Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique

Sur un problème curieux du magnétisme

Joseph Plateau

SUR

UN PROBLÈME CURIEUX

DE MAGNÉTISME;

PAR

J. PLATEAU,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Mémoire présenté à l'Académie royale de Belgique, le 10 mai 1864.)

SUR

UN PROBLÈME CURIEUX

DE MAGNÉTISME.

Je me suis proposé la question suivante : Ne serait-il pas possible de soutenir en l'air une aiguille aimantée, sans aucun point d'appui et dans un état d'équilibre stable, par les actions émanées d'autres aimants convenablement disposés?

Excité par la singularité du problème et ne voyant, à priori, aucune raison pour que l'équilibre cherché fût irréalisable, j'ai imaginé successivement différentes combinaisons de barreaux aimantés qui me semblaient devoir produire, au moins sur l'un des pôles de l'aiguille, l'effet attendu; mais j'ai constamment échoué : avec presque toutes ces combinaisons je suis arrivé, soit par l'expérience, soit par le calcul, à un même résultat, savoir qu'on peut obtenir à volonté l'équilibre stable dans le sens vertical ou dans le sens horizontal, mais non simultanément dans l'un et dans l'autre : dès qu'on atteint la stabilité verticale, on perd la stabilité horizontale, et vice versâ. Avec quelques autres combinaisons, j'ai trouvé qu'on peut avoir, en même temps que la stabilité verticale, une stabilité horizontale, mais seulement dans des directions comprises entre certains azimuts, en dehors desquels il y a instabilité. Ces insuccès m'ont porté naturellement à croire que la réalisation de la stabilité dans tous les sens était impossible, et j'ai cherché dès lors à établir cette impossibilité par le calcul.

La difficulté du problème semblait inextricable, car il fallait supposer absolument quelconques le nombre des centres magnétiques agissant sur l'aiguille, leur distribution, enfin l'espèce et l'intensité de leurs magnétismes respectifs; mais heureusement la forme des expressions algébriques a fait disparaître la complication, et je suis parvenu à une démonstration générale et relativement simple de l'impossibilité dont il s'agit. Qu'il me soit permis d'exposer cette démonstration; j'éviterai peut-être ainsi à d'autres personnes des tentatives inutiles et une perte de temps; d'ailleurs l'impossibilité même de l'équilibre stable désiré, la manière dont elle se manifeste dans le calcul, et enfin la cause qui la détermine, constituent, à mon avis, des faits très-curieux.

Rapportons les pôles de l'aiguille et tous les centres magnétiques à trois plans coordonnés rectangulaires, dont l'un, celui des xy, soit horizontal. Considérons en particulier l'un des pôles de l'aiguille, et soient x, y, z ses coordonnées. Soient de même x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', etc., les coordonnées respectives des différents centres magnétiques. Enfin désignons par m', m'', m''', etc., les intensités respectives des actions exercées par ces centres à l'unité de distance sur le pôle de l'aiguille; les quantités m', m'', m''', etc., devront être affectées de signes différents, suivant qu'elles représentent des actions attractives ou des actions répulsives; nous verrons bientôt ce qui déterminera le choix de ces signes.

Les distances des centres magnétiques au pôle de l'aiguille seront donc respectivement

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},\quad \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2},\ \text{etc.},$$

et les actions exercées par ces centres auront pour expressions :

$$\frac{m'}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},\quad \frac{m''}{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2},\ \text{etc.}$$

Décomposons chacune de ces forces parallèlement aux trois axes; nous aurons ainsi, dans le sens des x,

$$\frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{m''(x''-x)}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \text{ etc.,}$$

dans le sens des y,

$$\frac{m'(y'-y)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{m''(y''-y)}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \text{ etc.,}$$

et dans le sens des z,

$$\frac{m'(z'-z)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{m''(z''-z)}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \text{ etc.}$$

Avant d'aller plus loin, je dois appeler l'attention sur deux points importants.

En premier lieu, dans ces expressions, la forme fractionnaire de l'exposant des dénominateurs provient des radicaux qui représentent les distances du pôle aux centres magnétiques; or ces distances doivent naturellement être regardées comme positives, d'où il suit que tous les dénominateurs dont il s'agit sont positifs.

En second lieu, prenons en particulier l'une quelconque des composantes ci-dessus, la première, par exemple, ou

$$\frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Puisque, d'après la remarque précédente, le dénominateur est positif, le signe de l'expression entière sera celui du numérateur $m'(x'-x)$; or le facteur $x'-x$ peut évidemment être considéré comme représentant la projection, sur une parallèle à l'axe des x menée par le pôle, de la distance de ce pôle au centre magnétique; conséquemment si $x'-x$ est positif, cette projection sera dirigée, à partir du pôle, dans le sens des x positifs, et si nous supposons l'action attractive, notre composante tendra à faire marcher le pôle dans ce même sens; dès lors il est rationnel de la regarder comme positive, ce qui exige que m' soit positif. Nous sommes donc conduits ainsi à attribuer le signe $+$ à celles des quantités m', m'', m''', etc., qui désignent des attractions, et, par suite, le signe $-$ à celles qui désignent des répulsions.

