finies. J'analyserai cette note dans la série suivante.

J'ai donné, dans le § 13 de la série précédente, la substance d'une autre note ² de M. Van der Mensbrugghe (année 1866), concernant : 1° de nouveaux procédés pour l'évaluation de la tension des lames; 2° les lois qui régissent la forme que prend un fil flexible inséré dans une lame liquide courbe, quand on a crevé la portion de lame qu'il intercepte. J'ai fait allusion, dans le même paragraphe, au rapport de M. Lamarle ³ sur cette note, rapport où est signalée une loi qui avait échappé à M. Van der Mensbrugghe, ainsi que la nécessité d'une déformation, dans le plus grand nombre des cas, de la surface laminaire sous l'action du fil qui s'est tendu. Enfin, au même endroit encore, j'ai cité une dernière note ⁴, publiée en 1867, dans laquelle M. Van der Mensbrugghe vérifie les conclusions du rapport ci-dessus, et indique une expérience intéressante sur la tension d'une lame plane verticale.

En 1866 ou 1867, M. Böttger ⁵ a développé, avec une décoction concentrée d'écorce de Quillaya (bois de Panama), des bulles extrêmement grosses, persistant longtemps et étalant de vives couleurs (il n'indique ni le diamètre ni la durée), en se servant d'un entonnoir de 7 à 8 centimètres d'ouverture. On sait que l'écorce de Quillaya contient de la saponine.

Les lames liquides ont fait, en 1867, l'objet de trois mémoires de Brewster. Le premier ⁶ est consacré aux couleurs des lames : l'auteur étudie avec un soin minutieux toutes les dispositions, tous les changements des

¹ *Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle* (BULLET. DE L'ACAD., 2^{me} série, t. XXI, p. 532).

² *Sur la tension des lames liquides* (IBID., t. XXII, p. 508).

³ *Ibid.*, p. 272.

⁴ *Sur la tension des lames liquides*, 2^{me} note (IBID., t. XXIII, p. 448).

⁵ *Jahres-Bericht des physikalischen Vereins in Frankfurt am Main*, 1866-1867, p. 67.

⁶ *On the colours of the soap-bubble* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).



couleurs dont il s'agit, et tous les phénomènes singuliers qu'elles présentent, tels que la production et les mouvements des petites taches en forme de têtards, etc. A part ces détails, qui ne sauraient être résumés, voici les résultats les plus saillants :

1° On produit une lame plane dans l'orifice d'un verre à boire; on tient le verre de manière que cette lame soit verticale, puis, lorsque les bandes colorées s'y sont bien développées, on donne au verre un mouvement de rotation aussi rapide que possible autour de son axe; toutes les bandes demeurent horizontales.

2° La lame étant placée horizontalement et offrant différentes teintes, on souffle sur sa surface à travers un tube étroit, dans la direction d'un diamètre; on voit aussitôt se former, de chaque côté de ce diamètre, un système d'anneaux colorés; ces deux systèmes tournent rapidement, et en sens contraires, autour de leurs centres respectifs. Si le souffle est dirigé non suivant un diamètre, mais suivant une petite corde, il n'y a plus qu'un système d'anneaux colorés tournant. Dans tous, les teintes des premiers ordres sont vers le centre. Enfin si l'on continue à souffler, les anneaux disparaissent graduellement.

3° Brewster énonce une idée analogue à celles de Leidenfrost et de M. Van der Willigen : selon lui, les couleurs d'une lame d'eau de savon ne résulteraient pas des différentes épaisseurs de la lame elle-même, mais d'une matière particulière qui flotte sur cette lame. Ce qui lui paraît le plus vraisemblable, c'est que la matière qui produit ainsi les couleurs est formée de l'un des ingrédients de la solution, séparé de celle-ci par une sorte de sécrétion, laquelle n'a lieu que lorsque le liquide est à l'état laminaire. Il s'appuie principalement sur les faits suivants : Si l'on examine la surface d'une solution de savon ou celle du liquide glycérique, même quand le vase est peu profond, on n'y observe aucune coloration, et elle réfléchit les images des objets comme le ferait l'eau ou le verre; mais dès que le liquide est étendu en lame mince, sa surface devient momentanément inégale et ne réfléchit plus les images qu'imparfaitement; de plus, quand les couleurs se sont développées, toutes leurs variations et tous les mouvements qui s'y produisent s'accordent avec l'hypothèse en question; enfin, si l'on souffle sur la lame ou qu'on y



passé une plume mouillée du même liquide, on balaie la matière colorante, et l'on éparpille les couleurs.

Les observations renfermées dans le second mémoire ¹, observations qui ont trait surtout aux systèmes laminaires des charpentes, ont été entreprises par Brewster dans un but de simple amusement, et offrent assez peu de résultats nouveaux au point de vue scientifique; je citerai cependant les suivants, qui ne manquent pas d'intérêt :

Dans le § 21 de ma 6^{me} série, pour montrer l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre dans lequel plus de trois lames aboutiraient à une même arête liquide, j'ai décrit une expérience consistant à retirer du liquide glycérique une charpente composée de deux rectangles égaux qui se coupent à angle droit par les milieux de deux côtés opposés; j'ai fait remarquer alors que si l'on concevait les deux rectangles occupés chacun par une lame plane, de sorte que ces lames se couperaient suivant une arête liquide unique joignant les points d'intersection des deux contours rectangulaires, on aurait nécessairement, à cause de la symétrie, un système d'équilibre; mais j'ai ajouté que celui-ci devrait être instable, puisqu'il présenterait quatre lames partielles unies par une même arête liquide; aussi, on l'a vu, il ne se produit jamais : le système réalisé contient une cinquième lame plane, de figure ovale, à laquelle viennent aboutir les autres, et dont le plan est bissecteur de deux des angles dièdres formés par les plans des rectangles.

Or Brewster a eu l'idée de rendre les deux rectangles mobiles autour de leurs points d'intersection, de manière à faire varier les angles dièdres, et alors, en augmentant graduellement ceux de ces angles dont le plan de la lame ovale est bissecteur, il a vu cette lame se rétrécir au fur et à mesure, de telle façon que, lorsque les angles dont il s'agit sont devenus de 135° , la lame ovale s'est réduite à une simple arête liquide droite joignant les deux points d'intersection; mais, au moment même, le système s'est modifié, et une nouvelle lame ovale s'est produite, bissectrice des deux autres angles dièdres. Brewster a donc réussi à réaliser, mais seulement pour un instant inappré-

¹ *On the figures of equilibrium in liquid films* (TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).



ciable, un système dans lequel quatre lames sont unies par une même arête liquide, et cette jolie expérience complète la vérification de l'instabilité d'un semblable système.

En second lieu, le même savant développe d'une manière curieuse les systèmes laminaires de plusieurs charpentes : celle sur laquelle il veut opérer étant préalablement mouillée de liquide glycérique, mais ne contenant aucune lame, il gonfle, dans son intérieur, une grosse bulle, qui s'attache à l'ensemble des arêtes solides, de manière que chacune des faces se trouve occupée par une lame, puis il crève l'une de ces lames, et le système ordinaire apparaît aussitôt. Outre le spectacle singulier de cette transformation instantanée, le procédé de Brewster offre ainsi l'avantage de réaliser les systèmes laminaires en n'exigeant qu'une fort petite quantité de liquide.

En troisième lieu, Brewster a imaginé de réaliser une lame à l'un des orifices d'un tube en forme de cône tronqué : quand, après avoir plongé l'orifice le plus large dans le liquide glycérique, on l'en retire, il se trouve nécessairement occupé par une lame; mais celle-ci se met aussitôt en mouvement dans l'intérieur du tube vers le plus petit orifice, et ne s'arrête que lorsqu'elle a atteint celui-ci. Je ferai observer qu'on peut considérer ce phénomène comme un effet de la tension : la lame faisant constamment effort pour diminuer d'étendue, elle satisfait à cette tendance en marchant vers le petit orifice.

Enfin le troisième mémoire ¹ concerne les apparences que manifestent de petites lames d'alcool, d'huiles volatiles ou fixes, etc. Brewster produit ces lames en déposant une goutte du liquide à observer soit sur une ouverture de 5^{mm} de diamètre au plus, pratiquée dans une plaque solide, soit sur un petit anneau; la goutte se façonne d'abord en lentille bi-concave, et, quand on place la plaque ou l'anneau verticalement, la majeure partie du liquide descend, et laisse une lame. Avec un liquide suffisamment volatil, comme l'alcool, on attend quelque temps avant de redresser la plaque ou l'anneau; l'évaporation seule transforme alors la lentille bi-concave en une lame plane

¹ *On the motion and colours upon films of alcohol, volatile oils, and other fluids* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, VOL. XXIV).



occupant presque toute l'ouverture. Brewster observe les lames dont il s'agit soit par transmission, soit par réflexion; dans le premier cas, il y voit peu de couleurs, mais il y distingue des courants affectant des formes et des mouvements bizarres; dans le second, il y constate, outre les mêmes courants, des systèmes variés et mobiles d'anneaux colorés.

Nous trouvons encore, en 1867, une expérience remarquable au moyen de laquelle M. Chautard ¹ parvient à rendre manifeste à tout un auditoire le magnétisme de l'oxygène : à l'orifice d'une pipe de terre maintenue immobile par un support, il gonfle, avec de l'oxygène, une bulle de liquide glycérique; cette bulle se trouve placée au-dessus et près des pôles d'un électro-aimant; par des aimantations et des désaimantations successives de ce dernier, elle prend un mouvement oscillatoire très-visible, surtout quand elle est fortement éclairée.

En 1868, M. Cauderay ² a signalé les bulles de savon comme étant extrêmement sensibles aux attractions et répulsions électriques, et a indiqué une suite d'expériences curieuses très-propres à être effectuées dans les cours publics.

Par exemple : « si l'on charge la machine au moment où on souffle des bulles de savon dans le voisinage, elles seront attirées à une distance de 30, 40 ou 50 centimètres, et même bien au delà si la machine est assez puissante. On voit alors les bulles se précipiter vivement sur le conducteur électrique et s'y briser; quelquefois les bulles résistent au choc, elles s'attachent au conducteur, s'y chargent; elles sont alors aussitôt repoussées au loin et attirées soit par l'expérimentateur, soit par le sol, sur lequel elles ne tombent, le plus souvent, qu'après avoir fait une série de bonds, pendant lesquels l'électricité de la bulle se combine avec celle de la terre..... »

Si l'on dépose sur le conducteur une série de bulles, « au moment où l'on

¹ *Expériences relatives au magnétisme et au diamagnétisme des gaz* (COMPTES RENDUS, t. LXIV, p. 1141).

² *Effets de l'électricité statique sur les bulles de savon* (BULET. DE LA SOCIÉTÉ VAUDOISE DES SC. NATURELLES, vol. IX, p. 655).



mettra en mouvement le plateau de verre de la machine, elles s'allongeront d'abord en forme d'ellipse, puis se détacheront du conducteur pour voler dans toutes les directions, avec une tendance toutefois à se diriger sur les personnes placées autour de la machine. »

Citons encore le passage suivant, où il s'agit de montrer que l'électricité statique ne se manifeste qu'à la surface extérieure des corps : « si, sur un disque isolé (en métal), on souffle des bulles concentriques, lorsqu'on charge la machine, la bulle extérieure seule est influencée, elle se déforme plus ou moins suivant l'intensité de la charge, tandis que les bulles intérieures conservent toutes leur forme demi-sphérique. »

M. Cauderay recommande d'armer la machine d'un conducteur supplémentaire, afin que les expériences puissent se faire à une assez grande distance des supports isolants; sans cela, ces supports sont bientôt humectés par les gouttelettes que les bulles projettent en éclatant.

§ 13. Je n'ai pas cru devoir parler, dans ce résumé, des lames minces résultant de l'extension d'un liquide sur un autre, comme de l'huile sur l'eau, de l'alcool sur l'huile, etc. Une semblable lame, en effet, est d'un tout autre genre que celles dont je me suis occupé : elle est en contact par sa face supérieure avec l'air, et, par sa face inférieure, avec le second liquide ; elle n'est pas libre de prendre différentes formes, et constitue simplement une couche tenue reposant sur la surface plane et horizontale du liquide sous-jacent.

Du reste, on peut consulter, à l'égard de ces lames, 1° un travail fort intéressant de M. Van Beek, intitulé : *Mémoire concernant la propriété des huiles de calmer les flots et de rendre la surface de l'eau parfaitement transparente* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 3^e série, tome IV, 1842, page 257); 2° une note de M. Carrère sur *Deux procédés au moyen desquels on peut produire, avec une grande intensité, le phénomène des anneaux colorés* (COMPTES RENDUS, 1855, tome XLI, page 1046); 3° un mémoire de M. Du Bois-Reymond, intitulé : *Experimental-Untersuchungen über die Erscheinungen welche die Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten hervorruft* (ANN. de M. Poggendorff, 1858, tome CIV, page 193).



Avant de reprendre les questions générales relatives aux figures d'équilibre, je vais traiter maintenant deux faits particuliers, dont l'étude trouverait difficilement place ailleurs.

Ascension capillaire à de grandes hauteurs dans des tubes de grands diamètres.

§ 14. Ainsi qu'on le sait, l'ascension des liquides pesants dans les tubes dont ils peuvent mouiller les parois ne prend quelque développement que lorsque ces tubes ont de très-petits diamètres intérieurs, d'où est venue la dénomination de phénomènes capillaires, et la pesanteur établit toujours une limite à la hauteur de la colonne soulevée. Mais si l'on neutralise l'action de la pesanteur, ces restrictions doivent disparaître, et le liquide doit pouvoir monter indéfiniment dans un tube d'un diamètre quelconque.

Il m'a paru curieux d'essayer cette application de mes procédés ¹. On conçoit d'abord qu'il faut maintenir l'orifice supérieur du tube au-dessous de la surface du liquide alcoolique qui remplit le vase, afin que, tout se passant au sein de ce liquide, la pesanteur ne puisse exercer aucune influence sur le phénomène.

Avec cette condition, l'expérience paraît très-simple; il semble qu'il suffit de procéder de la manière suivante : 1° former, dans le liquide alcoolique, une sphère d'huile d'un volume convenable, les deux liquides ayant la même densité; 2° amener cette sphère près du fond du vase; 3° prendre un tube de verre d'un diamètre quelconque, mais d'une longueur telle qu'en supposant son extrémité inférieure en contact avec le haut de la masse d'huile, son extrémité supérieure n'atteigne pas la surface du liquide alcoolique; 4° mouiller parfaitement d'huile l'intérieur de ce tube; 5° enfin introduire ce même tube verticalement dans le vase, l'y enfoncer jusqu'à ce qu'il touche la masse d'huile, et le maintenir, par quelque moyen, immobile dans cette position.

§ 15. C'est bien à peu près ainsi, en effet, que l'expérience doit se faire; mais il est nécessaire d'employer certaines précautions accessoires qui faci-

¹ Mes premières expériences sur ce sujet ont été faites en 1842; j'en ai rendu, à cette époque, un compte sommaire dans les *Bulletins de l'Académie* (t. IX, 1^{re} part., p. 298).



litent les opérations, et sans lesquelles on obtiendrait rarement un résultat complet.

En premier lieu, vu la nature des phénomènes que l'on veut observer, on comprend qu'il est avantageux de remplacer le vase à parois planes qui m'a servi jusqu'ici, par un appareil ayant moins de largeur et plus de hauteur; celui dont j'ai fait usage est une grande éprouvette en verre, large de 10 centimètres et haute de 55.

En second lieu, une égalité parfaite entre les densités de l'huile et du liquide ambiant est assez longue à obtenir; il est plus commode de faire en sorte que l'huile ait un très-petit excès de densité par suite duquel elle descend d'elle-même très-lentement au fond du vase, où l'on aura placé préalablement un morceau d'étoffe de coton (2^e série, § 9); si l'excès de densité est extrêmement faible, il aura peu d'influence en présence de l'action des forces moléculaires.

En troisième lieu, pour que le tube une fois introduit dans l'appareil s'y soutint dans la position convenable, j'ai employé le moyen simple que voici : près de l'extrémité supérieure du tube, on a enroulé un fil de cuivre, en le tordant ensuite avec une pince pour le serrer, mais de manière qu'il restât deux bouts libres d'une longueur suffisante; on a relevé obliquement ces deux bouts libres, et l'on en a replié les extrémités en forme de crochets; ceux-ci étant posés sur le bord supérieur du vase cylindrique, servent ainsi à suspendre le tube dans l'intérieur de ce vase. En outre, pour empêcher que le tube n'éprouvât des balancements incommodes, on a attaché, vers son milieu, et par le même moyen, un second fil de cuivre dont les bouts n'étaient point repliés en crochets et faisaient ressort contre la paroi intérieure du vase ¹; de cette façon, le tube se maintient immobile dans l'axe du système. Ajoutons que la longueur des fils de cuivre à crochets doit être telle que lorsque le tube est placé, son orifice inférieur atteigne le haut de la sphère d'huile qui repose sur le fond du vase.

En quatrième lieu, il faut faire garnir l'extrémité inférieure du tube d'un

¹ Il est nécessaire d'employer ici du fil de cuivre, et non du fil de fer : car ce dernier pourrait rayer le vase à l'intérieur, et l'on sait qu'il suffit souvent d'une raie imperceptible formée sur la paroi interne d'un vase de verre, pour occasionner la rupture de celui-ci.



collet en fer, muni lui-même, à son contour inférieur, d'un rebord mince d'environ 3 millimètres de largeur. Cette addition a pour objet de s'opposer à ce que la masse d'huile s'élève plus ou moins, et d'une manière irrégulière, sur la surface extérieure du tube; ici, comme dans l'expérience des §§ 5 à 7 de la 5^{me} série, le petit rebord arrête toute ascension extérieure de l'huile, et oblige la masse à prendre sous le tube une position parfaitement symétrique.

En cinquième lieu, pour pouvoir apprécier la vitesse du mouvement de la colonne liquide ascendante et les variations de cette vitesse, on marque, avec de l'encre, sur le tube, des traits perpendiculaires à sa longueur et également espacés, de décimètre en décimètre, par exemple, à partir de l'orifice inférieur; ces traits sont tracés tout autour du verre, afin de rendre l'observation plus facile.

En sixième lieu, si, avant de plonger dans le vase le tube muni de tous les accessoires ci-dessus, on se borne à en mouiller d'huile la surface intérieure, on voit bientôt se manifester un phénomène qui m'a longtemps embarrassé : la couche d'huile se retire irrégulièrement pour s'accumuler en certains endroits et faire place, en d'autres, au liquide alcoolique, de sorte que la continuité de la couche huileuse est détruite. C'est en vain que l'on prend tous les soins possibles pour huiler parfaitement le tube à l'intérieur; on peut même y faire préalablement bouillir de l'huile, l'effet ci-dessus ne s'en produit pas moins ¹. Après plusieurs essais infructueux pour parer à cet inconvénient, j'ai imaginé le procédé suivant, qui donne une réussite complète. On ferme avec un bouchon de liège une des extrémités du tube, et l'on remplit celui-ci de saindoux fondu et très-chaud, qu'on y laisse séjourner pendant quelques minutes; on vide ensuite le tube, on le débouche, et, le suspendant verticalement, on le laisse égoutter, jusqu'à ce que la couche légère de saindoux qui y demeure adhérente soit entièrement refroidie; on a soin de le retourner de temps à autre, afin de rendre plus uniforme l'épaisseur de la couche grasseuse. Le tube étant ainsi préparé, on le bouche de

¹ Voir, pour l'explication théorique des phénomènes de ce genre, le § 227 du 5^{me} mémoire de M. Dupré *Sur la théorie mécanique de la chaleur* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 4^{me} série, t. IX, 1866).



nouveau, on le remplit d'huile, on le vide immédiatement, on le débouche, et on le plonge aussitôt dans le vase; la couche d'huile retenue alors par son adhérence avec le saindoux ne se divise plus.

§ 16. Les choses étant ainsi organisées, l'expérience a un plein succès : dès que l'adhérence est établie entre la sphère d'huile et le rebord qui garnit l'orifice du tube, on voit l'huile s'élever graduellement dans l'intérieur de ce dernier jusqu'à en atteindre l'extrémité supérieure, bien que ce même tube ait un grand diamètre, et qu'on lui ait donné toute la longueur que permet la disposition de l'appareil. Pendant son ascension, la colonne d'huile se montre terminée par une surface hémisphérique concave. Son mouvement est un mouvement retardé; nous en connaissons bientôt la raison.

Dans l'une de mes expériences, le tube avait 14 millimètres de diamètre intérieur, et 42 centimètres de longueur; le diamètre de la sphère d'huile était d'environ 7 centimètres, et cette masse possédait un si petit excès de densité, qu'elle avait employé plus d'un quart d'heure à descendre jusqu'au fond du vase. Il est inutile d'ajouter que l'huile et le liquide alcoolique avaient été, comme dans toutes mes expériences, rendus autant que possible chimiquement inertes l'un à l'égard de l'autre, et qu'on opérait dans un lieu dont la température demeurerait sensiblement constante.

Voici, dans ces conditions, les temps employés par le sommet de la colonne liquide à parcourir les décimètres successifs de la longueur du tube :

1 ^{er} décimètre	1' 47"
2 ^{me} —	3' 57"
3 ^{me} —	6' 57"
4 ^{me} —	9' 0"

On voit que ces temps vont en croissant, et qu'ainsi, comme je l'ai dit plus haut, le mouvement est retardé.

§ 17. Cherchons à nous rendre raison de cette particularité, et, pour cela, examinons quelles sont les actions mises en jeu dans le mouvement ascensionnel du liquide.

Pendant l'accomplissement du phénomène, le tube est occupé par l'ensemble de deux colonnes, l'une inférieure formée d'huile et qui va en aug-



mentant de longueur, l'autre supérieure formée de liquide alcoolique et qui va, au contraire, en diminuant; mais les densités des deux liquides étant à fort peu près égales, on peut regarder la somme des masses de ces deux colonnes, ou la masse totale à mouvoir dans l'intérieur du tube, comme ne variant pas sensiblement. D'un autre côté, la force qui produit l'ascension de l'huile, est une force continue, et, de plus, croissante. En effet, elle résulte de la différence des pressions respectivement exercées par la surface convexe de la masse attachée à l'orifice inférieur du tube et par la surface concave qui constitue le sommet de la colonne; or cette dernière surface conserve la même courbure, et détermine, par conséquent, la même pression, pendant toute la durée du phénomène, tandis que la première, par la diminution graduelle de la masse qu'elle enveloppe, prend une courbure de plus en plus forte, et détermine ainsi une pression de plus en plus intense.

Maintenant la force dont il s'agit s'exerçant sur une masse invariable, tend nécessairement à produire un mouvement accéléré; mais il y a dans le système une résistance qui croît avec la hauteur de la colonne d'huile, et qui, par suite, tend au contraire à rendre le mouvement retardé. Cette résistance naît du frottement de la double colonne qui occupe le tube contre la couche d'huile adhérente à la paroi intérieure de celui-ci; le frottement de la partie huileuse de la colonne totale est évidemment beaucoup plus fort que celui de la partie alcoolique, et comme la résistance due au premier croît avec la longueur de la colonne d'huile, on comprend que la résistance totale qui provient des deux frottements va aussi en croissant. Le mouvement tend donc d'une part à être accéléré, et de l'autre à être retardé, et l'on admettra sans peine que la seconde influence peut l'emporter sur la première.

A la rigueur, dans l'appréciation de la force qui produit le mouvement ascensionnel, il faudrait considérer, outre l'action moléculaire de l'huile sur elle-même, celle du liquide alcoolique sur lui-même, et enfin l'action mutuelle des deux liquides. Mais il ne s'agit ici que de l'effet des courbures; or, aux surfaces de séparation des deux liquides, les courbures ont des sens opposés, suivant qu'on les regarde comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces liquides, d'où il résulte que les actions qui en proviennent sont de même sens: par exemple, à la masse adhérente sous le tube, la surface de l'huile



étant convexe, de sorte que son rayon de courbure est positif, l'action due à cette courbure est dirigée à l'intérieur de l'huile, et la surface du liquide alcoolique étant concave, ce qui rend son rayon de courbure négatif, l'action que détermine la courbure est dirigée à l'extérieur du liquide en question et, par suite, encore à l'intérieur de l'huile. De plus, à chacune des surfaces de séparation, les courbures des deux liquides étant les mêmes en valeur absolue, les actions qui en proviennent sont partout dans un même rapport. En effet, d'après la formule de la pression, formule si souvent employée dans les séries précédentes, si l'on désigne par r le rayon de la sphère à laquelle appartient l'une de nos surfaces de séparation, l'action due à la courbure sera représentée d'une manière générale par $\frac{A}{r}$; si donc A_1 et A_2 sont les constantes capillaires respectives de l'huile et du liquide alcoolique, les actions provenant de la courbure de chacun de ces deux liquides seront respectivement, en valeurs absolues, $\frac{A_1}{r}$ et $\frac{A_2}{r}$, et conséquemment ces actions seront entre elles dans le rapport constant $\frac{A_1}{A_2}$. Ainsi, dans la production du phénomène qui nous occupe, ces mêmes actions s'ajoutent simplement, et l'une d'elles est proportionnelle à l'autre; il suffit donc, pour la simplicité des raisonnements, d'en considérer une seule, et l'on peut prendre à volonté celle de l'huile sur elle-même ou celle du liquide alcoolique sur lui-même. Quant à l'action mutuelle des deux liquides, action qui, du reste, est sans doute fort petite, elle ne fait que diminuer, dans un rapport évidemment constant aussi, la somme des deux précédentes, et par conséquent on peut la négliger.

§ 18. Comme on l'a vu plus haut, dans l'expérience telle que je l'ai décrite, il y a une cause qui empêche d'apercevoir l'effet simple des forces capillaires, effet qui devrait donner lieu à un mouvement accéléré de la colonne. Mais on peut atténuer l'influence de cette cause perturbatrice; il suffit pour cela d'exécuter l'expérience dans des conditions inverses des précédentes, c'est-à-dire en remplissant le vase d'huile et en substituant à la sphère d'huile une sphère de liquide alcoolique. En effet, il faudra alors que la paroi intérieure du tube soit mouillée d'une couche de ce dernier liquide, et les deux parties de la colonne ascendante frottant contre cette couche, on évitera ainsi le frottement si résistant de l'huile contre elle-même. Dans cette disposition de l'expérience, les frottements exercés par les deux parties de la



colonne étant, pour la partie inférieure celui du liquide alcoolique contre lui-même, et, pour la partie supérieure, celui de l'huile contre ce même liquide, la différence entre ces deux frottements, quel qu'en soit le sens, sera nécessairement beaucoup moindre que dans le cas précédent; d'où il suit que la résistance totale approchera beaucoup plus d'être indépendante de la hauteur de la partie inférieure de la colonne; on peut donc s'attendre à obtenir, dans ce cas, un mouvement accéléré.

§ 19. Essayons de soumettre ces conclusions à l'épreuve de l'expérience. Mais remarquons auparavant que le changement dans les conditions du phénomène en nécessite aussi dans les opérations préalables. Et d'abord pour que la sphère alcoolique, après être lentement descendue dans l'huile ambiante, ne puisse contracter d'adhérence avec le fond du vase, on dépose d'avance sur ce fond un disque de fer que l'on a soigneusement frotté d'huile.

En second lieu, la paroi intérieure du tube doit évidemment être mouillée d'une couche de liquide alcoolique; mais, si l'on n'emploie un moyen particulier, cette couche se divise, comme se divise la couche d'huile dans l'expérience précédente quand on n'a pas recours à l'enduit de saindoux. Le moyen que je vais indiquer a une efficacité complète: après avoir bouché le tube à l'une de ses extrémités, on le remplit d'une solution assez épaisse de gomme arabique, puis on le vide, on le débouche et on le laisse égoutter; en le retournant plusieurs fois pour que la couche gommeuse prenne une épaisseur égale partout, jusqu'à ce que cette couche soit parfaitement sèche¹; alors, après l'avoir bouché de nouveau, on le remplit de liquide alcoolique que l'on en fait écouler immédiatement, on le débouche et on le plonge à l'instant dans l'huile du vase.

Enfin il faut encore empêcher la masse alcoolique de s'élever en partie sur la surface extérieure du tube, et, pour cela, il suffit que l'extrémité inférieure de celui-ci soit garnie, comme dans l'expérience précédente, d'un collet en fer; seulement ce collet doit être sans rebord, et il faut éviter soigneusement que de petites portions de la solution gommeuse ci-dessus ne s'attachent

¹ J'ai rencontré certains tubes qui n'exigeaient pas cette préparation, et qu'il suffisait de mouiller directement à l'intérieur avec le liquide alcoolique, après les avoir parfaitement nettoyés. Il sera, du reste, toujours plus sûr de faire usage de l'enduit gommeux.



à sa surface; il est bon, en outre, de le frotter d'huile, ce que l'on fera quand on aura terminé l'opération de la couche gommeuse.

Il est inutile d'ajouter que le tube doit être muni des fils de cuivre destinés à en assurer la position et des traits à l'encre qui servent à observer la marche du sommet de la colonne.

§ 20. Lorsque toutes ces dispositions sont prises, que le tube est en place et atteint par son extrémité inférieure la sphère alcoolique, le liquide qui forme celle-ci commence aussitôt à s'élever dans le tube, et son mouvement est en effet accéléré. Voici les résultats obtenus avec un tube de 15 millimètres de diamètre intérieur et de 42 centimètres de longueur, la sphère alcoolique ayant à peu près le même diamètre que la sphère d'huile de l'expérience précédente et ne possédant également qu'un très-petit excès de densité; le tube était partagé en demi-décimètres.

1 ^{er} demi-décimètre.	54''
2 ^{me}	—	48''
3 ^{me}	—	46''
4 ^{me}	—	45''
5 ^{me}	—	42''
6 ^{me}	—	41''
7 ^{me}	—	59''
8 ^{me}	—	57''

Il y a un grand nombre d'années que j'ai effectué ces expériences d'ascension capillaire; or j'ai gardé le vague souvenir d'un fait dont je n'ai point pris note alors: je crois avoir essayé aussi avec un tube de longueur analogue, mais dont le diamètre intérieur n'était que de 5^{mm} environ, et avoir constaté que le liquide n'y montait pas, ou s'arrêtait bientôt; si donc ma mémoire ne me trompe pas, il faut, pour réussir, employer des tubes larges, comme ceux dont j'ai parlé.

Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide.

§ 21. La dernière partie de la 2^{me} série contient, on l'a vu, la théorie complète de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires; je me suis proposé, depuis, l'étude du problème inverse. Une veine



liquide qui s'écoule dans l'air est un courant liquide qui traverse un gaz; or on peut se demander quelle est la constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide, et chercher si la théorie peut la faire prévoir ou en rendre raison. C'est ce que je vais examiner.

Concevons que d'un tube aboutissant verticalement de bas en haut au fond d'un liquide, se dégage abondamment un gaz qui ne se dissout point dans ce liquide, comme, par exemple, dans le procédé dont se servent les chimistes pour recueillir certains gaz sous une cloche primitivement pleine d'eau. Les molécules de ce gaz étant, à leur sortie du tube, animées d'un mouvement vertical de bas en haut, tendent à conserver ce même mouvement, et conséquemment le courant gazeux tend à traverser le liquide sous la forme d'un cylindre vertical continu, s'étendant de l'orifice du tube à la surface supérieure de ce liquide. Mais deux causes distinctes s'opposent à ce que le courant prenne cette forme: la première est la pression hydrostatique latérale du liquide, pression qui va en augmentant à partir du niveau jusqu'à l'orifice du tube; la seconde consiste dans les actions figuratrices moléculaires s'exerçant à la paroi liquide qui limite le courant.

Faisons d'abord abstraction de cette seconde cause, et cherchons quelle serait la forme du courant sous la seule influence combinée de la force qui pousse le gaz de bas en haut et de la pression hydrostatique du liquide. Le gaz tend, comme nous l'avons vu, à se creuser dans le liquide un canal cylindrique vertical; mais le liquide, en vertu de sa pression hydrostatique, devrait resserrer ce canal, tout en lui laissant sa forme de révolution, en sorte que la paroi liquide qui limite le courant serait, à partir du contour de l'orifice du tube, inclinée de tous les côtés vers l'axe. D'après cela, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés de l'absence des forces figuratrices moléculaires, si, en un point quelconque de la paroi liquide, on décompose, dans un plan méridien, la force verticale des molécules gazeuses en deux autres forces, l'une tangente et l'autre normale à la ligne méridienne, il suffira évidemment, pour l'équilibre de figure, que cette dernière composante soit égale à la pression hydrostatique du liquide au même point. Or cette pression va en diminuant de l'orifice au niveau supérieur, et conséquemment, pour que la composante normale de la force ascensionnelle diminuât comme la pres-



sion, il faudrait que la paroi liquide se redressât graduellement à partir de l'orifice du tube, jusqu'à devenir tout à fait verticale au niveau supérieur, où la pression étant nulle, la composante normale devrait être également nulle.

On le voit donc, si les forces figuratrices moléculaires n'existaient pas, le canal à paroi liquide présenterait en creux, et de bas en haut, une forme analogue à celle que présente en relief, et de haut en bas, la partie en apparence lisse d'une veine liquide s'écoulant par un orifice circulaire percé en mince paroi dans le fond horizontal d'un vase, et nous savons que, dans toute l'étendue de cette partie lisse, l'effet des forces figuratrices demeure très-peu prononcé (2^{me} série, § 70); en outre, de même que la partie lisse d'une veine liquide approche d'autant plus d'être cylindrique que la vitesse d'écoulement est plus grande, de même aussi notre canal approcherait d'autant plus de constituer un cylindre creux que la vitesse du gaz serait plus considérable.

§ 22. Mais comme les forces figuratrices moléculaires exercent leur action, les choses ne peuvent se passer de cette manière. Ainsi que je l'ai déjà fait remarquer plusieurs fois, la condition de l'équilibre, au point de vue des forces moléculaires, est la même pour une figure liquide en creux et pour une figure liquide en relief, d'où il suit que la condition de stabilité est également la même; or, nous le savons, dans une veine liquide, la seconde de ces conditions n'est pas satisfaite, et, sous l'empire des forces moléculaires, le liquide passe graduellement (2^{me} série, § 69), pendant son mouvement de translation, à l'état de masses séparées les unes des autres; donc, en vertu de l'analogie de forme que j'ai signalée, la figure liquide en creux qui servirait de canal au courant de gaz ne peut non plus satisfaire à la condition dont il s'agit, et doit passer à l'état d'espaces creux séparés par du liquide. En d'autres termes, notre courant gazeux doit, pendant son mouvement ascensionnel, se convertir en bulles isolées, et c'est en effet ce qui a lieu, comme chacun le sait.

Cependant il y a une différence essentielle dans les circonstances des deux phénomènes et, par suite, dans ces phénomènes eux-mêmes. Pour la faire bien comprendre, rappelons d'abord, en peu de mots, comment s'opère,



dans une veine liquide, la transformation graduelle en masses isolées; on pourra, pour les développements, recourir aux paragraphes de la 2^{me} série cités plus haut. La veine, bien qu'à la simple vue elle paraisse lisse sur une assez grande étendue à partir de l'orifice d'écoulement, est en réalité composée, dans toute cette étendue et jusqu'à un certain point de la partie trouble, de portions alternativement renflées et étranglées, qui sont emportées dans le mouvement de translation du liquide et se renouvellent sans cesse à la section contractée. Chacun de ces renflements et de ces étranglements se prononce de plus en plus pendant son trajet, les premiers s'épaississant et les seconds se creusant toujours davantage; chaque étranglement a son maximum de creusement lorsqu'il arrive au point ci-dessus de la partie trouble; là il se change en un filet, qui se brise aussitôt en plusieurs portions, et une grosse masse se trouve isolée, ainsi que plusieurs petites provenant des portions du filet.

Cela posé, il est clair que, toujours dans une veine liquide, un étranglement ne s'approfondit qu'en chassant dans les deux renflements adjacents le liquide qui le constitue; or ce transport dans les deux sens exige des déplacements relatifs considérables des molécules, et le liquide, en vertu de sa viscosité, résiste plus ou moins à ces déplacements relatifs; de là résulte qu'il s'écoule un temps notable entre la naissance de chaque étranglement à la section contractée et la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, et que, pendant ce temps, l'étranglement parcourt un assez grand espace, de sorte que la veine présente une partie continue assez longue.

Maintenant, dans notre veine gazeuse, un étranglement s'approfondit en chassant dans les deux renflements adjacents non du liquide, mais du gaz, et celui-ci oppose aux déplacements relatifs de ses molécules une résistance incomparablement plus faible, d'où il suit que le temps qui s'écoule entre l'instant de la naissance de cet étranglement près de l'orifice et celui de sa rupture, doit être aussi incomparablement plus court. A la vérité, les modifications de l'étranglement ne s'effectuent que par un mouvement du liquide ambiant; mais il est visible que ce mouvement s'accomplit avec des déplacements relatifs beaucoup moindres, et, par suite, avec beaucoup moins de résistance que celui qui a lieu à l'intérieur d'un étranglement de la veine



liquide. Conséquemment l'espace parcouru dans le mouvement de translation, pendant ce même temps, sera bien plus petit, à égalité de diamètre d'orifice et de vitesse de sortie, pour le courant gazeux que pour la veine liquide, de sorte qu'à moins d'une vitesse énorme, le premier ne présentera pas notablement de partie continue.

§ 23. Pour soumettre ces déductions à l'épreuve de l'expérience, j'ai fait passer un courant d'air à travers de l'eau contenue dans le vase à parois planes en verre qui sert aux expériences avec l'huile et le liquide alcoolique. Le courant était amené par un tube en verre de 5^{mm} environ de diamètre intérieur, partant d'un gazomètre et recourbé de manière à descendre au fond du vase, puis à se relever verticalement jusqu'à quelques centimètres de ce fond; le niveau de l'eau dans le vase était à 15 centimètres au-dessus de l'orifice du tube; enfin l'air, dans le gazomètre, était soumis à une pression de 130 centimètres d'eau.

Dans ces conditions, qui devaient donner une vitesse considérable au courant gazeux, celui-ci, dans son passage à travers l'eau du vase, paraissait continu à l'œil; mais il était loin d'offrir la forme décrite dans le § 21; celle qu'il présentait était assez peu régulière; cependant on pouvait y observer des espèces de ventres et de nœuds, à peu près comme dans la partie trouble d'une veine liquide; enfin un bouillonnement continu avait lieu à l'endroit où il perçait la surface de l'eau.

Ce bouillonnement permet de conclure que le courant gazeux, malgré sa grande vitesse, n'atteignait la surface de l'eau qu'en bulles isolées; de plus, sa figure apparente, si éloignée de celle qu'il aurait offerte s'il avait été réellement continu sur une partie notable de sa longueur, devait porter à croire que les bulles se formaient déjà très-près de l'orifice, et que l'aspect continu du courant dans toute son étendue était une simple illusion due au passage rapide de ces bulles, absolument comme l'aspect continu de la partie trouble d'une veine liquide est dû au passage rapide des masses isolées.

Pour rendre la chose plus certaine, on a abaissé le niveau de l'eau dans le vase jusqu'à ce qu'il ne fût plus qu'à environ 2 centimètres au-dessus de l'orifice du tube, et le bouillonnement n'a aucunement disparu; les bulles isolées se forment donc en réalité très-près de l'orifice, même pour de grandes



vitesse; en d'autres termes, la veine gazeuse n'a pas de partie continue. Quant à l'apparence de ventres et de nœuds, dont j'ai parlé plus haut, elle provient probablement de ce que chaque bulle qui se développe à l'orifice, rencontrant la résistance de l'eau du vase, s'aplatit d'abord dans le sens vertical, puis, pendant son mouvement à travers le liquide, exécute des oscillations de forme analogues à celles des masses isolées d'une veine liquide.

Un dernier fait particulier au courant gazeux, c'est l'absence de petites bulles accompagnant les grosses; ces petites bulles, si elles se produisaient, seraient rejetées en dehors du courant, par suite de la résistance plus grande qu'éprouverait leur mouvement ascensionnel à travers l'eau, et deviendraient ainsi invisibles; or on n'en distingue que rarement, d'où il suit que lorsqu'une grosse bulle s'isole près de l'orifice, l'étranglement au moyen duquel s'opère la séparation se ferme sans donner naissance à un filet gazeux, sans doute parce que cet étranglement est trop court.

§ 24. Ce fractionnement en bulles isolées successives que les liquides font subir aux gaz qui y pénètrent explique le glouglou qui se produit lorsqu'on incline un flacon plein de liquide pour en faire sortir celui-ci : un échange s'établit alors entre le liquide qui s'écoule et l'air qui le remplace; mais dès qu'une portion d'air s'introduit dans le goulot, les forces figuratrices commencent à l'arrondir, elles en resserrent rapidement la partie voisine de l'orifice, l'étranglement ainsi formé se rompt, et la portion d'air se trouve séparée, à l'état de bulle complète, de l'air qui tendait à la suivre; le liquide occupe donc alors tout l'orifice, en sorte que l'échange avec l'air extérieur est interrompu, et que, par suite, l'écoulement est momentanément arrêté; puis les mêmes phénomènes se reproduisent, une seconde portion d'air entre dans le goulot pour remplacer une égale portion de liquide qui sort, cette portion d'air est façonnée en bulle comme la première, l'écoulement éprouve une nouvelle interruption par la fermeture de l'étranglement, pour recommencer de la même manière, et ainsi de suite. Les saccades que présente l'écoulement d'un liquide dans les circonstances dont il s'agit résultent donc encore de l'action des forces qui tendent à donner à la surface liquide en contact avec le gaz une figure d'équilibre stable. Sans cette action, l'échange entre le liquide et l'air s'opérerait d'une manière tranquille : le premier sortirait



par la partie la plus basse du goulot sous la forme d'un courant continu, tandis que le second entrerait par la partie la plus haute, également sous la forme d'un courant continu, et traverserait, sans se diviser, le liquide renfermé dans le corps du flacon : c'est ainsi, par exemple, que, dans l'expérience du passe-vin, l'échange des deux liquides à la petite ouverture se fait sans saccades, et qu'on voit un filet rouge continu à partir de cette ouverture jusqu'au niveau de l'eau, parce que, à cause du peu de différence de nature de ces deux liquides, il ne se développe point, à la surface par laquelle ils se touchent, de forces figuratrices sensibles.

ERRATUM.

Page 14, l'article relatif à Newton doit être séparé par un intervalle de celui qui concerne Leidenfrost.



RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR;

PAR
J. PLATEAU.

DIXIÈME SÉRIE¹.

RÉSULTATS OBTENUS PAR LES GÉOMÈTRES, ET VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

(Présenté le 11 octobre 1868.)

¹ Voir, pour les neuf séries précédentes, les tomes XVI, XXIII, XXX, XXXI, XXXIII, XXXVI et XXXVII des *Mém. de l'Acad.*





RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE
D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

RÉSULTATS OBTENUS PAR LES GÉOMÈTRES, ET VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

§ 1. J'ai dit, à plusieurs reprises, dans les séries précédentes, que les géomètres étaient arrivés à des résultats immédiatement applicables aux figures d'équilibre d'un liquide non pesant, ou même ayant mes expériences pour objet. Je vais maintenant rappeler ces résultats d'une manière succincte, en montrant leurs relations avec les faits que j'ai décrits.

Dans cet exposé, je ne suivrai pas exactement l'ordre de publication des résultats dont il s'agit, mais plutôt celui de mes séries; ces mêmes résultats se trouveront ainsi classés d'après la nature des faits auxquels ils se rapportent ou s'appliquent.

§ 2. Dans un mémoire publié en 1855, et intitulé : *Sur les surfaces des liquides tournants considérés en général, et, en particulier, sur l'expérience de rotation de M. Plateau*¹, Beer a traité par le calcul une partie des phé-

¹ *Ueber die Oberflächen rotirender Flüssigkeiten im allgemeinen, insbesondere über den Plateau'schen Rotationsversuch* (ANN. DE M. POGGENDORFF, t. XCVI, pp. 1 et 210).



nomènes qui forment le sujet de ma 1^{re} série ¹, et a obtenu incidemment certains résultats d'un grand intérêt pour les autres séries.