Ceci admis, nommons x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'autre pôle de l'aiguille. Les actions exercées sur celui-ci par nos centres magnétiques donneront lieu, parallèlement aux trois axes, à des composantes dont les expressions seront de même forme que celles relatives au premier pôle; seulement toutes les quantités m', m'', m''', etc. auront évidemment des signes opposés; par exemple, la première composante dans le sens des x sera

$$\frac{-m'(x'-x_1)}{[(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et ainsi des autres.

Imaginons actuellement que l'aiguille soit en équilibre sous l'action de la pesanteur et de l'ensemble de toutes ces composantes, et cherchons les conditions pour que cet équilibre soit stable dans tous les sens.

Dans ce but, supposons qu'on déplace l'aiguille parallèlement à elle-même d'une quantité infiniment petite, soit dans le sens des x, soit dans celui des y, soit dans celui des z. Ce déplacement fera naître à chaque pôle une petite force, et, si l'équilibre est stable, l'ensemble de ces deux forces tendra à ramener l'aiguille à sa position première, quel que soit celui des trois sens dans lequel le déplacement a eu lieu.

Pour obtenir, à l'un des pôles, l'expression de la petite force due au déplacement dans le sens des x, il suffit évidemment de différentier par rapport à x chacune des composantes parallèles à l'axe des x, puis de faire la somme algébrique de toutes ces différentielles. La première des composantes en question relatives au premier pôle donne ainsi, après réduction,

$$\frac{m'[2(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}}\,dx.$$

et les autres fournissant des expressions de même forme, nous pourrons représenter la petite force totale née, au premier pôle, d'un déplacement suivant les x, par

$$\Sigma \frac{m'[2(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}}dx.$$

Nous trouverons de la même manière dans le sens des y,

$$\Sigma \frac{m'[2(y'-y)^2-(x'-x)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}}dy, \quad \ldots\ldots [1]$$

et, dans le sens des z,

$$\Sigma \frac{m'[2(z'-z)^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}}dz.$$

Quant au second pôle, si l'on fait attention, d'une part, que son magnétisme est contraire à celui du premier, et, d'autre part, que, par la nature des déplacements supposés, on a $dx_1 = dx$, $dy_1 = dy$, et $dz_1 = dz$, on voit que les expressions des petites forces relatives à ce second pôle s'obtiendront en remplaçant dans les précédentes m' par $-m'$ et x, y, z par x_1, y_1, z_1.

Observons maintenant que, si l'équilibre est stable et qu'après le déplacement on abandonne l'aiguille à elle-même, le centre de gravité de celle-ci revient comme tout le reste à sa position première. Or on sait, par un principe de mécanique, que lorsqu'un corps solide est soumis à l'action de plusieurs forces, le mouvement de translation du centre de gravité est le même que si toutes les forces étaient appliquées en ce point. Transportons conséquemment au centre de gravité de l'aiguille, pour chacun des trois déplacements, les petites forces totales développées aux deux pôles; nous formerons ainsi les trois expressions :

$$\left\{\Sigma \frac{m'[2(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}} + \Sigma \frac{-m'[2(x'-x_1)^2-(y'-y_1)^2-(z'-z_1)^2]}{[(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2]^{\frac{5}{2}}}\right\} dx.$$

$$\left\{\Sigma \frac{m'[2(y'-y)^2-(x'-x)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}} + \Sigma \frac{-m'[2(y'-y_1)^2-(x'-x_1)^2-(z'-z_1)^2]}{[(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2]^{\frac{5}{2}}}\right\} dy, \quad [2]$$

$$\left\{\Sigma \frac{m'[2(z'-z)^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{5}{2}}} + \Sigma \frac{-m'[2(z'-z_1)^2-(x'-x_1)^2-(y'-y_1)^2]}{[(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2]^{\frac{5}{2}}}\right\} dz.$$

Telles sont donc, dans le cas général, les expressions des petites forces qui peuvent être considérées comme sollicitant, après chacun des déplacements, le centre de gravité de l'aiguille. Je dis dans le cas général, parce que, pour certaines dispositions du système des centres magnétiques et certaines valeurs du poids de l'aiguille, il peut arriver que les coefficients respectifs de dx, dy et dz dans les expressions ci-dessus soient tous les trois nuls, et alors les forces dont il s'agit ne sont plus représentées par ces expressions, mais par les différentielles d'un ordre supérieur. Nous examinerons plus loin cette circonstance tout exceptionnelle, qui peut être regardée comme l'analogue d'un point singulier dans une surface courbe.

Si l'équilibre du centre de gravité est stable, il faut que chacune des trois petites forces soit dirigée en sens contraire du déplacement correspondant, puisqu'elle doit tendre à faire rebrousser chemin au centre de gravité; or cela exige évidemment que, dans les expressions [2], les coefficients de dx, dy et dz soient tous les trois négatifs; voyons donc si cette parité de signe est possible.

Ajoutons les trois coefficients en question; à cause de l'identité de forme de tous les termes qui composent chacune des sommes partielles comprises sous le signe Σ, cette sommation est facile : il suffit, on le voit sans peine, d'ajouter les termes respectivement écrits en regard du premier signe Σ dans les trois expressions, d'en faire de même pour les termes écrits en regard du second, et de faire précéder d'un Σ chacun des deux résultats. Or, en effectuant l'opération, on trouve que ces résultats sont tous deux égaux à zéro, et qu'ainsi la somme totale de nos trois coefficients est toujours nulle; il est donc absolument impossible que ces coefficients soient négatifs tous les trois, d'où il suit que, dans le cas général où nous nous sommes placés, l'équilibre du centre de gravité, et, par suite, celui de l'aiguille entière, ne saurait être stable dans tous les sens à la fois.

Abordons maintenant le cas particulier signalé plus haut, c'est-à-dire celui où, pour la position d'équilibre de l'aiguille, les coefficients sont tous les trois égaux à zéro. Je dis tous les trois, car, en vertu du principe auquel nous venons d'arriver relativement à leur somme, deux d'entre eux ne peuvent être nuls sans que le troisième le soit également, et si un seul était nul, la somme des deux autres devrait l'être en même temps, de sorte que l'un de ces derniers serait nécessairement positif, et qu'ainsi l'équilibre serait encore instable.

Si, pour essayer de résoudre la difficulté, on cherche les différentielles du second ordre, on tombe sur des expressions dans lesquelles on ne peut introduire la condition de nullité des coefficients du premier ordre; nous suivrons donc une autre voie; elle sera un peu longue, parce que nous devrons appliquer notre méthode à une suite de cas partiels; mais nous arriverons au but, dans chacun d'eux, par des raisonnements simples et en nous appuyant sur un même principe.

D'abord, pour nous faire une idée de ce qui peut se passer lorsqu'il y a à la fois équilibre et annulation des trois coefficients, prenons un exemple déterminé qui offre ces conditions et soit assez simple pour qu'on puisse y faire usage des différentielles d'ordres supérieurs. Bornons-nous à considérer l'un des pôles de l'aiguille, et réduisons le système magnétique à quatre centres seulement, de même magnétisme, d'égale intensité, et situés aux quatre sommets d'un carré horizontal; plaçons l'origine des coordonnées au point milieu de celui-ci, et supposons le pôle de l'aiguille verticalement au-dessous ou au-dessus de ce point, suivant que les actions magnétiques sont attractives ou répulsives; laissons d'ailleurs le carré orienté d'une manière quelconque dans son plan par rapport aux axes des x et des y. Dans ces conditions, les expressions [1] relatives à un seul pôle se simplifient; en effet, les coordonnées verticales z', z'', z''' et z^{iv} sont nulles, ainsi que les coordonnées horizontales x et y du pôle de l'aiguille, de sorte qu'il vient, en écrivant d'ailleurs m au lieu de m', puisque les quatre magnétismes sont identiques,

$$\Sigma\frac{m(2x'^2-y'^2-z^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}dx,\qquad \Sigma\frac{m(2y'^2-x'^2-z^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}dy,\qquad \Sigma\frac{m(2z^2-x'^2-y'^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}dz.$$

Afin de simplifier encore, désignons par a la distance commune des centres magnétiques à l'origine; on a alors $x'^2+y'^2=x''^2+y''^2=\ldots\ldots=a^2$, et les dénominateurs de tous les termes de nos sommes deviennent $(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}$. Si donc nous écrivons intégralement nos trois sommes, elles pourront se mettre sous la forme :

$$\frac{m\left[2(x'^2+x''^2+x'''^2+x^{\text{iv}2})-(y'^2+y''^2+y'''^2+y^{\text{iv}2})-4z^2\right]}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx.$$

$$\frac{m\left[2(y'^2+y''^2+y'''^2+y^{\text{iv}2})-(x'^2+x''^2+x'''^2+x^{\text{iv}2})-4z^2\right]}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\,dy.$$

$$\frac{4m(2z^2-a^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\,dz.$$

En outre, supposons que le centre magnétique situé dans le quadrant positif soit celui dont l'abscisse est x', et nommons α l'angle compris entre l'axe des x et la droite qui joint l'origine à ce centre; la droite qui va de l'origine au centre suivant fera avec ce même axe un angle égal à $\alpha+90^{\circ}$; quant aux droites qui vont aux deux autres centres, elles ne sont que les prolongements des deux précédentes; supposons enfin que x''' et y''' soient les coordonnées du centre magnétique opposé à celui dont les coordonnées sont x' et y'; on aura $x'^2=x'''^2=a^2\cos^2\alpha$, $x''^2=x^{\text{iv}2}=a^2\sin^2\alpha$, $y'^2=y'''^2=a^2\sin^2\alpha$, $y''^2=y^{\text{iv}2}=a^2\cos^2\alpha$. La substitution de ces valeurs dans les expressions ci-dessus les réduit encore, et elles deviennent simplement

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2m(a^2-2z^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx,\\&\frac{2m(a^2-2z^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\,dy,\\&\frac{4m(2z^2-a^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\,dz.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que ces dernières expressions ne contiennent pas l'angle α qui fixe la position du carré par rapport aux axes des x et des y, ou, en d'autres termes, qui détermine les azimuts respectifs des deux petits déplacements horizontaux relativement au système des centres magnétiques. Il suit de là que, dans l'exemple dont il s'agit, la force provenant d'un petit déplacement horizontal est indépendante de l'azimut de ce déplacement, ce que l'on comprend, du reste, d'après la symétrie du système; aussi les coefficients de dx et de dy sont-ils identiquement les mêmes.