Concevant une masse liquide immergée dans un autre liquide de même densité et avec lequel elle ne peut se mêler, Beer suppose que les deux liquides tournent autour d'un axe commun, chacun d'eux ayant une vitesse angulaire quelconque mais uniforme, et ces deux vitesses pouvant d'ailleurs être de même sens ou de sens opposés. Prenant alors comme éléments du calcul les attractions moléculaires propres des deux liquides, leur attraction moléculaire mutuelle, leur densité commune et leurs vitesses angulaires, et appliquant à ces données le principe des vitesses virtuelles, puisqu'il s'agit d'une figure permanente, il parvient à une formule générale qui constitue l'équation différentielle de la surface de séparation des deux liquides.

Pour le cas où cette surface est de révolution autour de l'axe de rotation, il déduit de la formule générale dont je viens de parler le principe suivant :

La figure de la surface de séparation des deux liquides est identiquement ce qu'elle serait si la gravité était nulle, si le liquide qui tourne le moins vite était remplacé par le vide, et si l'autre liquide tournait avec une certaine vitesse déterminée ².

De là résulte que dans le cas où le liquide extérieur ne tourne point, la masse immergée prend identiquement la même figure que si, dépourvue de pesanteur, elle tournait dans le vide avec une vitesse convenable.

Cette conséquence est fort importante pour mes expériences, puisqu'elle montre que les figures de la masse d'huile mise en rotation au sein du liquide alcoolique, du moins les figures de révolution, sont bien effectivement celles qui conviendraient à une masse liquide sans pesanteur et animée d'un semblable mouvement. Seulement cela n'est rigoureusement vrai que lorsque la vitesse angulaire est la même en tous les points de la masse; mais, ainsi

¹ On se souviendra que cette première série (MÉM. DE L'ACAD., t. XVI) porte un titre un peu différent de celui des séries suivantes; ce titre est : *Sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur, 1^{re} partie.*

² Beer énonce ici une relation entre cette vitesse et les vitesses effectives des deux liquides, mais elle est erronée; aussi l'auteur ne la reproduit pas dans son second mémoire, dont je parlerai bientôt et où certains résultats en font ressortir l'inexactitude; c'est pourquoi je la passe sous silence.



qu'on a pu le voir dans les §§ 17 et 18 de ma 1^{re} série, cette condition se trouve sensiblement réalisée dans plusieurs expériences, et, quant à celles où elle ne l'est pas, on reconnaîtra, par l'accord des résultats de Beer avec les miens, qu'alors encore les figures sont peu altérées.

§ 3. Beer passe ensuite à la recherche de la ligne méridienne de la figure de la masse. Il prend pour axe des ordonnées l'axe de révolution, qui est en même temps, comme je l'ai dit, celui du mouvement de rotation, et arrive à une équation différentielle du premier ordre qui permet d'exprimer l'ordonnée y sous la forme d'une simple quadrature. Il n'essaie pas l'intégration de cette formule, qui contient, sous un radical, un polynôme en x du huitième degré; il se borne à chercher, par une suite d'ingénieux artifices de calcul, les formes générales par lesquelles passe la ligne en question quand la vitesse est de plus en plus grande.

§ 4. Beer suppose d'abord la masse non traversée par un axe solide, et conséquemment entièrement libre. Il examine spécialement le cas où la ligne méridienne coupe l'axe de révolution, c'est-à-dire où la figure n'est point annulaire. Par cette restriction, la formule se simplifie; mais, pour en faciliter encore l'interprétation, Beer attribue une valeur constante au maximum d'abscisse, c'est-à-dire au rayon équatorial de la figure engendrée. Il parvient à une expression finie et fort simple du volume de cette figure, et alors le calcul lui montre que, dans l'hypothèse où il s'est placé du rayon équatorial constant, si l'on suppose la vitesse de rotation de plus en plus grande, on doit en même temps supposer le volume de plus en plus petit; les résultats qu'il obtient montrent donc simplement les aspects généraux de la courbe dans l'hypothèse d'un rayon équatorial constant et, par suite, d'un volume variable; ils laissent ignorer quelle est la loi qui lie ces formes aux valeurs relatives de la vitesse angulaire dans le cas d'un volume déterminé et invariable, et quelles dimensions prend alors la courbe sous chacune de ces mêmes formes. Voici les résultats dont il s'agit :

Pour une vitesse nulle, l'équation, qui s'intègre alors immédiatement, donne une circonférence de cercle dont le centre est sur l'axe, de sorte que la figure de la masse est une sphère. Ce résultat constitue un premier accord avec mes expériences, puisque, dans mon appareil, la masse d'huile, lors-



qu'elle n'est adhérente à aucun système solide et qu'elle est en repos, prend toujours la figure sphérique.

Tant que la vitesse angulaire est au-dessous d'une certaine limite, la ligne méridienne est un ovale, dont le petit axe coïncide avec l'axe de rotation, et cet ovale s'aplatit à mesure que la vitesse augmente. A la limite ci-dessus, la courbure devient nulle aux extrémités du petit axe, c'est-à-dire aux deux points où la courbe coupe l'axe de rotation.

Si la vitesse augmente encore, la courbure en ces mêmes points et jusqu'à une certaine distance, devient concave vers l'extérieur, de manière que la courbe présente alors, sur l'axe, deux sommets tournés l'un vers l'autre. Si la vitesse reçoit de nouveaux accroissements, la même modification se prononce davantage, jusqu'à ce que les deux sommets en regard viennent se toucher.

Il ne faut pas oublier qu'en conséquence du principe énoncé (§ 2), ces résultats s'appliquent aussi bien au cas fictif d'une masse liquide sans pesantour tournant dans le vide, qu'à celui d'une masse liquide réelle tournant au sein d'un autre liquide de même densité avec lequel elle ne peut se mêler.

Toutes les formes précédentes se sont effectivement montrées dans les expériences de ma 1^{re} série. A la vérité, la masse d'huile était traversée par un axe solide; mais cet axe, à cause de la petitesse de son diamètre, ne pouvait exercer d'influence notable sur les figures produites.

Pour des vitesses supérieures à celle qui détermine le contact des deux sommets, ceux-ci, qui jusque-là ont été en se rapprochant, se dépassent, en sorte que la ligne méridienne se coupe elle-même; alors, par conséquent, les résultats du calcul ne peuvent plus correspondre à la réalisation expérimentale d'une figure complète ¹.

Pour traiter également par l'analyse l'anneau qui se produit dans mes expériences, il faut rendre à la formule sa première généralité. Beer se borne à indiquer comment on devra diriger le calcul, en supposant l'anneau formé.

§ 5. Parmi les formes mentionnées dans le paragraphe précédent, il en

¹ Beer indique, dans une note, un moyen de réaliser partiellement ce genre de figures.



est deux, savoir celle où la courbure méridienne est nulle sur l'axe et celle où les deux sommets se touchent, pour lesquelles Beer parvient à introduire la condition d'un même volume, et il trouve qu'alors ces deux formes correspondent à une même vitesse angulaire.

Ce résultat semble d'abord difficile à admettre; cependant on en reconnaît la possibilité par les considérations suivantes : quand le volume est le même, la seconde des deux formes en question suppose nécessairement une action plus grande de la force centrifuge, et conséquemment une plus grande extension équatoriale; mais, par suite de cet excès d'extension et du creusement autour de l'axe, la majeure partie de la matière se trouve éloignée de cet axe; si donc on imagine que, sans altérer ni le volume ni la vitesse angulaire, on change la première figure en la seconde, ce seul changement suffira pour déterminer une grande augmentation de la force centrifuge; on comprend ainsi que les deux formes se concilient fort bien avec l'égalité des vitesses. Quant à la relation du résultat dont il s'agit avec mes expériences, il en sera parlé plus loin.

§ 6. L'équation différentielle de la ligne méridienne donne, comme nous l'avons vu (§ 4), un ovale, dans le cas des faibles vitesses angulaires; mais elle montre que cet ovale n'est jamais une ellipse; ainsi la figure de la masse liquide ne constitue jamais un ellipsoïde de révolution, bien qu'elle puisse paraître telle à la simple vue (1^{re} série, § 18). Or il suit de là que les figures de révolution imprimées à nos masses tournantes par l'action simultanée de la force centrifuge et de l'attraction moléculaire, diffèrent de celles que l'action simultanée de la force centrifuge et de l'attraction universelle feraient prendre à une grosse masse planétaire supposée à l'état fluide et tournant aussi sur elle-même. Cette différence fournit la preuve mathématique de ce que j'ai dit, en m'appuyant sur d'autres raisons, dans la deuxième note du § 62 de la 2^{me} série, et dans le § 8 de la 5^{me}, savoir qu'on ne peut rien déduire de mon expérience de l'anneau liquide, à l'appui d'une hypothèse cosmogonique.

§ 7. Beer tire encore de sa formule générale (§ 2) cette conséquence, évidente d'ailleurs a priori, que si les liquides tournent tous les deux, et si leurs vitesses angulaires, soit de même sens soit de sens opposés, sont égales



entre elles, la figure de la masse immergée est la même que lorsque les deux liquides sont en repos.

§ 8. Il examine ensuite le cas d'une figure en creux dans un liquide sans pesanteur animé d'un mouvement de rotation, cette figure étant encore de révolution autour de l'axe du mouvement. Il suppose toujours le rayon équatorial constant et conséquemment le volume variable, et il trouve que la figure sphérique, dans l'état de repos, s'allonge suivant l'axe à mesure que la vitesse augmente, et tend ainsi vers le cylindre, qui est la limite de ses variations.

Il suit du principe du § 2 que notre masse d'huile devrait prendre ces figures allongées si, au lieu d'imprimer le mouvement de rotation à cette masse, on l'imprimait au liquide alcoolique ambiant. J'ai réalisé cette condition dans une expérience relative à une autre recherche (note du § 18 de la 1^{re} série), en faisant tourner sur son axe un vase cylindrique vertical qui renfermait le mélange alcoolique et la masse d'huile. Le mouvement de rotation se propageant de proche en proche, à partir de la paroi du vase, dans le liquide alcoolique avant de se communiquer notablement à la masse d'huile, on comprend que celle-ci se trouve, pendant quelque temps, plus ou moins dans les mêmes circonstances que si le liquide ambiant tournait seul avec la même vitesse angulaire en tous ses points, et qu'elle-même fût en repos ou seulement tournât avec une moindre vitesse; or, ainsi que je l'ai dit dans la note ci-dessus rappelée, peu après le commencement de la rotation du vase, la masse d'huile s'allongeait en effet dans le sens de l'axe.

Comme je l'ai dit encore dans la même note, si le vase continuait à tourner avec la même vitesse, la masse d'huile reprenait graduellement sa forme sphérique; c'est qu'alors cette masse participant peu à peu au mouvement général, finissait par tourner tout entière aussi vite que le liquide environnant, et par se trouver ainsi dans la condition du paragraphe précédent.

§ 9. Enfin, revenant aux figures en relief, Beer suppose la présence d'un axe solide cylindrique, ayant un diamètre quelconque, axe auquel adhère la masse liquide et qui tourne avec elle. Pour adapter l'équation générale (§ 3) à ce cas, il part du fait évident que la surface de la masse doit venir lécher celle de l'axe solide, du moins si cette dernière est enduite du même liquide,



et il introduit conséquemment la condition que la ligne méridienne ¹ soit, en ses deux points extrêmes, tangente à la génératrice de cet axe; la courbe a alors nécessairement deux points d'inflexion. Beer emploie encore, dans le calcul, le même artifice que précédemment, c'est-à-dire qu'il maintient invariable le rayon équatorial de la figure.

Je ferai remarquer, en passant, que, dans l'état de repos, la figure appartient à celle que j'ai depuis nommée l'onduloïde (4^{me} série, §§ 4 à 6). Voici maintenant les résultats auxquels Beer parvient :

1° A mesure que la vitesse de rotation augmente, les points extrêmes de la courbe vont en se rapprochant l'un de l'autre; en même temps les tangentes aux deux points d'inflexion tendent de plus en plus à devenir perpendiculaires à l'axe, et prennent cette position pour une valeur déterminée de la vitesse. 2° Au delà de cette valeur, les tangentes en question continuent à tourner dans le même sens, de manière qu'alors la courbe présente deux parties concaves dont les sommets se regardent. 3° Enfin, pour la plus grande valeur de la vitesse de rotation qui puisse correspondre à une figure continue et réalisée dans son état complet, ces deux sommets viennent se toucher.

C'est bien là aussi ce qui se montre dans mes expériences; seulement, comme l'axe solide employé dans celles-ci est d'un très-petit diamètre relativement aux dimensions de la masse liquide, la modification qu'il fait subir à la ligne méridienne, en l'obligeant à lui aboutir tangentiellement, est très-légère, et, ainsi que je l'ai dit, les figures produites ne diffèrent pas sensiblement de ce qu'elles seraient en l'absence de cet axe.

§ 10. Si l'on se place dans les conditions expérimentales, c'est-à-dire si l'on suppose la masse liquide avec l'axe solide immergée dans un autre liquide de même densité, et si l'on imagine que ce dernier tourne seul ou du moins tourne plus vite que l'autre, Beer trouve que, par l'augmentation successive de la vitesse angulaire du liquide ambiant ou de l'excès de cette vitesse sur celle de la masse, la figure, toujours dans l'hypothèse du rayon équatorial constant, n'éprouve d'autre modification qu'un allongement de plus en plus

¹ On ne considère évidemment ici qu'une moitié de la ligne méridienne totale, c'est-à-dire la portion située d'un seul côté de l'axe solide.



grand dans le sens de l'axe, de manière qu'elle converge vers la forme cylindrique.

§ 11. La plupart des questions traitées dans le mémoire que je viens d'analyser ont été reprises par Beer dans un second travail ¹. Ici il s'occupe uniquement du cas où la ligne méridienne coupe l'axe, et il montre qu'alors l'équation (§ 3) peut être ramenée aux fonctions elliptiques. Il effectue le calcul, et arrive à l'expression de l'intégrale, ce qui le met à même d'appliquer l'analyse à une masse d'un volume constant.

Il tire d'abord de ses formules cette conséquence, que, toutes choses égales d'ailleurs, les volumes de deux masses liquides tournantes qui présentent la même forme sont entre eux en raison inverse des carrés des vitesses angulaires de ces masses.

J'avais reconnu en effet, dans mes expériences, que, pour obtenir des résultats bien réguliers, il fallait faire tourner la masse d'autant moins vite qu'elle avait un plus grand volume. Pour former, par exemple, de beaux anneaux avec deux sphères d'huile ayant respectivement 6 centimètres et 10 centimètres de diamètre, j'ai dû mouvoir la manivelle avec des vitesses dans un rapport un peu supérieur à celui de 3 à 1 (1^{re} série, § 11 et deuxième note du § 14). D'après la loi de Beer, les vitesses doivent être entre elles en raison inverse des puissances $\frac{5}{2}$ des diamètres des sphères, ce qui donnerait, pour les sphères ci-dessus, un rapport dépassant seulement un peu celui de 2 à 1; mais, pour que tout fût semblable dans les deux expériences, il aurait fallu que les diamètres des deux disques moteurs fussent entre eux comme ceux des sphères, c'est-à-dire comme 6 à 10, tandis qu'ils étaient comme 6 à 12; le disque qui mettait en mouvement la plus grosse masse était donc trop grand, et, par suite, avait un excès d'action qui exigeait qu'on le fit tourner moins vite. Si son diamètre avait été à celui du premier dans le rapport indiqué, le rapport des vitesses se serait certainement approché beaucoup du résultat théorique; ajoutons que l'estimation des diamètres et des vitesses n'était qu'approximative.

Enfin, dans ces expériences, la vitesse angulaire est loin d'être la même

¹ *Tractatus de theoriâ mathematicâ phœnomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum.* Bonn, 1857.



en tous les points de la masse (1^{re} série, § 17); mais cette circonstance n'influe probablement pas d'une manière sensible sur la loi, car il est à croire que la vitesse angulaire moyenne est à peu près proportionnelle à celle du disque.

§ 12. Beer examine de nouveau les modifications que subit la ligne méridienne par les changements de la vitesse angulaire, mais ici l'intégration qu'il a effectuée lui permet, comme je l'ai dit, d'introduire la condition d'un volume constant. Il retrouve ainsi les formes qu'il avait reconnues dans le mémoire précédent, et dont j'ai parlé plus haut (§ 4); mais il peut construire les courbes avec exactitude et en leur donnant les dimensions relatives qui correspondent à un même volume. C'est ce qu'il fait à l'égard des principales, et je les reproduis ici en A, B, C, D (fig. 4), telles qu'il les représente : A est une circonférence de cercle, c'est le cas du repos; B est l'ovale dont la courbure est nulle sur l'axe de rotation; C est l'une des courbes qui présentent deux parties concaves dont les sommets se regardent; D est celle où ces deux sommets viennent se toucher; je dirai bientôt ce qui distingue la courbe C des autres du même genre.

Quant à la relation entre ces formes et la vitesse angulaire, Beer trouve les résultats suivants, dont les derniers sont une extension de celui que j'ai rapporté dans le § 5 :

Lorsque la masse commence à tourner, la ligne méridienne devient un ovale qui, à mesure que la vitesse est plus grande, s'aplatit de plus en plus dans le sens de l'axe, en s'étendant dans le sens équatorial, jusqu'à celui qui est représenté en B. En deçà de cette limite, à chaque valeur de la vitesse angulaire répond une forme unique; mais dès que la vitesse atteint la valeur qui donne la courbe B, une seconde forme devient également possible, savoir celle qui a pour ligne méridienne la courbe D. Si la vitesse augmente encore, à chacune de ses valeurs correspondent de même deux formes différentes, qui présentent des parties concaves autour de l'axe de rotation. Ces deux formes convergent l'une vers l'autre à mesure des accroissements de la vitesse : la forme dont la ligne méridienne est plus voisine de la courbe B va en se creusant dans le sens de l'axe de rotation et en se dilatant dans le sens équatorial, et la forme dont la ligne méridienne diffère moins de la courbe D va



en se dilatant dans le sens de l'axe, tandis qu'elle se contracte dans le sens équatorial; enfin, pour une certaine valeur de la vitesse, valeur dont le carré est au carré de celle à laquelle correspondent les courbes B et D comme 1,1369 est à 1, les deux formes se confondent en une seule, et l'on a alors pour ligne méridienne la courbe C. Quand la vitesse excède cette limite, l'équation ne peut plus être traitée par les fonctions elliptiques.

En réalité, pour chaque valeur de la vitesse supérieure à celle qui donne les courbes B et D, il y a quatre formes; mais la troisième est l'une de celles dont la ligne méridienne se coupe elle-même (§ 4) et qu'il faut rejeter comme ne pouvant correspondre à la réalisation expérimentale d'une figure complète, enfin la quatrième est une forme annulaire.

Rappelons ici, comme nous l'avons déjà fait dans le § 4, qu'en vertu du principe du § 2, tous ces résultats se rapportent aussi bien à une masse liquide supposée sans pesanteur et tournant dans le vide, qu'à une masse liquide réelle tournant au sein d'un autre liquide de même densité qu'elle.

§ 15. L'habile mathématicien va plus loin : il parvient à tirer de ses formules la valeur absolue de la vitesse angulaire qui produirait une forme déterminée avec un volume donné d'un liquide donné, pour le cas où celui-ci est seul, c'est-à-dire est supposé dépourvu de pesanteur et tournant dans le vide ou dans l'air. Il choisit comme exemple la vitesse maxima, à laquelle correspond, comme on l'a vu, la courbe C, et il obtient, pour trois liquides différents, les valeurs suivantes, qui expriment le nombre de révolutions par seconde, V désignant le volume en centimètres cubes :

<i>Eau</i>	$\frac{5,94}{\sqrt{V}}$,
<i>huile</i>	$\frac{4,16}{\sqrt{V}}$,
<i>mercure</i>	$\frac{5,92}{\sqrt{V}}$.

§ 14. Dans le cas d'un espace creux au sein d'un liquide tournant (§ 8), ou bien, s'il s'agit de deux liquides, dans le cas où le liquide extérieur tourne seul ou tourne plus vite que l'autre, Beer retrouve aussi les figures à section



méridienne ovale allongées suivant l'axe de rotation, que lui avaient indiquées les calculs de son premier mémoire; seulement ici, comme le volume est constant, ces figures vont en se rétrécissant à mesure qu'elles s'allongent; Beer donne, pour une suite d'ovales méridiens de plus en plus allongés, le rapport des deux axes de la courbe.

§ 15. A propos des résultats que j'ai rapportés plus haut (§ 12), Beer s'exprime ainsi : « Ces résultats exciteront peut-être quelque étonnement; car, d'après l'expérience, on doit être porté à croire qu'à une vitesse angulaire donnée correspond toujours une figure unique, et qu'en supposant la vitesse graduellement croissante, la succession des figures, à partir de la sphère, amène d'abord les formes ressemblant à des ellipsoïdes aplatis dont l'aplatissement va en augmentant, puis les formes creusées autour des pôles, lesquelles passent enfin à celle que nous avons appelée patelliforme ¹. Mais nous ne regardons nullement comme certain que, dans l'expérience du liquide tournant, une rotation de plus en plus rapide de l'axe auquel adhère la masse, rende aussi de plus en plus grande la vitesse angulaire moyenne des particules de cette masse, vitesse moyenne qu'il faudrait introduire dans le calcul; il nous paraît plus probable qu'un mouvement de plus en plus rapide de l'axe solide a pour résultat de faire croître de plus en plus la quantité que, dans la mécanique analytique, on nomme le moment de rotation. S'il en est réellement ainsi, et si nous prenons pour argument non plus la vitesse angulaire, mais le moment de rotation, les formes correspondantes aux différents degrés de ce nouvel argument présenteront une succession tout autre que celle qui a été trouvée plus haut. »

Après avoir apporté plusieurs raisons à l'appui de l'opinion ci-dessus, Beer cherche l'expression du moment de rotation de la masse tournante, et l'obtient au moyen d'une intégrale elliptique. Cette formule lui permet de calculer, pour un même volume, une suite de valeurs croissantes du moment dont il s'agit à partir de zéro, et de montrer que la figure, toujours unique pour chacune de ces valeurs, passe alors de la sphère aux formes de plus en plus aplaties, puis aux formes de plus en plus creusées autour des pôles,

¹ C'est celle qui a pour ligne méridienne la courbe D (fig. 4) dont les deux sommets se touchent.



jusqu'à celle où les sommets des deux parties concaves viennent se toucher, et qu'il a nommée patelliforme. C'est lorsque le moment de rotation surpasse celui qui correspond à cette dernière forme que naissent les figures annulaires.

§ 16. Enfin Beer calcule la valeur absolue de la vitesse angulaire que doit avoir, sous un volume donné, une masse de chacun des trois liquides mentionnés plus haut (§ 13), pour prendre la figure patelliforme, ces trois liquides étant supposés sans pesanteur et tournant dans le vide ou dans l'air : il trouve que, dans ce cas fictif, une sphère d'huile de 3 centimètres de rayon doit, pour atteindre la forme en question, exécuter 0,37 de révolution par seconde. Il trouve ensuite que, dans le cas réel d'une sphère d'huile du même rayon mise en rotation au sein du mélange alcoolique, la vitesse qui détermine la même forme est au plus de 0,50 de révolution; puis il ajoute : « M. Plateau a observé que, dans ces dernières conditions, une sphère d'huile de la dimension indiquée parvient à la limite où elle passe à la forme annulaire, quand l'axe solide auquel elle adhère fait deux ou trois tours par seconde. Ce nombre de tours est de quatre à six fois plus grand que celui que nous venons de déduire des valeurs des constantes capillaires comme étant le maximum dans les conditions normales. Ce résultat n'est pas étonnant, et ne paraît aucunement opposé à notre théorie; en effet, en faisant abstraction de toutes les autres causes perturbatrices qui introduisent des différences entre les conditions réelles de l'expérience et les conditions idéales de la théorie, on remarquera qu'il est impossible que la vitesse angulaire moyenne des molécules superficielles atteigne la vitesse de l'axe solide. »

Beer a raison quant à l'inégalité de vitesse angulaire : j'ai indiqué moi-même, dans le § 17 de ma 1^{re} série, un moyen par lequel on constate que la vitesse angulaire des parties de la masse éloignées de l'axe solide est beaucoup moindre que celle des parties plus rapprochées; seulement il se trompe en prenant la vitesse de deux ou trois tours par seconde donnée à l'axe pour celle qui opérerait le passage de la figure patelliforme à la figure annulaire; cette vitesse produit le plus bel anneau; mais l'anneau ainsi obtenu n'est pas celui qui succéderait immédiatement à la figure patelliforme si l'on pouvait



réaliser par l'expérience cette succession immédiate : les circonstances de sa formation montrent qu'il est plus grand, plus développé, et résulte conséquemment d'une vitesse plus considérable de l'axe. J'ai décrit (1^{re} série, § 22) une autre expérience, qui paraît avoir échappé à Beer, et qui fait connaître la vitesse à donner à l'axe pour réaliser la figure patelliforme, toujours avec une masse de la même dimension : j'ai dit, dans le paragraphe cité, que lorsqu'on fait mouvoir l'axe, et conséquemment le petit disque, avec une vitesse d'un tour par seconde, la masse se montre fortement creusée autour de ses pôles, comme si l'anneau était près de se développer; or c'est là évidemment la figure patelliforme, ou du moins une figure très-voisine, et l'on voit que la vitesse correspondante de l'axe est simplement double du maximum de vitesse angulaire trouvée par Beer pour cette même figure patelliforme.

Tel est l'ensemble des belles recherches de Beer sur les figures d'une masse liquide en rotation et soumise aux seules actions moléculaires; il peut être considéré comme résolvant le problème d'une manière complète pour une masse finie non traversée par un axe solide et pour les figures de révolution non annulaires.

§ 17. Occupons-nous maintenant des résultats mathématiques applicables à l'état de repos de la masse.

Si, dans la formule générale (§ 2) à laquelle Beer parvient dans son premier mémoire pour représenter la surface de séparation des deux liquides tournants, on égale à zéro les quantités qui désignent les vitesses angulaires respectives de ces liquides, elle se réduit à $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{constante}$, R et R' étant les rayons de courbure principaux; d'où Beer conclut que, dans l'état de repos des deux liquides, la figure de la masse immergée est identiquement la même que si cette masse était en réalité dépourvue de pesanteur et se trouvait placée dans le vide.

On se rappelle que j'étais arrivé (2^{me} série, § 8) à ce même résultat par le simple raisonnement; les calculs de Beer viennent donc confirmer l'exactitude de ce raisonnement, et donner ainsi une nouvelle sanction à mes expériences.

Beer conclut en outre, comme je l'avais fait également, que, dans cet



état de repos des deux liquides, la surface d'équilibre serait la même si la masse immergée était remplacée par un espace creux au sein de l'autre liquide, celui-ci étant supposé sans pesanteur.

Dans son premier mémoire encore, Beer arrive incidemment au résultat que j'avais trouvé pour la limite de la stabilité du cylindre, et il revient de nouveau sur ce sujet dans son second travail; mais je réserve pour la série suivante tout ce qui concerne la stabilité des figures liquides.

§ 18. Avant mes recherches, Poisson est, je pense, le seul qui ait touché directement à la question des figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. A la fin d'un mémoire lu à l'Académie des sciences en 1828 ¹, il établit l'équation différentielle de ces figures, puis il démontre par l'analyse « qu'il n'existe qu'une seule figure d'équilibre possible parmi les sphéroïdes de révolution très-peu différents d'une sphère, et que cette figure est celle de la sphère elle-même. »

On se souviendra que j'ai démontré sans aucun calcul (4^{me} série, § 2) que, parmi les figures d'équilibre de révolution, il n'y a que la sphère dont la ligne méridienne atteigne l'axe ².

§ 19. Plus tard, dans sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire* ³, publiée en 1831, Poisson, cherchant à déterminer l'équation de la surface libre d'une petite quantité d'un liquide pesant comprise entre deux plans solides horizontaux, arrive d'abord à une équation différentielle du deuxième ordre, contenant un terme dans lequel la quantité g , ou la gravité, entre implicitement comme facteur, équation qui, si l'on faisait $g=0$, se réduirait, comme cela doit être, à celle de mes figures d'équilibre de révolution, mise sous la forme différentielle. Il fait voir ensuite que, dans une certaine hypothèse relative au volume du liquide, hypothèse qui revient à prendre ce volume assez petit pour que l'influence de la gravité soit très-minime par rapport à celle des actions moléculaires, on peut, dans une première approximation, négliger

¹ *Mémoire sur l'équilibre des fluides* (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, t. IX, année 1850, p. 1).

² Déjà en 1751, Segner, dans le travail dont j'ai présenté le résumé au § 5 de ma 8^{me} série, était arrivé, par sa théorie de la tension, à ce résultat qu'une masse liquide finie et sans pesanteur devrait prendre la forme sphérique.

³ Chap. VI de cet ouvrage.



le terme dont il s'agit, ce qui est conséquemment la même chose que de supposer le liquide sans pesanteur. Poisson obtient la première intégrale de l'équation ainsi réduite, puis il remarque qu'on pourra toujours obtenir la seconde au moyen des fonctions elliptiques, et, dans quelques cas, au moyen des arcs de cercle et des logarithmes.

§ 20. Rappelons ici que les surfaces représentées par l'équation générale $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$, ou nos surfaces d'équilibre, sont celles dont la courbure moyenne est constante.

Ces mêmes surfaces sont considérées généralement, d'après un résultat de l'analyse, comme étant celles qui, avec une étendue donnée, renferment un volume maximum, ou, ce qui revient au même, comme étant les surfaces minima qui renferment un volume donné. Nous verrons, dans la série suivante, que ce principe doit subir une modification.

Dans le cas où l'on a $C=0$, c'est-à-dire où la courbure moyenne est nulle, les géomètres ont encore généralement admis que l'équation représente les surfaces dont l'aire, considérée d'une manière absolue, est un minimum, ou, comme on les nomme plus simplement, les surfaces minima, et ce second principe doit également être modifié. Ces dernières surfaces sont évidemment telles qu'en chacun de leurs points les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires.

§ 21. En 1841, M. Delaunay ¹, en s'occupant, sous un point de vue purement mathématique, des surfaces de révolution satisfaisant à la condition $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$, est arrivé à un mode de génération extrêmement simple et bien remarquable de leurs lignes méridiennes : il a fait voir, au moyen du calcul, que ces lignes peuvent être décrites par l'un des foyers d'une section conique, lorsque celle-ci roule sur une ligne droite. Cette ligne droite est alors l'axe de révolution de la surface.

Plus tard M. Lamarle ² a démontré géométriquement le même principe à l'aide de ses méthodes nouvelles et si fécondes.

¹ *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (JOURN. DE M. LIOUVILLE, t. VI, p. 509).

² *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure* (BULL. DE L'ACAD., 1857, 2^{me} série, t. II, p. 55).



Ces deux géomètres se contentent de la démonstration du principe dont il s'agit, sans chercher les formes des lignes ainsi tracées; seulement M. De-launay rappelle que la chaînette peut être engendrée de cette manière par le foyer d'une parabole; mais il est aisé de voir que les lignes résultant de ce mode de génération présentent toutes les particularités de forme et toutes les modifications que j'ai conclues, dans ma 4^{me} série, de l'expérience et du raisonnement, et que Beer avait, de son côté, partiellement déduites du calcul peu de temps avant la publication de cette 4^{me} série, comme je le dirai bientôt.

En effet, on reconnaît d'abord évidemment que lorsque la courbe roulante est une ellipse, la ligne décrite par l'un quelconque des foyers est une courbe sinueuse se reproduisant périodiquement le long de la droite, et présentant alternativement un maximum et un minimum de distance à cette droite : ce sera, par conséquent, la ligne méridienne de l'onduloïde.

Plus le rapport des axes de l'ellipse se rapprochera de l'unité, moins les sinuosités de la ligne décrite seront prononcées, et si ces deux axes sont égaux, c'est-à-dire si la courbe roulante est un cercle, la ligne décrite devient une droite parallèle à la première, et la figure de révolution devient un cylindre.

Au contraire, plus le rapport des axes de l'ellipse s'éloignera de l'unité, plus les sinuosités seront fortes. Si, le grand axe conservant une valeur finie, le petit axe diminue jusqu'à s'annuler, de sorte que l'ellipse se réduise à son grand axe, aux extrémités duquel se trouvent alors les foyers, la ligne décrite consistera en une suite de demi-circonférences de cercle qui se touchent sur la droite; la figure de révolution est donc, dans ce cas, une suite de sphères égales tangentes les unes aux autres sur l'axe, et dont rien n'empêche de concevoir l'une quelconque isolée.

Si l'on prend de nouveau des ellipses non réduites à leur grand axe, et qu'on les suppose de plus en plus grandes, mais telles que la distance du foyer décrivant au sommet correspondant soit la même pour toutes, les parties rentrantes des lignes tracées s'approcheront toutes jusqu'à cette même distance de la droite; mais les parties convexes vers l'extérieur présenteront des dimensions de plus en plus étendues, et enfin, à la limite des accroisse-



ments de l'ellipse, c'est-à-dire lorsque celle-ci se sera transformée en une parabole, la ligne décrite n'aura plus qu'une seule partie rentrante, toutes les autres s'étant éloignées à l'infini : ce sera une chaînette, et la figure engendrée sera le caténoïde.

Reste le cas où la courbe roulante est une hyperbole. Au premier abord on ne voit pas bien qu'on puisse faire rouler une hyperbole sur une ligne droite, de manière que l'un des foyers décrive une ligne continue; mais remarquons que lorsque l'une des parties de l'hyperbole aura roulé tout entière sur la droite, de sorte que celle-ci, primitivement asymptotique à l'une des branches, sera devenue asymptotique à l'autre branche, la seconde partie de l'hyperbole aura en même temps la droite pour asymptote et pourra être considérée comme la touchant à une distance infinie; il y aura donc continuité mathématique dans le roulement si nous faisons alors rouler sur la droite cette seconde moitié de l'hyperbole, et si, après qu'elle aura à son tour roulé en totalité de manière que la droite soit redevenue tangente commune, nous recommençons à faire rouler la première moitié, et ainsi de suite. Or on se convaincra aisément que la ligne tracée dans ces circonstances par un même foyer est une courbe continue qui présente, le long de la droite, une succession indéfinie de nœuds; c'est donc la ligne méridienne du nodoïde, et en faisant varier le rapport des axes de l'hyperbole roulante, on produira toutes les variations de cette figure.

Lorsque l'hyperbole passera à la parabole, la ligne décrite se réduira à une chaînette, et la figure engendrée sera un caténoïde. Lorsque, l'axe réel de l'hyperbole conservant une valeur finie, l'axe imaginaire s'annulera, ce qui placera les foyers aux extrémités du premier et réduira l'hyperbole à deux droites situées dans le prolongement l'une de l'autre et partant de ces mêmes extrémités, on voit sans peine que les nœuds disparaîtront et que la ligne décrite deviendra une suite de demi-circonférences, de sorte que la figure engendrée sera la suite de sphères. Enfin lorsque, l'axe réel de l'hyperbole conservant encore une valeur finie, l'axe imaginaire croîtra indéfiniment, ce qui ouvrira de plus en plus les deux moitiés de l'hyperbole en éloignant les foyers des sommets, on voit de même facilement que les nœuds de la ligne décrite s'élargiront, puis empiéteront les uns sur les autres, c'est-



à-dire que cette courbe éprouvera les modifications dont j'ai parlé dans le § 33 de la 4^{me} série; seulement la limite de ces variations, savoir la condensation de la courbe entière en une seule circonférence de cercle, est, au point de vue du roulement, une limite mathématique qui ne peut être atteinte en réalité; puisque alors les foyers sont à des distances infinies de la droite, et que la moitié de l'hyperbole qui s'appuie sur celle-ci est confondue avec elle dans toute son étendue.

Cette discussion du tracé des lignes méridiennes devait naturellement trouver place après l'exposé du principe de M. Delaunay; mais je dois dire ici qu'une discussion analogue a déjà été publiée par M. Lindelöf, dans un mémoire dont je parlerai au § 54.

§ 22. Le calcul de M. Delaunay et la démonstration de M. Lamarle mentionnée plus haut n'excluent pas la possibilité de surfaces de révolution à courbure moyenne constante autres que celles dont les lignes méridiennes sont tracées comme ci-dessus; mais M. Lamarle est revenu ensuite ¹ sur le même sujet, et a fait voir, toujours au moyen des méthodes qui lui sont propres, que ce mode de génération est le seul qui puisse donner des surfaces de révolution à courbure moyenne constante.

On se rappelle qu'à la fin de ma 4^{me} série j'avais établi, par l'emploi du simple raisonnement appliqué à l'expression $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C$, que les seules figures d'équilibre de révolution d'une masse liquide sans pesanteur sont la sphère, le plan, le cylindre, le caténoïde, l'onduloïde et le nodoïde.

§ 23. Beer consacre une partie de son second mémoire ² à l'état de repos de la masse liquide. Ici encore il s'occupe uniquement des figures d'équilibre de révolution, et il cherche, au moyen des fonctions elliptiques, l'intégrale complète de l'équation de leurs lignes méridiennes. Comme j'aurai occasion de faire usage de ces résultats, je vais indiquer, en peu de mots, comment Beer parvient à la première et à la seconde intégrale.

Il prend l'axe de révolution pour axe des y . Alors, p et q désignant respectivement les coefficients différentiels du premier et du second ordre, on

¹ *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral*, 5^{me} partie, 1863, p. 247 (MÉM. DE L'ACAD., collection in-8°, t. XV).

² Voir la note du § 11.



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

a, comme on sait, pour représenter la normale, l'expression $\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}$, et, pour le rayon de courbure, $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$; en égalant à une constante la somme des inverses de ces deux quantités, on a conséquemment, pour l'équation des figures en question,

$$\frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p}{x\sqrt{1+p^2}} = C. \dots \dots \dots [1]$$

Maintenant, si l'on multiplie les deux membres par $x dx$, et qu'on remplace $q dx$ par son équivalent dp , il vient

$$\frac{x dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}} = C x dx;$$

or il est facile de voir que le premier membre de l'équation ainsi transformée est la différentielle de $\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}$; on aura donc, en intégrant,

$$\frac{px}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{Cx^2}{2} + C' \dots \dots \dots [2]$$

C' étant la constante arbitraire. Telle est l'intégrale première cherchée.

Représentant alors par α_1 et α_2 les abscisses respectives minima et maxima de la courbe, Beer transforme cette équation en la suivante :

$$dy = \frac{x^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 - x^2)(x^2 - \alpha_2^2)}} dx; \dots \dots \dots [5]$$

puis il passe à l'intégration par les fonctions elliptiques. Il pose

$$x^2 = \alpha_1^2 \sin^2 \varphi + \alpha_2^2 \cos^2 \varphi,$$

et, plaçant l'origine des coordonnées au pied de l'abscisse minima α_1 , il obtient, en définitive, pour représenter la ligne méridienne, l'équation

$$y = \alpha_2 \left\{ E \left(c, \frac{\pi}{2} \right) - E(c, \varphi) \right\} \pm \alpha_1 \left\{ F \left(c, \frac{\pi}{2} \right) - F(c, \varphi) \right\} \dots \dots \dots [4]$$

dans laquelle les lettres F et E désignent respectivement les fonctions ellip-



tiques de première et de seconde espèce. Le module c et l'amplitude φ sont définis par les relations :

$$c = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - x^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}}.$$

§ 24. Beer déduit de ces formules les résultats suivants :

L'équation [4] représente deux genres de courbes, selon qu'on prend le supérieur ou l'inférieur des deux signes qui affectent l'un des termes du second membre.

Au signe supérieur correspond une ligne ondulée analogue à la sinusoïde, et formée de parties identiques qui se reproduisent indéfiniment le long de l'axe. L'abscisse des points d'inflexion est moyenne proportionnelle entre les abscisses minima et maxima. La tangente en ces mêmes points est égale à $\frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}$. La distance entre les abscisses minima et maxima a pour valeur

$$y' = \alpha_2 E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_1 F\left(c, \frac{\pi}{2}\right);$$

en doublant cette expression, on a, dans la figure engendrée, l'intervalle entre le cercle de gorge d'un étranglement et celui de l'étranglement suivant. Les limites des variations qu'éprouve cette figure quand on fait varier le rapport entre α_1 et α_2 , sont la sphère et le cylindre. On pourra réaliser cette même figure, en faisant adhérer une masse d'huile à un cylindre solide au sein d'un alcool de même densité que l'huile.

En prenant, dans l'équation [4], le signe inférieur, on a également une ligne composée de parties identiques qui se reproduisent le long de l'axe. Si l'on considère l'une de ces parties commençant à un minimum d'abscisse, elle descend d'abord en tournant sa concavité vers le haut, atteint un point inférieur où la tangente est parallèle à l'axe des x et dont l'abscisse est moyenne proportionnelle entre les abscisses minima et maxima, puis remonte, en conservant toujours le même sens de courbure, jusqu'au maximum d'abscisse, au delà duquel elle continue jusqu'à un nouveau minimum par une portion symétrique à la première. La distance entre les abscisses minima



et maxima a pour expression

$$y' = \alpha_2 E \left(c, \frac{\pi}{2} \right) - \alpha_1 F \left(c, \frac{\pi}{2} \right).$$

Les limites des variations de la figure engendrée sont, d'une part, la sphère, et, d'autre part, une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe et son plan perpendiculaire à celui-ci. La ligne méridienne ci-dessus sera celle d'une masse alcoolique entourant, au sein d'une huile de même densité, un cylindre métallique.

§ 25. Présentons ici quelques remarques au sujet de cette partie du travail de Beer. Les deux lignes méridiennes qu'il discute sont celles de l'onduloïde et du nodoïde; mais, on le voit, une autre ligne méridienne, savoir celle du caténoïde, lui a complètement échappé; il l'aurait trouvée en faisant, dans l'intégrale première (éq. [3] du § 23), la quantité α_2 égale à l'infini.

En second lieu, par suite de cette singulière omission, Beer n'assigne aux variations des figures engendrées par les deux premières que deux limites, au lieu de trois qu'elles ont en réalité.

En troisième lieu, il trouve, pour la seconde limite de la deuxième figure, une simple circonférence de cercle, tandis que j'ai trouvé un cylindre placé transversalement par rapport à l'axe des nodoïdes dont il dérive. Cette différence tient à ce que Beer considère ce que devient la figure à mesure que les abscisses maxima et minima de la ligne méridienne approchent de l'égalité, mais en conservant des valeurs finies, tandis que, rendant au contraire constante la différence de ces deux abscisses, j'ai supposé qu'elles convergeraient toutes deux vers l'infini, ou, pour parler plus exactement, que l'axe de révolution s'éloignait indéfiniment de la courbe (4^{me} série, § 35). Je n'ai point parlé de la limite consistant en une simple circonférence, parce qu'elle ne peut constituer une figure liquide; c'est une limite mathématique, et non physique.

Enfin, quant au moyen indiqué par Beer pour la réalisation partielle de la deuxième figure, c'est-à-dire du nodoïde, il est exact théoriquement, mais il serait d'une application bien difficile; on peut se convaincre, en effet, par ce que j'ai exposé dans le § 31 de ma 4^{me} série, qu'une sem-



blable figure liquide dépasserait de beaucoup sa limite de stabilité; on ne pourrait donc l'obtenir qu'en la maintenant par des entraves convenables.

Je rappellerai ici que le mémoire de Beer a paru quelques mois seulement avant ma 4^{me} série. Nous avons cherché tous deux, par des moyens essentiellement différents, les formes des figures d'équilibre de révolution. Ainsi que je l'ai fait remarquer dans le § 1 de la 4^{me} série et qu'on l'a vu plus haut (§ 21), on pouvait arriver à ces formes en partant du principe de M. Delaunay; mais Beer, par la simplicité et l'élégance qu'il a su donner à l'équation différentielle du premier ordre et à l'intégrale elliptique, a facilité l'étude analytique et la construction exacte des lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde, et, de mon côté, en réalisant physiquement toutes les figures d'équilibre de révolution, avec leurs variations et les limites de celles-ci, j'ai fourni à la théorie l'appui des vérifications expérimentales: De plus, en n'employant, conjointement avec l'expérience, que le seul raisonnement ou des constructions géométriques très-simples, j'ai rendu nettement accessible à l'esprit les relations entre les formes dont il s'agit et la condition générale de l'équilibre, et j'ai mis la recherche de ces mêmes formes à la portée des personnes qui ne sont point familiarisées avec les hautes mathématiques.