Maintenant on voit que si, dans la position d'équilibre, la distance z du pôle de l'aiguille au plan des centres magnétiques est telle qu'on ait $2z^2=a^2$, d'où $z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, les coefficients de dx, de dy et de dz s'annulent à la fois; mais les expressions [3] montrent nettement aussi ce qui arrive lorsque la valeur de z correspondante à l'équilibre est différente. Pour des actions attractives, et conséquemment pour m positif, une valeur absolue de z inférieure de la moindre quantité à $\frac{a}{\sqrt{2}}$ rend négatif le coefficient de dz et positifs ceux de dx et de dy; il y a donc, dans cette circonstance, stabilité verticale et instabilité horizontale; dès que la valeur absolue de z surpasse, au contraire, $\frac{a}{\sqrt{2}}$, les coefficients prennent des signes opposés, de sorte qu'il y a alors instabilité verticale et stabilité horizontale. Pour des actions répulsives les résultats sont évidemment inverses, m étant alors négatif. Je n'ai pas besoin de rappeler qu'avec ces dernières actions le pôle de l'aiguille doit se trouver au-dessus du plan des centres magnétiques, et qu'avec les premières il doit être au-dessous. Dans les deux cas, le point pour lequel la valeur absolue de la distance du pôle à ce plan est $\frac{a}{\sqrt{2}}$, constitue le passage de la stabilité à l'instabilité verticale, et de l'instabilité à la stabilité horizontale.

Ainsi, avec notre système régulier de quatre centres identiques, et en faisant varier le poids de l'aiguille, on pourra obtenir à volonté, pour l'un des pôles de celle-ci, soit qu'il y ait attraction ou répulsion, l'équilibre stable dans le sens vertical ou dans le sens horizontal, mais jamais, comme nous le savions d'ailleurs par notre démonstration générale, dans les deux sens à la fois. C'est l'un des résultats que j'ai mentionnés au commencement de ce travail; nous en ferons usage plus loin.

Mais nous ignorons encore ce qui a lieu, quant à la stabilité, au point de passage $z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$. Pour le découvrir, aidons-nous des coefficients différentiels d'ordres supérieurs. Comme nos simplifications ont fait disparaître x et y des coefficients ci-dessus du premier ordre, il nous faut, pour différentier une seconde fois par rapport à x et à y, revenir aux expressions générales [1], et il suffira, nous le verrons, d'opérer sur la première. Différentions-la donc une seconde fois par rapport à x; il viendra

$$\Sigma\, \frac{3m'(x'-x)\left[2(x'-x)^2-3(y'-y)^2-3(z'-z)^2\right]}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right]^{\frac{7}{2}}}\, dx^2.$$

Annulant, comme précédemment, z', z'', z''', z^{iv}, x et y, écrivant les quatre termes de la somme, ôtant l'accent de m' et supprimant dx^2, nous trouverons, pour le coefficient,

$$\frac{3mx'(2x'^2-3y'^2-3z^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}+\frac{3mx''(2x''^2-3y''^2-3z^2)}{(x''^2+y''^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}+\frac{3mx'''(2x'''^2-3y'''^2-3z^2)}{(x'''^2+y'''^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}$$
$$+\frac{3mx^{\text{iv}}(2x^{\text{iv}2}-3y^{\text{iv}2}-3z^2)}{(x^{\text{iv}2}+y^{\text{iv}}+z^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Mais on a, nous le savons, $x'''^2=x'^2$, $y'''^2=y'^2$, $x^{\text{iv}2}=x''^2$, $y^{\text{iv}2}=y''^2$; et l'on a évidemment aussi $x'''=-x'$, et $x^{\text{iv}}=-x''$; il s'ensuit que le premier et le troisième terme de la somme ci-dessus sont égaux et de signes contraires, et qu'il en est de même du second et du quatrième; le coefficient différentiel du second ordre est donc toujours nul, quelle que soit la distance z du pôle de l'aiguille au plan des centres magnétiques. Il y a conséquemment nécessité de recourir à une troisième différentiation; celle-ci donne :

$$\Sigma\, 3m'\, \frac{35(x'-x)^4-3\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right]\left[9(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2\right]}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right]^{\frac{9}{2}}}\, dx^3.$$

Faisant les mêmes simplifications et substitutions qui nous ont conduit aux expressions [3], et remplaçant en outre z^2 par $\frac{a^2}{2}$ pour nous placer au point de passage, on obtient, toute réduction effectuée, pour la valeur du coefficient de dx^3 correspondante à ce point :

$$\frac{112m\sqrt{2}}{27a^5\sqrt{3}}(1-3\sin^2 2\alpha).$$

Ici l'angle α reparaît, et conséquemment la force due à un petit déplacement horizontal varie avec l'azimut : pour m positif, elle est négative si l'angle α est tel qu'on ait $\sin^2 2\alpha > \frac{1}{5}$, et positive si l'on a $\sin^2 2\alpha < \frac{1}{5}$; pour m négatif, les choses seraient évidemment inverses.