§ 26. A propos d'une question relative à la transformation spontanée d'un cylindre indéfini, Beer, dans le même mémoire, détermine les expressions du volume et de la surface d'une portion de sa première figure, ou, en d'autres termes, de l'onduloïde, cette portion étant comprise entre deux sections perpendiculaires à l'axe. Pour cela, dans les formules générales qui représentent le volume et la surface d'une figure quelconque de révolution, il remplace dy par son équivalent (éq. [3] du § 23), puis il intègre par les fonctions elliptiques; le module et l'amplitude sont les mêmes que précédemment.

On reconnaît aisément que la substitution ci-dessus permettrait d'intégrer également par les fonctions elliptiques dans le cas du nodoïde.

On s'assurera d'ailleurs sans peine qu'on obtient par une intégration ordinaire le volume et la surface d'une portion de caténoïde; on pourra donc évaluer, pour toutes les figures d'équilibre de révolution, le volume et la



surface d'une portion limitée par deux sections quelconques perpendiculaires à l'axe.

§ 27. M. Mannheim a présenté, en 1858, à la Société Philomatique de Paris ¹, sur la théorie des *roulettes*, une note dans laquelle il pose d'abord ce théorème :

Lorsqu'une courbe plane ABC roule sur une droite fixe EF, la roulette décrite par un point M lié à la courbe roulante a même longueur que la courbe GPH, lieu des projections du point M sur les tangentes à ABC ².

Puis il en déduit plusieurs corollaires, parmi lesquels se trouve le suivant :

La courbe décrite par le foyer d'une ellipse qui roule sur une droite a même longueur que la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

On sait, en effet, que le lieu des projections du foyer d'une ellipse sur les tangentes à celle-ci est une circonférence de cercle ayant le grand axe pour diamètre.

M. Mannheim ne parle point de la courbe décrite par le foyer d'une hyperbole roulante; mais on sait également que le lieu des projections du foyer d'une hyperbole sur les tangentes est une circonférence de cercle ayant pour diamètre l'axe réel de l'hyperbole, d'où il suit que la courbe tracée par l'un des foyers a même longueur que la circonférence en question. Cette extension à la ligne méridienne du nodoïde a, du reste, été signalée déjà par M. Lindelöf (§ 34).

Le principe de M. Mannheim permet, on le voit, d'évaluer la longueur de portions déterminées de la ligne méridienne de l'onduloïde et de celle du nodoïde, quand on a le grand axe de l'ellipse roulante et l'axe réel de l'hyperbole roulante; or ces axes sont connus lorsqu'on connaît les distances minima et maxima de la courbe décrite à la droite fixe; en effet, si l'on se représente l'ellipse roulante dans la position où son grand axe est perpendiculaire à la droite fixe, on voit que le foyer décrivant est alors le plus près ou

¹ Journ. *l'Institut*, n° 1260.

² Plus tard, M. Mannheim a reconnu (Journ. de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, XL^{me} cahier) que ce théorème avait été énoncé dès 1840 par Steiner.

Quelque temps après la publication de l'article de M. Mannheim, M. Lamarle a donné (BULLET. DE L'ACAD., 1858, 2^{me} série, t. IV, p. 259), à l'aide de ses nouvelles méthodes, une démonstration extrêmement simple de ce même théorème.



le plus loin de cette droite, et qu'ainsi les distances minima et maxima ci-dessus sont celles de ce foyer aux deux sommets de l'ellipse; le grand axe est donc égal à leur somme. On trouvera de même que l'axe réel de l'hyperbole roulante est égal à la différence des distances maxima et minima de la courbe décrite à la droite fixe.

L'énoncé de M. Mannheim relatif à la ligne méridienne de l'onduloïde se rapporte au développement entier de l'ellipse roulante sur la droite fixe; mais, on le comprend, le théorème général s'applique également à une portion moindre quelconque de ce développement et conséquemment de la courbe décrite.

Du reste, en substituant, dans l'expression $\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ d'un arc de courbe, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ relative aux lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde (formule [3] du § 23), on s'assurera que l'intégration s'effectue aisément par les moyens ordinaires.

Comme la ligne méridienne du caténoïde, ou la chaînette, est rectifiable, on voit qu'on pourra toujours évaluer, soit par une construction géométrique, soit par le calcul, la longueur d'un arc donné de chacune des lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution.

§ 28. J'ai fait voir, par le simple raisonnement (4^{me} série, § 16), 1^o que, pour des bases d'un diamètre donné, il existe une limite d'écartement de celles-ci au delà de laquelle il n'y a plus de caténoïde possible entre elles; 2^o que, lorsque les bases sont moins écartées, on peut toujours concevoir deux caténoïdes différents s'appuyant sur elles; en outre, j'ai déduit de l'expérience (*ibid.*, §§ 20 et 21) qu'à la limite ci-dessus, la distance des bases est à fort peu près les $\frac{2}{3}$ de leur diamètre.

Tous ces résultats avaient été obtenus au moyen du calcul par Goldschmidt ¹. Ce savant trouve la valeur précise du rapport limite entre le rayon des bases et l'écartement de celles-ci, et, du nombre qu'il donne, on tire, pour le rapport limite entre cet écartement et le diamètre des bases, la valeur 0,6627, valeur qui est effectivement, on le voit, très-voisine de 0,6666, ou $\frac{2}{3}$.

¹ *Determinatio superficiei minimæ rotatione curvæ data duo puncta jungentis circa datum axem ortæ* (Göttingue, 1851).



Goldschmidt indique une construction géométrique élégante pour déterminer la position des sommets respectifs des deux chainettes méridiennes, dans le cas d'un écartement des bases moindre que la limite. Il en déduit cette conséquence qu'à la limite même, si, du point où l'axe de symétrie de la chaînette unique coupe l'axe de révolution, l'on mène une tangente à la courbe, le point de contact est à l'une des extrémités de l'arc intercepté. On conclut de là que si l'on mène également une tangente à l'autre extrémité du même arc et qu'on prolonge ces deux tangentes, elles iront toucher aussi à ses extrémités l'arc méridien opposé. Cette propriété caractérise d'une manière simple le caténoïde limite.

Goldschmidt montre qu'au delà de l'écartement limite, on n'obtient plus, comme surface de révolution minima s'appuyant sur les bases, que l'ensemble de deux plans occupant respectivement ces dernières.

Enfin il arrive au résultat suivant : l'aire engendrée par la révolution d'une portion quelconque de la chaînette méridienne est égale à la moitié de l'aire du cylindre ayant pour base le cercle de gorge et pour hauteur la portion de l'axe comprise entre les normales menées aux deux extrémités de l'arc générateur.

§ 29. Rappelons-nous que le caténoïde limite est en même temps (4^{me} série, §§ 18 et 21, et 5^{me} série, § 15) le caténoïde à sa limite de stabilité ; que cependant, lorsqu'il est réalisé avec une masse pleine, il se montre encore permanent, mais que, lorsqu'on le produit à l'état laminaire, il se désunit dès qu'il atteint la hauteur limite.

En partant de là, et en employant certaines précautions, j'ai pu soumettre à une vérification expérimentale la valeur précise 0,6627 du rapport limite. Pour cela, j'ai substitué aux anneaux en fil de fer deux bandes de fer ployées cylindriquement, d'un centimètre de hauteur et de deux millimètres d'épaisseur, ayant leurs bords en regard taillés extérieurement en biseau sous un angle d'environ 45°, de manière que les arêtes de ces deux biseaux, arêtes d'où devait partir la lame; fussent tranchantes. Ces deux bandes ou anneaux étaient façonnés au tour; le diamètre des circonférences formées par chacune des arêtes ci-dessus a été trouvé exactement le même pour les deux ¹; et égal

¹ On a mesuré ces diamètres au moyen du cathétomètre, en plaçant pour cela les anneaux dans une position verticale.



à $71^{\text{mm}},02$. La fig. 2 représente, en grandeur réelle, la coupe verticale du côté gauche du système. Ces mêmes anneaux étaient portés comme les anneaux en fil de fer, savoir l'inférieur par trois petits pieds et le supérieur par une fourche; seulement ces pieds et cette fourche étaient plus solides. De même que dans les expériences du § 15 de la 5^{me} série, la tige verticale à laquelle on devait visser la queue de la fourche s'adaptait, à l'aide d'une pièce intermédiaire convenable, à l'extrémité de la lunette d'un cathétomètre; on pouvait ainsi élever bien verticalement l'anneau supérieur, et en même temps mesurer avec exactitude la quantité dont son arête tranchante s'était séparée de celle de l'anneau inférieur.

Les choses étant ainsi disposées, on a procédé de la manière suivante : on a posé, par ses pieds, l'anneau inférieur sur une tablette à vis calantes et sous l'anneau supérieur soutenu, comme je l'ai dit, par le cathétomètre; on a rendu bien horizontale l'arête du premier, au moyen des vis calantes et d'un petit niveau à bulle d'air; on a descendu ensuite le second, et, à l'aide d'une pince, on a courbé légèrement la queue de la fourche dans un sens ou dans un autre, en faisant glisser en même temps, de petites quantités, l'anneau inférieur sur la tablette, jusqu'à ce que les deux arêtes fussent exactement superposées. Alors, après avoir remonté l'anneau supérieur, on a mouillé de liquide glycérique les bords en biseau des deux anneaux, en se servant pour cela d'un pinceau, puis on a abaissé de nouveau l'anneau supérieur jusque très-près de l'autre, et l'on a rempli du même liquide la rainure circulaire formée par les deux biseaux, en y promenant le pinceau bien imbibé. Cela fait, on a soulevé l'anneau supérieur jusqu'à un millimètre environ en deçà de la quantité qu'indiquait la théorie, et qu'on avait préalablement déterminée, puis on a fait agir, avec des ménagements extrêmes, la vis du mouvement graduel, en s'arrêtant au moment précis de la rupture de l'équilibre, c'est-à-dire à l'instant où la figure se resserre rapidement pour se désunir en son milieu et se convertir en deux lames planes, comme avec les anneaux en fil de fer.

Avec le diamètre des bords tranchants indiqué plus haut, savoir $71^{\text{mm}},02$, on devait avoir (§ précéd.), pour la hauteur du caténoïde limite et consé-



quemment pour l'écartement de ces bords correspondant à la rupture de l'équilibre, $71^{\text{mm}},02 \times 0,6627 = 47^{\text{mm}},06$. Or, sur sept fois qu'on a effectué l'expérience, la lecture au cathétomètre a donné six fois identiquement la même valeur, savoir $46^{\text{mm}},97$, et une fois $46^{\text{mm}},92$ qui s'écarte à peine de la précédente. On doit donc regarder la valeur $46^{\text{mm}},97$ comme étant celle que donne l'expérience; elle ne diffère de la valeur théorique $47^{\text{mm}},06$ que de $0^{\text{mm}},09$, quantité qui n'atteint pas les deux millièmes de cette valeur théorique.

J'appellerai ici l'attention sur une autre vérification de la théorie. Nous avons vu (§ précéd.) que, d'après les calculs de Goldschmidt, lorsque l'écartement des bases excède la limite, il n'y a plus, comme surface de révolution à courbure moyenne nulle s'appuyant sur ces bases, que deux plans qui les occupent respectivement; or nous savons en effet, par l'expérience ci-dessus et par celles des §§ 5 et 15 de la 5^{me} série, qu'au moment où, par l'écartement graduel des anneaux, on atteint la limite théorique soit exactement, soit à fort peu près, le caténoïde laminaire compris entre eux se transforme spontanément en deux lames planes.

La discussion contenue dans le § 38 de ma 4^{me} série et le théorème de M. Delaunay (§ 21) complété par M. Lamarle (§ 22) ont, du reste, montré, depuis, que, parmi les surfaces de révolution, le caténoïde et le plan sont les seules à courbure moyenne nulle.

§ 30. MM. Lindelöf et Moigno ont traité de nouveau, en 1861, le problème du caténoïde ¹; ils retrouvent, par une méthode plus courte, plusieurs des résultats de Goldschmidt.

§ 31. En 1863, M. Lindelöf a repris ² toute la question des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Partant du théorème de M. Delaunay (§ 21), il cherche spécialement les relations entre les propriétés des

¹ *Leçons de calcul des variations*. Paris, 1861, n^{os} 102 à 105.

² *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (MÉM. DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE FINLANDE).

Un résumé détaillé de ce mémoire est inséré dans le journal *Les Mondes* (t. III, pp. 594, 414 et 451).



surfaces en question et les éléments de la conique roulante. Il déduit de ses calculs une suite de résultats presque tous nouveaux que je vais mentionner.

Disons d'abord que l'auteur nomme onduloïde complet et nodoïde complet les portions de l'onduloïde et du nodoïde indéfinis dont les lignes méridiennes correspondent respectivement à une révolution entière de l'ellipse et de l'hyperbole génératrices. Voici maintenant les résultats :

1° La somme des courbures principales en chaque point de la surface est, pour l'onduloïde, égale à la courbure du cercle circonscrit à l'ellipse génératrice, et, pour le nodoïde, égale à la courbure d'un cercle ayant pour diamètre l'axe transverse de l'hyperbole génératrice.

2° Rectification de la ligne méridienne de l'onduloïde complet, donnée antérieurement par M. Mannheim (§ 27), avec extension à la ligne méridienne du nodoïde complet (*Ibid.*).

3° Mesure de l'aire du caténoïde engendrée par une portion quelconque de la chaînette méridienne, trouvée déjà par Goldschmidt (§ 28).

4° Le volume du caténoïde terminé par deux plans quelconques perpendiculaires à l'axe égale la moitié de celui du cylindre ayant pour base le cercle de gorge, et pour hauteur la partie de l'axe comprise entre les normales extrêmes à une méridienne.

5° Le volume du caténoïde s'obtient aussi en multipliant la surface de ce caténoïde par le demi-rayon du cercle de gorge.

6° Le volume du caténoïde limite est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur¹.

7° L'aire d'un onduloïde complet équivaut à celle d'un cylindre dont la base est le cercle circonscrit à l'ellipse génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur est la circonférence d'une ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle.

8° L'aire d'un nodoïde complet équivaut à celle d'un cylindre dont le diamètre est l'axe transverse de l'hyperbole génératrice d'une méridienne,

¹ J'avais trouvé ce résultat longtemps auparavant, et je l'avais communiqué à M. Lindelöf, ainsi qu'il le déclare dans son mémoire. Ce même résultat n'est pas reproduit dans le résumé du journal *Les Mondes*.



et dont la hauteur est la circonférence d'une ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle.

9° Le volume d'un onduloïde complet surpasse celui d'un cylindre dont la base est le cercle circonscrit à l'ellipse génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur égale la circonférence de l'ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle, du tiers de l'excès de ce même cylindre sur un second cylindre de même hauteur que l'onduloïde, et dont la base est le cercle inscrit à l'ellipse génératrice.

10° Le volume du nodoïde complet surpasse celui du cylindre dont le diamètre est égal à l'axe transverse de l'hyperbole génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur égale la circonférence de l'ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle, du tiers de la somme de ce même cylindre et d'un second cylindre de même hauteur que le nodoïde, et dont le diamètre est égal à l'axe conjugué de l'hyperbole génératrice.

§ 32. J'ai soumis à l'expérience le résultat 6° du paragraphe précédent. Pour cela, il fallait réaliser, dans le liquide alcoolique, un caténoïde limite plein, puis le convertir en cylindre par le rapprochement des bases. Mais comme toute l'huile du caténoïde devait être contenue dans ce cylindre, il fallait éviter la formation des bases convexes de celui-ci, et conséquemment comprendre la masse liquide entre des disques et non entre des anneaux. Dans ces conditions, le seul moyen à employer pour obtenir le caténoïde limite était d'écarter les disques l'un de l'autre d'une quantité égale à la hauteur du caténoïde limite correspondant à leur diamètre, puis de faire adhérer à leurs faces en regard une masse d'huile en excès, et enfin d'absorber de ce liquide, au moyen de la petite seringue, jusqu'à ce que le cercle de gorge eût le diamètre appartenant à ce même caténoïde limite.

Le diamètre des disques dont j'ai fait usage était de $71^{\text{mm}},49$; la hauteur du caténoïde limite correspondant à ce diamètre devait donc (§ 29) être égale à $71^{\text{mm}},49 \times 0,6627 = 47^{\text{mm}},38$.

MM. Lindelöf et Moigno ont trouvé ¹, pour le rapport du rayon des bases

¹ Voir la note du § 50.



à celui du cercle de gorge, la valeur 1,81017, dont l'inverse est 0,5524; avec mes disques, le diamètre du cercle de gorge devait donc être égal à $71^{\text{mm}},49 \times 0,5524 = 39^{\text{mm}},49$.

Dans l'expérience, les disques étaient l'un au-dessus de l'autre; l'inférieur reposait sur le fond du vase par trois petits pieds, et le supérieur était porté par une tige verticale fixée à son centre et traversant à frottement doux le bouchon métallique du couvercle. On a réglé l'écartement de ces disques au moyen du cathétomètre, et, pour régler de même le diamètre du cercle de gorge de la figure liquide, on a couché le cathétomètre horizontalement sur des supports convenables.

Une difficulté accidentelle a empêché qu'on n'atteignît l'écartement précis $47^{\text{mm}},38$; celui auquel on s'est arrêté était, d'un côté, $46^{\text{mm}},85$, du côté opposé $47^{\text{mm}},05$, et conséquemment, en moyenne, $46^{\text{mm}},95$, quantité inférieure à la valeur théorique d'un peu moins du centième de celle-ci.

En ce qui concerne le cercle de gorge, on a conduit l'absorption de l'huile jusqu'à ce que le diamètre de ce cercle fût réduit à $39^{\text{mm}},60$, quantité qui excède à peine la valeur théorique des trois millièmes de celle-ci.

La figure ainsi obtenue approchait donc extrêmement du caténoïde limite, et conséquemment son volume devait être à fort peu près celui d'un cylindre de même base et d'une hauteur égale à la moitié de la distance des disques, c'est-à-dire égale à $23^{\text{mm}},47$; or, après avoir abaissé le disque supérieur jusqu'à ce que la figure parût exactement cylindrique, la mesure de la hauteur de ce cylindre a donné, d'un côté $23^{\text{mm}},00$, et, du côté opposé, $23^{\text{mm}},07$, moyenne $23^{\text{mm}},03$. La différence entre ce résultat et la hauteur théorique $23^{\text{mm}},47$ est de $0^{\text{mm}},44$, qui n'est pas les deux centièmes de cette hauteur théorique; elle provient sans doute, en grande partie, de ce qu'il y a toujours une petite incertitude sur le point exact où la forme cylindrique est rigoureusement atteinte.

Bien que cette expérience laisse quelque chose à désirer quant à la précision, on peut cependant, je pense, la regarder comme fournissant une vérification suffisante du principe théorique.

§ 33. Pour terminer ce qui est relatif aux surfaces d'équilibre de révolution, j'ajouterai ici que j'ai cherché les expressions des rayons de courbure



des lignes méridiennes respectives de l'onduloïde et du nodoïde au minimum et au maximum de distance à l'axe, et que j'ai trouvé ces expressions fort simples.

Voyons d'abord celles qui concernent l'onduloïde. Pour y arriver commodément, partons de la formule générale de l'équilibre en fonction du rayon de courbure et de la normale. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure respectivement correspondants aux deux points dont il s'agit, points pour lesquels, en conservant les notations de Beer (§ 23), les normales sont α_1 et α_2 ; nous aurons ainsi les deux équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\alpha_1} &= C, \\ \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\alpha_2} &= C. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots [a]$$

D'autre part, si nous prenons, comme Beer, l'axe de révolution pour axe des y , et si nous remarquons qu'alors, aux deux points considérés, la tangente est infinie, l'équation [2] du § 23, en y remplaçant successivement x par α_1 et par α_2 , nous donnera les deux suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{C\alpha_1^2}{2} + C', \\ \alpha_2 &= \frac{C\alpha_2^2}{2} + C', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots [b]$$

d'où, par l'élimination de C' , on tire

$$C = \frac{2}{\alpha_2 + \alpha_1};$$

enfin, substituant cette valeur de C dans les deux équations [a], on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= -\alpha_1 \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ \rho_2 &= \alpha_2 \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots [c]$$

La valeur de ρ_1 est négative, parce que, au point minimum de la ligne méridienne de l'onduloïde, la courbure de cette ligne est concave.



De ces deux expressions on déduit la relation fort simple aussi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = - \frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

ainsi les valeurs absolues des rayons de courbure respectivement correspondants aux distances maxima et minima à l'axe sont entre elles comme ces mêmes distances.

Appliquons les mêmes considérations au nodoïde. Si l'on regarde la constante C comme positive, ce qui revient à supposer le liquide dans la concavité de la courbe, la normale au point minimum sera évidemment négative; pour cette figure, il faudra donc, dans la première des équations [a], remplacer α_1 par $-\alpha_1$. Quant à la substitution de α_1 à x dans l'équation [2] du § 23, je dois présenter une remarque. D'après la forme et la position de la courbe, l'abscisse x est toujours positive dans l'équation dont il s'agit, et, par suite, il en sera de même de α_1 , qui joue ici simplement le rôle d'abscisse; mais, dans le premier membre de cette équation, x est multiplié par la quantité $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ dont il faut déterminer le signe au point minimum où sa valeur absolue devient l'unité; or si nous nous reportons à l'expression générale $\frac{x\sqrt{1+p^2}}{\mu}$ ou $\frac{x}{\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$ de la normale, et si nous nous rappelons qu'au point minimum la normale est négative malgré le signe essentiellement positif de x , nous en concluons qu'en ce même point la quantité $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ est égale à -1 , et qu'ainsi, quand on remplacera x par α_1 , le premier membre de l'équation deviendra $-\alpha_1$.

Il suffira donc, pour le nodoïde, de changer, dans les équations [a] et [b], α_1 en $-\alpha_1$, et conséquemment, pour avoir les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 correspondantes à cette figure, on n'aura qu'à faire le même changement dans les expressions [c], ce qui donnera

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}, \\ \rho_2 &= \alpha_2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots [d]$$

d'où l'on déduit aussi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

de sorte qu'ici encore les deux rayons de courbure sont entre eux comme les distances à l'axe.

Je n'ai point parlé, à propos de l'onduloïde, de la question ci-dessus relative au signe, parce que dans cette figure la normale est partout positive.

La deuxième des expressions [c] montre qu'à l'équateur des renflements de l'onduloïde, la courbure méridienne est toujours moindre que celle d'une circonférence de cercle qui aurait son centre sur l'axe, et la deuxième des expressions [d] montre que, dans le nodoïde, à l'équateur des portions convexes vers l'extérieur, la courbure méridienne est, au contraire, plus forte que celle d'une semblable circonférence. J'étais déjà arrivé à ces résultats dans la 4^{me} série, mais d'une manière moins précise.

Si, au résumé théorique contenu dans les paragraphes qui précèdent à partir du § 21, on joint l'ensemble des expériences de mes 2^{me}, 4^{me} et 5^{me} séries, on reconnaîtra qu'à l'exception des questions de stabilité qui, ainsi que je l'ai annoncé, formeront la matière d'une série spéciale, il reste peu de chose à faire pour que l'étude générale des figures d'équilibre de révolution, tant au point de vue mathématique qu'au point de vue physique, soit absolument complète.

§ 34. Passons aux figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution, et résumons d'abord quelques travaux partiels. Meusnier avait signalé ¹ comme surface telle qu'en chaque point les deux rayons de courbure principaux soient égaux entre eux et de signes contraires, ou, ce qui revient au même, comme surface à courbure moyenne nulle, l'hélicoïde gauche à plan directeur, c'est-à-dire l'hélicoïde engendré par une droite qui glisse d'un mouvement uniforme le long d'une autre droite à laquelle elle est perpendiculaire, tandis qu'elle tourne, d'un mouvement également uniforme, autour de cette même droite.

¹ *Mémoire sur la courbure des surfaces* (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, SAVANTS ÉTRANGERS, 1783, p. 477).



En 1842, M. Catalan ¹ a démontré que, parmi les surfaces réglées, le plan et l'hélicoïde dont il s'agit sont les seules dont la courbure moyenné est nulle.

§ 35. En 1859, M. Lamarle a repris la question sous un point de vue plus étendu, au moyen de ses méthodes géométriques ² : il a cherché d'une manière générale quelles sont les surfaces réglées dont la courbure moyenne est constante; il retrouve ainsi, pour le cas de la courbure moyenne nulle, le résultat de M. Catalan, et il fait voir que, dans le cas d'une courbure moyenne finie et constante, il n'y a qu'une seule surface réglée, savoir le cylindre de révolution.

§ 36. J'ai réalisé, à l'état laminaire, l'hélicoïde gauche à plan directeur. La charpente solide employée dans cette expérience est représentée en projection verticale par la fig. 3 : elle se compose d'un fil de fer droit servant d'axe, autour duquel circule un autre fil de fer courbé en hélice régulière; ce dernier fil est replié à chacune de ses extrémités de manière à aboutir à l'axe par une portion rectiligne et perpendiculaire à ce même axe; ces prolongements rectilignes, qui représentent les deux positions extrêmes de la droite génératrice, sont soudés à l'axe, et maintiennent ainsi l'hélice. Les fils de fer ont environ un millimètre d'épaisseur, le diamètre de l'hélice est de 10 centimètres, et la distance d'une spire à la suivante de 6 centimètres; enfin il y a deux spires complètes. Ajoutons que tout l'ensemble a été oxydé par l'acide nitrique affaibli (5^{me} série, §§ 14 et 18).

Quand, après avoir plongé cette charpente dans le liquide glycérique et l'y avoir laissée pendant quelques secondes, on l'en retire, on la trouve occupée par une belle lame s'étendant partout de l'axe aux spires, et constituant d'une manière parfaite l'hélicoïde gauche en question.

En effet, l'ensemble formé par l'hélice en fil de fer, les deux parties qui la rattachent à l'axe, et la portion de celui-ci comprise entre ces deux droites, constitue un contour fermé qu'on peut évidemment concevoir tracé tout entier

¹ *Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum* (JOURN. DE M. LIOUVILLE, t. VII, p. 205).

² *Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation* (BULL. DE L'ACAD., 2^{me} série, t. VI, p. 412).



sur un hélicoïde gauche à plan directeur, et qui en comprendrait dans son intérieur une portion finie; or la lame forcée, d'une part, d'adhérer à tout ce contour, et, d'autre part, de se façonner en surface à courbure moyenne nulle, doit nécessairement prendre la figure qui satisfait à ces deux conditions, c'est-à-dire celle de l'hélicoïde dont il s'agit.

Cette expérience est, on le voit, une nouvelle application du principe général du § 44 de la 7^{me} série.

Ici comme pour les systèmes laminaires qui se forment dans les charpentes polyédriques, on peut, si l'on se contente d'une figure très-peu durable qu'on reproduira autant de fois qu'on voudra, substituer au liquide glycérique une simple solution de savon (5^{me} série, § 19).

§ 37. M. Lamarle, considérant d'une manière générale les hélicoïdes engendrés par une courbe plane qui se meut uniformément le long d'une droite fixe située dans son plan, tandis qu'elle tourne, d'un mouvement uniforme aussi, autour de cette même droite, a cherché ¹ quels étaient ceux qui pouvaient satisfaire à la condition d'une courbure moyenne constante, et il a trouvé ainsi, outre l'hélicoïde gauche à plan directeur, quatre autres surfaces. Ces cinq hélicoïdes correspondent respectivement à cinq des figures d'équilibre de révolution, savoir au plan, à la sphère, à l'onduloïde, au caténoïde et au nodoïde. Quant à celui qui correspond au cylindre, c'est le cylindre lui-même.

L'équation différentielle des courbes génératrices de ces hélicoïdes s'intègre par les moyens ordinaires dans les cas correspondants au plan et au caténoïde; dans ce dernier, elle donne une surface déjà connue et dont nous reparlerons. Dans les autres cas, l'équation s'intègre par les fonctions elliptiques.

Chacune des lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution, à l'exception de celles du plan et du cylindre, passe à la courbe génératrice de l'hélicoïde correspondant, en s'étendant simplement dans la direction de l'axe suivant une certaine loi, et en conservant les distances de ses différents points à cet axe. D'après ce résultat, la demi-circonférence qui constitue la

¹ Sur une classe particulière de surfaces à aire minima (BULL. DE L'ACAD., 1839, 2^{me} série, t. VI, p. 529).



ligne méridienne de la sphère devient une courbe plus allongée dont le sommet est distant de l'axe d'une quantité égale au rayon de la demi-circconférence en question; la ligne méridienne de l'onduloïde se change en une autre courbe ondulée, qui s'approche et s'éloigne autant de l'axe, mais dont les ondulations sont plus longues; etc. La ligne méridienne du plan, étant une droite perpendiculaire à l'axe, ne peut subir de modifications dans le sens de celui-ci, elle reste telle qu'elle est, et engendre l'hélicoïde gauche à plan directeur; enfin la ligne méridienne du cylindre ne peut non plus se modifier, et elle engendre, comme hélicoïde, ce même cylindre.

Ajoutons que la solution de M. Lamarle comprend nécessairement les figures de révolution, celles-ci étant ce que deviennent les hélicoïdes dont il s'agit quand la vitesse de translation de la courbe génératrice est nulle.

§ 58. La courbe génératrice de l'hélicoïde dérivé de la sphère, courbe pour laquelle M. Lamarle a trouvé une construction assez simple, aboutit à l'axe sous des angles aigus; il faut donc, pour la continuité, la concevoir se prolongeant de l'autre côté de l'axe par des arcs symétriques au précédent, puis repassant du premier côté, et ainsi de suite, en formant une ligne ondulée indéfinie, symétriquement coupée par l'axe dans toute son étendue. Dans un cas particulier calculé par M. Lamarle, où chacun de ces arcs, pendant qu'il glisse d'une quantité égale à la longueur de sa corde, effectue à fort peu près $\frac{7}{9}$ de révolution, la courbe est celle que représente la fig. 4. Si l'on coupe par un plan perpendiculaire à l'axe l'hélicoïde engendré, la section a la forme représentée fig. 5; a est le point par où passe l'axe.

J'ai réalisé partiellement ce même hélicoïde, en ne prenant que la figure engendrée par un seul des arcs de la courbe de la fig. 4. Alors la section transversale n'est que la moitié de la courbe de la fig. 5, savoir la courbe $abcdfa$. J'ai fait façonner, en fil de fer, trois courbes égales de cette dernière forme, plus deux plaques de fer ayant encore la même ligne pour contour et destinées à servir de bases à la figure liquide. Ces pièces avaient des dimensions environ doubles de celles de la fig. 5; elles ont été fixées transversalement, chacune par son point a , et dans des azimuts différant successivement l'un de l'autre de 90° , en cinq points équidistants d'un fil de fer droit vertical; celui-ci était entouré de fil de coton, et porté sur un petit



pied. Chacun des intervalles entre ces mêmes pièces était, en conséquence du calcul de M. Lamarle, les 0,324 de la corde de l'un des arcs de la courbe génératrice (fig. 4). Ce système ayant été placé dans le mélange alcoolique, on a fait adhérer à l'ensemble des cinq courbes, en employant des précautions convenables, une masse d'huile en excès; puis on a enlevé graduellement de ce dernier liquide, jusqu'à ce que la surface de la figure passât exactement et d'une manière continue par les contours des cinq courbes. Ce point atteint, la figure liquide réalisait parfaitement une spire complète de l'hélicoïde qu'il s'agissait d'obtenir. Je n'ai point figuré le résultat dans la planche, à cause de la difficulté de le bien représenter par la gravure; mais on s'en fera aisément une idée.

Les parties ba et fa (fig. 5) de la courbe forment, en a , un angle rentrant, et, par une raison que l'on s'explique sans peine, il est impossible, avec un système solide composé de fils de fer nus, de réaliser une figure d'huile présentant un angle de cette espèce: toujours l'huile passe au delà de l'arête, et vient remplir en plus ou moins grande quantité l'ouverture de l'angle; c'est pour écarter cet inconvénient que l'on entoure de fil de coton le fil de fer droit qui sert d'axe à l'hélicoïde; l'huile ne peut franchir l'obstacle que lui oppose le coton imbibé de liquide alcoolique, et l'angle rentrant se maintient.

§ 39. Dans un mémoire publié en 1853 ¹, M. Jellett a démontré que, parmi toutes les surfaces fermées telles qu'une droite issue d'un point de l'espace, qu'elles emprisonnent ne les perce qu'en un point unique, la sphère est la seule dont la courbure moyenne soit constante.

Il suit d'ailleurs du principe de M. Delaunay complété par la démonstration géométrique de M. Lamarle (§§ 21 et 22), ainsi que des résultats de Beer (§ 24), et du contenu des §§ 2 et 38 de ma 4^{me} série, que si la surface fermée à courbure moyenne constante est de révolution, elle ne peut constituer qu'une sphère.

Maintenant, une masse liquide finie, sans pesanteur, et entièrement libre, doit évidemment présenter une surface fermée; si donc une semblable masse

¹ Sur la surface dont la courbure moyenne est constante (JOURN. DE M. LIOUVILLE, t. XVIII, p. 165).



peut affecter des figures d'équilibre différentes de la sphère, ces figures ne sont pas de révolution, et sont telles qu'une droite issue de leur intérieur peut les percer en plus d'un point.

L'existence de ces figures est rendue bien peu probable par le fait qu'une masse d'huile entièrement libre au sein du liquide alcoolique, et une bulle de savon isolée dans l'air, prennent invariablement la forme sphérique; cependant, que l'on y fasse attention, ce fait ne suffit pas pour établir d'une manière absolue l'impossibilité des figures dont il s'agit : car il se pourrait qu'elles fussent instables dans leur état complet, ou bien que, satisfaisant aux conditions mathématiques de la stabilité, elles présentassent des portions de surface qui se coupent, comme cela a lieu, par exemple, à l'égard du nodoïde (4^{me} série, § 29); dans ces cas évidemment elles échapperaient à la réalisation expérimentale avec une masse liquide libre de toute adhérence ou avec une lame liquide également libre.

Ajoutons que ces mêmes figures ne doivent point être cherchées parmi les surfaces à courbure moyenne nulle. En effet, une figure fermée est nécessairement telle qu'on peut concevoir un plan qui lui soit entièrement extérieur et ne fasse que la toucher; or il est visible qu'au point de contact ou en tous les points de la ligne de contact, aucun des rayons de courbure de la surface ne peut être dirigé de l'autre côté du plan : car cela supposerait, au point auquel appartiendrait un semblable rayon, une courbure concave vers l'extérieur, et dès lors une portion de la figure serait aussi de l'autre côté du plan; la figure supposée a donc nécessairement des points où tous les rayons de courbure sont dirigés vers son intérieur, et conséquemment ne peut satisfaire à la condition qu'en chacun de ses points les deux rayons de courbure principaux soient de signes contraires.

§ 40. Occupons-nous actuellement des recherches qui ont eu pour objet l'intégration générale de l'équation des surfaces à courbure moyenne nulle et les résultats qu'on pouvait en déduire.

Monge a intégré le premier d'une manière générale ¹ l'équation dont il s'agit, c'est-à-dire l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$ mise sous la forme différentielle,

¹ *Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles* (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, 1784, p. 118).



et Legendre a obtenu ensuite ¹ la même intégrale; mais cette intégrale est d'une forme compliquée, qui en rend l'usage très-difficile.

Cependant M. Scherk, qui s'était déjà occupé de la question dans un premier mémoire ² publié vers 1831, l'a reprise en 1835 dans un second travail ³, et, partie au moyen d'une méthode spéciale, partie en traitant l'intégrale de Monge, il parvient à trouver, en coordonnées finies, outre les équations de l'hélicoïde gauche à plan directeur et du caténoïde, déjà connus par les recherches de Meusnier ⁴, celles de cinq autres surfaces; voici ces équations :

$$e^{Dz} = \frac{\cos Dy}{\cos Dx};$$

$$z = bl \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}}{a} - a \operatorname{arc} \left[\operatorname{tg} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 - b^2}} \right] + a\theta + c,$$

où

$$x = \rho \cos \theta, \text{ et } y = \rho \sin \theta;$$

$$\frac{1}{2} e^{-2z - \frac{y}{x} \sqrt{2\rho + 2t} + x \sqrt{2\rho - 2t}} + \frac{1}{2} e^{-2z + \frac{y}{x} \sqrt{2\rho + 2t} - x \sqrt{2\rho - 2t}} = \rho + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{4},$$

où

$$t = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{4} = \rho \cos \theta, \text{ et } y = \rho \sin \theta;$$

$$\frac{1}{2} e^{z + \sqrt{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}t} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} e^{-z - \sqrt{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}t} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}x + \rho}{y^2},$$

où

$$t = 4 \sin^2 \frac{1}{2}x + y^2 \cos x = \rho \cos \theta, \text{ et } y^2 \sin x = \rho \sin \theta;$$

$$\sin Dz = \pm \frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2} \cdot \frac{e^{Dy} - e^{-Dy}}{2}.$$

Ajoutons que l'auteur parvient à déduire de la première de ces équations, cette autre plus générale :

$$e^{B \cdot \sin(\beta - \alpha)} = A \frac{\cos B [x \cos \alpha + y \sin \alpha + a]}{\cos B [x \cos \beta + y \sin \beta + b]}.$$

¹ Sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles (Ibid., 1787, p. 509).

² De proprietatibus superficiei quæ hac continetur æquatione $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$ disquisitiones analyticae (ACTA SOCIET. JABLONOVIANÆ, vol. IV, p. 204, Leipzig).

³ Bemerkungen ueber die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen (JOURNAL DE CRELLE, t. XIII, p. 185).

⁴ Voir la première note du § 34.

Il annonce que, dans un mémoire ultérieur, il soumettra à une recherche particulière la première des équations ci-dessus, dans ses rapports avec la dernière; j'ignore si ce mémoire a été publié; je n'ai pu le trouver.

Les surfaces représentées par les équations de M. Scherk étant à courbure moyenne nulle, elles pourront toutes être réalisées à l'état laminaire au moyen de mes procédés, en appliquant le principe général du § 44 de la 7^{me} série; nous en verrons plus loin des exemples remarquables.

§ 41. M. Ossian Bonnet, en employant un système de coordonnées auxiliaires, est parvenu en 1853 à une autre intégrale générale ¹, qui ne présente pas l'inconvénient de celle de Monge. Les formules de M. Ossian Bonnet renferment deux fonctions arbitraires, et l'on pourra, sans doute, déduire de ces formules, en coordonnées ordinaires et sous forme finie, les équations d'un grand nombre de nouvelles surfaces.

M. Bonnet signale, comme exemple des résultats qu'on tire de son intégrale, une surface qui, pour certaines valeurs des constantes, se réduit, d'une part, à l'hélicoïde gauche, et, d'autre part, au caténoïde; cette surface était déjà connue; c'est celle qui est représentée par la seconde des équations de M. Scherk; c'est aussi celui des hélicoïdes de M. Lamarle (§ 37) qui correspond au caténoïde; nous retrouverons de nouveau cette même surface plus loin.

En 1855, M. Bonnet a, en outre, appliqué sa méthode à la recherche des surfaces à courbure moyenne nulle astreintes à passer par une courbe continue donnée ². A la fin de l'article, il annonce que, dans une publication ultérieure, il résoudra la question dans le cas d'un contour discontinu.

§ 41^{bis}. La même année, M. Serret a indiqué ³ une transformation de l'intégrale de Monge, qui permet de représenter toutes les surfaces à courbure moyenne nulle passant par des droites données non situées dans le même plan.

¹ *Note sur la théorie générale des surfaces* (COMPTES RENDUS, t. XXXVII, p. 529).

² *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale des surfaces à aire minima* (Ibid., t. XL, p. 4107).

³ *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan* (Ibid., p. 4078).



§ 42. M. Catalan a publié, en 1855 encore ¹, deux notes dans lesquelles il arrive à des surfaces particulières satisfaisant aussi à l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$.

La première de ces surfaces coïncide avec la première de celles de M. Scherk; mais M. Catalan en détermine la forme, qu'il décrit de la manière suivante :

La surface dont il s'agit coupe le plan des xy suivant des droites qui font des angles de 45° avec les axes des x et des y , et qui partagent tout le plan en carrés égaux; deux de ces droites se coupent à l'origine des coordonnées. La surface admet, en outre, un système de droites perpendiculaires à ce même plan, et qui divisent en deux parties égales les côtés des carrés ci-dessus. Elle est composée d'une infinité de nappes identiques dont chacune est comprise tout entière entre quatre plans asymptotiques formant un canal à section carrée de longueur indéfinie; les arêtes de tous ces canaux sont les droites du dernier système. On peut se représenter la section de l'ensemble de ces mêmes canaux par le plan des xy comme un échiquier indéfini, dans lequel les cases noires répondraient aux canaux renfermant les nappes de la surface, et les cases blanches à des espaces vides; les cases noires contiendraient à leurs centres les sommets des premiers carrés dont il a été question plus haut. Toutes les nappes étant identiques, il suffit d'en considérer une, et nous prendrons celle qui entoure l'axe des z . Elle est coupée par le plan des xz suivant une courbe située tout entière au-dessus de l'axe des x , qui touche cet axe à l'origine, qui a pour axe de symétrie l'axe des z , et qui présente deux branches infinies ayant pour asymptotes les sections du canal rectangulaire par le plan des xz . La même nappe est coupée par le plan des yz suivant une courbe identique à la précédente, mais renversée, et située tout entière au-dessous de l'axe des y , qu'elle touche aussi à l'origine. Si l'on imagine que la première de ces courbes glisse sur la seconde en demeurant parallèle à elle-même, elle engendrera la nappe dont il s'agit. On se fera donc aisément une idée de celle-ci, et comme il est clair que toutes les nappes se reliaient entre elles par les droites du dernier système ci-dessus,

¹ *Sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires* (COMPTES RENDUS, t. XLI, p. 53), et *Sur deux surfaces qui ont, en chaque point, leurs rayons de courbure égaux et de signes contraires* (Ibid., p. 274).



on pourra se figurer l'ensemble de la surface. On voit que chacune des nappes prise isolément a une grande analogie avec le parabolôïde hyperbolique.

La seconde des surfaces de M. Catalan est donnée par un système de quatre équations, entre lesquelles il faudrait éliminer trois quantités; mais cette élimination, si tant est qu'elle soit possible, serait certainement fort difficile. L'équation de la troisième surface coïncide encore avec la deuxième de celles de M. Scherk.

Enfin M. Catalan a présenté, dans la même année, à l'Académie des sciences, un mémoire ¹ dans lequel il parvient, d'une autre manière que M. Ossian Bonnet, à l'intégrale générale sous forme réelle de l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$. Des solutions qu'il tire de ses calculs, l'une se réduit, par une transformation convenable, à la dernière des équations de M. Scherk; trois autres sont données par des systèmes d'équations entre lesquelles il faudrait effectuer des éliminations difficiles, mais, pour l'une de ces dernières, M. Catalan parvient, sans faire l'élimination, à la génération de la surface, génération que voici :

Concevez une circonférence de cercle roulant sur une ligne droite et dont un point S décrit ainsi une cycloïde; concevez, en outre, la cycloïde enveloppe du rayon mobile passant par le point S, et soit P le point de contact; imaginez enfin, dans un plan perpendiculaire à celui de ces cycloïdes, une parabole dont la directrice soit projetée en P, et qui ait S pour sommet; cette dernière courbe, variable de grandeur, engendrera la surface.

§ 43. J'ai réalisé, par le procédé des lames, une portion de l'une des nappes de la première de ces surfaces, savoir de celle qui coïncide avec la première de M. Scherk. J'ai choisi une portion terminée à égale distance au-dessus et au-dessous du plan des xy . On comprend, par la description de la surface, qu'il suffira de former la charpente solide de quatre fils de fer droits égaux en longueur, disposés comme les quatre arêtes latérales d'un prisme droit à base carrée, et dont les extrémités soient réunies d'une manière convenable par des fils de fer transversaux arqués suivant des courbes

¹ Sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires (COMPTES RENDUS, t. XLI, p. 1019).



déduites de l'équation de la surface. Pour nous exprimer plus nettement, supposons la charpente placée de façon que les quatre fils de fer droits soient verticaux, et que, par rapport à l'observateur, deux de ces fils soient en avant des deux autres; il faudra qu'à la partie inférieure du système, un fil transversal réunisse les extrémités des deux fils verticaux antérieurs et un autre les extrémités des deux fils verticaux postérieurs, et qu'à la partie supérieure, un fil transversal réunisse l'extrémité du fil vertical antérieur de droite à celle du fil vertical postérieur de droite, tandis qu'un autre réunit de même l'extrémité du fil vertical antérieur de gauche à celle du fil vertical postérieur de gauche. Les milieux des fils transversaux supérieurs seront d'ailleurs réunis par une fourche, afin qu'on puisse tenir la charpente pour la plonger dans le liquide.

La courbure des fils transversaux varie nécessairement avec le rapport entre la hauteur et la largeur de la charpente. J'ai pris d'abord la hauteur égale à la largeur; en d'autres termes, j'ai considéré la portion de la nappe qui s'étend au-dessus et au-dessous du plan des xy d'une quantité égale à la demi-largeur de cette nappe. M. Catalan met l'équation de la surface sous la forme :

$$z = l \frac{\cos y}{\cos x} \dots \dots \dots [1]$$

Si, pour plus de simplicité, on considère en particulier la nappe qui entoure l'axe des z , on verra sans peine que, dans l'équation ci-dessus, la demi-largeur de cette nappe est représentée par $\frac{\pi}{2}$; il faudra donc, pour avoir l'équation des courbes qui doivent terminer supérieurement et inférieurement la charpente solide, faire $z = \pm \frac{\pi}{2}$, d'où l'on déduira

$$\cos y = e^{\pm \frac{\pi}{2}} \cdot \cos x \dots \dots \dots [2]$$

J'ai supposé à la charpente solide une largeur et une hauteur de 9 centimètres; les courbes ont été dessinées en conséquence d'après l'équation [2], et j'ai fait construire la charpente; elle est représentée en perspective par la fig. 6. Quand on la retire du liquide glycérique, la lame qu'elle contient offre aux yeux la réalisation parfaite de la portion cherchée de la surface.



La fig. 7 montre, en projection verticale suivant deux directions rectangulaires, le résultat ainsi obtenu.

Ici, comme dans le cas de l'hélicoïde gauche à plan directeur (§ 36), la charpente en fil de fer constitue un contour fermé qu'on peut se figurer entièrement tracé sur la surface dont nous nous occupons, et la lame, qui doit passer par tout ce contour et avoir une courbure moyenne nulle, est obligée de se façonner suivant la surface qui remplit cette double condition; c'est donc là encore une application de mon principe général (7^{me} série, § 44).

On peut se demander si la surface se réaliserait de même pour un rapport beaucoup plus grand entre la hauteur et la largeur de la charpente solide; cette réalisation suppose, en effet, que la nappe, prise ainsi sur une partie plus considérable de son étendue, ne devient point instable. Afin d'essayer la chose, j'ai fait construire une seconde charpente ayant 10 centimètres de hauteur et 2,5 de largeur, c'est-à-dire une hauteur quadruple de la largeur. En cherchant l'équation des portions courbes qui conviennent à ce rapport, ce qui s'obtient en faisant, dans l'équation [1], $z = 2\pi$, j'avais trouvé que ces courbes se réduisaient sensiblement à des lignes droites, de sorte que la nouvelle charpente ne se compose que de parties rectilignes. Or la lame qui s'y est formée n'a point réalisé la surface décrite par M. Catalan : elle a pris une figure consistant encore en deux parties creuses disposées à angle droit l'une par rapport à l'autre; mais leur sommet commun, au lieu d'être au milieu du système, se trouvait environ quatre fois plus éloigné de l'une des extrémités que de l'autre; en outre, en répétant l'expérience plusieurs fois, on a vu ce sommet commun se placer tantôt vers l'extrémité supérieure, tantôt vers l'extrémité inférieure. J'ai dû conclure nécessairement de là que la nappe de la surface décrite par M. Catalan a une limite de stabilité, et que j'avais dépassé cette limite.

L'expérience que je viens de décrire nous offre donc un exemple du cas où la seconde condition énoncée dans le principe général du § 44 de la 7^{me} série n'est pas satisfaite.

Je me suis dit alors qu'on donnerait probablement de la stabilité à la figure cherchée en profitant de la propriété consistant en ce que la nappe contient, comme on l'a vu, deux droites dirigées suivant les diagonales de



la section du canal rectangulaire par le plan des xy ; j'ai pensé qu'en rendant solide l'une de ces diagonales, on obligerait le sommet commun des deux parties creuses à demeurer au centre du système. J'ai donc fait adapter, au milieu de la hauteur de la nouvelle charpente, un fil de fer très-mince qui traverse celle-ci, comme on le voit dans la fig. 8, et, en effet, par ce moyen, la surface de MM. Scherk et Catalan s'est parfaitement réalisée dans la charpente en question.

§ 44. M. Van der Mensbrugge, appliquant, de son côté, mon principe général, a réalisé ¹, en 1866, la dernière des surfaces de M. Scherk (§ 40). La discussion de l'équation lui a montré que la charpente la plus simple à employer devait se composer de deux rectangles égaux ayant leurs grands côtés quadruples des petits, et se coupant à angles droits par les milieux de ces grands côtés. A la rigueur, les petits côtés devraient être courbes; mais, avec le rapport ci-dessus, leur courbure serait si faible, qu'on peut les laisser droits sans qu'il en résulte de différence appréciable entre la surface laminaire produite et la surface théorique; cela tient à ce que les plans des rectangles sont asymptotiques de cette dernière.

La charpente ainsi construite ne représente pas un seul contour fermé, comme le voudrait mon principe, mais bien l'ensemble de deux de ces contours; et ceux-ci ne sont pas les deux rectangles eux-mêmes, car on s'assure aisément, par la discussion, qu'aucun de ces derniers ne satisfait à la condition, exigée par mon principe, de circoncrire une portion finie de la surface. Si l'on considère isolément la partie de la charpente composée d'une moitié de l'un des rectangles et d'une moitié de l'autre, on aura le premier des deux contours fermés réels, et la partie opposée sera le second; et, en effet, quand on retire la charpente du liquide glycérique, c'est dans ces deux parties opposées que se trouve logée la figure laminaire.

Ces mêmes parties comprennent, on le voit, deux des quatre angles dièdres droits formés par les rectangles, et il est clair qu'il n'y a pas plus de raison pour que la figure laminaire se développe dans ces deux angles que dans les deux autres; aussi, quand la charpente est bien construite, et qu'on

¹ *Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle* (BULLET. DE L'ACAD., 2^{me} série, t. XXI, p. 532).



répète plusieurs fois l'expérience, c'est tantôt l'un des couples d'angles opposés, tantôt l'autre, qui se trouve occupé.

La charpente s'écartant de mon principe en ce qu'elle présente deux contours fermés au lieu d'un seul, le système laminaire réalisé contient une lame supplémentaire; celle-ci est plane, elle a la forme d'un ovale dont les sommets sont aux deux points d'intersection des rectangles, et dont le plan est bissecteur des deux angles dièdres qui renferment toute la figure; la charpente est en effet, sauf le rapport des côtés des rectangles, la même que celle décrite au § 21 de ma 6^{me} série, et le résultat est du même ordre. Pour obtenir celui que l'on cherche, c'est-à-dire une portion de la surface de M. Scherk, il suffit de crever la lame supplémentaire dont je viens de parler; la figure laminaire offre alors en son milieu un espace vide, et c'est aussi ce qu'on déduit de l'équation.

On pourrait façonner séparément un seul des deux contours fermés, de sorte qu'on se trouverait rigoureusement dans les conditions de mon principe; alors il ne se formerait qu'une lame unique, et celle-ci représenterait exactement la moitié de la figure que fournit la charpente entière après la rupture de la lame additionnelle; si M. Van der Mensbrugghe a réuni les deux contours fermés, c'est afin de réaliser une portion plus complète de la surface. Il s'est assuré d'ailleurs, par des mesures au cathétomètre, que la lame produite coïncidait, sans erreur appréciable, avec la surface théorique.

Enfin il a poursuivi, au moyen de l'équation, la surface au delà des grands côtés des rectangles, et il a fait voir comment on pouvait étendre la réalisation hors des mêmes limites, à l'aide d'une charpente convenable munie de fils supplémentaires, sans lesquels la figure ainsi agrandie serait instable; le résultat est fort curieux, mais sa description exigerait trop de place.

§ 45. Je rappellerai ici deux autres notes ¹ de M. Van der Mensbrugghe, publiées en 1866 et 1867, notes que j'ai résumées dans le § 15 de ma 8^{me} série, et où il s'agit de la recherche mathématique des lois relatives à la forme que prend, dans certaines circonstances, un fil flexible sous l'action de la tension

¹ *Sur la tension des lames liquides* (BULL. DE L'ACAD., 2^{me} série, t. XXII, p. 508, et t. XXIII, p. 448).



d'une lame liquide. Je rappellerai aussi les remarques de M. Lamarle ¹ sur la première de ces deux notes.

Je rappellerai enfin que, dans le 5^{me}, le 6^{me} et le 7^{me} de ses mémoires *Sur la théorie mécanique de la chaleur* ², publiés de 1865 à 1868, M. Dupré a fait usage de méthodes qui lui sont propres, et qui reposent sur la considération du travail moléculaire, pour résoudre une suite de questions en rapport avec mon sujet; j'ai donné un aperçu des résultats dans le § 42 de ma 8^{me} série.

§ 46. M. Mathet a fait connaître ³, en 1863, une méthode au moyen de laquelle on peut former l'équation différentielle de toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui passent par une courbe plane donnée.

§ 47. C'est ici le lieu de décrire deux vérifications expérimentales qui me paraissent dignes d'intérêt.

On doit conclure des recherches de M. Bonnet (§ 41) que, par un contour quelconque, peuvent passer une infinité de surfaces à courbure moyenne nulle. D'après cela, si l'on construit en fil de fer légèrement oxydé un contour fermé non plan et de telle forme qu'on voudra, qu'on le plonge dans le liquide glycérique et qu'on l'en retire, l'une de ces surfaces pourra toujours s'y réaliser à l'état laminaire, et conséquemment on devra le trouver occupé par une lame unique qui le remplit entièrement.

Or c'est ce que l'expérience confirme: j'ai fait façonner en fil de fer les contours fermés les plus divers et les plus bizarres, et, à leur émergence du liquide glycérique, chacun d'eux s'est toujours montré, soit immédiatement, soit après une petite manœuvre dont je vais parler, rempli en totalité par une seule lame.

Quand le contour fermé a une certaine complication, la lame qui s'y développe est souvent accompagnée de lamelles additionnelles; mais il suffit alors de crever celles-ci, ce qui se fait aisément avec une pointe de papier à filtre, pour ne plus avoir qu'une lame unique.

Quelquefois aussi une portion de la lame prend, pendant que le système

¹ BULL. DE L'ACAD., t. XXII, p. 272.

² *Ann. de chim. et de phys. de Paris*, 4^{me} série, t. VI, VII, IX, XI et XIV.

³ *Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum* (JOURNAL DE M. LIOUVILLE, 2^{me} série, t. VIII, p. 525).



sort du liquide, une mauvaise direction, et va s'attacher, au moyen d'une arête liquide, à une autre portion de cette même lame; dans ce cas, on ne peut crever, mais, en variant la position du contour solide pendant qu'on le retire, on finit par éviter l'inconvénient dont il s'agit.

Cependant il n'est pas impossible qu'avec certains contours la lame unique doive, dans ses circonvolutions, se couper elle-même; dans ce cas, l'expérience ne peut la réaliser, car à l'arête d'intersection devraient aboutir quatre portions de cette lame, ce qui est contraire à l'une des lois que j'ai trouvées (5^{me} série, § 19); les choses se disposeront donc alors de manière à satisfaire à cette loi, et la forme de l'ensemble laminaire ne sera plus la forme théorique.

A part cette circonstance tout exceptionnelle, on réussit constamment à réaliser une lame unique attachée à la totalité du contour solide, et l'on produit ainsi, par un moyen fort simple, des surfaces très-belles et très-variées.

Pour donner une idée de la singularité et de la complication des contours fermés que j'ai soumis à l'expérience, j'en décrirai ici deux en peu de mots : le premier consiste en un nœud semblable à celui qu'on ferait au milieu d'un cordon sans le serrer, de manière que ses différentes parties soient notablement distantes les unes des autres, et en rejoignant les deux extrémités libres. Quant au second, le fil de fer, d'abord droit et vertical, se recourbe ensuite en formant un peu plus de deux spires d'une hélice dont l'axe est parallèle à la portion droite, puis se contourne en une autre hélice également de deux spires, dont l'axe est horizontal, et qui enveloppe la première à une distance suffisante; il s'arrondit alors en une troisième hélice de deux spires aussi, à axe vertical entourant le système des deux autres avec un intervalle convenable; enfin il va s'attacher en un point du fil droit, et ferme ainsi le contour. C'est avec ce dernier contour que la réussite a été le plus difficile : il se formait des lamelles dont la disposition était telle qu'on ne pouvait les crever sans faire éclater le tout, et ce n'est qu'en variant la manière dont on retirait le contour du liquide, qu'on est arrivé au résultat cherché.

§ 48. En second lieu, bien que, avec un contour donné, la surface laminaire qu'on réalise ainsi se montre toujours la même dans les essais successifs convenablement effectués, l'expérience permet encore de constater qu'il y a



une infinité d'autres surfaces à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur le même contour. Si, après avoir réalisé une lame dans un contour fermé non plan et choisi arbitrairement, on fait adhérer à cette lame un anneau en fil de fer muni d'une fourche par laquelle on le tient, et préalablement mouillé de liquide glycérique, puis qu'on tire cet anneau dans une direction perpendiculaire à son plan, comme si on voulait l'écarter de la lame, celle-ci ne s'en détache pas, de sorte qu'elle s'étend alors entre le contour primitif et ce même anneau; seulement, si l'on éloigne trop ce dernier, l'équilibre se détruit, la portion de la lame qui aboutit à l'anneau s'étrangle rapidement, il y a séparation, et la lame se rétablit dans son état antérieur, tandis qu'une lame plane va occuper l'anneau; mais, en-deçà de cette limite d'écartement, la figure est parfaitement stable.

Or, dans cette dernière condition, comme la lame continue à s'appuyer sur le contour primitif et que sa forme est modifiée, elle représente une nouvelle surface à courbure moyenne nulle passant par ce même contour. On peut employer simultanément deux anneaux qu'on fait adhérer à deux portions différentes de la lame et qu'on écarte en même temps, la lame s'étend vers l'un et vers l'autre à la fois; on peut, en outre, substituer aux anneaux circulaires des anneaux de tout autres formes, et toujours l'expérience réussit. On produit de cette manière autant de surfaces différentes qu'on le veut, et qui toutes passent par le premier contour.

Si l'on conçoit, par la pensée, l'une de ces nouvelles surfaces prolongée au delà de l'un des anneaux, on se convaincra, avec un peu de réflexion, que puisque ses deux rayons de courbure principaux doivent être partout égaux et de signes contraires, le prolongement dont il s'agit ne peut se fermer, et doit conséquemment s'étendre à l'infini. Il résulte de là qu'aucune de ces surfaces ne saurait remplir le contour primitif par une portion finie.

Mais les résultats du paragraphe précédent permettent d'énoncer ce nouveau principe : Un contour fermé absolument quelconque, plan ou non plan, étant donné, parmi toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur sa totalité, il y en a toujours au moins une dont une portion finie peut le remplir entièrement.

§ 49. Tel est, à ma connaissance, l'ensemble des résultats mathémati-



ques appliqués ou applicables au sujet de mes recherches; toutes mes expériences sont, on l'a vu, en accord complet avec ces résultats, et mes procédés permettent d'effectuer autant de nouvelles vérifications qu'on le voudra.

J'aurais encore à parler de la première partie du mémoire de M. Lamarle *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*, mémoire dont j'ai analysé la deuxième partie dans mon historique des lames liquides (9^{me} série); mais je réserve ce sujet pour la série suivante, qui traitera spécialement des questions de stabilité.

J'ai passé sous silence plusieurs notes ou mémoires remarquables de MM. Bonnet, Roberts, etc., concernant les surfaces à courbure moyenne nulle, parce qu'ils n'ont qu'un intérêt purement mathématique et ne peuvent se rattacher à mon travail.



Fig. 1.

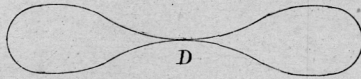
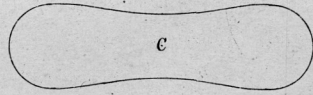
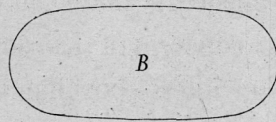
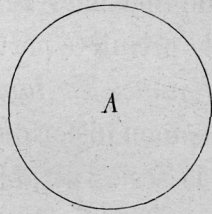


Fig. 3.

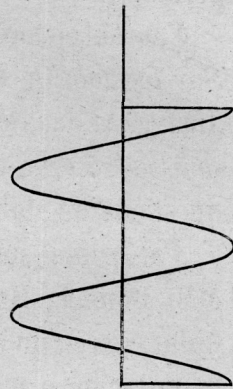


Fig. 2.

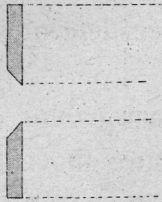


Fig. 4.



Fig. 6.

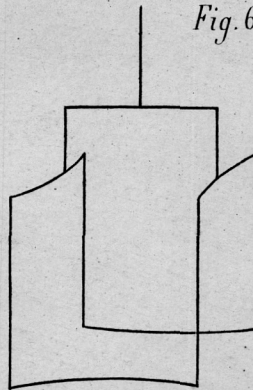


Fig. 5.

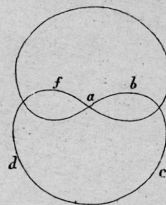


Fig. 7.

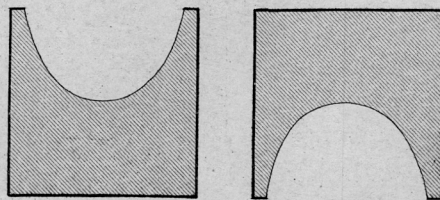


Fig. 8.





RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR;

PAR
J. PLATEAU.

ONZIÈME ET DERNIÈRE SÉRIE¹.

LIMITES DE STABILITÉ DES FIGURES D'ÉQUILIBRE. — THÉORIE GÉNÉRALE DE LA STABILITÉ DE CES FIGURES. — STABILITÉ DES SYSTÈMES LAMINAIRES. — STABILITÉ DANS DES CAS OÙ LA PESANTEUR INTERVIENT. — TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

(Présenté le 11 octobre 1868.)

¹ Voir, pour les dix séries précédentes, les tomes XVI, XXIII, XXX, XXXI, XXXIII, XXXVI et XXXVII des *Mém. de l'Acad.*





RECHERCHES
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES
SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE
D'UNE
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

LIMITES DE STABILITÉ DES FIGURES D'ÉQUILIBRE.

§ 1. Lorsqu'une sphère d'huile est librement suspendue dans le mélange alcoolique, elle manifeste toujours une parfaite stabilité de forme : si, par des mouvements imprimés au liquide ambiant, on altère cette forme, la masse la reprend toujours exactement. Une bulle de savon isolée dans l'air montre également une forme permanente et stable : si on la heurte de bas en haut avec une étoffe de laine tendue, et que le choc soit assez léger pour ne pas la faire crever, on la voit s'aplatir plus ou moins contre l'étoffe, puis rebondir à la manière d'une balle élastique, en reprenant sa sphéricité. Ainsi la sphère est une figure d'équilibre stable dans son état complet, et conséquemment, à plus forte raison, toute portion de sphère est stable.

La sphère n'a donc pas de limite de stabilité, dans le sens que j'ai donné à cette expression dans les séries précédentes : c'est-à-dire que, quelle que soit l'étendue d'une portion réalisée de sphère relativement à la sphère entière, cette portion est toujours à l'état d'équilibre stable; c'est ce qu'on voit



se vérifier fréquemment dans mes expériences, par exemple à l'égard d'une masse adhérente à un disque solide, à l'égard des bases d'un cylindre réalisé entre deux anneaux, etc.

Je citerai encore les petites surfaces qui terminent respectivement la colonne de mercure et la colonne d'alcool dans le thermomètre à maximum et à minimum de Rutherford. Ces surfaces étant très-petites, l'action de la pesanteur sur leur forme peut être regardée comme négligeable; aussi celle du mercure constitue-t-elle sensiblement une calotte sphérique convexe, et celle de l'alcool une demi-sphère concave. Or, ainsi que l'a fait remarquer M. Duprez ¹, c'est la stabilité de cette dernière qui est la véritable cause du recul de l'index d'émail quand la température s'abaisse, et j'ajouterai que c'est également à la stabilité de la surface terminale du mercure qu'il faut attribuer l'action de celle-ci pour faire avancer l'index d'acier quand la température s'élève.

§ 2. Ce résultat étant indépendant du rayon et, par suite, de la courbure de la sphère, il est également vrai quand le rayon devient infini, ou, en d'autres termes, quand la surface de la sphère devient un plan. Le plan n'a donc pas non plus de limite de stabilité, ce qui signifie qu'il peut être réalisé dans un contour solide d'une étendue quelconque, sans cesser d'être stable.

§ 3. Mes premières expériences sur les cylindres liquides ont établi ce principe (2^{me} série, §§ 44 à 46), qu'un semblable cylindre est instable lorsque le rapport de sa longueur à son diamètre excède une certaine valeur, et j'ai trouvé alors que cette valeur est comprise entre les nombres 3 et 3,6; je l'ai nommée *la limite de la stabilité du cylindre*. Je suis arrivé à ce résultat, on se le rappelle, au moyen de cylindres d'huile formés, au sein du mélange alcoolique, entre deux anneaux ou deux disques solides.

J'ai fait, depuis, servir aussi les cylindres de mercure formés dans l'air par le procédé du § 50 de la 2^{me} série, à une approximation grossière de la limite dont il s'agit. Pour cela, on a placé, sur une plaque de verre horizontale, deux fils de cuivre d'environ un millimètre d'épaisseur et de quelques centimètres de longueur, dirigés dans le prolongement l'un de l'autre, mais

¹ Note sur la cause qui s'oppose à l'introduction d'un liquide dans un vase à orifice étroit (BULLET. DE L'ACAD., 2^{me} série, t. XV, p. 41, 1865).



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR. 5

laissant entre leurs extrémités en regard, extrémités qui étaient amalgamées, un intervalle de 7 à 8 millimètres; puis on a déposé dans cet intervalle un globule de mercure dont le diamètre n'excédait pas 2 millimètres; on a rapproché ensuite les deux petites faces amalgamées jusqu'à ce qu'elles vissent toucher le globule et que l'adhérence s'établît. Alors on a fait glisser l'un des fils dans le sens de sa longueur, afin d'étirer le globule liquide et d'essayer de le convertir en un cylindre. Quand le volume du globule était suffisamment petit, on obtenait ainsi, en effet, un cylindre qui conservait sa forme d'une manière permanente. Si, au contraire, le volume du mercure surpassait une certaine grandeur, la petite masse se séparait toujours en deux parties avant que la forme cylindrique fût atteinte. En modifiant le volume du globule, on a tâché d'arriver au plus grand écartement des faces amalgamées pour lequel la formation du cylindre était possible, et l'on a pu reconnaître qu'il était supérieur au triple, mais inférieur au quadruple du diamètre de ce cylindre.

Cette expérience présente quelque difficulté, parce que, pendant les tâtonnements qu'elle exige, le mercure dissout du cuivre et perd de sa fluidité¹; cependant, avec un peu d'habitude, on parvient à opérer assez vite pour éviter cet inconvénient.

Je rapporterai bientôt de nouvelles expériences qui m'ont permis d'approcher bien davantage du résultat exact; mais auparavant je vais exposer ce que l'on obtient à l'égard de celui-ci en s'aidant de la théorie.

§ 4. Quelques mois après la publication de ma 2^{me} série, M. Hagen a essayé² d'appliquer le calcul à cette question. Pour cela, supposant un cylindre liquide dont la forme est très-légèrement altérée de manière qu'il pré-

¹ Je pense que, dans ce cas et dans celui dont j'ai parlé à la fin du § 51 de la 2^{me} série, cette diminution de fluidité n'a lieu d'une manière sensible qu'à la surface de la petite masse: le cuivre qui s'allie au mercure, se trouvant dans un état d'extrême division, se combine avec l'oxygène de l'air environnant, d'où résulte, à la surface du liquide, la formation graduelle d'une mince pellicule d'oxyde. Dès lors, la petite masse de mercure, comme les masses d'huile quand elles se recouvrent de la pellicule dont il a été question dans la troisième note du § 41 de la 2^{me} série, doit perdre peu à peu de sa tendance à prendre une figure d'équilibre déterminée, et conséquemment paraître moins fluide.

² *Ueber die Auflösung flüssiger Cylinder in Tropfen* (ANN. DE M. POGENDORFF, année 1850, vol. LXXX, p. 559).



sente une suite de renflements et d'étranglements égaux et extrêmement peu prononcés, M. Hagen admet que les arcs méridiens de ces renflements et de ces étranglements peuvent, sans erreur sensible, être assimilés à des arcs de cercle. Il calcule, dans cette hypothèse, les pressions capillaires exercées aux sommets respectifs d'un arc convexe et d'un arc concave, et enfin il cherche la limite de la stabilité en partant de la considération que la différence des deux pressions ci-dessus doit être positive d'un côté de cette limite et négative de l'autre côté; il arrive ainsi à la valeur $2^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire au nombre 2,8284.

§ 5. Dans un article ¹ en réponse à cette note, j'ai fait voir que la méthode employée par M. Hagen, bien qu'ingénieuse, ne pouvait donner qu'une valeur plus ou moins éloignée de la véritable, parce que les arcs méridiens des renflements et des étranglements ne sont pas des arcs de cercle, et qu'en substituant à ces derniers des arcs de sinusöide, évidemment plus rapprochés de ceux de la courbe réelle, on obtient un résultat notablement différent.

J'ai annoncé alors que j'étais parvenu, à l'aide d'une méthode rigoureuse, à la valeur exacte de la limite dont il s'agit, et que cette valeur exacte est la quantité π , c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre, ou 3,1416. Je vais maintenant faire connaître cette méthode; le principe sur lequel elle repose m'a été fourni par M. Lamarle.

§ 6. Supposons un cylindre d'huile horizontal réalisé entre deux disques au sein du mélange alcoolique, et assez court pour être stable. Si, en poussant légèrement le liquide en plus grande quantité vers l'un des disques au moyen du bec de la petite seringue, on détermine la formation artificielle d'un renflement et d'un étranglement, et si cette modification de la figure ne dépasse pas un certain degré, la masse abandonnée ensuite à elle-même reprend spontanément la figure cylindrique initiale. Mais nous savons (3^{me} série, §§ 22 et 25) que si l'altération excède le degré dont il s'agit, et si d'ailleurs le cylindre n'était pas trop en deçà de sa limite, cette altération progresse ensuite spontanément, et que la transformation s'achève.

¹ *Ueber die Gränze der Stabilität eines flüssigen Cylinders* (ANN. DE M. POGGENDORFF, année 1850, vol. LXXX, p. 566).



Or, au degré précis d'altération qui sépare les tendances à ces deux effets opposés, la masse doit évidemment être indifférente à l'une et à l'autre; il doit donc y avoir là un état d'équilibre, bien que cet équilibre soit instable; et comme la figure est alors encore de révolution et qu'elle se compose d'un renflement et d'un étranglement, elle forme nécessairement une portion d'onduloïde. En second lieu, puisque cet onduloïde partiel constitue le degré d'altération où va commencer la tendance spontanée à une altération plus profonde, il doit s'écarter d'autant moins de la figure initiale, c'est-à-dire du cylindre, que celui-ci est plus près de sa limite de stabilité. Enfin, lorsque le cylindre est à cette limite même, l'onduloïde partiel doit coïncider exactement avec lui, puisque alors la plus faible trace d'un renflement et d'un étranglement doit suffire pour amener la transformation spontanée.

On a vu, par exemple, dans le second des paragraphes que je viens de citer, qu'avec un cylindre de 31^{mm} de diamètre et de 87^{mm} de longueur, cylindre pour lequel le rapport de la longueur au diamètre est 2,8, la déformation ne commence à progresser spontanément que lorsque la flèche du renflement formé à l'aide de la manœuvre indiquée atteint 5^{mm} environ; or j'ai réalisé depuis, entre les mêmes disques, un cylindre de 93^{mm} de longueur, c'est-à-dire ayant une longueur triple du diamètre, et conséquemment plus rapproché de la limite de la stabilité que le précédent, et la déformation a commencé à progresser spontanément pour une valeur de la flèche du renflement comprise entre 3^{mm} et 4^{mm}. J'étendrai bientôt cette vérification plus loin.

§ 7. Le principe ci-dessus étant admis, appliquons-y le calcul. Reprenons l'expression de la condition générale à laquelle doivent satisfaire les lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution, savoir (4^{me} série, § 1)

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C,$$

expression où M est le rayon de courbure et N la normale. Dans le cas du cylindre, la ligne méridienne étant une droite, M est partout infini, ce qui réduit la formule à $\frac{1}{N} = C$, d'où $N = \frac{1}{C}$; or comme la droite en question est parallèle à l'axe, la normale N est le rayon du cylindre engendré; d'où il suit que ce rayon est égal à $\frac{1}{C}$.



Rappelons-nous, en outre, que l'expression générale ci-dessus, mise sous la forme différentielle, peut s'intégrer une première fois (10^{me} série, § 23). Si l'on prend l'axe de révolution comme axe des x , cette intégrale, qui représente nos lignes méridiennes, devient :

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{Cy^2}{2} + C', \dots \dots \dots [1]$$

p désignant le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, et C' étant la constante arbitraire introduite par l'intégration. S'il s'agit du cylindre, la tangente est nulle partout; faisant donc $p=0$ et résolvant par rapport à y , on a :

$$y = \frac{1}{C} \pm \frac{1}{C} \sqrt{1 - 2CC'}.$$

Il est clair qu'ici y est le rayon du cylindre, et puisque ce rayon est simplement égal à $\frac{1}{C}$, la constante arbitraire C' doit être déterminée de manière à annuler le radical $\sqrt{1 - 2CC'}$, c'est-à-dire qu'il faut faire $C' = \frac{1}{2C}$.

Cela posé, concevons un cylindre réalisé entre deux disques de rayon $\frac{1}{C}$, et supposons la distance de ces disques telle que le cylindre soit en deçà de sa limite de stabilité, mais extrêmement près de celle-ci. Alors l'onduloïde partiel qui lui correspond s'en écartera à peine; en d'autres termes, les arcs méridiens du renflement et de l'étranglement seront presque confondus avec la droite $y = \frac{1}{C}$, et il en sera de même des arcs méridiens de tous les autres renflements et étranglements de la figure complète, c'est-à-dire infiniment prolongée au delà des disques. Dans cette circonstance, par conséquent, l'ordonnée y variera très-peu sur toute l'étendue de la ligne méridienne, et la tangente p demeurera toujours fort petite.

Introduisons ces conditions dans l'équation [1], et, pour cela, transportons l'axe des x parallèlement à lui-même, au-dessus de sa position première, d'une quantité égale à $\frac{1}{C}$, de manière à le faire coïncider avec la génératrice du cylindre. Remplaçons donc y par $y + \frac{1}{C}$, et n'oublions pas que, dans l'équation transformée, y représentera l'ordonnée comptée à partir du nouvel axe des abscisses, de sorte que, dans toute la courbe, y demeurera, comme p , fort minime. Développons, en outre, le radical $\sqrt{1+p^2}$;



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

nous pourrons négliger toutes les puissances de p supérieures à la deuxième, et nous aurons ainsi, au lieu du radical en question, la quantité $1 + \frac{1}{2}p^2$. Faisant donc ces substitutions, l'équation [1] deviendra, les réductions étant effectuées,

$$2C^2y^2 + C^2p^2y^2 + 2Cp^2y + (1 + 2CC')p^2 = 2(1 - 2CC') \dots [2]$$

Enfin, à cause de la petitesse de y et de p , négligeons les termes du 4^{me} et du 3^{me} degré $C^2p^2y^2$ et $2Cp^2y$, et l'équation se réduira ainsi à

$$2C^2y^2 + (1 + 2CC')p^2 = 2(1 - 2CC') \dots [5]$$

L'erreur que nous commettrons sera d'autant plus minime que l'onduloïde se rapprochera davantage du cylindre, et le résultat que nous tirerons de cette équation, pour le cas où l'onduloïde se confond avec le cylindre, sera rigoureusement exact.

Écrivant, dans cette même équation, $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p , et résolvant par rapport à dx , il vient :

$$dx = \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1 - 2CC' - C^2y^2}},$$

ce qui donne, par l'intégration :

$$x = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot \text{arc sin} \frac{Cy}{\sqrt{1 - 2CC'}} \dots [4]$$

Je n'ajoute point de constante arbitraire, parce que je prends pour origine l'un des points où la courbe coupe l'axe des x , ce qui exige que l'équation soit satisfaite en y faisant à la fois $y=0$ et $x=0$.

Telle est donc l'équation approchée de la ligne méridienne de l'onduloïde en question, équation d'autant plus exacte que cet onduloïde est plus près de coïncider avec le cylindre ¹. Cette même équation résolue par rapport à y devient :

$$y = \frac{\sqrt{1 - 2CC'}}{C} \sin C \sqrt{\frac{2}{1 + 2CC'}} \cdot x \dots [5]$$

¹ On pourrait élever ici une objection et demander si l'on est en droit de négliger, dans l'équation [2], le terme $2Cp^2y$ devant le terme $2C^2y^2$. En effet, le rapport $\frac{1}{C} \frac{p^2}{y}$ de ces deux termes devient infini aux points où la courbe coupe l'axe des abscisses, puisque, en tous ces



C'est l'équation d'une sinusoïde, et l'on voit que les points où, après avoir quitté l'origine, la courbe va de nouveau couper l'axe des abscisses, sont à des distances de l'origine successivement égales à

$$\frac{1}{C} \sqrt{\frac{1+2CC'}{2}} \cdot \pi, \quad \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1+2CC'}{2}} \cdot 2\pi, \text{ etc.}$$

Or la seconde est évidemment la longueur d'une portion de l'onduloïde composée d'un renflement et d'un étranglement; en la désignant par L , nous aurons donc

$$L = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1+2CC'}{2}} \cdot 2\pi.$$

points, y est nul et p ne l'est pas; aux environs de ces mêmes points donc, le terme $2Cp^2y$, quoique très-petit en lui-même, est très-grand par rapport au terme $2C^2y^2$, et conséquemment ne peut être supprimé à côté de celui-ci; cette suppression n'est légitime qu'à l'égard des parties de la courbe assez distantes des points en question pour que p soit, au moins du même ordre de petitesse que y ; ainsi l'équation [4] ne représente la ligne méridienne de l'onduloïde peu éloigné du cylindre que dans les parties dont il s'agit.

Cela est vrai; mais il est aisé de montrer que l'étendue des portions dans lesquelles la courbe n'est pas suffisamment représentée par l'équation [4] se resserre de plus en plus et converge vers zéro, à mesure que l'onduloïde se rapproche du cylindre, de sorte que tout résultat tiré de cette équation, pour le cas où les deux figures coïncident, pourra être regardé comme rigoureusement exact.

Pour cela, élevons une ordonnée par un point de l'axe des abscisses pris à une distance très-petite α de l'un de ceux où cet axe est coupé par la courbe; nous formerons ainsi un petit triangle dont les côtés seront l'ordonnée en question, la longueur α et un arc de la courbe, arc qui, à cause de sa petitesse et, si l'on veut encore, à cause de son voisinage d'un point d'inflexion, pourra être considéré comme rectiligne et dirigé suivant la tangente au point situé à l'extrémité de notre ordonnée; on aura donc, pour ce point, sans erreur sensible, $p = \frac{1}{\alpha} y$; d'où, en divisant de part et d'autre par y et multipliant par p , on déduit $\frac{p^2}{y} = \frac{1}{\alpha} p$. Supposons maintenant que, α demeurant constant, l'onduloïde se rapproche de plus en plus du cylindre, ou, ce qui revient au même, que notre courbe tende de plus en plus à se confondre avec l'axe des x ; alors, dans la formule ci-dessus, p diminuera en même temps que y , et deviendra aussi minime qu'on le voudra; conséquemment, quelque petit que soit α , c'est-à-dire quelque près que l'on se place de l'un des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, pourvu que l'on en demeure à une distance finie, on pourra, en faisant converger l'onduloïde vers le cylindre, rendre aussi petite qu'on le voudra la quantité $\frac{1}{\alpha} p$, et, par suite, son égale $\frac{p^2}{y}$, de manière que, dans l'équation [2], le terme $2Cp^2y$ puisse être négligé à côté du terme $2C^2y^2$; on arrivera donc toujours, comme je l'ai dit, à faire descendre au-dessous de toute valeur finie donnée, quelque petite qu'elle soit, la longueur des arcs pour lesquels les courbes des équations [2] et [4] diffèrent notablement.



Lorsque l'onduloïde se confondra avec le cylindre, cette longueur sera, en vertu du principe du paragraphe précédent, celle qui correspond à la limite de la stabilité de ce cylindre, et elle sera alors rigoureusement exacte; or, quand la figure est devenue un cylindre, le rayon de celui-ci est, comme on l'a vu, représenté par $\frac{1}{C}$, et l'on a en même temps, comme on l'a vu aussi, $C' = \frac{1}{2C}$; si donc on désigne le rayon par r , on aura $C = \frac{1}{r}$ et $C' = \frac{r}{2}$. Substituant ces valeurs dans l'expression de L , on obtient enfin, pour la longueur précise qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre,

$$L = 2\pi r,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{L}{2r} = \pi.$$

Ainsi un cylindre liquide compris entre deux bases solides est exactement à sa limite de stabilité, quand sa longueur, ou l'intervalle de ses bases, est égale à sa circonférence, ou, ce qui revient au même, quand le rapport de sa longueur à son diamètre est égal à π .

Je ferai connaître plus loin une autre méthode au moyen de laquelle j'arrive, sans aucun calcul, au même résultat, en partant du principe de M. Delaunay (10^{me} série, § 21); mais je ne puis l'exposer qu'après ce qui concerne la limite de stabilité de l'onduloïde.

§ 8. Beer, dans le premier des deux mémoires où il soumet au calcul une partie des résultats de mes expériences¹, parvient également à la quantité π ; voici de quelle manière. En traitant, ainsi que je l'ai dit dans le § 9 de la série précédente, le cas où une masse liquide en rotation est adhérente à un axe solide cylindrique, il suppose d'abord la vitesse angulaire nulle, et obtient alors pour ligne méridienne celle d'une portion d'onduloïde, comme je l'ai fait remarquer dans le paragraphe cité, portion qui se compose d'un renflement et de deux demi-étranglements. Il montre ensuite, à l'aide d'un artifice de calcul, que si l'on diminue progressivement le rayon équatorial de la figure, la distance des deux points extrêmes de la ligne méridienne con-

¹ Ueber die Oberflächen rotirender Flüssigkeiten im allgemeinen, insbesondere über den Plateau'schen Rotationsversuch (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1855, t. XCVI, p. 1 et 210).



verge vers une valeur égale à la circonférence du cylindre solide, valeur qu'elle atteint lorsque le rayon équatorial est égal à celui de ce cylindre, ou, en d'autres termes, lorsque la masse liquide est réduite à une couche infiniment mince sur la surface de ce même cylindre. Puis, après l'exposé d'un résultat qui ne se rapporte point au sujet actuel, vient un passage que je traduis ici, en avertissant le lecteur que Beer représente par $2y_4$ la distance ci-dessus.

« Concevons un cylindre d'huile infiniment long placé dans l'alcool dilué, et faisons-lui subir uniformément, dans toute sa longueur, une petite altération telle que la surface demeure *minimæ arcæ* ¹. Cette surface sera évidemment une surface de révolution dont la ligne méridienne ne se composera que de courbes égales de l'espèce considérée plus haut, se raccordant entre elles. Le cylindre acquiert ainsi une suite régulière d'étranglements alternant avec des renflements. Pour une déformation très-petite, l'enfoncement et la saillie de ces étranglements et renflements sont également très-petits, et le cylindre auquel les courbes en question sont tangentes s'écarte aussi fort peu de la surface primitive de l'huile. De là résulte donc que la distance de deux étranglements avance d'autant plus vers la limite de $2y_4$ trouvée plus haut pour la surface originellement cylindrique, et conséquemment vers la valeur de la circonférence de cette dernière, que la déformation supposée est plus faible. La limite de $2y_4$, indépendante de la nature du liquide, n'est évidemment autre chose que la limite de la stabilité d'un cylindre liquide soustrait à la pesanteur, limite observée et mesurée par M. Plateau. Ce physicien a trouvé qu'en prenant pour unité le diamètre du cylindre, la limite dont il s'agit est comprise entre 3 et 3,6. M. Hagen est arrivé, par une voie théorique, à la valeur 2,828, à quoi M. Plateau oppose la remarque suivante : *Si l'on remplace le rayon de courbure qu'emploie M. Hagen par celui du sommet des arcs d'une sinusöide, on obtient alors, pour valeur de la limite de la stabilité, la quantité π . Et en effet, d'après ce qui précède, cette dernière quantité est la valeur exacte.* »

Par l'expression : la distance de deux étranglements (*zweier Einschnü-*

¹ On verra plus loin (§§ 51 et 55) que Beer n'emploierait plus aujourd'hui cette expression dans le cas dont il s'agit.



rungen), il faut entendre la distance des milieux de ceux-ci; et comme cet intervalle comprend un renflement et deux demi-étranglements, il équivaut en longueur à l'ensemble d'un renflement et d'un étranglement; Beer a donc cherché de son côté, bien que par une méthode essentiellement différente de la mienne, ce que devient la longueur d'une portion d'onduloïde composée d'un renflement et d'un étranglement, lorsque cet onduloïde passe au cylindre; mais il regarde comme évident que cette même longueur est celle qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre, et cependant on ne voit a priori aucune relation nécessaire entre la longueur d'une portion d'onduloïde, au moment où elle se confond avec le cylindre, et la stabilité ou l'instabilité de celui-ci. Il est bien vrai qu'un cylindre, à sa limite de stabilité, se modifie de manière à présenter une portion renflée et une portion étranglée; mais rien ne dit immédiatement qu'à l'origine de cette déformation la figure appartienne à l'onduloïde; c'est un point qu'il fallait établir, ainsi que je l'ai fait dans le § 6; cette recherche de Beer est donc incomplète, elle demande une démonstration qu'il ne donne pas.

Dans son second travail ¹, il effectue la même détermination au moyen de son intégrale elliptique (10^{me} série, §§ 23 et 24), mais il n'établit pas davantage la relation entre le résultat et la stabilité du cylindre.

§ 9. A la fin du § 46 de la 2^{me} série, j'ai annoncé que j'essaierais, à l'aide des cylindres d'huile formés entre deux disques solides au sein du mélange alcoolique, d'obtenir une détermination expérimentale suffisamment précise de la limite de la stabilité du cylindre. C'est ce que j'ai effectué, et je vais rendre compte des résultats; mais auparavant je dois présenter ici quelques remarques sur la marche à suivre dans ce genre de recherche.

La limite de stabilité d'une figure d'équilibre constitue un passage graduel entre deux états différents de cette figure, et conséquemment l'expérience seule ne peut la déterminer d'une manière rigoureuse; mais elle peut conduire à deux valeurs assez rapprochées l'une de l'autre et telles que, pour la première, il y ait encore stabilité certaine, tandis que, pour la seconde, il y a déjà instabilité certaine. Si ces deux valeurs sont peu différentes, comme je

¹ *Tractatus de Theoria mathematica phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum.* Bonn, 1857.



J'ai supposé, leur moyenne donnera avec une grande approximation la vraie valeur de la limite.