Ainsi, dans l'exemple simple que nous avons choisi, lorsque le pôle considéré est, dans sa position d'équilibre, au point où les trois coefficients du premier ordre sont nuls, un déplacement horizontal du premier ordre ne fait naître qu'une force du troisième ordre, et celle-ci tend, suivant les azimuts, à ramener le pôle à sa position primitive ou à l'en écarter davantage; c'est donc en réalité une position d'équilibre instable, puisqu'il y a des azimuts d'instabilité.

Passons aux systèmes magnétiques indéterminés et agissant sur les deux pôles de l'aiguille. Parmi toutes les dispositions qu'on peut se figurer, celles qui semblent à priori les plus favorables à la stabilité, sont évidemment les dispositions symétriques, lesquelles exigent, on le comprend, que l'aiguille, dans sa position d'équilibre, soit verticale ou horizontale.

Dans le premier cas, c'est-à-dire avec une aiguille verticale, les éléments de la disposition symétrique la plus générale sont visiblement : 1° des centres magnétiques situés sur la verticale qui contient l'axe de l'aiguille; 2° des groupes consistant respectivement en deux centres identiques placés à la même hauteur, de deux côtés opposés de la verticale de l'axe, et à égale distance de celle-ci; l'intensité et l'espèce du magnétisme, ainsi que la distance à la verticale de l'axe, la hauteur et l'orientation, peuvent varier d'un de ces couples à un autre; enfin plusieurs d'entre eux peuvent être à la même hauteur, et conséquemment dans un même plan horizontal; 3° des groupes composés d'un nombre impair de centres identiques occupant les sommets d'un polygone régulier horizontal par le centre duquel passe la verticale de l'axe. Quant à l'arrangement analogue d'un nombre pair de centres, il peut être considéré comme un ensemble de couples (2°) convenablement orientés dans un même plan.

Je nomme symétrique une pareille disposition, parce que chacune de ses parties est symétrique par rapport à l'aiguille, et ne produit évidemment qu'une action verticale. De là résulte que si l'on transporte au centre de gravité de l'aiguille les actions respectives exercées par tous les centres sur les deux pôles, et qu'on décompose, en ce point, celles qui sont obliques en deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale, toutes les composantes horizontales s'entre-détruiront, et il ne restera qu'une résultante verticale; quand cette dernière est dirigée de bas en haut et que le poids de l'aiguille lui est égal, il y a donc équilibre.

Cela posé, imaginons que le poids de l'aiguille augmente ou diminue graduellement sans changement dans l'intensité du magnétisme des deux pôles; il y aura, en général, entre certaines limites, une suite continue de nouvelles positions d'équilibre respectivement correspondantes à chacune des valeurs du poids; mais, toujours à cause de la symétrie, l'axe de l'aiguille devra, dans toutes ces positions, coïncider avec la même verticale. Or admettons que, parmi les positions d'équilibre dont il s'agit, il y en ait une pour laquelle les coefficients de dx, dy et dz des expressions [2] soient tous les trois égaux à zéro. Cette position correspondra à une valeur déterminée du poids de l'aiguille, et si nous supposons ce poids quelque peu plus grand ou plus petit, la position d'équilibre sera simplement, d'après ce qu'on vient de voir, un peu plus basse ou un peu plus haute, de sorte qu'il n'y aura de changé, dans les coefficients en question, que les valeurs de z et de z_1. Mais les deux pôles étant sur la même verticale, si l'on désigne par l la distance qui les sépare, distance qu'on peut regarder comme constante pour de petits déplacements de l'aiguille, et si z_1 appartient au pôle supérieur, on a $z_1 = z + l$; conséquemment, dans le cas dont nous nous occupons, les trois coefficients ne contiennent d'autre variable que z. D'après cela, si nous prenons la seconde valeur de z très-rapprochée de la première, il est clair que nos trois fonctions, nulles pour celle-ci, ne le seront plus pour l'autre; or, en vertu de notre démonstration générale, il y a alors nécessairement instabilité. Si donc la position d'équilibre pour laquelle les trois coefficients sont nuls, était stable, elle se trouverait immédiatement contiguë de part et d'autre à des positions instables, ce qui serait évidemment contraire à la loi de continuité.

Ainsi, dans la position dont il s'agit, l'équilibre est encore instable, et c'est ce que confirme le résultat que nous avons obtenu, par le calcul, à l'égard d'un seul pôle, avec un système symétrique de quatre centres.