J'ai employé cette méthode à l'égard du cylindre. Quand on n'est pas trop près de la limite, il y a deux caractères qui accusent nettement la stabilité ou l'instabilité de cette figure : si, le cylindre étant réalisé dans le voisinage de sa limite et conservant sa forme, on y produit artificiellement, en poussant l'huile à l'aide du bec de la seringue, un renflement et un étranglement peu prononcés, et que la figure reprenne ensuite d'elle-même sa forme première, il est évident qu'elle possède encore une stabilité réelle; d'autre part si, pendant qu'on essaie d'obtenir le cylindre, c'est-à-dire pendant que la masse d'huile est en excès et qu'on la diminue pour arriver à la forme cylindrique, la figure commence déjà à s'altérer spontanément avant que cette forme soit atteinte, on doit en conclure que le cylindre qu'on veut réaliser serait instable. La limite exacte se trouve donc entre les longueurs où l'on cesse de pouvoir observer chacun de ces deux effets.

§ 10. L'appareil dont j'ai fait usage consiste en deux disques verticaux en fer minces, de même diamètre, placés en regard, et dont l'un peut être graduellement rapproché ou éloigné de l'autre. Chacun d'eux est porté par un gros fil de fer implanté normalement au centre de sa face postérieure, et replié verticalement de haut en bas; l'extrémité inférieure de celui qui soutient le disque immobile est fixée à l'un des bouts d'une barre horizontale en fer à section carrée, et l'extrémité inférieure de celui qui soutient le disque mobile est fixée à un curseur qui glisse sans ballotement le long de cette barre. Une vis maintenue parallèlement à celle-ci, et qu'on peut faire tourner sur elle-même au moyen d'une manivelle, s'engage dans un écrou tenant au curseur; en faisant agir la manivelle dans un sens ou dans l'autre, on oblige ainsi le curseur avec son disque à marcher en avant ou en arrière. La barre horizontale est munie de quatre petits pieds, qui sont attachés eux-mêmes sur une plaque rectangulaire en plomb servant de base à tout le système; cette plaque était destinée à empêcher, par sa masse, que l'appareil placé au fond du vase à parois planes, dans le liquide alcoolique, n'oscillât pendant les opérations. Enfin on imprimait le mouvement à la manivelle à l'aide d'une bielle suffisamment longue dont on tenait à la main l'autre extrémité.



Le diamètre de chacun des disques a été mesuré à l'aide du cathétomètre, et l'on a trouvé pour l'un $30^{\text{mm}},05$, et pour l'autre $30^{\text{mm}},18$; la moyenne $30^{\text{mm}},11$ a été prise pour le diamètre du cylindre; la différence $0^{\text{mm}},13$ entre ces deux diamètres était évidemment trop petite pour exercer une influence appréciable sur les résultats. Dans chaque expérience, la distance des disques était mesurée au moyen du cathétomètre disposé horizontalement, en visant à la partie supérieure de ces disques; on s'était assuré d'ailleurs du parallélisme de leurs plans.

1^{re} expérience. — On a placé d'abord le disque mobile à $108^{\text{mm}},40$ de l'autre, ce qui donnait à fort peu près 3,6 pour le rapport de la longueur du cylindre à son diamètre, puis on a fait adhérer à l'ensemble des deux disques une masse d'huile en excès, de sorte que la figure constituait un onduloïde assez fortement renflé au milieu. Alors on a absorbé graduellement du liquide, en observant de temps à autre la figure, et celle-ci a commencé à se déformer spontanément lorsque la flèche du renflement ci-dessus était encore d'environ 5^{mm} .

2^{me} expérience. — On a rapproché ensuite les disques, de manière à amener leur distance à $99^{\text{mm}},36$, ce qui correspondait au rapport 3,3. La figure étant ainsi redevenue stable, on a continué à enlever du liquide, et la tendance à la déformation spontanée ne s'est manifestée que lorsque la flèche du renflement n'était plus que de $2^{\text{mm}},5$ à peu près.

3^{me} expérience. — Distance des disques $95^{\text{mm}},75$, rapport 3,18. La figure était de nouveau stable, et l'épuisement ultérieur a dû réduire la flèche à moins d'un millimètre pour qu'on vit la figure se déformer d'elle-même ¹.

4^{me} expérience. — Distance des disques $94^{\text{mm}},53$, rapport 3,14. Il ne s'est plus montré de tendance à la déformation spontanée tant que la flèche avait une valeur sensible, de sorte qu'on est arrivé sans difficulté à la forme cylindrique; mais ce cylindre, abandonné à lui-même, après avoir paru per-

¹ Le rapport de la longueur au diamètre est donné ici avec deux décimales, parce qu'on reconnaît que l'on approche déjà de la limite. Il en est de même à l'égard des expériences suivantes; on a, bien entendu, renforcé la seconde décimale quand la troisième eût été assez grande; dans des expériences de cette nature, il serait, je pense, illusoire de vouloir pousser la précision plus loin.



sister pendant quelques secondes, a commencé à s'altérer, avec une extrême lenteur d'abord, puis graduellement plus vite : la figure s'est partagée, comme à l'ordinaire, en une portion renflée et une portion étranglée, et la déformation a continué à marcher jusqu'à la désunion complète. On a refait plusieurs fois l'expérience, et toujours avec les mêmes résultats.

5^{me} expérience. — Distance des disques 93^{mm},03, rapport 3,09. On a atteint sans peine la forme cylindrique, puis on a produit artificiellement un étranglement et un renflement, la flèche de ce dernier étant à peu près de 1^{mm}. La figure abandonnée à elle-même a repris la forme cylindrique, et il a fallu, pour amener le progrès spontané de la déformation, porter la flèche du renflement artificiel à 3^{mm} environ.

6^{me} expérience. — Distance des disques 93^{mm},65, rapport 3,11. On est parvenu de même au cylindre; pour qu'il y eût progrès spontané de la déformation, la flèche du renflement artificiel a dû être comprise entre 2^{mm} et 3^{mm}. Dans cette expérience, avant de former le cylindre, on avait, bien entendu, ajouté un peu d'huile à la masse.

7^{me} expérience. — Distance des disques 94^{mm},18, rapport 3,13. Après une nouvelle addition préalable de liquide, on est parvenu encore au cylindre; le progrès spontané a commencé quand la flèche du renflement artificiel n'était que de 1^{mm} et une fraction.

§ 11. On le voit, dans les trois premières expériences, la figure a manifesté le caractère indiquant qu'un cylindre formé entre les disques serait instable, et, de la première à la troisième, ce caractère a été de moins en moins prononcé; enfin, dans cette troisième expérience, pour laquelle le rapport était 3,18, on se trouvait déjà fort près de la limite cherchée. Les trois dernières expériences ont manifesté, au contraire, le caractère de la stabilité du cylindre, et cette stabilité a été en décroissant de la cinquième expérience à la septième, pour laquelle le rapport était 3,13 et la stabilité très-faible.

On peut donc affirmer, abstraction faite de tout résultat théorique, que la limite de la stabilité du cylindre est comprise entre les valeurs 3,13 et 3,18, qui ne diffèrent entre elles que de 0,05; et comme les cylindres correspondants à ces deux valeurs ont encore respectivement, d'une manière nette, les



caractères de la stabilité et de l'instabilité, la limite cherchée est notablement supérieure à la première et inférieure à la seconde. Conséquemment si l'on prend la moyenne de ces mêmes valeurs, savoir 3,15, on peut être certain que la limite véritable n'en est pas éloignée de 0,02, quantité qui n'est que les 0,006 de cette même moyenne.

Ainsi, en partant des seuls résultats de l'expérience, on doit regarder le nombre 3,15 comme étant la valeur très-approchée de la limite de la stabilité du cylindre; or ce nombre diffère à peine de la valeur théorique π , ou 3,14; enfin la 4^{me} expérience montre qu'en plaçant les disques à la distance qui donne ce rapport théorique 3,14, la figure ne présente plus ni l'un ni l'autre des caractères de l'instabilité ou de la stabilité du cylindre, c'est-à-dire que, d'une part, elle ne manifeste aucune tendance à la transformation tant que la forme cylindrique n'est pas atteinte, et que, d'autre part, quand le cylindre est formé, il n'exige, pour commencer et accomplir sa transformation, aucune altération artificielle.

L'ensemble des expériences ci-dessus peut donc être considéré comme vérifiant pleinement la théorie.

§ 12. La 5^{me}, la 6^{me} et la 7^{me} expérience, c'est-à-dire celles qui ont été faites en deçà de la limite, ont offert une particularité en apparence fort singulière. Chacune d'elles a été répétée plusieurs fois; or, dans certains cas, le cylindre, qui semblait bien régulier, s'altérait de lui-même après quelques instants: on voyait s'y dessiner un renflement et un étranglement; mais ceux-ci, après avoir atteint un degré plus ou moins marqué, quoique toujours assez petit, demeureraient stationnaires, sans progresser ni s'effacer. Ce phénomène, qui paraissait inexplicable, m'a beaucoup embarrassé, jusqu'à ce que je m'en fusse rendu raison de la manière suivante:

Quand les densités des deux liquides sont bien égales, un cylindre réalisé en deçà de sa limite doit persister indéfiniment sans aucune altération, quelle que soit sa position dans le liquide alcoolique, qu'il soit horizontal, vertical ou incliné; mais s'il y a entre les densités une différence, même trop faible pour déterminer dans l'huile une tendance visible à monter ou à descendre, si, en outre, l'axe de la figure est légèrement incliné, de sorte que l'un des disques est un peu plus élevé que l'autre, si enfin le cylindre est très-rap-



proché de sa limite et qu'ainsi les forces qui tendent à maintenir sa forme n'aient qu'une intensité extrêmement petite, on comprend que l'infériorité ou l'excès de densité de l'huile portera celle-ci en plus grande quantité du côté du disque le plus haut ou le plus bas, et que dès lors la figure présentera un renflement et un étranglement. Toutefois, comme il ne s'agit ici que de différences très-minimes entre les densités des liquides et entre les hauteurs des disques, ce transport de l'huile ne sera pas assez abondant pour que la figure atteigne l'onduloïde instable (§ 6) correspondant à sa longueur; la transformation ne pourra donc s'effectuer, et la petite altération du cylindre demeurera stationnaire.

J'ai confirmé cette explication par l'expérience suivante : les disques étant placés à la distance qui donne le rapport 3,14, et un cylindre étant réalisé entre eux, on a incliné quelque peu l'appareil de manière que l'un des disques fût d'environ un millimètre plus bas que l'autre, et en même temps on a donné au mélange alcoolique un excès de densité suffisant pour obliger le cylindre à s'infléchir en formant un arc d'une courbure sensible, quoique petite, dont la convexité regardait le haut; on a vu bientôt se produire un étranglement et un renflement, celui-ci s'appuyant sur le disque le plus élevé. On a établi ensuite une même inclinaison du système en sens inverse, on a effacé l'étranglement et le renflement, et on les a vus se développer de nouveau, le renflement s'appuyant sur l'autre disque. Enfin on a rendu, au contraire, la densité du mélange alcoolique un peu trop faible, ce qui arquait légèrement la figure dans le sens opposé au précédent, et le renflement s'est montré alors vers le disque le plus bas.

J'ajouterai que, dans les trois expériences rappelées au commencement de ce paragraphe, c'est-à-dire dans les trois dernières du § 10, quand la figure présentait l'altération stationnaire dont j'ai parlé, et qu'on l'avait abandonnée à elle-même pendant plusieurs minutes, on reconnaissait en général, par une légère flexion de l'ensemble, une différence entre les densités; cette différence, d'abord trop minime pour déterminer un effet sensible à l'œil, s'était peu à peu accrue, soit par une variation de la température, soit par l'action chimique mutuelle des deux liquides, action qu'il est impossible d'annuler complètement.



Enfin je rappellerai que, dans la formation des cylindres laminaires verticaux, on voit (5^{me} série, § 15) l'influence du poids de la lame renfler la figure dans sa moitié inférieure et l'étrangler dans sa moitié supérieure, quand le rapport entre l'écartement et le diamètre des anneaux commence à approcher de celui qui correspond à la limite de stabilité du cylindre.

Il résulte de tout cela que, si l'on répète mes expériences sur la limite de la stabilité du cylindre, il faudra donner le plus grand soin à la parfaite horizontalité de l'axe de la figure.

§ 13. On peut joindre les résultats des 5^{me}, 6^{me} et 7^{me} expériences (§ 10), effectuées en deçà de la limite, et celui de la 4^{me}, effectuée à la limite même, à ceux dont j'ai parlé dans le § 6, pour achever d'établir le fait sur lequel j'ai basé la recherche de la valeur théorique de cette limite, fait consistant (§ 7) en ce que l'onduloïde instable correspondant à un cylindre stable s'approche d'autant plus de ce cylindre que celui-ci est plus voisin de la limite. En effet, l'ensemble de ces résultats donne, entre la longueur et le diamètre, la suite de rapports 2,8, 3,0, 3,09, 3,11, 3,13, 3,14, qui se termine au rapport limite, et donne en même temps, pour les flèches respectives du renflement de l'onduloïde instable, 5^{mm}, 3^{mm} et une fraction, 3^{mm}, 2^{mm} et une fraction, 1^{mm} et une fraction, 0. A la vérité, dans les expériences du § 6, les disques avaient un diamètre plus grand d'un millimètre que dans celles du § 10; mais cette différence est trop petite pour influer d'une manière sensible sur les valeurs observées des flèches, valeurs qui n'étaient estimées qu'approximativement, à la simple vue.

§ 14. Supposons un cylindre réalisé ainsi un peu en deçà de sa limite de stabilité, et dans lequel on produit, par la manœuvre indiquée, un renflement et un étranglement. Puisque c'est nécessairement d'un onduloïde que part le progrès spontané de la déformation, on comprend que si, au moment où ce progrès spontané va commencer, le renflement et l'étranglement avaient, par suite de l'opération artificielle qui les a constitués, une forme et un rapport de longueurs autres que ceux qui conviennent à l'onduloïde, ils prendraient immédiatement d'eux-mêmes cette dernière forme et ce dernier rapport. Maintenant rappelons de nouveau que cet onduloïde s'écarte d'autant moins du cylindre originaire que celui-ci est plus près de sa limite, et coïncide



avec lui à la limite même; rappelons, en outre (4^{me} expérience du § 10), qu'à cette limite le cylindre, qui se déforme spontanément, se partage toujours en une seule portion renflée et une seule portion étranglée, et nous concluons de tout cela que, dans un cylindre à sa limite de stabilité, la transformation s'effectue invariablement comme si elle avait pour origine un ondu-loïde infiniment peu différent de ce cylindre et composé d'un seul renflement et d'un seul étranglement.

L'équation [5] du § 7 montre que la ligne méridienne de la figure est alors une sinusoïde, d'où résulte cette seconde conclusion qu'à la naissance de la transformation du cylindre dont il s'agit, le renflement et l'étranglement sont rigoureusement égaux en longueur.

§ 15. J'ai étudié, dans ma 2^{me} série, la transformation des cylindres dont la longueur est indéfinie ou seulement considérable relativement au diamètre. On a vu alors que ces cylindres se partagent spontanément en portions renflées alternant avec des portions étranglées, les unes et les autres se prononçant de plus en plus, jusqu'à ce que toute la figure se convertisse en une suite de sphères isolées. Bien que mes expériences sur ce sujet n'aient donné qu'un petit nombre de résultats très-réguliers, elles ont toujours manifesté (2^{me} série, §§ 54 et 55) une tendance bien décidée à la régularité, et ne permettent pas de douter que les écarts ne soient dus à des causes étrangères, causes dont il est d'ailleurs facile de reconnaître la présence dans les procédés employés. J'indiquerai, à la fin de la série actuelle, d'où me paraît dépendre cette tendance.

Mes expériences ont établi également (2^{me} série, § 60) que, dans la transformation régulière d'un semblable cylindre, la longueur occupée par l'ensemble d'un renflement et d'un étranglement, ensemble que je nommerai un *couple*¹, surpasse toujours celle qui correspond à la limite de stabilité de ce cylindre; mais elles nous ont appris, en même temps, que l'excès diminue avec les résistances qui gênent la transformation, et, le raisonnement aidant, je suis arrivé à cette conclusion qu'un cylindre indéfini entièrement libre sur

¹ Dans le paragraphe cité, il s'agit de ce que j'ai appelé les *divisions*, et non des couples; mais, comme une division se compose d'un renflement et de deux demi-étranglements, sa longueur est égale à celle d'un couple.



toute sa surface et formé d'un liquide absolument exempt de viscosité, se transformerait très-probablement de manière que la longueur des couples serait égale à celle qui correspond à la limite de la stabilité.

Mais, d'une part, j'ai montré (*ibid.*, § 57) que, toujours dans la transformation régulière d'un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, les modifications de forme s'accomplissent dans chaque couple comme s'il était terminé par des bases solides; et, d'autre part, nous venons de voir (§ précédent) qu'à l'origine de la transformation d'un couple isolé ayant la longueur correspondante à la limite de la stabilité, la figure constitue un onduloïde partiel infiniment peu différent du cylindre; la même chose aura donc lieu, à l'origine de la transformation d'un cylindre indéfini, dans tous les couples qui se forment, s'ils ont la longueur ci-dessus, et toutes ces portions identiques d'onduloïde se raccordant entre elles puisque chacune se compose d'un renflement entier et d'un étranglement entier, la figure totale constituera un onduloïde indéfini.

Si donc on se place dans les conditions théoriquement les plus simples, c'est-à-dire si l'on suppose le liquide sans aucune viscosité, la longueur du cylindre infinie ou seulement multiple exact de celle qui correspond à la limite de la stabilité, la surface convexe entièrement libre, et toute cause étrangère de trouble écartée, enfin si l'on imagine que le cylindre ait de très-petites imperfections de forme, imperfections sans lesquelles il persisterait puisqu'il constitue une figure d'équilibre, on doit croire que la transformation s'effectuera comme si elle partait d'un onduloïde infiniment peu différent de ce cylindre. A la fin de cette série, je rendrai la chose plus probable encore.

Dans ce cas, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent; la longueur initiale des renflements est rigoureusement égale à celle des étranglements. S'il y a des résistances, les renflements et les étranglements sont plus allongés, et conséquemment la figure originare ne peut plus être un onduloïde; mais alors encore, ainsi qu'on le verra à la fin de cette série, les renflements et les étranglements initiaux sont très-probablement égaux en longueur.

§ 46. Il est d'ailleurs assez facile de faire comprendre à quoi tient l'influence des résistances sur la longueur des renflements et des étranglements;



l'examen de cette question contribuera en même temps à rendre plus nettes nos idées sur le jeu des pressions capillaires dans l'acte de la transformation spontanée.

Admettons qu'à l'origine d'une transformation régulière, quand on considère les renflements et les étranglements comme infiniment peu prononcés, les premiers sont réellement égaux en longueur aux seconds; alors, quelle que soit la vraie nature de la ligne méridienne, elle constituera une courbe analogue à la sinusoïde. Raisonnons en supposant que ce soit une sinusoïde même. Si nous désignons par r le rayon du cylindre, par β la flèche des arcs, par l la longueur de la corde de chacun de ceux-ci, que nous prenions pour axe des abscisses l'axe du cylindre, et que nous fassions passer l'axe des ordonnées par le point d'où part l'un des arcs convexes, l'équation de notre sinusoïde sera évidemment

$$y = r + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \quad \dots \dots \dots [1].$$

Prenons sur cette courbe deux points appartenant l'un à un arc convexe, l'autre à un arc concave, et placés de la même manière sur ces deux arcs, c'est-à-dire à des distances égales des origines respectives de ces mêmes arcs. Si, pour abrégier, nous représentons par γ le terme $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ de notre équation, la valeur de γ sera la même, au signe près, pour les deux points, de sorte que les ordonnées de ceux-ci seront respectivement $r + \gamma$ et $r - \gamma$, ce qui donne, d'après la formule connue, pour les valeurs des deux normales, $(r + \gamma) \sqrt{1 + p^2}$ et $(r - \gamma) \sqrt{1 + p^2}$, où p est, comme toujours, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$; il faut remarquer que, par la nature de la figure liquide, ces normales sont l'une et l'autre positives; on devra se souvenir en outre, pour l'intelligence des formules qui suivent, que la quantité γ , ou $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$, est prise en elle-même, et par conséquent est essentiellement positive. Quant au rayon de courbure, il est clair que sa valeur est, au signe près, la même pour les deux points; si donc q désigne le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, on aura, aussi d'après l'expression connue, pour le rayon de courbure au premier point, $+\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$, et au second point $-\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$.

La pression capillaire correspondante au premier point et rapportée à



l'unité de surface sera conséquemment, en vertu de la formule que j'ai si souvent rappelée,

$$P + \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{(r + \gamma)\sqrt{1 + p^2}} + \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

et la pression correspondante au second point sera

$$P + \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{(r - \gamma)\sqrt{1 + p^2}} - \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

P étant toujours la pression d'une surface plane, et A une constante positive dont la valeur dépend de la nature du liquide.

Retranchons la première de ces expressions de la seconde; nous aurons ainsi, pour l'excès de la pression du point de l'arc concave sur celle du point de l'arc convexe,

$$\frac{A}{\sqrt{1 + p^2}} \left\{ \frac{\gamma}{r^2 - \gamma^2} - \frac{q}{1 + p^2} \right\}.$$

Puisque nous avons supposé la déformation infiniment peu prononcée, la tangente p est partout infiniment petite, ce qui permet de remplacer $\sqrt{1 + p^2}$ par $1 + \frac{1}{2}p^2$. Faisant cette substitution et effectuant les calculs, il vient :

$$A \frac{\gamma + \gamma p^2 - q r^2 + q \gamma^2}{r^2 - \gamma^2 + \frac{5}{2} r^2 p^2 - \frac{5}{2} \gamma^2 p^2 + \frac{1}{2} r^2 p^4 - \frac{1}{2} \gamma^2 p^4}$$

Négligeant les termes en p^2, γ^2, p^4 , qui sont des infiniment petits d'ordres supérieurs, l'expression se réduit à

$$A \cdot \frac{\gamma - q r^2}{r^2} \dots \dots \dots [2].$$

Reste à substituer dans cette expression les valeurs de γ et de q . Les deux différentiations successives de l'équation [1] donnent $q = -\frac{\beta \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x$; mais comme nous avons affecté les quantités des signes propres qui dépendent des parties de la courbe auxquelles ces quantités appartiennent, il faut ici faire abstraction du signe négatif; et, en effet, si nous voulions remplacer, dans les expressions des deux pressions, la valeur générale $\frac{q}{\{1 + p^2\}^{\frac{3}{2}}}$ de l'inverse du rayon



de courbure par sa valeur relative à notre sinusoïde, nous ne pourrions laisser à celle de q le signe — amené par la différentiation, qu'en choisissant ce même signe entre les deux dont le dénominateur peut être affecté à cause de l'exposant $\frac{5}{2}$, sans quoi les termes qui représentent les inverses des rayons de courbure n'auraient plus, dans les expressions dont il s'agit, les signes qui conviennent à la question; or cela revient à faire abstraction de ces signes et à prendre q et le dénominateur d'une manière absolue. Substituant donc, dans l'expression [2], à γ et à q leurs valeurs absolues respectives $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ et $\frac{\beta^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x$, on obtient enfin, pour la mesure de la différence des pressions correspondantes à deux points semblablement situés l'un sur un arc convexe et l'autre sur un arc concave,

$$A \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} \right\} \beta \sin \frac{\pi}{l} x \dots \dots \dots [5].$$

Dans cette expression, les facteurs A et $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ sont, nous le savons, essentiellement positifs, de sorte que le signe de la quantité totale dépendra de celui du facteur $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2}$; la différence des pressions sera donc positive si l'on a

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$2l > 2\pi r,$$

c'est-à-dire si la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement excède la circonférence du cylindre originaire, et cela dans toute l'étendue des arcs, sauf à leurs extrémités mêmes, où le facteur $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ s'évanouit. On voit, de plus, que la différence dont il s'agit augmente à partir de ces extrémités jusqu'aux milieux des arcs. Ainsi, en premier lieu, quand un cylindre réalisé entre deux bases solides dépassera la limite de la stabilité, mais aura assez peu de longueur pour ne donner qu'un seul renflement et un seul étranglement, la pression correspondante à un point quelconque de l'arc méridien de l'étranglement l'emportera sur celle qui appartient au point semblablement placé de l'arc méridien du renflement.

Considérons maintenant un second cylindre de même diamètre et formé



du même liquide, mais plus long, toujours avec la condition qu'il ne s'y produise qu'un seul couple, et supposons une déformation de même degré, c'est-à-dire dont le renflement et l'étranglement aient la même flèche que dans la première figure; nous passerons ainsi d'une sinusoïde à une autre plus allongée, mais de même flèche, ce qui revient à augmenter l sans changer β non plus que r et A . Si nous prenons respectivement sur ces deux sinusoïdes deux points homologues, ou tels que leurs abscisses soient entre elles comme les cordes des arcs, le rapport $\frac{x}{l}$ sera le même pour ces deux points, et conséquemment le facteur $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ de l'expression [3] aura la même valeur, ainsi que A ; mais le facteur $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2}$ augmentera en passant du point de la première figure au point de la seconde, et d'autant plus qu'on aura donné à l un plus grand accroissement. La prédominance des pressions capillaires de tous les points de l'étranglement sur celles des points du renflement est donc d'autant plus forte que le couple est plus allongé; et comme nous pouvons appliquer à chacun des couples formés dans la transformation d'un cylindre d'une grande longueur ce que nous venons de trouver à l'égard d'un couple isolé, il en résulte que, dans la transformation d'un semblable cylindre, plus les renflements et les étranglements sont allongés, plus les forces qui font progresser le phénomène sont intenses. D'après cela, lorsque, dans un cylindre indéfini ou d'une longueur considérable, la transformation est gênée par des résistances soit extérieures, soit intérieures, ces résistances, à moins qu'elles ne soient trop énergiques, pourront être surmontées par un allongement des couples; or on conçoit que la transformation se dispose d'elle-même de manière à produire cet effet, et qu'elle allonge d'autant plus les couples que les résistances opposent plus d'obstacle.

A la vérité, le calcul ci-dessus est basé sur la supposition qu'à l'origine du phénomène la ligne méridienne est une sinusoïde; mais, ainsi que je l'ai fait remarquer, si, en réalité, elle n'est pas telle, elle a bien probablement beaucoup d'analogie avec cette courbe, à laquelle elle se réduit d'ailleurs, nous le savons, quand les couples ont la longueur correspondante à la limite de la stabilité; si l'on en connaissait la nature exacte, et qu'on lui appliquât le calcul précédent, on parviendrait sans aucun doute au même résultat.

§ 17. D'abord, en effet, on y arrive par des considérations a priori, con-



sidérations que j'ai déjà exposées dans le § 66 de la 2^{me} série, mais que je vais reproduire. Lorsqu'un cylindre réalisé entre deux bases solides a une longueur assez petite pour ne donner qu'un seul couple, il doit se transformer d'autant plus rapidement que sa longueur excède davantage la limite de la stabilité : car la durée du phénomène étant infinie en deçà de cette limite et devenant finie au delà, elle doit aller en décroissant à mesure qu'on dépasse cette même limite ; et puisque, dans la transformation régulière d'un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, les choses se passent à l'égard d'un couple quelconque comme s'il était terminé par des bases solides, il s'ensuit que, dans un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, la transformation sera aussi d'autant plus rapide que les couples seront plus allongés ; mais une transformation plus rapide suppose des forces plus intenses ; les différences de pression dont il a été question dans le paragraphe précédent augmentent donc avec la longueur des couples.

En outre, on peut recourir à des vérifications expérimentales ; et j'en ai déjà indiqué une dans le paragraphe cité de la 2^{me} série ; elle semble laisser quelque chose à désirer, mais il est facile d'en obtenir d'autres plus nettes : il suffit, pour cela, d'après ce que je viens de dire, de réaliser, avec le même liquide, des cylindres de même diamètre dépassant de plus en plus leur limite de stabilité, et de compter, pour chacun d'eux, la durée de la transformation. Or c'est ce qui a été effectué en même temps que les expériences du § 10 : dans les trois premières, après avoir observé le point où la figure commençait à s'altérer spontanément, on a continué l'extraction du liquide, jusqu'à ce que, en employant la petite manœuvre indiquée dans la deuxième note du § 46 de la 2^{me} série, c'est-à-dire en régularisant constamment la figure au moyen du bec de la seringue, on eût atteint la forme cylindrique ; puis on a abandonné la figure à elle-même, et l'on a compté, avec une montre ordinaire, la durée approximative de la transformation ; on a estimé aussi cette durée dans la 4^{me} expérience, où le cylindre était à sa limite de stabilité. On a trouvé ainsi : pour le rapport limite 3,14 entre la longueur et le diamètre, une durée de 11 minutes ; pour le rapport 3,18, une durée de 4 minutes ; pour le rapport 3,3, une durée de 2 minutes ; et, pour le rapport 3,6, une durée de 1 minute.



En répétant la 4^{me} expérience, il est arrivé plusieurs fois que la durée a été seulement de 5 à 7 minutes; mais on voit qu'elle était toujours supérieure à toutes les autres.

§ 18. Si, dans l'expression [3] du § 16, on a $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} < 0$, d'où $2l < 2\pi r$, ce qui la rend négative, on conclura du mode de raisonnement employé que les pressions capillaires de tous les points de l'étranglement seront inférieures à celles des points du renflement, et d'autant plus que le couple sera plus court. Dans ce cas, par conséquent, si le couple est unique et terminé à deux bases solides, la masse liquide tendra à regagner la forme cylindrique; en d'autres termes, le cylindre formé entre les bases dont il s'agit sera stable, et sa stabilité sera d'autant plus prononcée que sa longueur sera moindre.

Enfin si l'on a $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} = 0$, d'où $2l = 2\pi r$, la différence des pressions est nulle dans toute l'étendue du couple, de sorte que, s'il n'y a qu'un seul couple compris entre des bases solides, la masse ne tendra ni à revenir à la forme cylindrique, ni à s'en éloigner davantage; le cylindre formé entre ces bases sera donc alors à sa limite de stabilité, comme nous le savions d'ailleurs.

Cette manière d'arriver à la limite de la stabilité du cylindre n'est autre chose, on le voit, que la méthode de M. Hagen (§ 4), mais corrigée en substituant aux arcs de cercle des arcs de sinusöide, et en évaluant les pressions dans toute la longueur de ces arcs, au lieu de le faire à leurs sommets seulement.

§ 19. Passons à l'onduloïde. Les conditions de stabilité de cette figure sont, je crois, essentiellement différentes suivant que son milieu est occupé par un étranglement (4^{me} série, § 13) ou par un renflement (*ibid.*, § 5).

Je n'ai point fait d'expériences nettes à l'égard du premier cas; mais, d'après les onduloïdes de ce genre réalisés dans le cours de mon travail, je pense que leur limite de stabilité n'a rien d'absolu: si, pour des rapports différents entre la distance et le diamètre des anneaux ou des disques, on formait successivement des onduloïdes de cette même espèce, et si, par l'exhaustion graduelle de l'huile, on les amenait à leur limite de stabilité, on trouverait, j'en suis persuadé, que les extrémités de leurs lignes méri-



diennes respectives varieraient de position par rapport aux points d'inflexion; qu'à mesure que le rapport ci-dessus diminuerait, ces extrémités, d'abord situées au delà des points d'inflexion, s'en rapprocheraient, les atteindraient, puis passeraient en deçà. C'est là tout ce que nous dirait probablement l'expérience; quant à la théorie, les principes qui m'ont servi pour le cylindre s'appliqueraient difficilement ici.

§ 20. Heureusement les choses sont toutes différentes pour un onduloïde dont le milieu est un renflement; alors la limite de la stabilité s'exprime d'une manière très-simple et toujours la même. En effet, l'expérience m'a conduit (4^{me} série, § 10) à admettre que, dans ce cas, la figure liquide est à sa limite de stabilité lorsqu'elle se termine aux cercles de gorge de deux étranglements consécutifs, ou, en d'autres termes, lorsqu'elle est exactement composée d'un renflement entre deux demi-étranglements. Seulement la manière dont je suis arrivé à ce résultat peut laisser quelque chose à désirer quant à la rigueur; je vais donc reprendre ici la démonstration, et la compléter.

Quand on réalise un onduloïde de l'espèce actuelle en faisant adhérer, au sein du mélange alcoolique, une masse d'huile à la surface convexe d'un cylindre solide préalablement frotté d'huile (*ibid.*, § 4), il est évident que la surface de cette masse ne peut, à ses extrémités, former un angle avec la mince couche d'huile qui mouille la surface solide au delà de ces mêmes extrémités, et qu'ainsi la surface de la figure doit venir lécher la couche dont il s'agit, d'où il suit que la ligne méridienne se termine précisément aux minima de distance à l'axe; or, nous le savons, l'onduloïde ainsi réalisé est stable, et on en tire cette conclusion rigoureuse que la limite de la stabilité n'est point en deçà des cercles de gorge des deux étranglements. Il faut maintenant démontrer qu'elle n'est pas non plus au delà.

Pour cela, reprenons la réalisation de notre onduloïde entre les deux petits disques (*ibid.*, § 10); laissons à la masse d'huile un excès suffisant pour que les derniers éléments de la ligne méridienne n'aient pas encore atteint le parallélisme réel ou apparent avec l'axe, mais n'en soient pas très-éloignés (fig. 1); cet onduloïde sera conséquemment stable. Poussons alors légèrement l'huile avec le bec de la petite seringue vers l'un des disques;



nous diminuerons ainsi ou nous effacerons entièrement la portion d'étranglement qui était du côté de ce disque, tandis que nous rendrons plus prononcée la portion d'étranglement aboutissant à l'autre disque. Or il est clair que les choses se passeront ici comme à l'égard du cylindre; c'est-à-dire que si la déformation artificielle ne dépasse pas un certain degré, la figure abandonnée à elle-même reprendra sa forme originaire, mais que, si l'on va au delà de ce degré, elle continuera spontanément à s'altérer dans le même sens, jusqu'à sa désunion complète. Il y a donc ici également, à ce degré précis de déformation, une figure d'équilibre instable (§ 6); et comme, pendant la déformation artificielle et la déformation spontanée subséquente, la figure d'huile se maintiendra toujours de révolution et que sa ligne méridienne présentera toujours au moins un point d'inflexion, la figure d'équilibre instable dont il s'agit est nécessairement un autre onduloïde.

Cet onduloïde instable, que, pour abrégé le langage, nous appellerons l'*onduloïde conjugué*, sera, d'après ce qui précède, dissymétrique par rapport au milieu de l'intervalle des deux disques, c'est-à-dire aura son renflement plus rapproché de l'un de ces disques que de l'autre (fig. 2). Enfin ce même onduloïde s'écartera évidemment d'autant moins de l'onduloïde originaire que celui-ci était plus près de sa limite de stabilité, et, à cette limite, coïncidera exactement avec lui.

Maintenant remarquons que, d'après le mode de génération de la ligne méridienne de l'onduloïde par le foyer d'une ellipse roulante (10^{me} série, § 21), cette ligne est nécessairement d'une symétrie parfaite des deux côtés d'un maximum de distance à l'axe, et qu'ainsi, dans un onduloïde indéfini, il y a symétrie rigoureuse des deux côtés de l'équateur d'un renflement. Il suit de là que si l'on comprend entre deux disques égaux un renflement d'onduloïde avec des portions des deux étranglements adjacents, et si ces portions dépassent l'une et l'autre leurs cercles de gorge respectifs (fig. 3), les deux disques sont rigoureusement à égale distance de la section équatoriale du renflement. Pour que cette section n'occupe pas le milieu précis de l'intervalle des disques, il faut évidemment que l'un des étranglements dépasse son cercle de gorge, et que l'autre n'atteigne pas le sien; c'est donc là le cas



de l'onduloïde conjugué (fig. 2); dans cet onduloïde, un seul des deux étranglements présente un cercle de gorge.

Ces principes établis, concevons un onduloïde de l'espèce considérée dans ce paragraphe, et précisément à sa limite de stabilité; imaginons-le mathématiquement parfait, en sorte qu'il se maintienne, et supposons que ses étranglements dépassent leurs cercles de gorge, de manière qu'il soit analogue à celui de la fig. 3. Ajoutons-y une très-petite quantité de liquide, ce qui en fera une figure stable, mais voisine de sa limite. Puisque nous sommes maîtres du volume ajouté, nous pouvons le prendre assez minime pour que l'onduloïde stable produit diffère aussi peu que nous le voudrions de l'onduloïde primitif, et conséquemment pour que l'onduloïde instable conjugué diffère lui-même aussi peu que nous le voudrions de cet onduloïde primitif; si donc celui-ci, c'est-à-dire l'onduloïde à sa limite de stabilité, s'étendait au delà des cercles de gorge de ses étranglements, nous pourrions toujours, par une addition de liquide suffisamment petite, arriver à un onduloïde conjugué dont les étranglements dépasseraient encore tous deux leurs cercles de gorge respectifs; or, d'après ce que j'ai démontré plus haut, cela est incompatible avec la nature de l'onduloïde conjugué. Notre onduloïde à sa limite de stabilité ne peut donc se terminer au delà des cercles de gorge de ses étranglements, et puisqu'il ne peut non plus, comme je l'ai fait voir au commencement de ce paragraphe, se terminer en deçà, il se termine bien réellement à ces cercles mêmes, ainsi que l'expérience me l'avait indiqué.

J'ajouterai que M. Lindelöf, à qui j'ai communiqué ce résultat, m'a dit y être arrivé de son côté par le calcul; l'expérience, le raisonnement et l'analyse s'accordent donc pour l'établir.

§ 21. Je puis actuellement exposer la méthode annoncée à la fin du § 7, par laquelle je parviens sans aucun calcul à la valeur exacte de la limite de stabilité du cylindre.

Il suit de la génération des lignes méridiennes que la portion de la ligne méridienne de l'onduloïde comprise entre un minimum de distance à l'axe et le minimum suivant, correspond à une révolution entière de l'ellipse roulante; donc l'onduloïde partiel engendré par cette portion, c'est-à-dire l'onduloïde à sa limite de stabilité, a une longueur égale à la périmétrie de l'ellipse dont



il s'agit; or, quand cette ellipse devient un cercle, l'onduloïde devient un cylindre, et conséquemment celui-ci, à sa limite de stabilité, a une longueur égale à la circonférence du cercle roulant; mais cette circonférence est évidemment égale à celle du cylindre; donc le cylindre limite a une longueur égale à sa propre circonférence; donc enfin, dans un semblable cylindre, le rapport de la longueur au diamètre a pour valeur exacte la quantité π .

§ 22. J'ai déjà traité la question de la limite de stabilité du caténoïde : on a vu (10^{me} série, § 28) qu'en conséquence d'un calcul de Goldschmidt, lorsque le caténoïde est à sa limite de stabilité, le rapport de l'écartement de ses bases à leur diamètre est égal à 0,6627, et que l'expérience, faite sur un caténoïde laminaire, a pleinement confirmé ce résultat (*ibid.*, § 29).

On a vu aussi (*ibid.*, § 28) que le caténoïde à sa limite de stabilité est défini par cette propriété simple, que les points extrêmes de sa chaînette méridienne sont ceux dont les tangentes prolongées iraient également toucher la chaînette méridienne opposée, ou, ce qui revient au même, se couperaient au centre de la figure.

On a vu encore (*ibid.*, § 31) que le caténoïde en question jouit de cette autre propriété simple, que son volume est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur, propriété que nous avons également vérifiée par l'expérience (*ibid.*, § 32).

Enfin ce même caténoïde possède une dernière propriété, celle d'être unique; nous savons, en effet (4^{me} série, §§ 16 et 18 et 10^{me} série, § 28), que, pour tout écartement des bases inférieur à l'écartement limite, il y a toujours deux caténoïdes possibles s'appuyant sur ces bases et pénétrant inégalement entre elles, caténoïdes qui diffèrent d'autant moins l'un de l'autre qu'on approche davantage de la limite, et dont le moins rentré est le seul stable.

Mais je dois revenir ici sur le fait si singulier auquel m'a conduit l'expérience (4^{me} série, §§ 18 et 21), savoir que ce caténoïde, lorsqu'il est réalisé avec une masse pleine, se montre parfaitement stable, bien qu'il soit à sa limite de stabilité. J'ai expliqué alors cette apparente contradiction, en faisant voir que ce même caténoïde constitue le passage entre une suite continue



d'onduloïdes stables et une autre suite continue d'onduloïdes également stables. Cette explication, quoique vraie, laisse cependant encore quelque obscurité sur l'idée d'une figure à la fois très-stable et à sa limite de stabilité; je vais donc la rendre plus complète.

Ainsi que je l'ai fait remarquer dans le § 21 de la série citée, il peut arriver, dans certains cas, que la figure stable vers laquelle marche une figure instable qui se déforme spontanément, soit de plus en plus rapprochée de celle-ci à mesure qu'on diminue la distance des bases, et se confonde enfin avec cette figure instable pour une valeur déterminée de la distance en question, de manière qu'alors la figure est nécessairement stable; mais elle est réellement à sa limite de stabilité, en ce sens que si l'on essaie de la réaliser sur une portion plus étendue de sa ligne méridienne, elle ne se maintiendra pas. Seulement la nouvelle forme qu'elle prendra différera d'autant moins de la première que celle-ci dépassera moins la limite, en sorte que si l'on a été à peine au delà de cette limite, le changement de forme sera très-minime.

Tel est sans doute le cas du caténoïde; si, avec une masse pleine, on parvenait à en réaliser un dont la chaînette méridienne s'étendit au delà des points que j'ai définis plus haut, il constituerait le plus rentré des deux caténoïdes possibles entre les mêmes bases, et conséquemment il serait instable (4^{me} série, §§ 16 et 18); et l'on peut conclure de la 4^{me} et de la 5^{me} expérience du § 20 de la 4^{me} série encore, que sa déformation spontanée le convertirait en un nodoïde ou en un onduloïde, mais ce changement de forme serait d'autant plus petit que le caténoïde excéderait moins la limite en question; enfin, s'il est à cette limite même, il n'y aura pas de changement du tout, et la figure sera stable. Nous verrons ci-après un second exemple du même genre.

§ 23. Reste enfin, quant aux figures de révolution, la limite de stabilité du nodoïde. On se rappelle que mes procédés réalisent soit la portion engendrée par une partie ou par la totalité d'un nœud de la ligne méridienne (4^{me} série, §§ 22 à 28), soit la portion engendrée par un arc de cette ligne tournant sa convexité vers l'extérieur (*ibid.*, § 31). Nous aurions donc à chercher la limite de la stabilité dans ces deux cas de la figure; mais ici, comme à



l'égard de l'onduloïde étranglé, on ne peut faire usage des principes théoriques que j'ai employés pour le cylindre et pour l'onduloïde renflé, et nous serons réduits à consulter l'expérience.

Dans le premier cas, c'est-à-dire dans celui de la figure engendrée par une portion du nœud, l'expérience nous a montré (4^{me} série, § 25) la stabilité s'étendant au moins depuis la circonférence engendrée par le sommet du nœud jusqu'aux deux circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe de révolution; cependant il y a nécessairement une catégorie de nœuds pour lesquels la stabilité s'arrête en deçà des dernières circonférences ainsi caractérisées. En effet, concevons un nodoïde très-voisin du caténoïde (*ibid.*, § 37), et considérons en particulier l'un des nœuds de sa ligne méridienne; ce nœud sera, nous le savons, très-allongé, de sorte que les points où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe de révolution se trouveront à une distance de celui-ci très-grande par rapport à celle du sommet du nœud et par rapport à l'intervalle compris entre eux. Si donc on pouvait réaliser entre deux disques la portion de figure engendrée par la partie d'un semblable nœud allant du sommet jusqu'aux points en question, ces disques seraient très-rapprochés relativement à leur rayon, et la figure étranglée pénétrerait fort avant dans leur intervalle. Mais, entre deux disques ainsi placés, mes procédés ne donnent jamais qu'un étranglement dont la ligne méridienne diffère peu d'une demi-circonférence, comme le montre la fig. 25 de la 4^{me} série. Entre deux disques suffisamment rapprochés, il y a conséquemment deux figures étranglées théoriquement possibles, partant l'une et l'autre des bords des disques où leurs lignes méridiennes respectives ont leurs éléments couchés sur les rayons de ces disques, et pénétrant inégalement entre ces mêmes disques; or, comme la moins rentrée est toujours la seule qui se réalise, j'en conclus que la plus rentrée serait instable, c'est-à-dire que, pour celle-ci, la stabilité cesse en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe.

D'après cela, on doit, me semble-t-il, admettre comme très-probable ce qui suit :

1° Dans la figure la moins rentrée, la limite de la stabilité est au delà des circonférences situées aux bords des disques, de sorte que, pour réaliser



cette figure jusque près de sa limite, il faudrait un procédé différent ¹. Dans la figure la plus rentrée, au contraire, la limite de la stabilité est en deçà des circonférences dont il s'agit.

2° A mesure que l'écartement des disques est plus grand, les deux figures se rapprochent l'une de l'autre, et il en est de même de leurs limites respectives de stabilité; enfin, pour une certaine valeur maxima de l'écartement, ces deux figures coïncident, ainsi que leurs limites de stabilité, qui se trouvent alors aux bords mêmes des disques. Je suis porté à croire que ce dernier cas est celui du nodoïde dont la ligne méridienne est engendrée par le roulement d'une hyperbole équilatère, et je pense, en outre, qu'au delà de l'écartement en question, il n'y a plus de nodoïde étranglé possible entre les mêmes disques.

Si ces conjectures, que je n'ai, du reste, soumises ni à l'expérience ni au calcul, sont vraies, le nodoïde étranglé aurait, dans un cas particulier simple, une limite de stabilité nettement définie.

§ 24. Dans le second cas de réalisation du nodoïde, c'est-à-dire dans celui où la figure est engendrée par un arc convexe vers l'extérieur, on a vu (4^{me} série, § 34 et 5^{me} série, § 15) qu'en rapprochant graduellement les deux disques, on atteint un point au delà duquel la figure, soit pleine soit laminaire, perd sa forme de révolution, la masse d'huile ou la lame se portant davantage d'un côté de l'axe du système; on a vu aussi qu'à la plus petite distance des disques où la figure conserve sa régularité, les éléments de l'arc méridien aux points où il aboutit aux deux disques, semblent être, ou à fort peu près, perpendiculaires à l'axe. On pourrait présumer d'après cela que la limite de stabilité du nodoïde renflé correspond au cas où les éléments extrêmes de l'arc méridien sont perpendiculaires à l'axe; mais j'ai cherché à décider la question par de nouvelles expériences.

On a d'abord mesuré exactement le diamètre des disques; il était, pour l'un, de 74^{mm},38, et, pour l'autre, de 74^{mm},82, moyenne 74^{mm},60. On a en-

¹ En résumant la 4^{me} série dans les ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS (5^{me} série, t. LIII), j'ai dit, page 37, que la figure obtenue en formant d'abord, dans un anneau en fil de fer, une lentille liquide bi-convexe, puis perçant celle-ci en son milieu, est à sa limite de stabilité. Cette assertion est trop positive; du reste, la figure dont il s'agit persiste assez longtemps avant que l'altération spontanée se manifeste, pour qu'on puisse en conclure que si elle n'est pas à sa limite de stabilité, elle en est du moins voisine.



suite fait adhérer à l'ensemble de ces deux disques, au sein du liquide alcoolique, une masse d'huile suffisante, puis on a abaissé graduellement le disque supérieur, et on l'a arrêté au point au delà duquel la figure renflée commençait à perdre sa forme de révolution. Cela fait, on a mesuré au cathétomètre l'intervalle des deux disques, ou plutôt la distance comprise entre la face supérieure du disque supérieur et la face inférieure du disque inférieur, puisque c'était des bords de ces deux faces que partait la surface libre de la figure liquide; on a effectué cette opération de deux côtés opposés de l'axe, et l'on a trouvé les deux valeurs $63^{\text{mm}},95$ et $64^{\text{mm}},08$, moyenne $64^{\text{mm}},01$; enfin, en disposant le cathétomètre horizontalement, on a mesuré le diamètre équatorial de la figure, et l'on a obtenu $118^{\text{mm}},67$.

Or, en prenant comme données le diamètre des disques et le diamètre équatorial de la masse, M. Lamarle a bien voulu calculer pour moi, au moyen des fonctions elliptiques (10^{me} série, § 23), la distance qui aurait dû exister entre les bords solides d'où partait la figure liquide pour qu'à ces bords les éléments fussent perpendiculaires à l'axe, et il a trouvé ainsi $54^{\text{mm}},9$, valeur qui n'est que les 0,8 environ de la distance mesurée $64^{\text{mm}},01$.

On a répété ensuite l'expérience avec une masse d'huile moindre. Ici la distance des disques était, en moyenne, $39^{\text{mm}},63$, et le diamètre équatorial de la figure $101^{\text{mm}},17$; la valeur de la distance des disques déduite du calcul, pour le cas de l'horizontalité réelle des éléments extrêmes, était $32^{\text{mm}},10$, qui constitue aussi les 0,8 de la valeur mesurée.

Il suit évidemment de ce constant désaccord entre l'expérience et le calcul, que, dans les figures ci-dessus, les éléments extrêmes de l'arc méridien faisaient encore, en réalité, un angle notable avec les prolongements des rayons des disques, et que si, au simple aspect de la figure, on pouvait croire cet angle nul, cela tenait à la grande difficulté d'une semblable appréciation.

On doit, je pense, conclure de là que, dans le nodoïde renflé, la limite de la stabilité est en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe.

§ 25. Dans les expériences que je viens de décrire, quand, après avoir abaissé le disque supérieur jusqu'à la dernière limite où la figure liquide se maintient régulière, on abaisse encore ce même disque d'une quantité très-



petite, le transport latéral de la masse est aussi très-petit, et reste tel tant que le disque demeure dans la même position; il augmente par un abaissement ultérieur, et se montre d'autant plus prononcé que l'abaissement est plus grand.

Le nodoïde renflé nous offre donc un nouvel exemple d'une figure liquide permanente bien qu'étant à sa limite de stabilité, et le phénomène s'explique comme à l'égard du caténoïde plein (§ 22); c'est que la figure stable dans laquelle ce nodoïde se convertirait spontanément s'il était au delà de sa limite est d'autant plus rapprochée que le nodoïde est supposé plus près de cette limite, et coïncide enfin avec lui à la limite même.

Ajoutons une dernière remarque : lorsque le cylindre, l'onduloïde étranglé, l'onduloïde renflé, le caténoïde et le nodoïde étranglé atteignent ou dépassent leur limite de stabilité, et, par suite, s'altèrent spontanément, le phénomène s'accomplit sans que la figure liquide perde sa forme de révolution, et la figure stable résultante est encore de révolution autour du même axe; mais, ainsi qu'on vient de le voir, le nodoïde renflé fait exception : pendant sa déformation spontanée, la figure se montre dissymétrique, et elle demeure telle après l'achèvement du phénomène. Un autre exemple de dissymétrie s'était déjà présenté à nous dans la déformation spontanée d'un nœud de nodoïde réalisé en relief dans un anneau en fil de fer (4^{me} série, § 27).

§ 26. Dans cette recherche des limites de stabilité des figures d'équilibre de révolution, nous avons toujours supposé la figure terminée à deux sections perpendiculaires à l'axe et égales en diamètre. Mais il est clair qu'on pourrait adopter d'autres terminaisons, et qu'alors les limites de stabilité seraient différentes : on pourrait, par exemple, prendre encore pour bases de la figure deux sections perpendiculaires à l'axe, mais leur donner, sauf dans le cas du cylindre, des diamètres inégaux. Dans ces conditions, on arrive, à l'égard du caténoïde, à un résultat remarquable : si l'on prend le cercle de gorge pour l'une des terminaisons, la figure n'a plus de limite de stabilité; c'est-à-dire que la seconde base peut être aussi loin de la première qu'on le veut, sans que la figure tende à s'altérer spontanément.

Pour le démontrer, concevons un onduloïde terminé d'un côté au cercle de gorge d'un étranglement, et, de l'autre côté, à l'équateur du renflement voisin; cet onduloïde sera très-stable, puisque, en conservant la première



base, il faudrait, pour atteindre la limite de stabilité, reculer la seconde jusqu'au cercle de gorge suivant (§ 20). Imaginons maintenant que la première base, savoir le cercle de gorge, demeurant constante, on fasse varier l'onduloïde en question de manière qu'il converge graduellement vers le caténoïde (4^{me} série, § 19); notre seconde base, c'est-à-dire la section équatoriale du renflement, ira en croissant et en s'éloignant de la première, et la figure conservera évidemment sa stabilité; enfin, à la limite de ces variations, ou, en d'autres termes, quand la section dont il s'agit sera infiniment grande et infiniment éloignée, l'onduloïde, qui n'aura pu perdre sa stabilité, sera un demi-caténoïde s'étendant à l'infini à partir du cercle de gorge; si donc on prend où l'on veut, sur ce demi-caténoïde, une section perpendiculaire à l'axe, et qu'on en fasse la seconde base de la figure, cette figure sera toujours nécessairement stable.

Afin de vérifier cette déduction par l'expérience, j'ai pris, pour la seconde base, un anneau en fil de fer de 20 centimètres de diamètre, muni de trois pieds, et, pour le cercle de gorge, un autre anneau, dont le diamètre n'était que de 3,5 centimètres; celui-ci était porté par une fourche dont la queue était fixée sous un bras horizontal mobile le long d'une tige verticale. On a mouillé de liquide glycérique ce petit anneau, puis on a produit une lame du même liquide dans le grand, et l'on a posé ce dernier sur ses pieds, de façon que la lame fût horizontale; le support qui soutenait le petit anneau a été ensuite placé de manière que ce petit anneau fût au-dessus du grand et que les centres de tous deux fussent sur une même verticale; on a abaissé alors le petit anneau jusqu'à ce qu'il vint se mettre en contact avec la lame, puis on l'a soulevé graduellement. La lame, adhérant à la fois aux deux anneaux, a pris nécessairement la forme d'une portion de caténoïde, et l'on a pu ainsi arriver à rendre d'abord vertical l'élément de la chaînette méridienne qui aboutissait au petit anneau, puis à le faire rentrer vers l'axe d'une manière visible, de sorte que la figure présentât un commencement d'étranglement; en d'autres termes, on a pu non-seulement atteindre le demi-caténoïde, mais même le dépasser un peu.

Ici, on le voit, le diamètre de la base égale à peu près 6 fois celui du cercle de gorge; or quand on réalise un caténoïde laminaire entre deux an-



neaux égaux dont on augmente l'écartement jusque très-près du point où la stabilité serait détruite, on reconnaît, à l'aspect de la figure, que le diamètre des bases n'est pas le double de celui du cercle de gorge. C'est aussi à quoi l'on arrive par le calcul (10^{me} série, § 32).

§ 27. Les figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution ont aussi, et pour la plupart sans nul doute, leurs limites respectives de stabilité. Seulement il faut, pour chacune d'elles, faire également une convention à l'égard du système solide dans lequel on la comprend.

Je citerai d'abord, comme exemple, celle des surfaces mentionnées dans le § 42 de la 10^{me} série que j'ai réalisée à l'état laminaire, ainsi qu'on l'a vu (*ibid.*, § 43); on obtient une portion stable de cette surface dans le système solide que j'ai choisi, quand la hauteur de celui-ci est égale à sa largeur; mais il n'en est plus de même quand la hauteur est quadruple de la largeur.

Je citerai encore l'hélicoïde de M. Lamarle que j'ai réalisé avec de l'huile dans le liquide alcoolique (*ibid.*, § 38). Il était compris, on se le rappelle, entre des sections perpendiculaires à l'axe de la figure; or il montrait une stabilité bien décidée quand les sections solides étaient distantes d'un quart de spire; mais on ne parvenait plus à le former entre deux sections éloignées d'une demi-spire, ce qui indique qu'avec cette longueur il est instable.

Je suis porté à croire que l'hélicoïde gauche à plan directeur n'a pas de limite de stabilité, du moins lorsqu'il est compris, à l'état laminaire, dans un système solide composé d'une portion de l'axe et d'une hélice rattachée à celui-ci par des portions droites (*ibid.*, § 36); en effet, celui que j'ai réalisé avait deux spires complètes, et il était parfaitement stable.

Théorie générale de la stabilité des figures d'équilibre. — Stabilité des systèmes laminaires. — Stabilité dans des cas où la pesanteur intervient.

§ 28. Jusqu'ici je n'ai guère considéré la stabilité et l'instabilité des figures liquides que comme des faits révélés par l'expérience; si j'ai employé le calcul ou le raisonnement, c'est encore en partant des faits que



j'avais observés. Essayons maintenant de pénétrer plus avant dans l'essence même des phénomènes.

Concevons une figure d'équilibre liquide réalisée dans un système solide, et mathématiquement parfaite; alors la pression capillaire sera rigoureusement la même en tous les points de la couche superficielle, et la figure, quelle que soit son étendue, se maintiendra tant qu'une cause extérieure ne viendra point la troubler. Supposons qu'on lui imprime artificiellement une déformation très-petite; ainsi altérée, elle cessera en général d'être une figure d'équilibre, et dès lors les pressions respectivement correspondantes aux différents points de sa couche superficielle ne seront plus exactement égales; si donc on l'abandonne à elle-même, elle tendra à quitter ce nouvel état. Cela posé, deux cas sont également possibles: savoir que la figure tende à revenir à sa première forme, ou bien qu'elle tende à s'en éloigner davantage. Si le premier cas a lieu quelle que soit la nature de la petite déformation, la figure est stable; si, au contraire, le second cas se présente soit pour une petite déformation quelconque, soit pour une petite déformation d'une nature déterminée, la figure est instable.

Mais on peut envisager la stabilité et l'instabilité des figures liquides sous un autre point de vue, dont l'idée m'a été suggérée par un passage de l'un des mémoires de Beer, passage que je reproduis plus bas.

Ainsi que je l'ai déjà rappelé dans la série précédente, les géomètres ont admis, comme résultat de l'analyse, que les surfaces représentées par l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$, c'est-à-dire les surfaces dont la courbure moyenne est constante, sont aussi celles qui, renfermant un volume donné, ont une étendue minima. Mais s'il fallait accepter ce principe sans restriction, il s'en suivrait que toute figure d'équilibre liquide partielle terminée à un système solide serait nécessairement stable, quelque portion qu'elle représentât de la figure complète à laquelle elle appartient: l'onduloïde, par exemple, conserverait toute sa stabilité avec un nombre quelconque de renflements et d'étranglements entre ses deux bases solides.

En effet, la couche superficielle de la masse étant réellement, on le sait aujourd'hui (8^{me} série, §§ 6 à 15), dans un état de tension, elle fait constamment effort pour se resserrer; si donc, dans l'état d'équilibre, son étendue



était toujours un minimum, une déformation très-petite quelconque augmenterait cette étendue, et conséquemment la couche superficielle ferait effort pour reprendre ses dimensions premières et rétablir la forme d'équilibre. Aussi Beer cherche à modifier le principe énoncé par les géomètres : dans le second des deux mémoires qu'il a publiés sur mes expériences ¹, il s'exprime de la manière suivante :

« Un liquide à l'état d'équilibre et soustrait à toute influence étrangère jouit de cette propriété que la variation de sa surface est toujours nulle..... cette surface est donc de la nature de celles qu'on nomme *minimæ* ou *maximæ areæ* ; or à une surface *maximæ areæ* correspondra évidemment un équilibre instable, tandis qu'à une surface *minimæ areæ* correspondra un équilibre stable. »

Cependant, si l'on réfléchit, on se convaincra sans peine qu'une surface renfermant un volume donné ne saurait constituer un maximum d'une manière absolue, car on pourrait toujours trouver des modes de petite déformation qui l'augmenteraient : si l'on imagine, par exemple, que la figure se sillonne de cannelures telles que la somme de celles qui sont en creux par rapport à la surface primitive soit égale en volume à la somme de celles qui sont en relief, de façon que le volume total n'ait pas changé, il est clair que la surface aura reçu par là un accroissement notable, quelque ténues qu'on suppose les cannelures en question. C'est, sans doute, pour ce motif que les géomètres ont considéré les surfaces à courbure moyenne constante comme ayant toujours chacune un minimum d'étendue.

L'expérience vient d'ailleurs confirmer cette impossibilité d'un maximum absolu, et c'est elle, en outre, qui nous donnera la solution des difficultés ci-dessus :

Quand on a réalisé entre deux disques, dans le liquide alcoolique, un cylindre d'huile dépassant très-peu sa limite de stabilité, si, avant que la déformation spontanée ait commencé à se montrer, on pousse légèrement le cylindre en son milieu à l'aide d'une spatule recouverte d'étoffe, de manière à fléchir la figure d'une certaine quantité, puis qu'on enlève la spatule, on

¹ Voir la troisième note du § 8.



voit la figure revenir d'elle-même à la forme cylindrique, plus ou moins altérée par la naissance du renflement et de l'étranglement; d'où il faut conclure qu'un cylindre dépassant sa limite de stabilité est néanmoins stable encore par rapport aux déformations qui le fléchiraient. Il résulte de là que la surface d'une figure d'équilibre liquide qui dépasse sa limite de stabilité, est encore *minimæ areae* par rapport à certaines déformations, tandis qu'elle est *maximæ areae* par rapport à d'autres.

L'expérience montre, de plus, qu'une figure d'équilibre liquide donnée comprise dans un système solide donné, et dépassant sa limite de stabilité, s'altère toujours identiquement de la même manière : le cylindre, par exemple, terminé à deux disques solides, se fractionne toujours en portions renflées alternant avec des portions étranglées, et, quand aucune cause perturbatrice n'intervient, les longueurs respectives des renflements et des étranglements, à une époque quelconque du phénomène, sont toujours les mêmes dans les mêmes conditions de l'expérience; dans l'onduloïde renflé et compris entre deux disques égaux, le renflement marche toujours vers l'une des bases, de façon que l'un des deux étranglements s'efface par degrés, tandis que l'autre s'approfondit jusqu'à sa désunion; etc.

Or ces faits paraissent conduire à une seconde conséquence, savoir qu'au delà de la limite de stabilité, ou bien la surface n'est *maximæ areae* que par rapport à un seul mode de déformation, ou bien, si elle est *maximæ areae* par rapport à plusieurs, il existe certaines conditions qui déterminent le choix de la masse parmi ceux-ci, de façon qu'une seule déformation est susceptible de progresser.

§ 29. Pour rendre plus évidentes encore les déductions qui précèdent, je vais étudier le cylindre au point de vue des variations que subit l'étendue de sa surface quand on altère un peu la forme de celle-ci, sans changer le volume qu'elle renferme; cette figure, en effet, se prête sans trop de peine à un semblable examen.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur quelconque par rapport à son diamètre et terminé à deux bases solides, et imaginons qu'on lui imprime une déformation finie, mais très-petite, astreinte à la seule condition que les aires de toutes les sections planes parallèles aux bases solides soient de-



meurées les mêmes que dans le cylindre. Une telle déformation est admissible, car elle n'altère pas le volume de la masse; figurons-nous, en effet, deux de ces sections infiniment rapprochées; le volume de la tranche liquide qu'elles comprennent sera égal au produit de l'aire de l'une d'elles par la distance qui les sépare, et puisque cette aire est égale à celle d'une section circulaire du cylindre, le volume en question sera égal à celui d'une tranche de même épaisseur appartenant au cylindre; enfin le volume total de la figure étant la somme des volumes de toutes les tranches obtenues en coupant cette figure par un nombre infini de plans infiniment rapprochés et parallèles aux bases, et le nombre de ces tranches étant le même avant et après la déformation, celle-ci, comme je l'ai avancé, n'apporte aucune modification au volume total dont il s'agit.

Considérons actuellement, dans la figure déformée, l'une des tranches ci-dessus. Si les sections qui la comprennent ne sont pas circulaires, leurs périmètres seront plus grands que celui des sections du cylindre, puisque de toutes les courbes planes qui renferment la même aire, la circonférence de cercle est la plus courte; la petite zone superficielle qui unit ces périmètres et qui fait partie de la surface libre de la figure, sera donc, pour cette raison et, en outre, parce qu'elle se compose en général d'éléments obliques aux plans des deux sections, plus grande que la petite zone appartenant à une tranche du cylindre. Si les deux sections sont circulaires, elles seront, par la condition assignée aux aires, identiques à celles du cylindre, mais leurs centres ne seront pas en général exactement en regard l'un de l'autre, de sorte que la petite zone qui unit les deux périmètres se composera aussi d'éléments obliques, et sera encore conséquemment plus grande que celle d'une tranche du cylindre. D'après cela, comme le nombre des tranches est le même dans la figure déformée et dans le cylindre, la somme des surfaces des petites zones de la première l'emportera sur la somme de celles des petites zones du second; donc enfin, ce qui est la même chose, la surface libre de la figure déformée sera plus étendue que celle du cylindre.

Ainsi, de quelque nature que soit la petite déformation, si elle est telle que les aires des sections parallèles aux bases n'aient pas changé, elle augmente l'étendue de la surface libre de la masse; en d'autres termes, la surface du



cylindre est un minimum par rapport à toutes les petites déformations de cette espèce.

Parmi ces mêmes déformations se trouve évidemment celle qui consiste en une simple flexion, et nous avons vu, en effet, qu'un cylindre liquide légèrement fléchi revient spontanément à la forme de révolution.

§ 30. Supposons maintenant une petite déformation qui change les aires des sections parallèles aux bases. Alors, puisque le volume total, ou la somme des volumes de toutes les tranches, est invariable, il faut nécessairement que, parmi les sections, les unes aient des aires plus grandes et les autres des aires plus petites que l'aire d'une section du cylindre; il faut conséquemment que la figure ait des portions renflées et des portions amincies. Voyons donc si, dans cet état, la surface de la figure doit encore excéder celle du cylindre, ou si elle peut être moindre.

Afin de rendre la question accessible au calcul, imaginons que la figure déformée soit elle-même de révolution, et qu'elle ait pour ligne méridienne une sinusoïde. Comme la déformation doit être supposée finie, bien que très-petite, on comprend que l'axe de cette sinusoïde ne pourra coïncider avec la génératrice du cylindre : pour que le volume soit demeuré le même, les renflements devront saillir moins en dehors de la surface cylindrique primitive que les étranglements ne s'enfoncent au-dessous d'elle; l'axe de la courbe sera donc un peu plus rapproché de l'axe de révolution que la génératrice du cylindre; nous désignerons par μ la petite différence de ces deux distances. Alors, en prenant pour axe des abscisses l'axe de révolution, et en plaçant l'origine au pied de l'ordonnée de l'un des points où la sinusoïde coupe son axe et où commence un arc convexe, si l est la longueur des cordes des arcs, β la flèche de ces mêmes arcs, et r le rayon du cylindre originaire, on trouvera aisément que l'équation de notre sinusoïde est :

$$y = r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \dots \dots \dots [1].$$

Cherchons d'abord la relation entre μ et β nécessaire pour que le volume n'ait pas changé. Notre figure liquide étant terminée à deux disques solides, supposons que du premier de ces disques parte un renflement, et que sur



le second s'appuie un étranglement; nous pourrons alors partager, par des sections de même diamètre que les disques, la figure en un nombre entier de parties égales contenant chacune une portion renflée et une portion étranglée; seulement, par suite de la non coïncidence entre l'axe de la sinusoïde et la génératrice du cylindre, on comprend que, dans chacun des couples ainsi formés, la portion renflée ne constitue pas un renflement complet, et qu'à l'extrémité de la portion étranglée s'ajoute le commencement du renflement qui la suit. Or tous ces couples étant égaux, et la somme de leurs volumes représentant le volume total de la masse, il s'ensuit que le volume de chacun d'eux est égal à celui de la portion du cylindre primitivement comprise entre les mêmes sections; il suffira donc, pour établir que le volume total n'a pas changé, de chercher l'expression du volume d'un couple, et de l'égaliser à celle du volume de la portion correspondante du cylindre.

Mais on peut substituer au couple en question un autre couple terminé par deux sections ayant pour rayon la distance $r - \mu$ de l'axe de la sinusoïde à l'axe de révolution, sections dont la première passe par le point où naît un arc convexe, et dont la seconde passe par celui où finit l'arc concave suivant; on voit, en effet, qu'en agissant ainsi, on ajoute une petite portion à la première extrémité du couple considéré d'abord, mais qu'on retranche à l'autre extrémité une portion identique. Ce nouveau couple se composera ainsi exactement d'un renflement complet et d'un étranglement complet, et se prêtera sans difficulté au calcul.

L'expression générale du volume d'un corps de révolution terminé à deux sections perpendiculaires à l'axe, est, comme on sait, $\pi \int y^2 dx$. Pour l'appliquer à notre couple, il suffira d'y remplacer y par la valeur que donne l'équation [1]; on a de cette manière :

$$\pi \int y^2 dx = \pi \int \left(r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = \pi \left\{ \left[(r - \mu)^2 + \frac{\beta^2}{2} \right] x - \frac{2\beta l}{\pi} (r - \mu) \cos \frac{\pi}{l} x - \frac{\beta^2 l}{4\pi} \sin \frac{2\pi}{l} x \right\} + C.$$

Prenons maintenant cette intégrale entre les limites du couple en question, c'est-à-dire de $x=0$ à $x=2l$; nous obtiendrons

$$2\pi l \left\{ (r - \mu)^2 + \frac{\beta^2}{2} \right\} = 2\pi r^2 l + \pi l (2\mu^2 - 4r\mu + \beta^2).$$

Telle est donc l'expression du volume du couple; or celui de la portion de même longueur $2l$ prise dans le cylindre est $2\pi r^2 l$; pour que ces deux volumes soient égaux, il faut conséquemment que l'on ait

$$2\mu^2 - 4r\mu + \beta^2 = 0.$$

Résolvant par rapport à μ , il vient :

$$\mu = r \pm \sqrt{r^2 - \frac{\beta^2}{2}}.$$

Observant que, comme μ doit être très-petit, il faut prendre le radical avec le signe —, développant ce radical, et négligeant les puissances de β supérieures à la deuxième à cause de la petitesse de cette quantité, on a enfin :

$$\mu = \frac{\beta^2}{4r} \dots \dots \dots [2].$$

C'est la relation cherchée ¹ entre μ et β .

Passons à la surface. Celle-ci est, comme on le sait encore, représentée d'une manière générale, dans le cas des corps de révolution, par $2\pi \int y ds = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$; or y est donné par l'équation [1], équation d'où l'on déduit aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} x$. On aura donc :

$$2\pi \int y ds = 2\pi \int \left(r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \right) \sqrt{1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} x} dx.$$

Mais, à cause de la petitesse de β , on peut développer le radical et se borner aux deux premiers termes de la série; avec cette simplification, on trouve :

$$2\pi \int y ds = 2\pi \int \left(r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \right) \left(1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} x \right) dx.$$

¹ Cette relation montre que si l'on suppose la déformation, et, par suite, la flèche infiniment petite, comme nous l'avons fait dans le calcul du § 16, la quantité μ , c'est-à-dire l'intervalle entre l'axe de la sinusoïde et la génératrice du cylindre, est du deuxième ordre, et conséquemment disparaît devant β ; c'est pourquoi, dans le calcul que nous venons de citer, nous avons fait coïncider les deux droites dont il s'agit.



Effectuant la multiplication, négligeant le terme en β^5 et intégrant, on a :

$$2\pi \int y ds = 2\pi \left\{ (r - \mu) \left(1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{4l^2} \right) x - \frac{\beta l}{\pi} \cos \frac{\pi}{l} x + \frac{\beta^2 \pi}{8l} (r - \mu) \sin \frac{2\pi}{l} x + C \right\}.$$

Prenant aussi cette intégrale entre les limites $x = 0$ et $x = 2l$, on obtient :

$$2\pi \int_0^{2l} y ds = 4\pi l (r - \mu) \left(1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{4l^2} \right),$$

expression dans laquelle il faut introduire la condition [2] relative au volume; faisant donc $\mu = \frac{\beta^2}{4r}$, et négligeant le terme en β^4 , il vient enfin, pour la valeur de la surface de notre couple,

$$4\pi r l + \pi \beta^2 \left\{ \frac{\pi^2 r}{l} - \frac{l}{r} \right\} \dots \dots \dots [5].$$

Or la surface de la portion de même longueur prise dans le cylindre est $4\pi r l$; la surface de notre couple sera donc plus grande ou plus petite que celle de la portion de cylindre, suivant qu'on aura

$$\frac{l}{r} < \frac{\pi^2 r}{l} \text{ ou } \frac{l}{r} > \frac{\pi^2 r}{l},$$

inégalités d'où l'on tire les suivantes :

$$2l < 2\pi r \text{ ou } 2l > 2\pi r.$$

Mais $2l$ est la longueur du couple, et $2\pi r$ la circonférence du cylindre; si donc la longueur du couple excède la circonférence du cylindre, la surface de ce couple sera moindre que la portion de cylindre ayant même longueur; or la surface de notre couple étant égale à celle du couple primitivement considéré, et la figure déformée entière se composant de couples identiques à ce dernier, il s'ensuit que, dans la condition ci-dessus, la surface libre totale de la figure déformée sera moindre que la surface libre totale du cylindre.

§ 31. Ainsi, quand le cylindre est suffisamment long par rapport à son diamètre, sa surface est un maximum à l'égard de la petite altération qui partagerait la figure en portions alternativement renflées et étranglées, de



forme et de longueur convenables; or nous savons que tel est, en effet, le mode de transformation spontanée d'un cylindre liquide instable; la théorie et l'expérience se vérifient donc encore mutuellement.

A la vérité, nous ne sommes pas certains qu'au commencement de la transformation d'un cylindre liquide dépassant sa limite de stabilité, la ligne méridienne de la figure soit rigoureusement une sinusoïde; mais cette condition n'est pas indispensable: quand la dernière inégalité du paragraphe précédent existe, la surface totale de la figure a diminué d'une quantité finie, bien que très-petite, et dès lors on peut évidemment, sans annuler tout à fait la différence ou la faire passer en sens contraire, modifier jusqu'à un certain point la ligne méridienne de façon qu'elle ne constitue plus une sinusoïde exacte.

En outre, on peut, sans que l'inégalité en question cesse d'avoir lieu, attribuer au couple toutes les longueurs supérieures à la circonférence du cylindre, pourvu qu'elles soient en même temps des parties aliquotes de la distance des deux bases; par conséquent, lorsque le cylindre dépasse suffisamment sa limite de stabilité, si, d'une part, il y a (§ 29) une infinité de petites déformations à l'égard desquelles sa surface est encore un minimum, il y a, d'autre part, plusieurs petites déformations à l'égard desquelles cette surface est un maximum.

§ 32. Supposons actuellement la longueur du cylindre assez peu considérable pour que la transformation spontanée ne donne lieu qu'à un seul couple, c'est-à-dire ne partage la figure entière qu'en une seule portion renflée et une seule portion étranglée. Dans ce cas, $2l$ représentera la longueur totale du cylindre; si donc cette longueur l'emporte sur la circonférence, la surface du cylindre sera un maximum à l'égard de la petite déformation, et cette déformation progressera. Si, au contraire, la longueur du cylindre est moindre que sa circonférence, la surface de ce cylindre sera un minimum à l'égard de la petite déformation, et celle-ci devra s'effacer d'elle-même. Enfin si le cylindre a une longueur égale à sa circonférence, la déformation, pourvu qu'on la suppose extrêmement peu prononcée, n'altérera pas l'étendue de la surface, et conséquemment n'aura aucune tendance à progresser ou à s'effacer; or nous savons, en effet (§§ 7 et 21), qu'un cylindre liquide dont la



longueur est égale à la circonférence est précisément à sa limite de stabilité, et de ce qu'en deçà de cette longueur il est stable, nous devons conclure qu'alors sa surface est un minimum à l'égard de toute espèce de déformation très-petite.

§ 33. La discussion contenue dans les paragraphes précédents établit donc, relativement au cylindre liquide, les principes suivants :

1° Quelque grand que soit l'intervalle des bases solides par rapport à leur diamètre, la surface du cylindre compris entre elles est toujours *minimæ areæ* à l'égard de certaines petites déformations.

2° Pour tout intervalle des bases excédant leur circonférence, la surface du cylindre, quoique *minimæ areæ* à l'égard des petites déformations ci-dessus, est, au contraire, *maximæ areæ* à l'égard de certaines autres petites déformations, parmi lesquelles est celle qui progresse d'après l'expérience.

3° Pour tout intervalle des bases moindre que leur circonférence, la surface du cylindre est *minimæ areæ* d'une manière complète, c'est-à-dire à l'égard de toute espèce de petite déformation.

L'analogie des phénomènes observés permet évidemment d'étendre ces principes aux autres figures d'équilibre, et nous en déduisons cette conclusion générale :

Lorsqu'une figure d'équilibre a une limite de stabilité, c'est seulement en deçà de cette limite que sa surface est *minimæ areæ* d'une manière complète, c'est-à-dire qu'elle est moindre que toutes les surfaces voisines comprenant le même volume et terminées au même système solide; au delà de la limite dont il s'agit, la surface de la figure est encore *minimæ areæ* à l'égard de certaines déformations, mais elle est *maximæ areæ* par rapport à une autre au moins, que les forces moléculaires font progresser.

C'est donc dans ce sens qu'il faut restreindre, comme je l'ai annoncé dans le § 20 de la 10^{me} série, le principe admis par la généralité des géomètres relativement aux surfaces dont la courbure moyenne est constante : la plupart de ces surfaces ne sont complètement *minimæ areæ* qu'entre certaines limites, au delà desquelles elles sont *minimæ areæ* à l'égard de certaines variations, et *maximæ areæ* à l'égard d'autres variations.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que si, dans le calcul du § 30



et dans ce qui suit, j'ai supposé la déformation finie quoique extrêmement peu prononcée, c'est que je raisonnais au point de vue physique, c'est-à-dire à celui des figures liquides réalisées; mais il est clair qu'au point de vue purement mathématique, rien n'empêche de supposer la déformation infiniment petite, et qu'on arriverait encore aux mêmes conclusions; seulement, dans le cas du cylindre, la ligne méridienne de la figure altérée devrait alors être une sinusoïde exacte, ce qui est indifférent pour la théorie, et le terme $\pi\beta^2\left\{\frac{\pi^2r}{l} - \frac{l}{r}\right\}$ de l'expression [3] du paragraphe cité représenterait la variation seconde de la surface.

§ 34. Si donc on voulait traiter a priori, et uniquement par le calcul, la question des limites de stabilité des figures d'équilibre liquides, le problème consisterait à chercher, pour chacune des surfaces représentées par l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$, les limites entre lesquelles elle est minimaë areaë d'une manière complète, c'est-à-dire moindre que toute autre surface voisine comprenant le même volume et ayant les mêmes terminaisons; ces terminaisons devraient d'ailleurs être caractérisées d'avance d'une manière suffisante. Si le calcul est praticable, on aura ainsi une méthode générale pour la détermination des limites de stabilité dont il s'agit.

* Cette recherche ne me paraît pas dénuée d'intérêt, même au point de vue purement mathématique; elle présenterait probablement des difficultés très-grandes, et je laisse aux géomètres le soin de l'essayer. On a vu, dans cette série, qu'en s'aidant à la fois de l'expérience et de la théorie, la question se résout nettement et d'une manière simple dans plusieurs cas, au moyen de méthodes particulières.

Ajoutons qu'il est facile de se rendre raison maintenant de la stabilité de la sphère (§ 4); on sait, en effet, que la surface de ce corps est, d'une manière absolue, la plus petite surface possible qui puisse envelopper un volume donné. Quant au plan, sa stabilité est, ainsi que je l'ai montré (§ 2), une conséquence nécessaire de celle de la sphère.

§ 35. Un point reste à examiner. On a vu (§ 31) que la surface d'un cylindre liquide suffisamment long par rapport à son diamètre, est maximaë areaë à l'égard de plusieurs petites déformations, et l'analogie permet de penser que la même chose a lieu pour d'autres figures d'équilibre; en outre, nous



savons qu'une figure d'équilibre quelconque excédant sa limite de stabilité éprouve toujours la même déformation spontanée dans les mêmes circonstances expérimentales; il faut donc reconnaître, tout au moins dans le cylindre, l'existence d'une condition théorique qui détermine le choix de la masse parmi toutes les déformations qui diminueraient sa surface.

On serait tenté de croire, au premier abord, que puisque la surface tend incessamment à décroître, les forces moléculaires choisissent la déformation qui rend ce décroissement le plus grand possible. Mais il n'en est pas ainsi; en effet, la déformation qui produirait le plus grand décroissement de la surface doit être unique pour une figure donnée; or, dans la transformation spontanée du cylindre, la longueur des couples varie (§ 15), pour un même diamètre et une même distance des bases, avec le plus ou moins de viscosité du liquide et les autres résistances. D'ailleurs l'expression [3] du § 30 montre qu'au commencement de la transformation, la plus grande diminution de la surface correspondrait au cas où la valeur de l serait la plus grande possible, et conséquemment à celui où, quel que fût l'écartement des bases relativement à leur diamètre, il ne se formerait entre elles qu'un seul renflement et un seul étranglement; et l'on ne peut objecter que cela tient à la nature de la courbe que j'ai prise pour ligne méridienne, et qui n'est peut-être pas la véritable; j'ai effectué un calcul analogue à celui du § 30 sur deux autres lignes, savoir, en premier lieu, sur une ligne brisée qui engendrerait une suite de cônes tronqués égaux réunis alternativement par leurs grandes et par leurs petites bases, et, en second lieu, sur une ligne composée d'arcs de cercle égaux alternativement convexes et concaves vers l'extérieur, c'est-à-dire sur la ligne méridienne supposée par M. Hagen (§ 4); or, dans les deux cas, j'ai trouvé encore que la plus grande diminution correspondait à la plus grande longueur de chaque portion renflée ou étranglée; il est donc bien probable que ce résultat est général, et qu'ainsi il a lieu pour la véritable ligne méridienne.

§ 36. La condition qui fixe le choix entre toutes les petites déformations d'où résulterait une diminution de la surface, doit, par conséquent, être cherchée ailleurs, et l'on y arrive, je pense, par les considérations suivantes :

Lorsque, par une cause quelconque, une masse liquide soumise aux seules



actions moléculaires ne constitue pas une figure d'équilibre, et qu'ainsi les pressions correspondantes aux différents points de sa surface sont inégales, elle tend nécessairement à égaliser ces pressions, et alors le liquide est chassé incessamment des points de plus forte pression vers ceux de moindre pression, jusqu'à ce que les inégalités aient complètement disparu. La figure se modifie donc de telle manière qu'à chaque instant les pressions soient aussi peu différentes que le permettent les conditions du phénomène; en d'autres termes, à chaque instant de celui-ci, la forme de la masse a toujours le plus d'analogie possible avec une forme d'équilibre.

Maintenant supposons une figure liquide dépassant sa limite de stabilité et réalisée entre des terminaisons solides. Elle aura nécessairement une foule de petites irrégularités imperceptibles à l'œil, et provenant à la fois du procédé même de sa formation, quel qu'il soit, des petits mouvements inséparables de ce procédé, etc., de sorte qu'elle ne constituera une figure d'équilibre qu'en apparence, et se trouvera, en réalité, dans le cas ci-dessus. Or, parmi ces irrégularités, les unes seront telles que, si elles existaient seules, elles augmenteraient la surface, et d'autres seront telles qu'elles la diminueraient; conséquemment les premières tendront à s'effacer, et les secondes, au contraire, tendront à progresser; mais, en vertu de ce qui précède, les forces moléculaires choisiront parmi ces dernières celles qui permettront à la masse modifiée de s'écarter le moins possible d'une autre figure d'équilibre, et les feront progresser en les régularisant.

On peut encore exprimer ce principe autrement: puisque les forces qui produisent la transformation sont les différences de pression, on peut dire que le phénomène se dispose de manière à s'accomplir avec la moindre dépense possible de force.

§ 57. Appliquons ces considérations au cylindre. Supposons un cylindre liquide d'une longueur considérable relativement au diamètre, réalisé par un moyen quelconque entre deux bases solides. Nous avons vu (§§ 30 et 31) qu'une irrégularité consistant dans le partage de la figure en portions alternativement plus épaisses et plus minces, pouvait diminuer la surface; d'un autre côté, la figure d'équilibre la plus voisine du cylindre est l'onduloïde, qui se compose de portions alternativement renflées et étranglées; si donc



notre principe est vrai, les forces moléculaires choisiront, parmi toutes les petites irrégularités du cylindre, les amincissements suffisamment espacés, elles les régulariseront, en les prononçant de plus en plus, et elles disposeront la figure de manière à l'approcher le plus possible d'un onduloïde. D'après cela, si le liquide était complètement exempt de viscosité, et qu'il y eût en même temps absence de résistances extérieures, de manière que la transformation pût s'effectuer avec une entière liberté, enfin si la distance des bases était un multiple exact de leur circonférence, le phénomène marcherait comme s'il avait pour origine un onduloïde infiniment peu différent du cylindre.

Or j'étais déjà arrivé (§ 15) à ce dernier résultat, en m'appuyant sur l'expérience et sur des raisonnements d'une autre nature; deux méthodes essentiellement différentes concourent donc à l'établir, et dès lors le principe exposé dans le paragraphe précédent, principe à peu près évident en lui-même et dont le résultat en question découle immédiatement, peut, je pense, être regardé comme suffisamment démontré.

§ 38. Si l'intervalle des bases solides n'est pas un multiple exact de leur circonférence, de sorte que les couples ne puissent prendre la longueur qui convient à l'onduloïde, c'est-à-dire leur longueur minima, ou bien s'il s'agit d'un liquide réel, auquel cas il y a des résistances, les couples seront plus allongés, nous le savons; mais, toujours en vertu de notre principe, la figure, à l'origine de la transformation, approchera autant que possible d'un onduloïde, et l'on peut admettre qu'elle sera ce que deviendrait un onduloïde si celui-ci était simplement étiré dans le sens de sa longueur. S'il en est effectivement ainsi, la ligne méridienne originaire sera encore une sinusoïde, comme nous l'avons supposé.

Disons ici que, dans son second mémoire¹, Beer essaie d'établir une théorie de la transformation des cylindres; mais il se base sur un raisonnement inexact, et arrive, par suite, à des résultats qui ne sont pas d'accord avec ceux de l'expérience; aussi a-t-il reconnu lui-même son erreur².

¹ Voir la troisième note du § 8.

² *Ueber die Transformation des flüssigen Cylinders* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CII, p. 520).



§ 39. Si j'ai étudié, dans cette série, avec tant de détail les principes relatifs à la stabilité du cylindre, c'est à cause de leur importance pour la théorie de la veine liquide. En exposant cette théorie dans la 2^{me} série, je suis parti simplement des faits que m'avait révélés l'expérience; nous savons maintenant que ces faits sont nécessaires, et nous en connaissons les causes : nous savons qu'au delà d'un certain rapport entre la longueur et le diamètre, un cylindre liquide ne peut plus être stable, parce que le mode de déformation qui le partage en portions alternativement renflées et étranglées de longueur suffisante, amène une diminution de sa surface; nous savons, en outre, que sa limite précise de stabilité est la quantité π , c'est-à-dire qu'à cette limite, sa longueur est exactement égale à sa circonférence.

Les faits sur lesquels je me suis appuyé (2^{me} série, §§ 47 à 55, et 7^{me} série, § 32) pour établir expérimentalement l'instabilité et le mode de transformation des cylindres liquides de grande longueur, ou, plus généralement, des figures liquides dont une dimension est considérable relativement aux deux autres, sont, on se le rappelle : la transformation d'une veine d'huile s'écoulant sous une charge faible dans un liquide alcoolique un peu moins dense que l'huile; celle de cylindres de mercure de petits diamètres réalisés par un procédé particulier, et reposant sur une plaque de verre; celle de l'anneau liquide qui se produit lors de la rupture d'une lame mince d'huile occupant un anneau en fil de fer au sein du liquide alcoolique; enfin celle d'un fil de métal fondu par une décharge électrique. A ces faits j'ajouterai maintenant une expérience de mon fils ¹, expérience qui, dans sa meilleure disposition, s'effectue de la manière suivante :

Un fil de coton, de 20 à 25 centimètres de longueur, est tendu entre les deux extrémités d'un arc en bois, dont il forme la corde; on remplit d'huile un grand plat, et l'on y fait plonger le fil, qui doit avoir été préalablement bien imprégné du même liquide, puis on le retire avec une vitesse convenable, en le maintenant dans une position horizontale. Au moment où il sort de l'huile, celle-ci constitue autour de lui une enveloppe sensiblement cylindrique de petit diamètre, laquelle se transforme aussitôt, d'une manière à fort

¹ Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées (BULLET. DE L'ACAD., 1867, 2^{me} série, t. XXIV, p. 21).



peu près régulière, en un grand nombre de petites masses séparées les unes des autres et traversées par le fil comme des perles ; si le fil a 25 centimètres de longueur, on y compte près de cent de ces perles. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que les perles liquides dont il s'agit ne sont pas sphériques : l'action du fil les allonge un peu, et en fait de petits onduloides renflés.