Examinons maintenant le second des deux cas de symétrie, c'est-à-dire celui où l'aiguille est horizontale. Ici la disposition des centres magnétiques doit différer un peu de la précédente. Pour simplifier, imaginons l'aiguille rigoureusement cylindrique et homogène, de façon que son centre de gravité coïncide exactement avec le milieu de l'intervalle des deux pôles. Cette aiguille étant donc supposée horizontale, concevons par son axe un plan vertical, et, par son centre de gravité, un second plan vertical perpendiculaire au premier. Dans l'un quelconque des quatre angles dièdres ainsi formés, plaçons, où nous voudrons, un centre magnétique; puis, à partir de ce centre, menons une perpendiculaire à celui des deux plans qui contient l'axe, prolongeons-la d'une quantité égale au delà de ce plan, et, à l'extrémité du prolongement, plaçons un second centre identique au premier. De chacun de ces deux centres, menons ensuite des perpendiculaires au second plan, prolongeons-les de même, au delà, d'une quantité égale à leur longueur en deçà, et, aux extrémités de ces prolongements, plaçons deux nouveaux centres de même intensité que les premiers, mais de magnétisme contraire. Nous aurons ainsi un groupe de quatre centres rangés suivant les sommets d'un rectangle horizontal que les deux plans ci-dessus partagent en quatre rectangles égaux, groupe où il y a partout même intensité, mais où le magnétisme est différent d'un côté à l'autre du plan perpendiculaire à l'axe. Avec un peu de réflexion, on se convaincra qu'un pareil groupe exerce sur l'aiguille des actions parfaitement symétriques, qui se réduisent à une force verticale passant par le centre de gravité. Plaçons aussi, dans le plan qui contient l'axe, deux centres égaux en intensité, mais contraires en magnétisme, l'un d'un côté, l'autre du côté opposé de l'intersection des deux plans, à égale distance de celle-ci, et à la même hauteur; ces deux centres formeront un couple agissant de même symétriquement sur l'aiguille, et dont l'action se réduira encore à une force verticale passant par le centre de gravité. Nous pouvons maintenant nous figurer autant de ces groupes et de ces couples qu'il nous plaira, situés ou non dans un même plan horizontal; leur ensemble constituera notre système symétrique, dans lequel il est évidemment impossible d'introduire d'autres éléments. Il est clair qu'en transportant au centre de gravité de l'aiguille toutes les actions exercées sur les deux pôles, et décomposant chacune d'elles en deux forces, l'une horizontale, l'autre verticale, toutes les composantes horizontales se neutraliseront, et il ne restera qu'une résultante verticale passant par le centre de gravité; si donc cette résultante est dirigée de bas en haut et égale au poids de l'aiguille, celle-ci sera dans une position d'équilibre.

Si le poids augmente ou diminue, toujours, bien entendu, sans variation dans le magnétisme, il est visible, à cause de la symétrie, que, dans sa nouvelle position d'équilibre, l'aiguille sera encore horizontale et se trouvera exactement au-dessous ou au-dessus de sa position première, de sorte que les coordonnées horizontales x, x_1, y et y_1 des deux pôles n'auront pas changé, et que z_1 sera demeuré égal à z. Les trois coefficients des expressions [2] seront donc encore des fonctions de la seule variable z, et par conséquent si, parmi les positions d'équilibre correspondantes aux différentes valeurs du poids, il y en a une, pour laquelle les coefficients en question sont égaux à zéro, nous pourrons appliquer à celle-ci le raisonnement du cas précédent, et nous en tirerons de même la conclusion que la stabilité est impossible.

Prenons actuellement un arrangement dissymétrique, et supposons, en premier lieu, que, dans sa position d'équilibre, l'aiguille soit verticale; supposons en outre que les trois coefficients soient nuls. Si l'aiguille augmente ou diminue en poids, sa nouvelle position d'équilibre ne sera plus en général dans la même verticale, et pourra d'ailleurs être oblique, de sorte qu'en passant de la première position à celle-ci, les coordonnées x, x_1, y, y_1, z, z_1 pourront varier toutes. Dès lors le mode de raisonnement dont nous avons fait usage pour les cas de symétrie cesse d'être directement applicable; mais nous arriverons au même résultat par un artifice.

De chacun des centres magnétiques menons une perpendiculaire sur la verticale qui contient l'axe de l'aiguille, prolongeons-la d'une égale quantité au delà de cette verticale, et à l'extrémité du prolongement plaçons un centre de même intensité et de même magnétisme. Le nouveau système de centres ainsi formé sera évidemment ce que deviendrait le premier si on faisait tourner celui-ci de 180° autour de la verticale de l'axe; si donc ce premier système considéré isolément produisait l'équilibre, il en sera de même du second; par conséquent, si l'on transporte au centre de gravité de l'aiguille toutes les actions de l'ensemble des deux systèmes, et qu'on les décompose suivant la verticale et suivant l'horizontale, les composantes horizontales se neutraliseront encore, et la résultante verticale sera simplement doublée, de façon que si l'on double en même temps le poids de l'aiguille, l'équilibre ne sera pas altéré. De plus, si le premier système déterminait la stabilité, le second la déterminera également, et, par suite, la stabilité existera aussi sous l'influence de leur ensemble; or cet ensemble est symétrique, et nous avons vu qu'avec un système symétrique la stabilité est impossible; elle n'avait donc pas lieu avec le système dissymétrique seul.