Je ne puis résister au désir d'exposer ici un procédé ingénieux qui m'a été suggéré par M. Donny, pour réaliser avec une grande régularité, dans le liquide alcoolique, un cylindre d'huile très-long par rapport à son diamètre, et en observer la transformation.

Au centre du fond d'un vase cylindrique en verre de 7 à 8 centimètres de diamètre et de 60 de hauteur, est mastiqué un petit disque en fer d'un centimètre de diamètre et de quelques millimètres d'épaisseur ; un tube en verre ou en fer d'un centimètre de diamètre intérieur occupe l'axe de ce vase, et embrasse à frottement doux, par son extrémité inférieure, le petit disque ci-dessus ; ce tube dépasse le haut du vase, et contient un piston dont la tige, d'une longueur suffisante, est attachée par son extrémité supérieure à un support fixe ; le piston ainsi maintenu est à un centimètre ou deux plus bas que l'orifice du vase ; il ne peut ni monter ni descendre, mais pour lui faire parcourir la longueur du tube, il suffit, on le voit, de donner à celui-ci un mouvement ascensionnel ; ce mouvement est guidé par des pièces convenables, de façon à s'effectuer sans oscillations ; enfin, le tube étant descendu, concevons qu'il soit rempli d'huile jusqu'au piston, et que le vase soit plein de liquide alcoolique.

Les choses étant ainsi disposées, faisons monter le tube avec une rapidité que des essais préalables auront déterminée ; l'huile que le piston empêche complètement de s'élever, demeurera tout entière dans le liquide ambiant, où elle devra constituer un cylindre régulier s'étendant du petit disque de fer à l'extrémité inférieure du tube, et ayant en longueur au moins cinquante fois son diamètre. Ce cylindre commencera aussitôt à se transformer, et le phénomène devra s'accomplir avec une grande régularité.

Je n'ai pas essayé ce procédé, mais la réussite m'en paraît très-probable ; la seule difficulté réelle consisterait, je pense, dans l'égalisation des deux densités, car, avec une hauteur aussi grande, une différence extrêmement faible



entre ces densités pourrait altérer la régularité de la figure d'huile dès l'origine même de la transformation.

Comme je l'ai fait remarquer au § 62 de la 2^{me} série, si l'on peut étirer le verre en fils déliés sans qu'ils se convertissent en petites masses isolées, c'est qu'on n'élève pas assez la température de la substance pour amener celle-ci à l'état liquide : elle est simplement rendue sirupeuse, ce qui introduit déjà une grande résistance à la transformation, et, en outre, à mesure que le fil se forme, il est solidifié par le froid de l'air ambiant. De même si l'araignée et le ver à soie produisent leurs fils, c'est que, sans doute, la matière émise par leurs filières possède originairement une assez forte viscosité, et que, par suite de l'extrême ténuité de ces fils, la matière dont il s'agit est coagulée au moment de sa sortie.

§ 40. Passons à d'autres points qui ont un rapport direct avec notre sujet. Les assemblages de lames liquides, assemblages que j'ai étudiés surtout dans ma 6^{me} série, présentent aussi, au point de vue de la stabilité, des phénomènes remarquables. J'ai énoncé, dans le § 19 de ma 5^{me} série, les lois qui régissent ces assemblages, et dont les deux principales sont :

1° A une même arête liquide n'aboutissent jamais que trois lames, et celles-ci font entre elles, à cette arête, des angles égaux ;

2° Les arêtes liquides concourant en un même point liquide sont toujours au nombre de quatre, et font entre elles, à ce point, des angles égaux.

J'ai démontré (6^{me} série, §§ 8 et 17), en partant de la théorie des pressions capillaires, la nécessité de cette égalité entre les angles soit des lames, soit des arêtes, et j'ai fait observer qu'on y arriverait également en considérant les lames liquides comme des membranes tendues.

Quant aux nombres respectifs des lames unies par une même arête liquide et des arêtes liquides concourant en un même point liquide, j'ai tâché (*ibid.*, §§ 16 et 21) d'établir par l'expérience que tout système laminaire d'équilibre dans lequel ces nombres surpassent le premier trois et le second quatre, est un système instable, et j'ai ajouté simplement : « On entrevoit que la stabilité doit exister dans le cas de trois lames à une même arête liquide et de quatre arêtes à un même point liquide, car trois est évidemment le plus petit nombre possible de lames aboutissant à une même arête liquide, et



l'on se convaincra sans peine que quatre est le plus petit nombre possible d'arêtes aboutissant à un même point liquide. »

Enfin, dans le dernier paragraphe de la 6^{me} série, j'ai dit :

« Je reviendrai de nouveau sur les systèmes laminaires, pour en envisager la théorie sous un point de vue plus général. En effet, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, les lames liquides qui les composent peuvent être assimilées à des membranes tendues, et dès lors, on le conçoit, chaque système se disposera de manière que la somme des surfaces de toutes ses lames soit un minimum. Mais je réserve ce sujet pour une autre série. »

En m'exprimant ainsi, je me proposais simplement de prendre comme exemples quelques systèmes laminaires particuliers, directement accessibles au calcul à raison de leur simplicité, et de faire voir que, dans chacun d'eux, la somme des surfaces des lames est un minimum par rapport à certain mode de déformation; mais je n'avais nulle intention de traiter le problème d'une manière générale, car je croyais la chose inabordable. Je comprenais qu'il existe une dépendance nécessaire entre le principe du minimum de la somme des aires et les lois ci-dessus, mais je ne pouvais saisir cette dépendance, et il me paraissait à peu près impossible de la découvrir.

Or, dans la première partie du mémoire¹ dont j'ai déjà parlé aux §§ 9 à 11 de la 8^{me} série et dans mon historique des lames liquides (9^{me} série), M. Lamarle a repris la question, et en a résolu toutes les difficultés avec une sagacité merveilleuse et un rare bonheur.

Il commence par établir plus nettement que je ne l'avais fait le principe du minimum de la somme des aires; puis, partant de là, il s'occupe des lames aboutissant à une même arête liquide. Il imagine un nombre quelconque de lames planes partant d'arêtes solides et se joignant toutes suivant une arête liquide commune, et il coupe l'ensemble par un plan perpendiculaire à celle-ci. La section se composant de droites partant respectivement de points fixes et aboutissant toutes à un même point, il démontre d'abord, par des considérations de géométrie élémentaire, que si les droites sont au nombre de trois, leur somme sera un minimum quand elles feront entre elles des

¹ *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces* (MÉM. DE L'ACAD., t. XXXV et t. XXXVI).



angles égaux. Si les droites sont plus nombreuses, il démontre, toujours par des considérations aussi simples, que, pour avoir une somme minima d'une manière absolue, il faut substituer au point de concours unique plusieurs points de concours reliés entre eux par des droites additionnelles, de telle façon qu'à chacun de ces points il n'y ait que trois droites faisant entre elles des angles égaux. Enfin, la diminution de la somme des droites commençant dès l'origine de ces modifications, c'est-à-dire, dans le cas de plus de trois droites, par exemple, dès que le point de concours se dédouble pour donner naissance aux droites et aux points additionnels, il s'ensuit que la démonstration s'applique également à des lignes courbes, car on peut toujours remplacer celles-ci par leurs tangentes dans le voisinage immédiat du point de concours. M. Lamarle fait voir alors que tous ces résultats s'étendent aux lames elles-mêmes, planes ou courbes, dont l'ensemble est coupé par le plan dont il s'agit; c'est-à-dire que le minimum de la somme des aires exige que ces lames se joignent trois à trois, sous des angles égaux, à chaque arête liquide.

Ainsi se trouve complètement démontrée et déduite du principe du minimum la première des lois rappelées plus haut.

M. Lamarle passe ensuite à la question des arêtes liquides concourant en un même point liquide. Pour la traiter, il imagine que des lames liquides planes aboutissent toutes à un même point de l'intérieur du système, et il cherche les conditions que devront remplir ces lames pour qu'elles puissent se joindre trois à trois sous des angles égaux, conformément à la loi précédente. Il considère le point qui leur est commun comme le centre d'une sphère, qu'elles viennent ainsi couper suivant des arcs de grands cercles; on a de cette manière un certain nombre de pyramides creuses ayant pour sommets un même point, et, pour bases, des polygones sphériques dont tous les angles sont de 120° . M. Lamarle fait d'abord remarquer que ces polygones ne peuvent être que des triangles, des quadrilatères et des pentagones, ce qui lui fournit une relation analytique entre les nombres respectifs de ces différents polygones et le nombre total des lames; il en trouve une autre par la condition que la somme des surfaces de ces mêmes polygones doit représenter la surface totale de la sphère; enfin tous les polygones dont il s'agit



doivent être simplement juxtaposés, sans empiètements des uns sur les autres en certains endroits et vides entre eux en d'autres endroits. Au moyen de ces trois conditions, M. Lamarle trouve qu'il n'y a que sept assemblages possibles de lames partant d'un même point et se joignant trois à trois sous des angles égaux.

Si, dans chacun de ces assemblages, on remplace les côtés des polygones sphériques par leurs cordes, on a l'ensemble des arêtes d'un polyèdre, et les sept polyèdres ainsi formés sont : le tétraèdre régulier; le prisme triangulaire à base équilatérale, avec un rapport déterminé entre la hauteur et le côté de la base; le cube; le prisme pentagonal droit à base régulière, avec un rapport déterminé entre la hauteur et le côté de la base; deux polyèdres particuliers composés de quadrilatères et de pentagones; enfin le dodécaèdre régulier. Dans l'intérieur de ces polyèdres, les nombres des arêtes liquides sont respectivement 4, 6, 8, 10, 12, 16 et 20.

Or M. Lamarle démontre que, pour chacun de ces systèmes, à l'exception de celui du tétraèdre régulier, on peut toujours concevoir un mode de déformation d'où résulte, à partir de son origine jusqu'à une certaine limite, une diminution de la somme des aires des lames; le système du tétraèdre régulier, dans lequel il n'y a que quatre arêtes liquides, qui aboutissent à un même point liquide sous des angles égaux, est donc le seul qui puisse jouir de la stabilité. Ainsi, quand les lames sont planes, les arêtes liquides qui se joignent en un même point liquide sont nécessairement au nombre de quatre, et font entre elles des angles égaux. Enfin M. Lamarle fait voir que la même conclusion s'applique aux lames courbes, et, par suite, aux arêtes courbes; en effet, rien ne limite la petitesse de la sphère mentionnée plus haut, et conséquemment on est maître de supposer cette sphère assez minime pour que les portions de lames comprises dans son intérieur puissent être considérées comme planes.

La deuxième loi est donc démontrée par M. Lamarle aussi complètement que la première, et également déduite du principe du minimum.

Ajoutons que les modes de déformation supposés par M. Lamarle, et qu'il parvient, au moyen d'une conception ingénieuse, à faire rentrer tous dans un même principe, sont précisément ceux qui conduisent aux résul-



tats réels, c'est-à-dire aux systèmes permanents que donnent les charpentes en fil de fer.

§ 41. Enfin je rappellerai une circonstance dans laquelle les pressions capillaires, combinées avec l'action de la pesanteur, produisent des effets curieux de stabilité et d'instabilité : je veux parler du phénomène étudié par M. Duprez, dans son travail *Sur un cas particulier de l'équilibre des liquides*¹.

On savait qu'un vase plein de liquide et dont le goulot est suffisamment étroit, peut être renversé, l'orifice ouvert, sans que le liquide s'en échappe, et l'on attribuait simplement ce fait à la pression atmosphérique exercée de bas en haut à l'orifice; or M. Duprez a reconnu qu'avec des précautions convenables, on peut maintenir le liquide ainsi suspendu dans un vase dont l'orifice n'est nullement étroit : il est parvenu à soutenir l'eau à un orifice de 49^{mm},85 de diamètre. Pour obtenir ce résultat, il faut que la surface du liquide à l'orifice soit plane et bien horizontale, condition que M. Duprez réalise au moyen d'un appareil ingénieux.

Il était difficile de comprendre comment les physiciens s'étaient arrêtés à l'idée de la pression atmosphérique comme cause unique des phénomènes de ce genre; en effet, si cette pression seule soutenait le liquide à un orifice étroit, elle devrait évidemment le soutenir à un orifice d'un diamètre quelconque; pourquoi donc y a-t-il une limite que l'on ne peut dépasser?

A l'époque où M. Duprez faisait ses observations, je m'occupais déjà des questions relatives à la stabilité des surfaces liquides; je ne tardai pas à trouver les principes qui servent de base à l'explication complète du phénomène dont il s'agit ici et à la détermination théorique du diamètre limite, et je suggérai ces principes à M. Duprez, comme il se plaît à le reconnaître dans son mémoire.

Supposons la surface du liquide à l'orifice mathématiquement plane et horizontale, et écartons toute cause accidentelle de trouble; il est clair que le liquide demeurera soutenu par la pression atmosphérique, quelque grand que soit le diamètre de l'orifice. Imaginons maintenant que la surface liquide

¹ MÉM. DE L'ACAD., t. XXVI, 1851, et t. XXVIII, 1854.



éprouve une déformation excessivement petite qui la rende concave sur une moitié environ de son étendue, et, par suite, convexe sur l'autre moitié; dès lors l'équilibre ne pourra plus avoir lieu au point de vue de la pesanteur : à cause de la différence de niveau, le liquide de la portion convexe tendra à tomber et à laisser entrer l'air par la portion concave; mais, d'autre part, une surface plane est, nous le savons (§ 2), stable au point de vue des forces moléculaires, quelle que soit sa grandeur, de sorte que, sous l'action de ces mêmes forces, la petite déformation tendra à s'effacer; en d'autres termes, les pressions capillaires correspondantes à la portion convexe l'emporteront sur celles qui appartiennent à la portion concave, et tendront conséquemment à rétablir la surface plane; il y aura donc lutte entre la pesanteur et les pressions capillaires.

Or, pour une même différence de niveau, les courbures des deux portions de la surface, et conséquemment les différences de pression capillaire, seront évidemment d'autant plus faibles que le diamètre de l'orifice sera plus grand; il y a donc nécessairement une limite de diamètre en deçà de laquelle les pressions capillaires prédominent, de façon que la surface liquide est stable, tandis qu'au delà c'est la pesanteur qui l'emporte et détermine ainsi l'écoulement du liquide.

D'après cela, pour arriver à une valeur théorique du diamètre limite, il suffirait de connaître, pour une petite différence de niveau, les rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires aux sommets respectifs de la portion convexe et de la portion concave en fonction du diamètre de l'orifice; avec ces éléments, on calculerait la différence des pressions capillaires correspondantes aux deux sommets en question, on l'égalerait au terme représentant l'action de la pesanteur, et l'on résoudrait l'équation par rapport au diamètre.

Mais comment se procurer ces données? Quand le diamètre de l'orifice est assez grand pour que le liquide refuse de se maintenir suspendu, l'échange entre ce liquide et l'air s'effectue d'une manière si rapide qu'il est impossible d'observer l'altération originaire de la surface. Mais M. Duprez surmonte la difficulté en employant mon procédé de l'immersion de l'huile dans le liquide alcoolique : un vase cylindrique en verre, de 8 centimètres de diamètre



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR. 61

intérieur et de 7 de hauteur, est introduit, l'ouverture en bas, dans le liquide alcoolique, puis exactement rempli d'huile à l'aide de moyens que M. Duprez indique; ce vase est soutenu à une certaine hauteur dans le liquide ambiant, de façon que la surface de l'huile à l'orifice soit libre, et la quantité d'huile est telle que cette surface est plane. Si les densités des deux liquides sont égales, la surface de l'huile conserve, on le comprend, sa forme plane; mais si l'on ajoute au liquide ambiant un excès croissant d'alcool, on atteint un point où la pesanteur commence à reprendre ses droits sur l'huile, et où la stabilité n'est plus possible; or il est aisé de rendre l'excès d'alcool assez petit pour que la déformation s'effectue avec une excessive lenteur, et qu'ainsi on puisse l'examiner parfaitement.

En opérant de cette manière, M. Duprez a constaté que la déformation consiste effectivement dans le partage de la surface en une seule portion convexe et une seule portion concave, et il a pu, à l'aide de moyens convenables, déterminer avec une approximation suffisante les éléments indiqués plus haut, ce qui le conduit à la formule

$$D = 5,485 \sqrt{h},$$

dans laquelle D est le diamètre limite, et h la hauteur à laquelle le liquide s'élèverait dans un tube capillaire d'un millimètre de rayon.

M. Duprez en déduit, pour l'eau distillée à la température ordinaire, $D=21^{\text{mm}},13$. Or, avant de recourir à la méthode ci-dessus, il était arrivé à la valeur approchée du diamètre limite relatif au même liquide, par une voie essentiellement différente: Avec un diamètre inférieur au diamètre limite, le liquide peut demeurer suspendu en présentant, à l'orifice, une surface convexe ou une surface concave; mais si, par un moyen approprié, on augmente jusqu'à un certain point cette convexité ou cette concavité, le liquide s'écoule. M. Duprez a mesuré, pour un nombre suffisant de diamètres, les flèches respectives des surfaces convexes et concaves à l'instant de la rupture de l'équilibre, et il les nomme *flèches de rupture*. Avec ces données, il lie d'une manière générale la flèche de rupture au diamètre correspondant par une équation empirique, et égalant, dans celle-ci, la flèche à zéro, il obtient le diamètre limite pour le cas d'une surface plane. Il trouve ainsi, à l'égard



de l'eau distillée, la valeur $21^{\text{mm}},44$, valeur bien peu différente de celle qui résulte de la méthode théorique.

L'accord si satisfaisant de ces deux valeurs, obtenues par des méthodes qui n'ont absolument rien de commun, ne peut laisser aucun doute sur la légitimité de la formule mentionnée plus haut, formule d'après laquelle le diamètre limite est proportionnel à la racine carrée de la hauteur capillaire du liquide.

Ces mêmes valeurs surpassent un peu le diamètre $19^{\text{mm}},85$ trouvé par l'expérience directe; mais cela doit être, car, dans cette expérience, il est impossible d'éviter de petites causes de trouble qui, lorsqu'on approche de la limite, suffisent pour amener la destruction de l'équilibre.

M. Duprez soumet la formule à de nouvelles vérifications, en l'appliquant à trois autres liquides, l'alcool, l'huile d'amande douce et l'éther sulfurique : il cherche également, pour chacun de ceux-ci, le diamètre limite par la méthode des flèches de rupture et par la formule, et il arrive encore à des résultats concordants. Voici, en effet, ces résultats :

Alcool	{	par les flèches, $15^{\text{mm}},14$,
		par la formule, $15^{\text{mm}},48$.
Huile d'amande	{	par les flèches, $15^{\text{mm}},00$,
		par la formule, $15^{\text{mm}},05$.
Éther	{	par les flèches, $12^{\text{mm}},02$,
		par la formule, $12^{\text{mm}},48$.

L'accord est moins satisfaisant pour l'éther, mais, à l'égard de ce liquide, M. Duprez n'a mesuré les flèches de rupture que dans un seul tube.

Enfin M. Duprez étend les mêmes principes à l'explication du fait bien connu, qu'il est impossible de verser un liquide dans un vase à goulot étroit; le liquide prend, dans l'orifice, une surface assez stable pour que l'échange avec l'air intérieur au vase ne puisse s'opérer.

§ 42. Je termine ici mon travail. L'ensemble de mes séries, à partir de la 2^{me} inclusivement, constitue la *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. C'est là le titre que devraient porter ces séries, et je le leur aurais donné si, en commençant, j'avais pu me rendre bien compte de la portée générale du sujet.



D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

65

Il me reste maintenant à payer un juste tribut de reconnaissance aux personnes qui, dans cette longue suite de recherches, ont bien voulu m'aider en effectuant, sous ma direction, les expériences ou les calculs; qu'il me soit permis de nommer ici MM. Lamarle, Donny et Kekule, professeurs à l'Université de Gand, M. Duprez, professeur à l'Athénée et à l'École industrielle de la même ville, et MM. Van der Mensbrugghe et Rottier, répétiteurs à l'Université; enfin, je veux qu'on le sache aussi, j'ai été activement secondé par mon fils Félix. Grâce soient donc rendues à tous ceux dont le bienveillant concours a permis au physicien frappé de cécité, de poursuivre sa route d'un pas ferme, et d'apporter son contingent de matériaux à l'édifice de la science.

FIN.





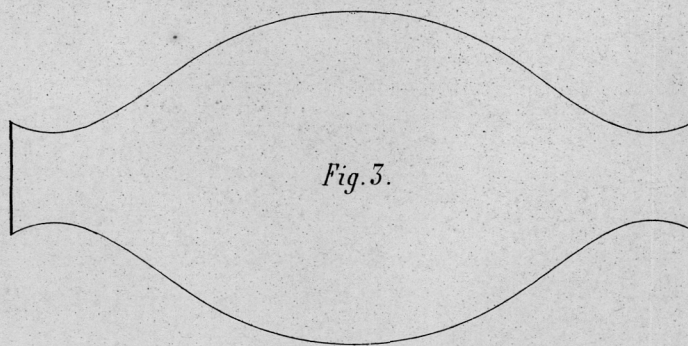
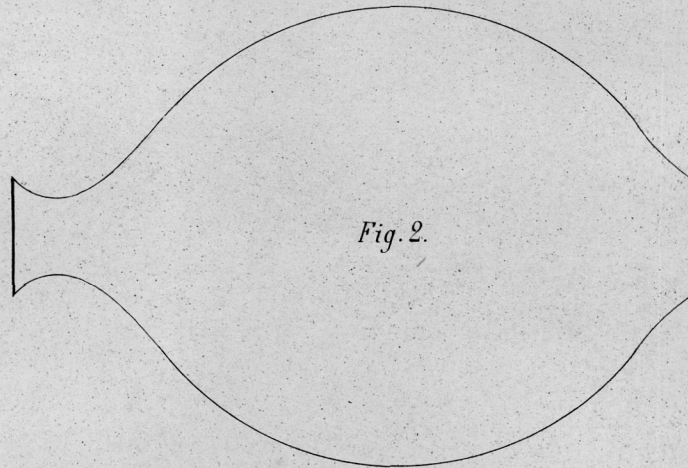
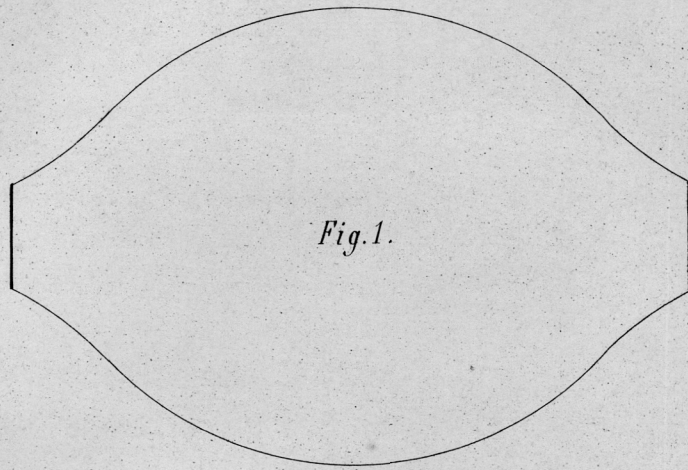




TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS LES ONZE SÉRIES.

PREMIÈRE SÉRIE ¹.

Appareils et procédés. — Phénomènes dynamiques : figures que prend la masse liquide en rotation.

Comment on neutralise l'action de la pesanteur sur une masse liquide relativement considérable, tout en laissant cette masse libre d'obéir aux autres forces qui la sollicitent : immersion d'une masse d'huile d'olive dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité qu'elle. §§ 1 et 2.

Détail des opérations, et description du vase (voir, pour des améliorations, la table ci-après de la 2^{me} série). Lorsque la masse suspendue dans le liquide alcoolique n'est adhérente à aucun solide, elle prend, quel que soit son volume, la forme d'une sphère parfaite. . . . §§ 5 à 8.

Causes perturbatrices et moyens de les écarter (voir aussi à la table de la 2^{me} série). . . . §§ 6, 7, et 24 à 26.

Comment on imprime à la sphère d'huile un mouvement de rotation sur elle-même. Quand ce mouvement est lent, on voit simplement la masse s'aplatir à ses pôles et se renfler à son équateur. Analogie avec l'aplatissement des planètes, bien que les forces attractives en jeu dans les deux cas suivent des lois très-différentes. . . . §§ 9, 10 et 18.

Pour une vitesse plus grande et convenable, la masse, après s'être fortement aplatie, se creuse à ses pôles, puis se transforme en un anneau parfaitement régulier. Comparaison avec l'anneau de Saturne. . . . §§ 11 à 14.

Considérations sur la génération de la forme annulaire tant dans les masses célestes que dans notre masse d'huile. . . . §§ 15 à 17.

Lorsque, par certaine manœuvre, on empêche l'anneau d'huile de revenir sur lui-même, il se désunit, et se résout en plusieurs sphères isolées; celles-ci continuent, pendant quelque temps, à tourner autour du centre de l'anneau originaire, et, presque toujours, quelques-unes d'entre elles prennent, au moment de leur formation, un mouvement de rotation sur elles-mêmes, dans le même sens que celui de l'anneau. . . . § 19.

Conversion d'une veine d'huile en sphères isolées. . . . § 20.

Par une modification de l'expérience de l'anneau, on réalise une imitation du système de Saturne, savoir une sphère d'huile isolée au milieu d'un anneau de même substance. . . § 21.

Quand on continue à faire tourner la masse d'huile en employant des vitesses insuffisantes pour la transformer en anneau, elle finit par prendre des formes qui semblent être des ellip-

¹ Je rappellerai ici que le titre de cette 1^{re} série, titre un peu différent de celui des séries suivantes, est : *Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur.*



soïdes à trois axes. Rapprochement avec les ellipsoïdes trouvés par MM. Jacobi et Liouville pour le cas de l'attraction universelle §§ 10, 22 et 25.

DEUXIÈME SÉRIE.

Phénomènes statiques — Principes théoriques. — Sphère liquide et figures composées de portions de sphère. — Figures terminées par des surfaces planes. — Cylindre liquide. — Théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

Considérations préliminaires sur les figures d'équilibre d'une masse liquide supposée sans pesanteur, à l'état de repos, et adhérente à un système solide. — Récapitulation des principes de la théorie des pressions capillaires. §§ 1 à 4, et 6^{tes}.

R et R' étant les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface libre de la masse, la condition générale à laquelle doit satisfaire cette surface est $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$. — Les surfaces satisfaisant à cette condition sont aussi celles dont la courbure moyenne est constante. §§ 5 et 6.

La figure d'équilibre que prend, à l'état de repos, la masse d'huile immergée dans le liquide alcoolique et adhérente à un système solide, est identiquement la même que si la masse adhérente au système solide était réellement dépourvue de pesanteur et se trouvait placée dans le vide. Quand une surface satisfait à la condition de l'équilibre, on peut indifféremment supposer le liquide d'un côté ou de l'autre de cette surface (voir aussi la table de la 5^{me} série). . . . § 8.

Appareils et manipulations; modifications au vase de la série précédente, ainsi qu'aux précautions. §§ 9 et 41.

Confirmations expérimentales du principe consistant en ce que les forces d'où dépend la figure de la surface libre de la masse émanent toutes d'une couche superficielle excessivement mince §§ 10 à 16, et troisième note du § 41.

Expériences à l'appui de la théorie des pressions capillaires §§ 17, 21 et 22.

Formation d'une lentille liquide bi-convexe dans un anneau en fil de fer. Phénomène curieux qui se produit quand on amincit cette lentille jusqu'à ce qu'elle se perce § 18 et 19.

Pour donner à la masse ses diverses figures d'équilibre, on peut, en général, employer des systèmes solides en simples fils de fer § 20.

Formation d'une lentille bi-concave dans un anneau cylindrique. §§ 21 et 22.

Par l'exhaustion graduelle du liquide qui la constitue, cette lentille ne se perce pas, mais se convertit en une lame mince de forme plane § 25.

Principe nouveau concernant les lames liquides : *Pour toute lame liquide dont l'épaisseur serait moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire, la pression ne dépendrait pas seulement des courbures des surfaces; elle varierait encore avec l'épaisseur de la lame.* § 24.

Dans toute figure composée, soit en totalité, soit en partie, de lames liquides, l'équilibre n'existe que relativement à la forme générale : les lames vont en s'amincissant, et la figure tend vers un état d'équilibre complet, dans lequel l'épaisseur des lames serait moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire §§ 25 à 26, 52 et 55.

Possibilité d'arriver ainsi à une limite très-petite supérieure à ce rayon § 27.

Principe général de la formation des lames par l'exhaustion du liquide qui constitue une figure pleine §§ 28 et 51.



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

5

- Lunette à lentilles liquides § 29.
- Polyèdres entièrement liquides à l'exception de leurs arêtes § 50.
- Conversion de ces polyèdres en systèmes laminaires par l'exhaustion de leur liquide. §§ 51 à 55.
- Phénomènes curieux que présente cette conversion dans les cas du cube et de l'octaèdre régulier §§ 55 et 55.
- Dispersion de la lumière par un prisme triangulaire liquide § 56.
- Motifs pour essayer de réaliser des figures d'équilibre de révolution autres que la sphère § 57.
- Réalisation du cylindre liquide entre deux anneaux; les bases sont alors des portions convexes de sphère § 58.
- Détermination théorique de la courbure de ces bases, et vérification expérimentale §§ 59 à 42.
- L'emploi d'un système solide auquel on fait adhérer la masse liquide, permet d'obtenir des portions isolées de figures d'équilibre qui, dans leur état complet, s'étendent à l'infini dans certains sens § 43.
- Le cylindre liquide ne constitue une figure d'équilibre stable que lorsque le rapport entre sa longueur et son diamètre est inférieur à une certaine limite, dont la valeur est comprise entre 3 et 5,6 (voir, pour la recherche de la valeur exacte, la table de la 11^{me} série). §§ 44 à 46.
- Quand le cylindre ne dépasse pas trop la limite de stabilité, son altération spontanée consiste dans le partage de la figure en une portion étranglée et une portion renflée, lesquelles se prononcent de plus en plus, jusqu'à ce que la figure se sépare en deux masses inégales. *Ibid.*
- Un cylindre liquide dont la longueur est considérable par rapport au diamètre, se convertit spontanément, par la formation d'étranglements et de renflements équidistants qui se prononcent de plus en plus, en une suite de sphères isolées. Première expérience conduisant à ce résultat : veine d'huile s'écoulant dans un liquide alcoolique un peu moins dense que l'huile §§ 47 à 49.
- Autres expériences : cylindres de mercure de petits diamètres et de grandes longueurs relatives, réalisés dans l'air sur un plan solide horizontal, et maintenus par des entraves latérales qu'on enlève pour observer la transformation spontanée. §§ 50 et 51.
- Je nomme *divisions* d'un cylindre liquide chacune des portions de ce cylindre qui, dans la transformation, fournit une sphère isolée. Calcul de la longueur d'une division d'après le nombre des sphères isolées et les grosseurs des deux masses extrêmes §§ 52 et 53.
- Résultats des expériences avec les cylindres de mercure. Ils conduisent à cette conclusion, que, pour un même liquide, le rapport de la longueur des divisions au diamètre du cylindre est constant §§ 54 et 55.
- Ce rapport varie avec la nature du liquide et les résistances qui gênent la transformation §§ 56, 58 et 59.
- Mais ce même rapport a une limite inférieure, qui est celle de la stabilité § 57.
- Dans le cas des liquides à faible viscosité, le rapport dont il s'agit ne surpasse pas de beaucoup cette limite, et il l'atteindrait très-probablement avec un liquide tout à fait exempt de viscosité § 60.
- Tant que le rapport entre la longueur du cylindre et son diamètre n'excède pas une fois et demie la limite de stabilité, la transformation ne peut s'effectuer que par un seul étranglement et un seul renflement § 61.
- A la fin de la transformation, les masses qui doivent constituer les sphères isolées demeurent, pendant quelques instants, unies deux à deux par un mince filet, lequel, lui-même, se transforme en sphérules. Analogie entre la formation de ces filets et celle des lames § 62.



TABLE ANALYTIQUE

L'expérience conduit à la conclusion très-probable que, dans le cas au moins d'un liquide peu visqueux, le temps qui s'écoule depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets, est exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre §§ 65 à 65.

Pour un même liquide et un même diamètre, lorsque, par une cause quelconque, la longueur des divisions augmente, la durée de la transformation devient moindre. § 66.

Limite inférieure de la durée de la transformation pour un cylindre de mercure d'un diamètre donné § 67.

Résumé des faits et des lois concernant les cylindres liquides instables § 68.

Une veine liquide s'écoulant verticalement de haut en bas par un orifice circulaire, tend à constituer une sorte de cylindre très-allongé; la transformation doit conséquemment s'y produire, et les divisions, naissant à la section contractée et descendant avec le liquide pendant qu'elles se prononcent de plus en plus, opèrent leur séparation à une certaine distance de l'orifice. De là, avec tous ses détails, la constitution des veines telle qu'elle a été étudiée par Savart §§ 69 et 70.

De là aussi, du moins dans le cas d'une charge suffisamment forte, les deux lois que Savart a constatées relativement à la longueur de la partie continue de la veine §§ 71 à 75.

En conséquence encore de la même théorie, ces lois doivent être d'autant moins bien satisfaites que les charges sont plus faibles; examen de toutes les influences qui résultent, à cet égard, de la diminution des charges. (Voir, pour une petite rectification, la table de la 5^{me} série) §§ 76 à 79.

Les résultats des observations de Savart sont d'accord avec les conclusions de cet examen §§ 80 et 81.

Notre théorie conduit également aux deux lois trouvées par Savart relativement aux sons produits par le choc de la partie discontinue de la veine contre une membrane tendue. (Voir aussi la table de la 5^{me} série) § 82.

Les propriétés des cylindres liquides permettent d'assigner approximativement la valeur du rapport entre la longueur des divisions naissantes et le diamètre de la section contractée dans une veine d'eau qui s'écoule sous une forte charge, et cette valeur s'accorde avec celle qu'on déduit des observations de Savart. (Voir encore la table de la 5^{me} série) §§ 82 et 85.

Enfin notre théorie fait prévoir que, pour une même charge et un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine doit varier avec la nature du liquide. Les observations de Savart confirment cette déduction § 84.

La conversion spontanée en une suite de sphères isolées n'appartient pas exclusivement au cylindre, elle paraît se produire à l'égard de toute figure liquide dont une dimension est considérable relativement aux deux autres. De là l'analogie de constitution, observée par Savart, entre les veines courbes et les veines droites. § 85.

Quelques mots sur la théorie proposée par Savart § 86.

TROISIÈME SÉRIE.

Théorie de l'influence des mouvements vibratoires sur les veines liquides.

Notre théorie de l'action des mouvements vibratoires repose en partie sur une idée émise par Savart. § 1.



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

5

- Légère rectification aux §§ 76, 77, 82 et 83 de la 2^{me} série. §§ 2, 2^{bis} et 30.
 Récapitulation des faits observés par Savart. § 5.
 La durée de chacune des vibrations correspondantes au son propre à la veine est égale à celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée § 4.
 Quand des vibrations de même période que celles du son propre à la veine sont communiquées au liquide du vase, elles concourent avec les forces moléculaires qui produisent la transformation spontanée, de sorte que chaque division quitte la section contractée dans une phase plus avancée de sa transformation, et qu'en outre la vitesse de cette transformation est accrue. §§ 5 à 7.
 De là le raccourcissement de la partie continue, l'augmentation apparente de l'épaisseur de la portion limpide, et les oscillations de forme qu'exécutent les masses isolées § 8.
 De là aussi le fait que la longueur et le diamètre des ventres ainsi que le diamètre des nœuds augmentent avec la charge et avec le diamètre de l'orifice § 9.
 De là également les apparences que présente la veine lorsqu'elle est simplement reçue dans un vase posé sur le sol § 10.
 Le fait que les modifications de la veine sont d'autant plus prononcées et plus régulières que les vibrations communiquées sont plus intenses et plus exactement à l'unisson du son propre à la veine, découle encore nécessairement de notre théorie §§ 11 et 17.
 Dans le cas où les vibrations propagées ne sont pas à l'unisson du son propre à la veine, mais s'en écartent extrêmement peu, notre théorie rend complètement raison des phénomènes. Elle s'applique aussi au cas où l'écart est plus considérable; seulement c'est d'une manière moins nette, mais ici les énoncés de Savart manquent de précision §§ 12 à 14.
 Notre théorie explique les phénomènes qui se produisent quand on reçoit la partie discontinue de la veine sur un corps sonore qui ne peut rendre qu'un son déterminé §§ 15 et 16.
 Elle explique de même le système de ventres et de nœuds, de moindres dimensions qu'on observe, dans l'axe de la veine, à partir de l'extrémité inférieure de la partie continue, quand l'instrument qui rend l'unisson est mis en contact avec la paroi du vase; elle indique, en outre, l'origine des très-petites sphérules souvent projetées à l'extérieur. §§ 18 et 19.
 Enfin elle assigne la cause des phénomènes qui ont lieu quand l'instrument en contact avec le vase rend un son différent de l'unisson. §§ 20 à 25.

Cas des veines courbes.

- Cause de la gerbe que forme la partie discontinue quand la veine est lancée sous une obliquité convenable § 23.
 Pourquoi l'influence d'un certain son réduit une semblable veine à un jet unique présentant un système régulier de ventres et de nœuds § 26.
 Les sons qui changent toujours la gerbe en deux et en trois jets distincts avec des ventres et des nœuds, sons que Savart n'indique pas, sont respectivement l'octave grave et la double octave grave du son ci-dessus. Entre la tierce au-dessous de l'octave grave et la double octave grave, on obtient tantôt deux, tantôt trois jets, et quelquefois un jet unique § 27.
 Essai d'explication de ces phénomènes §§ 28 et 29.
 Pourquoi, toutes choses égales d'ailleurs, le son qui produit sur la veine le maximum d'influence est d'autant plus bas que la direction suivant laquelle la veine est lancée s'écarte davan-



tage de la verticale descendante § 50.
 Note sur les théories de la veine qui ont paru depuis la publication de ma 2^{me} série . Page 55.

QUATRIÈME SÉRIE.

Recherche des formes générales et de toutes les variations des figures d'équilibre de révolution, en ne s'appuyant que sur l'expérience et sur le simple raisonnement appliqué à la formule $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$.

M. Delaunay a trouvé, par le calcul, une génération remarquable des lignes méridiennes des surfaces dont nous nous occupons; Beer a déterminé ces lignes au moyen des fonctions elliptiques; nous nous proposons d'arriver à leurs formes générales et à tous leurs détails sans recourir au calcul. § 1.

La sphère et le plan sont les seules figures d'équilibre de révolution dont les lignes méridiennes rencontrent l'axe § 2.

Les lignes méridiennes des figures d'équilibre n'ont aucun point de rebroussement . . . § 5.

Figure d'équilibre suivant laquelle se dispose, au sein du liquide alcoolique, une masse d'huile qui enveloppe une partie de la longueur d'un cylindre solide qu'elle mouille § 4.

La théorie indique qu'une masse d'huile d'un volume approprié adhérente à deux disques solides égaux, en regard et convenablement écartés, doit pouvoir constituer une figure d'équilibre identique à la précédente. § 5.

Cette même figure n'est qu'une portion de la figure d'équilibre complète; la ligne méridienne de celle-ci est une courbe ondulée s'étendant indéfiniment le long de l'axe, dont elle se rapproche et s'éloigne périodiquement de quantités égales, de sorte que la figure d'équilibre complète se compose d'une suite indéfinie de renflements et d'étranglements égaux; nous la nommons l'*onduloïde* § 6.

L'onduloïde est une figure d'équilibre à courbure moyenne positive § 7.

L'onduloïde complet varie de forme entre trois limites: la première est le cylindre; la seconde est une suite de sphères égales qui se touchent sur l'axe; la troisième consiste en un étranglement unique s'étendant à l'infini autour de son cercle de gorge; nous précisons cette dernière plus loin §§ 8 et 9.

Quand on essaie de réaliser, entre deux disques solides, la portion d'onduloïde terminée par les cercles de gorge de deux étranglements consécutifs, l'expérience conduit à la conclusion très-probable que la figure est alors à sa limite de stabilité; il suit de là que l'onduloïde indéfini est une figure d'équilibre instable §§ 10 et 11.

Portions d'onduloïdes les unes renflées, les autres étranglées, obtenues entre deux anneaux égaux et en regard §§ 12 et 15.

Quand le rapport de l'écartement des anneaux à leur diamètre n'excède pas $\frac{2}{3}$ à peu près, on arrive, en diminuant progressivement la masse, à deux figures différant de l'onduloïde. L'une d'elles est à courbure moyenne nulle; sa ligne méridienne est une chaînette, dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à l'axe de révolution, et dont le sommet, tourné vers celui-ci, en est distant d'une quantité égale au rayon de courbure de ce sommet. Nous donnons à la figure engendrée le nom de *caténoïde* § 14.

En vertu d'un principe posé dans la 2^{me} série, on a deux figures d'aspects différents, suivant qu'on suppose le liquide d'un côté ou de l'autre de la surface caténoïde § 15.

Quand l'écartement des anneaux surpasse les $\frac{2}{3}$ environ de leur diamètre, il n'y a plus de



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

7

caténoïde possible entre eux. Pour tout écartement moindre, il y a toujours deux caténoïdes distincts, qui s'éloignent d'autant moins l'un de l'autre que l'écartement est plus voisin de la limite ci-dessus, et qui se confondent à cette limite même § 16.

Tous les caténoïdes sont des figures semblables § 17.

Des deux caténoïdes possibles entre des anneaux dont l'écartement est inférieur à la limite, le plus rentré est instable § 18.

C'est le caténoïde qui constitue la troisième limite des variations de l'onduloïde . . . § 19.

Particularités curieuses qu'a présentées la recherche expérimentale de la hauteur limite du caténoïde partiel § 20.

Pourquoi le caténoïde partiel de plus grande hauteur, bien qu'étant théoriquement à sa limite de stabilité, est cependant parfaitement stable quand il est réalisé dans ce mode d'expérience. (Voir aussi les tables de la 5^{me}, de la 10^{me} et de la 11^{me} série.) § 21.

Quand l'écartement des anneaux est inférieur aux $\frac{2}{3}$ de leur diamètre, la poursuite de l'exhaustion de l'huile conduit à une nouvelle figure. Pour étudier celle-ci convenablement, il faut substituer des disques aux anneaux. § 22.

La ligne méridienne complète de cette nouvelle figure se compose d'une suite indéfinie de nœuds égaux, tournant leurs sommets vers l'axe, et reliés par des arcs intermédiaires. Nous appelons *nodoïde* la figure engendrée §§ 25 à 55.

Réalisation de la portion du nodoïde engendrée par un nœud entier de la ligne méridienne. (Voir aussi la table de la 5^{me} série.) § 27.

Réalisation de la portion engendrée par un arc de la même ligne convexe vers l'extérieur. § 51.

On ne peut se représenter le nodoïde indéfini qu'à l'état de simple surface; pourquoi §§ 29 et 52.

Le nodoïde est, comme l'onduloïde, susceptible de variations; celles-ci ont également trois limites, qui sont : la suite de sphères égales tangentes sur l'axe, le caténoïde, et un cylindre placé transversalement par rapport à l'axe de révolution, qui en est à une distance infinie §§ 28 et 54 à 57.

Les seules figures d'équilibre de révolution sont : la sphère, le plan, le cylindre, l'onduloïde, le caténoïde et le nodoïde § 58.

CINQUIÈME SÉRIE.