En second lieu, prenons encore un système dissymétrique, mais supposons les choses telles que, dans sa position d'équilibre, l'aiguille soit horizontale, et qu'en même temps, bien entendu, les trois coefficients soient nuls. Symétrisons d'abord le système par rapport à un plan vertical contenant l'axe de l'aiguille, en opposant à chaque centre magnétique un centre identique symétriquement placé de l'autre côté du plan, comme nous l'avons fait plus haut lorsque nous avons construit un système symétrique à l'égard d'une aiguille horizontale. Ce second système de centres agira évidemment sur l'aiguille de la même manière que le premier, et ne détruira ni l'équilibre, ni la stabilité si elle existait; seulement il faudra doubler le poids de l'aiguille. Symétrisons ensuite l'ensemble de ces deux systèmes par rapport à un second plan vertical perpendiculaire au premier et passant par le centre de gravité de l'aiguille, en observant que les nouveaux centres ajoutés doivent être contraires en magnétisme à ceux dont ils sont les symétriques; pourvu que nous doublions encore le poids de l'aiguille, rien ne sera changé, on le comprend, à l'équilibre, non plus qu'à la stabilité si cette dernière était produite sous l'action isolée du système primitif; or l'ensemble actuel est complétement symétrique, et nous savons qu'avec un tel système l'équilibre est nécessairement instable; il l'était donc avec le système primitif.

Reste le cas d'une aiguille qui, dans sa position d'équilibre, serait oblique à l'horizon, toujours avec la condition de nullité des trois coefficients. Dans ce cas la disposition des centres magnétiques ne peut être que dissymétrique, et l'on ne saurait la symétriser dans son ensemble. Pour simplifier, supposons, comme nous l'avons déjà fait, l'aiguille parfaitement cylindrique et homogène. Décomposons le poids en deux forces verticales respectivement appliquées aux deux pôles, et formons, à chacun de ceux-ci, la résultante de toutes les actions magnétiques exercées sur lui. Deux circonstances pourront se présenter : ou bien ces deux résultantes seront verticales et respectivement égales et opposées aux composantes du poids, de sorte que chaque pôle pris à part sera en équilibre sous l'action des forces auxquelles il est directement soumis; ou bien ces mêmes résultantes seront obliques, et, combinées avec les composantes du poids, donneront deux forces dirigées suivant la longueur de l'aiguille, égales entre elles et de sens opposés.

Examinons d'abord la première circonstance, c'est-à-dire celle où les deux pôles sont en équilibre indépendamment l'un de l'autre. Rappelons-nous que chacun des trois coefficients est la somme de ceux qui appartiennent respectivement à ces pôles (voir les expressions [2]); or l'annulation de chaque coefficient total peut provenir de ce que les deux parties dont il se compose s'entre-détruisent, et alors les coefficients relatifs aux deux pôles en particulier ayant des valeurs finies, il suit de notre démonstration générale que l'équilibre de ces deux pôles, et conséquemment de l'aiguille entière, ne peut être stable; il n'y a donc lieu à une démonstration spéciale que si les coefficients respectivement correspondants aux deux pôles sont nuls.

Admettons qu'il en soit ainsi, et considérons un pôle isolément. En vertu de ce qui précède, nous pourrons faire abstraction du reste de l'aiguille et assimiler, par la pensée, notre pôle à un point matériel ayant le même magnétisme, pesant autant que la moitié de l'aiguille, soumis aux actions de tous les centres magnétiques, et occupant une position d'équilibre telle que les trois coefficients qui s'y rapportent soient nuls. Cela posé, par ce point matériel menons une verticale; rien ne nous empêchera de symétriser le système magnétique par rapport à celle-ci, en opposant, comme nous l'avons fait à l'égard d'une aiguille verticale, à chaque centre un centre identique, et alors le mode de démonstration employé pour les cas de symétrie nous conduira, comme toujours, à la conclusion que l'équilibre est de toute nécessité instable. Comme les mêmes considérations sont applicables à l'autre pôle, il s'ensuit que l'instabilité a lieu pour tous les deux, et, par suite, pour l'aiguille entière.