Lames liquides. Leurs figures d'équilibre. — Liquide glycérique. — Systèmes laminaires des charpentes polyédriques et leurs lois. — Pression d'une bulle creuse sur l'air intérieur. — Recherche d'une limite supérieure très-petite au rayon de l'attraction moléculaire.

Lames liquides soustraites à l'action de la pesanteur : lames d'huile dans le liquide alcoolique §§ 2 à 8.

Caténoïde-laminaire d'huile entre deux anneaux §§ 2, 5 et 11.

Quand on dépasse l'écartement limite, ce caténoïde se désunit; le phénomène est accompagné de la formation d'un filet laminaire, qui se transforme en sphérules. Réalisation de la portion du nodoïde engendrée par un nœud de la ligne méridienne, dans le cas où ce nœud approche d'une circonférence de cercle § 4.

Réalisation de grosses bulles laminaires d'huile gonflées avec du liquide alcoolique au sein du



même liquide	§§ 5 à 7.
Les figures d'équilibre d'une lame liquide soustraite à l'action de la pesanteur sont identiquement les mêmes que celles d'une masse pleine dans la même condition	§§ 9 à 11.
Les figures que prennent les lames liquides réalisées dans l'air, ne peuvent différer d'une manière appréciable de celles que prendraient des lames liquides sans pesanteur	§ 12.
Liquide donnant, dans l'air, des lames de très-grande persistance; nous le nommons, à cause de sa composition, <i>liquide glycérique</i> . Sa préparation. (Voir, pour de meilleurs procédés, la table de la 7 ^{me} série.)	§ 15.
Appareils et procédés pour la réalisation, à l'état laminaire, avec le liquide glycérique, des figures d'équilibre de révolution	§ 14.
Réalisation de toutes ces figures	§§ 15 à 17.
Pourquoi le caténoïde laminaire perd sa stabilité en atteignant la hauteur limite	§ 15.
Réalisation, avec le même liquide, des systèmes laminaires à l'intérieur des charpentes polyédriques en fil de fer	§ 18.
Perfection et beauté de ces systèmes. Lois auxquelles ils sont soumis	§ 19.
La considération des deux faces de la lame qui constitue une figure d'équilibre, vérifie un principe de la 2 ^{me} série	§ 20.
La pression exercée par une sphère laminaire sur l'air emprisonné est en raison inverse du diamètre de cette sphère	§§ 21 et 22.
Cette pression est la somme des pressions égales exercées individuellement par chacune des deux faces de la lame. Son expression en fonction du diamètre de la bulle, de la densité et de la hauteur capillaire du liquide	§§ 25 et 24.
Recherches antérieures relatives à cette même pression	§ 25.
Appareil et procédés pour la vérification expérimentale de la formule représentant la pression dont il s'agit	§§ 26 et 27.
Résultats des expériences	§§ 28 et 29.
Pour que la pression satisfasse à la formule, il faut que l'épaisseur de la lame ne soit pas inférieure au double du rayon de l'attraction moléculaire; au-dessous de cette limite la pression serait plus faible	§ 30.
Expériences déduites de là, et conduisant à la conclusion probable que le rayon de l'attraction moléculaire, dans le liquide glycérique, est moindre que $\frac{1}{17000}$ de millimètre. §§ 31 à 35.	§§ 31 à 35.
Influences exercées sur les bulles de liquide glycérique par la nature des solides auxquels elles adhèrent et par l'humidité ambiante	§ 52.
Note sur la préparation du liquide glycérique avec les glycérides impures du commerce	Page 45.

SIXIÈME SÉRIE.

Théorie de la génération des lames liquides. — Lois qui régissent les systèmes laminaires, théorie et expériences; constitution de la masse qui se forme sur certains liquides. — Mode de génération des systèmes laminaires. — Conditions pour qu'une charpente polyédrique donne un système laminaire parfait, un système laminaire imparfait, ou un système laminaire nul.

La formation des lames liquides peut s'expliquer par la cohésion et la viscosité : comme exemple la calotte laminaire développée à la surface d'un liquide par l'ascension d'une bulle



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

9

d'air § 1.

Cette calotte doit constituer une portion de sphère; mais elle ne peut jamais atteindre l'hémisphère complet. Elle approche d'autant plus de ce dernier qu'elle est plus grande. §§ 2 à 5.

La calotte est reliée au liquide sur lequel elle repose par une petite masse à courbures méridiennes concaves. Particularités que présente la portion de la surface du liquide circonscrite par cette petite masse; expérience qui les constate § 3.

Pour des calottes dont la base a moins de trois centimètres de diamètre, la différence d'avec un hémisphère devient sensible à l'œil, et la calotte se montre d'autant plus affaissée qu'elle est plus petite §§ 4 et 5.

Causes de l'aminçissement graduel de la lame qui constitue une calotte (voir, pour une rectification, la table de la 9^{me} série). § 6.

Quand deux calottes laminaires sont accolées et qu'ainsi les masses d'air qu'elles emprisonnent sont séparées par une cloison laminaire, celle-ci n'est plane que dans le cas où les rayons des deux calottes sont égaux; dans le cas contraire, elle est de courbure sphérique; formule qui donne la valeur de son rayon. § 7.

Les deux calottes et la cloison aboutissent à leur arête de jonction sous des angles égaux ou sensiblement tels § 8.

Cause de la génération de la cloison dans le cas où deux calottes primitivement séparées viennent à s'unir § 9.

Considérations théoriques sur la détermination du rayon de la cloison. Construction géométrique de la base du système des deux calottes et de leur cloison § 10.

Expériences qui vérifient l'exactitude de cette construction § 11.

Expérience relative à la génération de la cloison § 12.

Cas de trois calottes accolées. Construction géométrique de la base du système . §§ 13 et 14.

Expériences de vérification § 15.

Cas de quatre calottes accolées; deux dispositions possibles du système. Le résultat de l'expérience rapproché des systèmes laminaires des charpentes conduit à la conclusion que la jonction de trois lames seulement à une même arête liquide sous des angles égaux, est une loi générale des assemblages laminaires § 16.

C'est également une loi générale de ces assemblages qu'à un même point liquide n'aboutissent jamais que quatre arêtes liquides faisant entre elles, en ce point, des angles égaux. Valeur de ces angles. L'égalité des angles entre les lames et celle des angles entre les arêtes liquides sont des conséquences l'une de l'autre. §§ 17 et 18.

Mesures de vérification prises sur des systèmes à lames planes § 19.

Vérifications approximatives par des systèmes contenant des lames courbes. Lame polygonale centrale parallèle aux bases dans les systèmes des charpentes prismatiques . §§ 20 et 25.

Faits qui établissent l'instabilité de tout système laminaire dans lequel plus de trois lames aboutiraient à une même arête liquide ou plus de quatre arêtes liquides à un même point liquide § 21.

Constitution de la mousse formée sur les liquides; vérification expérimentale . . . § 22.

Théorie de la génération des lames qui partent des fils solides d'une charpente quand on retire celle-ci du liquide § 23.

Manière dont les lames qui doivent constituer le système se disposent pendant qu'on retire la charpente du liquide; cas des charpentes prismatiques retirées leur axe étant ver-



tical	§§ 24 et 25.
Comment ces systèmes se complètent	§§ 26 et 27.
Cas d'une charpente symétrique autour d'un axe passant par un sommet, et retirée du liquide par ce sommet	§ 28.
Pourquoi les systèmes ne contiennent aucun espace fermé de tous les côtés par des lames. Pourquoi le système de l'octaèdre régulier est formé de lames courbes quand on le réalise avec de l'huile dans le liquide alcoolique.	§ 29.
Dans les charpentes des prismes triangulaire et pentagonal, on obtient deux systèmes très-différents, l'un avec, l'autre sans lame polygonale centrale, suivant la hauteur du prisme par rapport aux dimensions de la base	§§ 20 et 50.
Dans les charpentes prismatiques d'un plus grand nombre de côtés, les arêtes liquides qui partent des sommets de la lame centrale ne vont point s'attacher aux sommets de la charpente, mais en des points des arêtes latérales de celle-ci. Les systèmes de ce genre, je les nomme <i>imparfaits</i>	§§ 26 et 51 à 55.
Explication théorique de ce fait	§ 54.
Les côtés de la lame polygonale centrale sont d'autant plus courbes que le nombre des côtés du prisme est plus grand; pourquoi.	§ 53.
Avec des charpentes prismatiques hexagonale et heptagonale dont la hauteur est environ $2\frac{1}{2}$ fois le diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base, on obtient, quand on les retire du liquide leur axe étant horizontal, trois systèmes différents sans lame centrale; l'un de ceux de la charpente heptagonale est instable. Ce qui a lieu pour des hauteurs plus grandes. Cas du prisme octogonal	§ 56.
Cause d'une petite irrégularité dans le système de la pyramide quadrangulaire, quand la hauteur n'est pas assez grande par rapport au côté de la base	§ 57.
Suivant les valeurs des angles dièdres du polyèdre représenté par une charpente, celle-ci donne un système parfait, un système imparfait, ou un système nul. Ce que j'entends par un système nul	§§ 58 et 59.
Modifications curieuses des systèmes; expériences de M. Van Rees.	§ 40.
Les systèmes laminaires persistent moins longtemps que les figures formées d'une seule lame; pourquoi. Tout système laminaire se dispose de manière que la somme des aires de ses lames soit un minimum	§ 41.

SEPTIÈME SÉRIE.

Nouvelle étude du liquide glycérique; procédés de préparation beaucoup plus certains et plus efficaces que les premiers. — Théorie de la génération des lames liquides (suite); applications. — Différentes espèces de lames liquides. — Théorie de la génération des filets liquides. — Principe général concernant la réalisation, à l'état laminaire, des surfaces à courbure moyenne nulle.

La complète efficacité des procédés de la 5 ^{me} série, pour la préparation du liquide glycérique, dépend de la qualité du savon de Marseille	§ 4.
Les faits paraissent indiquer qu'il se forme, dans le liquide glycérique, une combinaison définie, que celle-ci constitue la partie active, et que les substances inertes ou nuisibles s'isolent à l'état de précipité, surtout par une température basse. De là les nouveaux procédés	§§ 2 à 5.
Procédé d'été	§ 6.



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

44

- Dans les meilleures conditions, avec un liquide ainsi préparé, une bulle d'un décimètre de diamètre peut persister, à l'air libre de l'appartement, pendant 48 heures. Précautions . § 7.
- Résultats des essais; tableau § 8.
- Procédé d'hiver. § 9.
- Résultats des essais; tableau. Les persistances sont beaucoup plus inégales qu'en été; cause probable de cette inégalité § 10.
- Quand une bulle dure longtemps, l'épaisseur de la lame devient sensiblement uniforme; en outre, les teintes montent d'abord vers les premiers ordres, puis redescendent jusqu'aux derniers. Explication (voir aussi la table de la 8^{me} série) §§ 11 et 12.
- Altération lente du liquide glycérique; un liquide bien préparé peut ne devenir impropre aux expériences qu'après plus de deux ans. § 15.
- On obtient, par un procédé bien plus simple, un liquide meilleur encore, en substituant de l'oléate de soude pur au savon de Marseille; la persistance maxima peut alors dépasser 24 heures. Essais avec des liquides de cette espèce; tableau des résultats. §§ 14 et 15.
- Importance des proportions dans la préparation des liquides § 16.
- Bulles d'un décimètre formées en vase clos; conditions de la meilleure réussite; la persistance peut alors dépasser 54 heures (voir aussi la table de la 8^{me} série) § 17.
- Essais avec une glycérine autre que celle de Price, et avec un savon autre que le savon de Marseille. §§ 18 et 19.
- Différentes espèces de lames liquides, outre les calottes et les lames engendrées dans les charpentes qu'on retire du liquide glycérique. Bulles laminaires de mercure obtenues par M. Melsens. Théorie de leur génération. § 20.
- La lame qui se développe pendant qu'on soulève hors du liquide un anneau horizontal, est une portion de caténoïde. Sa limite de stabilité. Expérience de vérification . . . §§ 21 et 22.
- Application: théorie de la formation des bulles laminaires complètes par insufflation . § 25.
- Théorie de la conversion des polyèdres d'huile pleins en systèmes laminaires. . . . § 24.
- Lames planes en travers d'un flacon; théorie de leur génération. Propriétés remarquables qu'elles présentent quand elles sont formées de liquide glycérique § 25.
- Lames qui résultent de l'étalement d'un liquide en mouvement: lames de Savart développées par le choc d'une veine liquide contre un petit disque solide § 26.
- Théorie de leur génération et de l'influence qu'exercent sur leur forme la charge, le diamètre de l'orifice, la température et la nature du liquide § 27.
- Lames de Savart résultant du choc mutuel de deux veines opposées. Lois qui les régissent § 28.
- Théorie de la génération de ces lames § 29.
- Travail de M. Hagen qui attribue à la tension la limitation de ces mêmes lames . . . § 30.
- Recherches de M. Magnus sur les mêmes lames encore § 31.
- Explication de la formation des gouttes lancées par leur bord; expérience à l'appui . . § 32.
- Remarques sur les auréoles signalées par Savart. § 33.
- Lames de M. Magnus, produites par deux veines qui se rencontrent en formant un angle; explications théoriques. § 34.
- Bulles laminaires complètes obtenues par mon fils, puis par M. Van der Mensbrugghe, en lançant un liquide obliquement en l'air de manière à l'étaler en nappe; théorie du phénomène § 35.



Autre moyen de produire des bulles laminaires complètes sans insufflation	§ 56.
Observation, par MM. Minary et Sire, de petites bulles laminaires s'échappant d'un mélange fortement agité d'huile d'olive et d'acide sulfurique.	§ 57.
Veine laminaire lancée verticalement de haut en bas par un orifice en forme de fente rectiligne; cause de l'aspect qu'elle présente.	§ 58.
Lame lancée par une longue fente verticale s'étendant jusqu'au-dessus du niveau du liquide; son bord supérieur est rectiligne et incliné à l'horizon. Théorie. Résultats de Le François	§ 59.
Récapitulation des lames liquides au point de vue des différents procédés par lesquels on les réalise	§ 40.
Tous les liquides sont susceptibles de se convertir en lames minces.	§ 41.
Théorie de la génération des filets qui se produisent dans la séparation d'une figure instable en portions isolées	§§ 42 et 45.
Principe général qui permet de réaliser, à l'état laminaire, toute surface à courbure moyenne nulle dont on a l'équation en coordonnées finies ou la génération géométrique.	§ 44.

HUITIÈME SÉRIE.

Recherches des causes d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides; tension des surfaces liquides; principe nouveau concernant ces surfaces.

Considérations préliminaires; objet de cette série	§ 1.
D'après M. Gladstone, tous les liquides donnent des calottes à leur surface, mais la faculté de mousser abondamment dépend d'une propriété <i>sui generis</i> de certains liquides	§ 2.
Historique de la tension des couches superficielles. Segner: premier énoncé, mais incomplet, du principe de la tension	§ 3.
Leidenfrost: première constatation de la force contractile, et conséquemment de la tension, des bulles de savon; idées singulières	§ 3 ^{bis} .
Young: le principe de la tension traité d'une manière exacte; son application aux phénomènes capillaires	§ 4.
D ^r Hough: erreur dans la même application. Hypothèse sur la cause de la tension. De cette force naît une pression sur l'air intérieur aux bulles; loi erronée	§ 5.
M. Henry: énoncé net de la dépendance entre la pression d'une bulle et la tension de la lame; vraie loi de cette pression; expériences. On peut regarder M. Henry comme ayant prouvé le premier la réalité de la tension.	§ 6.
M. Hagen: nouvelle application de la tension aux phénomènes capillaires. La tension est indépendante des courbures. Plusieurs procédés pour la mesurer. Valeur de la tension de l'eau; elle décroît par l'exposition de ce liquide à l'air. La couche superficielle des liquides a moins de mobilité que l'intérieur. Hypothèse sur la cause de la tension. Valeurs des tensions de plusieurs liquides. La tension paraît être d'autant plus faible que le liquide mouille mieux les autres corps. C'est la tension qui limite le diamètre des disques liquides de Savart	§ 7.
La tension d'une lame est double de celle de la couche superficielle d'une masse pleine formée du même liquide. C'est sur la tension que repose le principe qui termine ma 6 ^{me} série	§ 8.



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

15

M. Lamarle : première démonstration théorique de l'existence de la tension. Démonstration par les sphères laminaires. On peut indifféremment considérer la tension comme une traction ou comme une force contractile. Expression de la tension en données mesurables. . . § 9.

Les expériences de ma 6^{me} série et les résultats du travail de M. Lamarle confirment l'indépendance entre la tension et les courbures . . . § 10.

Point de vue particulier sous lequel M. Lamarle envisage la tension . . . § 11.

M. Dupré : nouvelle démonstration de l'existence de la tension. Expériences simples constatant cette existence. Hypothèse sur la cause de la tension. Démonstration complète de l'indépendance entre la tension et les courbures. La tension des lames est indépendante de leur épaisseur tant que celle-ci n'est pas inférieure à une certaine limite extrêmement petite; accord avec les expériences de ma 5^{me} série. Influence de la température sur la tension; application aux lames. Loi du retrait d'une lame qui éclate. Loi de la diminution progressive d'une bulle qui se vide par le tube d'insufflation. Procédés nouveaux pour la mesure de la tension . § 12.

M. Van der Mensbrughe : nouveaux procédés pour la constatation et la mesure de la tension des lames. Lois de la forme que prend un fil flexible qui intercepte une portion d'une lame courbe, quand on crève cette portion. Remarques de M. Lamarle; vérifications expérimentales. Expérience curieuse . . . § 13.

M. Quincke : tension des surfaces solides; leurs valeurs sont énormes. . . § 15^{bis}.

Récapitulation des résultats relatifs à la tension . . . § 14.

Cause probablement vraie de la tension . . . § 15.

Expériences curieuses concernant l'effet de la chaleur sur la tension des lames. Modification, produite d'une autre manière, de la tension de l'une des lames d'un système . . . § 16.

Une lame n'a, par elle-même, pas plus de tendance à se rompre lorsqu'elle est mince que lorsqu'elle est épaisse; pourquoi les lames très-minces éclatent, en réalité, plus aisément . . . § 17.

Les lames employées dans cette série sont des calottes dont la base n'a que 10^{mm} à 12^{mm} de diamètre; pourquoi. Procédé et précautions . . . § 18.

L'observation de ces calottes conduit à partager les liquides, au point de vue de leurs lames, en trois catégories principales, dont les caractères généraux sont :

Première : peu ou point de mousse, impossibilité du gonflement en bulles, courte durée des lames, absence de couleurs sur les calottes ou coloration tardive et seulement naissante.

Deuxième : se distingue de la précédente par une coloration prompte, prononcée et montrant les teintes de tous les ordres.

Troisième : mousse abondante et très-durable, facilité du gonflement en bulles, grande durée des calottes, phase incolore en général très-notable et quelquefois fort longue.

Liquides intermédiaires . . . § 19.

Faits particuliers relatifs à chacun des liquides de la première catégorie soumis à l'expérience. Système minime de petits anneaux; influence singulière de l'évaporation . . . § 20.

Idem à l'égard de la deuxième catégorie. Disposition inverse des teintes, accusant une épaisseur croissante de la base au sommet; ces teintes ne descendent pas. Phénomène singulier offert par l'essence de térébenthine. . . § 21.

Idem à l'égard de la troisième catégorie. Calottes devenant entièrement noires; calottes qui retournent ensuite à l'état incolore; calottes sans phase blanche; calottes présentant successivement deux phases blanches avant leur coloration définitive . . . § 22.



- Idem à l'égard des liquides intermédiaires. L'un d'eux, bien que fournissant une mousse abondante et durable, ne se laisse pas gonfler en bulles § 25.
- Causes qui doivent influencer sur l'amincissement de la lame qui constitue une calotte, et produire soit un décroissement, soit un accroissement, soit une uniformité d'épaisseur de la base au sommet ; accord avec les faits § 24.
- Expérience relative à l'une de ces causes § 25.
- Les lames de la première et de la troisième catégorie s'amincissent très-lentement, tandis que celles de la deuxième s'amincissent très-vite. La viscosité telle qu'on l'entend n'est pas la cause de cette différence; on est conduit à attribuer celle-ci à une viscosité propre des couches superficielles, très-forte dans la première et dans la troisième catégorie, et très-faible dans la deuxième § 26.
- Application de ce principe aux lames de la première catégorie; explication théorique des caractères généraux et des faits particuliers; rôle de la tension § 27.
- Idem aux lames de la deuxième catégorie; caractères généraux et faits particuliers également expliqués §§ 28 à 50.
- Idem aux lames de la troisième catégorie; solution probable de la question traitée dans cette série: pour qu'un liquide puisse se développer en lames à la fois grandes et persistantes, il faut qu'il ait une viscosité superficielle énergique et une tension relativement faible. Remarque importante. §§ 51 et 52.
- Phénomène curieux offert par les calottes de savon de Marseille devenues noires. . . . § 55.
- Expériences directes prouvant que, dans les liquides de la première catégorie, la viscosité superficielle est beaucoup plus forte que la viscosité intérieure §§ 54 à 59.
- Expériences du même genre montrant que, dans les liquides de la deuxième catégorie, la viscosité superficielle n'est pas plus forte et est peut-être moindre que la viscosité intérieure. §§ 40 à 44.
- Probabilité que le second cas a lieu dans l'essence de térébenthine au moins § 41.
- Cause d'illusion dans les liquides très-visqueux § 42.
- Expérience qui prouve que, dans l'alcool, la viscosité superficielle est beaucoup moindre que la viscosité intérieure. § 45.
- Application de l'analyse aux expériences précédentes sur les liquides de la deuxième catégorie: dans ceux que j'ai essayés, la viscosité superficielle est moindre que la viscosité intérieure, la même chose a probablement lieu à l'égard de tous §§ 46 et 47.
- La différence paraît être d'autant plus grande que la viscosité intérieure est plus forte. § 47.
- Expériences directes, du même genre que les précédentes, montrant que dans les liquides de la troisième catégorie, comme dans ceux de la première, la viscosité superficielle l'emporte de beaucoup sur la viscosité intérieure §§ 48 à 54.
- Pourquoi on ne peut gonfler des bulles avec une solution alcoolique de savon § 48.
- La solution de saponine a une viscosité superficielle énorme. Expériences curieuses . . § 51.
- Une solution très-étendue de saponine offre un second exemple de mousse volumineuse et durable, sans possibilité de gonfler des bulles. La solution qui convient pour donner de bonnes lames est l'un des liquides qui échappent à la loi de M. Dupré sur le retrait. § 52.
- Preuves que ce n'est point à la viscosité intérieure qu'il faut attribuer le développement en bulles. L'influence de cette viscosité n'est pas tout à fait nulle § 53.
- La solution d'albumine a aussi une énorme viscosité superficielle. Une solution suffisamment étendue offre un troisième exemple de mousse épaisse et tenace sans qu'on puisse obtenir de



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

15

- bulles. § 54.
 Énoncé du principe général relatif à la viscosité superficielle; en quoi il diffère de ceux de M. Hagen et de M. Meunier. § 55.
 Les expériences des §§ 54 à 59 et 48 à 54 fournissent une évaluation approchée des viscosités superficielles relatives dans les liquides de la première et de la troisième catégorie §§ 56 à 60.
 Causes d'erreur à l'égard des liquides très-visqueux § 57.
 Preuves de la légère influence de la viscosité intérieure. §§ 58 et 62.
 Rapports approximatifs entre les viscosités superficielles et les tensions des lames dans les liquides essayés de la première et de la troisième catégorie; accord avec ma théorie §§ 60 et 61.
 Explication complète de la grande persistance des bulles de liquide glycérique, et de la rétrogradation de leurs teintes §§ 63 à 66.
 Rétrogradation dans une lame plane horizontale § 65.
 Valeur approchée du rapport entre la viscosité superficielle et la tension dans le liquide glycérique § 65.
 Explication des précautions nécessaires pour obtenir la plus grande persistance en vase clos § 67.
 Explication du fait des liquides qui moussent abondamment sans donner de bulles. . . § 68.
 Résumé de ma théorie. La cohésion, comme la viscosité intérieure, ne joue, dans le développement des lames grandes et durables, qu'un rôle très-secondaire § 69.

NEUVIÈME SÉRIE.

Causes accessoires qui influent sur la persistance des lames liquides. — Figures laminaires de très-grande durée. — Historique concernant les lames liquides. — Ascension capillaire à de grandes hauteurs dans des tubes de grands diamètres. — Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide.

- Rectification au § 6 de la 6^{me} série. Note du § 4.
 Les causes accessoires qui modifient la persistance des lames de la troisième catégorie, sont:
 1° Les petits ébranlements; on s'en garantit partiellement en opérant en vase clos . . . § 1.
 2° L'évaporation; elle diminue la persistance; lames du D^r Reade § 2.
 3° La température, dans le cas particulier du liquide glycérique: quand elle est basse, les persistances sont plus inégales § 5.
 4° Le plus ou moins d'inclinaison des lames; expérience. Pourquoi les lames d'huile développées dans le liquide alcoolique persistent longtemps. § 4.
 5° La combinaison des lames en systèmes, ceux-ci durant moins que les figures d'une seule lame § 5.
 6° Les dimensions des lames; la persistance est, en général, d'autant plus grande que les lames sont plus petites; expériences. Dans certains cas l'influence des dimensions ne se fait pas sentir; cause probable § 6.
 7° La nature du solide auquel adhère une lame et l'état de la surface de ce solide; faits à l'appui § 7.
 Ensemble des conditions de plus grande persistance § 8.
 Essais tentés pour obtenir des figures laminaires indéfiniment persistantes ou d'une très-grande durée; réussite approchée avec un mélange fondu de colophane et de gutta-percha. § 9.



- Historique des recherches faites, en dehors des miennes, sur les lames liquides. Les anciens connaissaient les bulles laminaires complètes obtenues par insufflation § 10.
- Vapeur vésiculaire § 11, page 12.
- Boyle : il paraît avoir appelé le premier l'attention sur les couleurs des lames liquides. *Ibid.*
- Hooke : idées singulières sur les taches noires des bulles Page 15.
- Newton : emploi des calottes laminaires dans ses recherches sur les couleurs des lames minces Page 14.
- Leidenfrost : étude détaillée et curieuse des bulles de savon. Ces bulles sont solides et non liquides; leur élasticité; leur grande persistance en vase clos; influence de leur grosseur sur leur durée; force contractile, son siège; force explosive, son siège; constitution de la lame; siège des couleurs; lames planes; les taches noires des bulles sont nettement terminées à leurs bords; conséquence; mesure de l'épaisseur de la lame; limite supérieure des diamètres d'une molécule d'eau et d'une molécule d'huile; pores de grandeur notable dans les bulles; l'air atmosphérique est un assemblage de petites lamelles aqueuses; les animaux et les végétaux sont formés de petites bulles de savon et de petits tubes de la même matière. *Ibid.*
- Essais infructueux de congélation des bulles de savon Page 20.
- Morey : bulles de résine solidifiées; on en obtient en général un plus ou moins grand nombre à la suite les unes des autres, unies entre elles par des effilements § 12, page 20.
- Dr Hough (voir à la table de la 8^{me} série) : petite masse au bord des calottes; attractions et répulsions apparentes de celles-ci *Ibid.*
- Savart, Le François (voir à la table de la 7^{me} série). Dr Reade (voir plus haut) Page 21.
- Draper : endosmose de certains gaz à travers les lames d'eau de savon *Ibid.*
- M. Böttger : grosses bulles durables gonflées avec un mélange de colophane et d'huile de lin Page 22.
- Marianini : bulle flottant sur de l'acide carbonique; phénomène d'endosmose *Ibid.*
- M. Henry (voir à la table de la 8^{me} série): mesure expérimentale de la pression d'une bulle; mesure de la cohésion de l'eau de savon par les bulles; valeur élevée de cette cohésion. *Ibid.*
- M. Melsens, M. Hagen, M. Magnus (voir à la table de la 7^{me} série) Pages 25 et 24.
- M. De Tesson : probablement première évaluation théorique de la pression à l'intérieur d'une bulle d'un diamètre donné et formée d'un liquide donné. Page 24.
- M. Eisenlohr : essai d'explication du saut brusque entre le noir et le blanc dans une lame d'eau de savon. Grands anneaux colorés obtenus par la rotation rapide d'une lame horizontale *Ibid.*
- M. Gladstone (voir à la table de la 8^{me} série) Page 25.
- M. Tyndall : sentiment de chaleur sur la main plongée dans l'écume de la mer Page 26.
- M. Van der Willigen : hypothèse sur la constitution des lames d'eau de savon *Ibid.*
- M. Faye : production de petites sphères laminaires d'eau de savon pleines d'huile et nageant dans ce dernier liquide. *Ibid.*
- M. Van Rees : action du souffle sur certains systèmes laminaires; polyèdres laminaires intérieurs; principe nouveau concernant les systèmes laminaires des charpentes prismatiques *Ibid.*
- M. l'abbé Florimond : on gonfle des bulles de savon plus grosses avec une pipe de verre qu'avec une pipe de terre; influence du diamètre de l'orifice Page 29.
- MM. Minary et Sire (voir à la table de la 7^{me} série) *Ibid.*



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

17

- M. Mach : interprétation erronée; système laminaire en colophane; petites lames obtenues avec une solution d'un silicate alcalin; mesure de l'épaisseur des lames dans ces deux cas Page 50.
- M. Kaul : essai d'une théorie des systèmes laminaires des charpentes Page 51.
- M. Félix Plateau (voir à la table de la 7^{me} série) *Ibid.*
- M. Sire : expériences curieuses sur la pression des bulles. *Ibid.*
- M. Van der Mensbrugge (voir à la table de la 7^{me} série) Page 52.
- M. Laroque : veine laminaire résultant d'un mouvement de rotation imprimé au liquide du vase *Ibid.*
- M. Lamarle : travail sur les systèmes laminaires des charpentes (voir à la table de la 11^{me} série); étude des polyèdres laminaires intérieurs; systèmes incomplets Page 55.
- M. Broughton : examen, à l'aide du microscope, de la tache noire du sommet d'une bulle; procédé particulier pour la mesure de l'épaisseur moyenne de la lame qui constitue une bulle. Page 55.
- M. Dupré (voir à la table de la 8^{me} série) : expérience curieuse Page 56.
- M. Van der Mensbrugge, M. Lamarle (voir aux tables de la 8^{me} et de la 10^{me} série) Page 57.
- M. Böttger : grosses bulles d'une décoction de bois de Panama, par l'emploi d'un très-large orifice *Ibid.*
- Brewster : étude détaillée des couleurs des lames; lame plane verticale dont on fait tourner le contour solide; effets du souffle sur les couleurs d'une lame horizontale; hypothèse sur l'origine des couleurs des lames; expériences de simple curiosité sur les systèmes laminaires des charpentes; expérience importante au point de vue d'une question de stabilité; nouveau procédé pour la réalisation des systèmes laminaires; mouvement des lames dans les tubes coniques; phénomènes observés sur de petites lames verticales de différents liquides *Ibid.*
- M. Chautard : emploi des bulles pour constater le magnétisme de l'oxygène Page 41.
- M. Cauderay : emploi des bulles pour manifester les attractions et répulsions électriques *Ibid.*
- Lames résultant de l'extension d'un liquide sur un autre § 15, page 42.
- Un liquide soustrait à l'action de la pesanteur doit s'élever, par l'action capillaire, jusqu'au haut d'un tube dont il mouille l'intérieur, quels que soient le diamètre intérieur et la longueur de ce tube; appareil et précautions pour la vérification expérimentale avec de l'huile au sein du liquide alcoolique. §§ 14 et 15.
- Réalisation de l'expérience avec un tube de 14^{mm} de diamètre intérieur et de 42 centimètres de longueur; l'huile monte d'un mouvement retardé § 16.
- Pourquoi. § 17.
- Dans les conditions inverses, c'est-à-dire avec du liquide alcoolique au sein de l'huile, on doit s'attendre à un mouvement accéléré § 18.
- Précautions dans ces conditions § 19.
- Réalisation de l'expérience avec un tube de 15^{mm} de diamètre intérieur et de 42 centimètres de longueur; le mouvement est, en effet, accéléré § 20.
- Un courant gazeux qui traverse un liquide peut être considéré comme l'inverse d'une veine liquide qui s'écoule dans l'air; forme qu'affecterait ce courant en l'absence des forces figuratives § 21.
- Sous l'action de ces forces, le courant gazeux doit se convertir en bulles isolées, comme la



veine liquide se convertit en masses isolées; seulement, à moins d'une vitesse énorme, le premier ne peut avoir de partie continue	§ 22.
Vérifications expérimentales avec un courant d'air rapide à travers l'eau; les bulles s'isolent sans donner naissance à des filets, cause probable	§ 25.
Explication du glouglou.	§ 24.

DIXIÈME SÉRIE.

Résultats obtenus par les géomètres, et vérifications expérimentales.

Les géomètres sont arrivés à un grand nombre de résultats en relation avec le sujet de mes recherches; cette série en contient le résumé	§ 1.
Premier mémoire de Beer, où l'auteur traite par l'analyse les faits de ma 1 ^{re} série. Cas général où la masse immergée et le liquide ambiant tourneraient tous les deux soit dans le même sens, soit en sens contraires, et où la figure de la masse est de révolution. Quand cette masse tourne seule, elle prend identiquement la même figure que si, dépourvue de pesanteur, elle tournait dans le vide avec une vitesse convenable	§ 2.
Cas où la masse n'est point traversée par un axe solide. Aspects généraux de la ligne méridienne pour des vitesses de rotation croissantes; accord avec les résultats de mes expériences, dans celles-ci l'axe étant trop mince pour exercer une influence notable	§§ 3 et 4.
Résultat singulier; explication probable	§ 5.
Différence entre les figures de la masse d'huile tournante et celles que peut prendre une masse planétaire en rotation	§ 6.
Ce qui a lieu quand les liquides tournent tous les deux avec des vitesses égales	§ 7.
Cas d'une figure en creux dans un liquide sans pesanteur tournant; relation avec l'une de mes expériences	§ 8.
Cas où la masse tournante est traversée par un axe solide d'un diamètre quelconque, auquel elle adhère	§ 9.
Cas, toujours avec un axe solide, où le liquide ambiant tourne seul.	§ 10.
Second mémoire de Beer, où il traite le même sujet. Il parvient, au moyen des fonctions elliptiques, à la détermination précise de la ligne méridienne pour des vitesses de rotation croissantes. Relation entre les volumes et les vitesses angulaires de deux masses qui présentent la même forme; accord suffisant avec mes expériences	§§ 11 et 12.
Valeurs absolues de la vitesse angulaire qui produirait une forme déterminée avec un volume donné d'eau, d'huile ou de mercure, le liquide étant supposé sans pesanteur et dans le vide	§ 13.
Cas d'une figure en creux au sein d'un liquide tournant. Autre cas analogue	§ 14.
Solution d'une difficulté apparente	§ 15.
Autre détermination relative aux trois liquides mentionnés plus haut. Vitesse angulaire que doit avoir une masse donnée d'huile au sein du liquide alcoolique pour être près de se transformer en anneau. Causes de la différence avec l'un de mes résultats.	§ 16.
Dans l'état de repos, la figure de la masse immergée est identiquement la même que si cette masse était dépourvue de pesanteur et se trouvait dans le vide. Figure en creux dans un liquide sans pesanteur	§ 17.



- Poisson a donné le premier l'équation différentielle des figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur et à l'état de repos. Résultat applicable aux figures d'équilibre de révolution §§ 18 et 19.
- Un principe admis par les géomètres à l'égard des surfaces à courbure moyenne constante ou nulle, doit être modifié § 20.
- Génération simple et élégante des lignes méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante ou nulle, trouvée par M. Delaunay. Accord de tous les résultats de ma 4^{me} série avec ce principe § 21.
- Résultat de M. Lamarle sur les surfaces engendrées par ces lignes. Accord avec ma 4^{me} série § 22.
- Dans son second mémoire, Beer s'occupe aussi de l'état de repos de la masse, pour le cas où la figure est de révolution. Intégrale, par les fonctions elliptiques, de l'équation des lignes méridiennes § 25.
- Discussion de cette intégrale § 24.
- Remarques à ce sujet § 25.
- Évaluation du volume et de la surface d'une portion d'une figure d'équilibre de révolution limitée par deux sections quelconques perpendiculaires à l'axe § 26.
- Théorème de M. Mannheim. Rectification des lignes méridiennes § 27.
- Étude analytique du caténoïde, par Goldschmidt. De l'un des résultats, on déduit la valeur exacte du rapport limite entre l'écartement des bases et leur diamètre § 28.
- Vérification expérimentale précise de la limite de stabilité du caténoïde § 29.
- MM. Lindelöf et Moigno ont étudié aussi analytiquement le caténoïde § 50.
- Travail de M. Lindelöf sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante ou nulle. Résultats § 51.
- Vérification expérimentale de l'un d'eux § 52.
- Rayons de courbure des lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde au minimum et au maximum de distance à l'axe. Propriétés § 55.
- Meusnier avait signalé, comme surface à courbure moyenne nulle, l'hélicoïde gauche à plan directeur; M. Catalan a démontré que cette surface et le plan sont, parmi les surfaces réglées, les seules à courbure moyenne nulle § 54.
- D'après une recherche de M. Lamarle, le cylindre de révolution est la seule surface réglée à courbure moyenne finie et constante § 53.
- Réalisation, à l'état laminaire, de l'hélicoïde gauche à plan directeur § 56.
- Travail de M. Lamarle sur les hélicoïdes à courbure moyenne constante ou nulle; outre l'hélicoïde gauche à plan directeur, il y en a quatre autres. Leur relation avec les surfaces d'équilibres de révolution § 57.
- Réalisation, avec de l'huile dans le liquide alcoolique, de celui qui correspond à la sphère § 58.
- Théorème de M. Jellett. La sphère paraît être la seule surface fermée à courbure moyenne constante § 59.
- Monge et Legendre ont intégré l'équation générale des surfaces à courbure moyenne nulle; M. Scherk a déduit de cette intégrale les équations, en coordonnées finies, de cinq nouvelles surfaces. § 40.
- M. Ossian Bonnet a donné une autre intégrale générale. Il a appliqué sa méthode à la re-



cherche des surfaces à courbure moyenne nulle passant par un contour continu donné . § 41.

M. Serret a fait connaître le moyen de représenter analytiquement les surfaces de cette espèce qui passent par une série de droites non situées dans le même plan . . . § 41^{bis}.

Surfaces particulières à courbure moyenne nulle indiquées par M. Catalan; discussion de l'une d'elles. Le même savant a donné également une nouvelle intégrale de l'équation générale; il en a déduit plusieurs surfaces, pour l'une desquelles il décrit une génération géométrique . § 42.

Réalisation, à l'état laminaire, de l'une des surfaces ci-dessus. Cette surface a des limites de stabilité. . . § 43.

Réalisation, à l'état laminaire, par M. Van der Mensbrugghe, de l'une des surfaces de M. Scherk . . . § 44.

Recherches de M. Van der Mensbrugghe et de M. Dupré déjà résumées dans ma 8^{me} série. . . § 45.

M. Mathet a exposé une méthode conduisant à l'équation différentielle des surfaces à courbure moyenne nulle qui passent par une courbe plane donnée . . . § 46.

Vérifications expérimentales du principe que, par un contour quelconque, peuvent passer une infinité de surfaces à courbure moyenne nulle. Preuve que, si le contour est fermé, il y a toujours au moins une de ces surfaces dont une portion finie peut le remplir . . . §§ 47 et 48.

Conclusion . . . § 49.

ONZIÈME SÉRIE.

Limites de stabilité des figures d'équilibre. — Théorie générale de la stabilité de ces figures. — Stabilité des systèmes laminaires. — Stabilité dans des cas où la pesanteur intervient.

La sphère n'a pas de limites de stabilité . . . § 1.

Il en est de même du plan . . . § 2.

Détermination approximative de la limite de stabilité du cylindre au moyen de cylindres de mercure de petits diamètres . . . § 5.

Essai théorique de M. Hagen; il ne peut donner qu'une approximation . . . §§ 4 et 5.

Première méthode rigoureuse. Principe en partie expérimental sur lequel elle repose . § 6.

Application du calcul à ce principe; on en déduit, pour la valeur exacte de la limite de stabilité du cylindre, la quantité π , c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre. . § 7.

Beer est arrivé à la même valeur, mais sa démonstration est incomplète . . . § 8.

Vérifications expérimentales très-approchées, au moyen de cylindres d'huile dans le liquide alcoolique. . . §§ 9 à 12.

Faits ultérieurs à l'appui du principe du § 6 . . . § 15.

Dans un cylindre à sa limite de stabilité, la transformation s'effectue comme si elle avait pour origine un onduleïde infiniment peu différent de ce cylindre et composé d'un seul renflement et d'un seul étranglement . . . § 14.

Dans un cylindre indéfini, entièrement libre, et formé d'un liquide absolument exempt de viscosité, la transformation spontanée s'effectuerait très-probablement comme si elle partait d'un onduleïde indéfini différant infiniment peu de ce cylindre. . . § 15.

Pourquoi, dans la transformation du cylindre, les résistances allongent les renflements et les étranglements . . . §§ 16 et 17.



DES MATIÈRES DES ONZE SÉRIES.

21

Méthode de M. Hagen corrigée.	§ 18.
Dans l'onduloïde partiel dont le milieu est occupé par un étranglement, la limite de la stabilité ne peut être énoncée d'une manière absolue.	§ 19.
Un onduloïde partiel dont le milieu est occupé par un renflement, est exactement à sa limite de stabilité quand il est terminé aux cercles de gorge des deux étranglements adjacents à ce renflement; démonstration.	§ 20.
Seconde méthode rigoureuse d'arriver à la valeur précise de la limite de stabilité du cylindre.	§ 21.
La limite précise de la stabilité du caténoïde a déjà été indiquée dans la 10 ^{me} série, et vérifiée par mes expériences. Récapitulation des propriétés du caténoïde limite. Nouvelles explications relatives au caténoïde limite plein.	§ 22.
On ne peut rien préciser sur la limite de stabilité du nodoïde, sauf peut-être dans un cas particulier de la figure engendrée par un nœud de la ligne méridienne	§ 25.
Cas de la figure engendrée par un arc de cette ligne convexe vers l'extérieur.	§ 24.
Analogie de propriétés entre cette dernière figure à sa limite de stabilité et le caténoïde limite plein. Particularité de la déformation spontanée de cette même figure et de celle qui est engendrée par un nœud.	§ 25.
Le caténoïde partiel dont l'une des bases est le cercle de gorge, n'a pas de limite de stabilité. Vérification expérimentale.	§ 26.
Cas des figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution. Exemples de figures de ce genre ayant des limites de stabilité. L'hélicoïde gauche à plan directeur n'en a probablement pas. § 27.	§ 27.
Stabilité des figures d'équilibre envisagée sous un point de vue général, en partant du fait de la tension. Dans une figure instable, la surface n'est minima que par rapport à certains modes de petite déformation, tandis qu'elle est maxima par rapport à d'autres	§ 28.
Confirmation de ce principe par l'étude du cylindre. Ce n'est qu'en deçà de la limite de stabilité que la surface d'une figure d'équilibre est minima d'une manière complète. Restriction du principe admis par les géomètres à l'égard des surfaces à courbure moyenne constante ou nulle.	§§ 29 à 53.
Point de départ de l'application du calcul au problème général. Pourquoi la sphère et le plan sont stables.	§ 54.
Recherche de la condition qui, dans une figure d'équilibre instable, détermine le choix de celle-ci parmi toutes les petites déformations qui diminuent la surface. Application au cylindre	§§ 55 à 58.
Rapprochement entre les résultats de cette série relatifs au cylindre et les faits signalés dans la 2 ^{me} série; expérience de mon fils; projet d'un nouveau moyen d'observer la transformation d'un cylindre très-long par rapport à son diamètre.	§ 59.
Stabilité des systèmes laminaires. Résumé de la première partie du travail de M. Lamarle sur ce sujet.	§ 40.
Limites de stabilité dans des cas où la pesanteur joue un rôle : résumé d'un travail de M. Duprez	§ 41.
Véritable objet de l'ensemble de mes séries à partir de la 2 ^{me} . Remercements aux personnes qui m'ont prêté leur concours	§ 42.