Discutons enfin la seconde circonstance, savoir celle où aucun des deux pôles n'est en équilibre par les forces qui agissent directement sur lui, et considérons encore l'un d'eux en particulier; nommons-le a et désignons l'autre par b. L'état d'équilibre du pôle a résulte : 1° d'une force verticale descendante égale à la moitié du poids de l'aiguille, 2° des actions exercées sur lui par tous les centres magnétiques, 3° d'une force transmise du pôle b. Cette dernière force étant dirigée suivant l'axe de l'aiguille, nous pouvons la transporter au pôle a, puis faire abstraction du reste de l'aiguille; nous pouvons ensuite décomposer cette même force en ses éléments primitifs, qui sont l'autre moitié du poids de l'aiguille et les actions exercées par tous les centres magnétiques sur le pôle b. L'équilibre du pôle a est donc identiquement le même que si ce pôle était seul sollicité par toutes les forces qui agissent sur l'aiguille. Il résulte de là que nous pouvons supprimer, par la pensée, tout le reste de l'aiguille et substituer à notre pôle un simple point matériel doué du même magnétisme en espèce et en intensité, et pesant autant que l'aiguille entière, pourvu que nous ajoutions aux actions qu'il subit de la part du système magnétique, d'autres actions identiques à celles que ce système exerçait sur le pôle b; or pour cela il suffit évidemment d'introduire un second système magnétique disposé exactement, par rapport à notre point matériel, comme le premier l'était par rapport au pôle b, mais ayant à tous ses centres des magnétismes contraires. Alors, comme dans la première circonstance, nous sommes maîtres, après avoir fait passer une verticale par notre point matériel, de symétriser à l'égard de celle-ci l'ensemble des deux systèmes magnétiques, ce qui nous conduira de même à la conclusion que l'équilibre est instable pour chacun des deux pôles, et par conséquent pour l'aiguille entière.

Ainsi lorsque, dans la position d'équilibre de l'aiguille, les trois coefficients des expressions [2] sont égaux à zéro, l'équilibre est toujours instable, comme lorsque ces mêmes coefficients ont des valeurs finies.

Concluons de toute notre discussion qu'il est absolument impossible de soutenir en l'air une aiguille aimantée, à l'état d'équilibre stable dans tous les sens, au moyen d'un système de barreaux aimantés, quels que soient le nombre de ces barreaux, leur disposition et les intensités respectives de leur magnétisme. La suspension d'un corps pesant sans aucun point d'appui, même sur l'air, serait une sorte de prodige, et il ne nous est pas donné d'en opérer.

Mais si notre problème est impossible, nous pouvons chercher d'où provient cette impossibilité. Or il est aisé de faire voir qu'elle tient à la loi qui régit les actions magnétiques; je vais montrer, en effet, par un exemple, que si ces actions s'exerçaient en raison inverse d'une puissance quelconque de la distance autre que la deuxième, l'équilibre stable dans tous les sens serait réalisable.

Supposons que les actions magnétiques soient en raison inverse de la puissance quelconque p de la distance. Conservons les mêmes notations que dans ce qui précède, et, pour simplifier, ne considérons qu'un seul des pôles de l'aiguille. En suivant la marche exposée au commencement de notre démonstration pour arriver aux expressions [1], on trouvera sans difficulté, et sans qu'il soit nécessaire d'indiquer de nouveau les calculs, que les expressions des forces dues à un déplacement infiniment petit du pôle en question dans le sens des trois axes séparément, seront les suivantes :

$$\Sigma \frac{m'[p(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{p+3}{2}}}dx,$$

$$\Sigma \frac{m'[p(y'-y)^2-(x'-x)^2-(z'-z)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{p+3}{2}}}dy,$$

$$\Sigma \frac{m'[p(z'-z)^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2]}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{p+3}{2}}}dz.$$

Cela posé, particularisons le système magnétique : réduisons-le à quatre centres identiques, situés aux sommets d'un carré horizontal, comme nous l'avons fait lorsqu'il s'est agi d'établir les expressions [3]. Comme alors aussi, prenons pour origine des coordonnées le point milieu du carré, et plaçons le pôle de l'aiguille verticalement au-dessous ou au-dessus de ce point, suivant qu'il y a attraction ou répulsion. En faisant les mêmes simplifications et réductions, et désignant encore par a la distance des centres à l'origine, nous arriverons sans peine aux trois expressions :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2m\left[(p-1)\,a^2-2z^2\right]}{(z^2+a^2)^{\frac{p+3}{2}}}\,dx,\\[2ex] \dfrac{2m\left[(p-1)\,a^2-2z^2\right]}{(z^2+a^2)^{\frac{p+3}{2}}}\,dy,\\[2ex] \dfrac{4m\,(pz^2-a^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{p+3}{2}}}\,dz.\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [4]$$

Imaginons maintenant que le pôle de l'aiguille soit dans sa position d'équilibre. Pour que cet équilibre soit stable dans tous les sens à la fois, il faut et il suffit, nous le savons, que les coefficients de dx, dy et dz soient tous les trois négatifs; mais, à cause de l'égalité des deux premiers, ces conditions se réduiront à deux.

Si les actions magnétiques sont attractives, auquel cas m est positif, les conditions dont il s'agit seront

$$\frac{(p-1)a^2}{2} < z^2 \quad \text{et} \quad z^2 < \frac{a^2}{p},$$

et l'on pourra y satisfaire si l'on a

$$\frac{(p-1)a^2}{2} < \frac{a^2}{p},$$

d'où

$$p^2 - p < 2;$$

or cette dernière condition est évidemment remplie par toutes les valeurs de p moindres que 2.

Pour des actions magnétiques répulsives, et conséquemment pour m négatif, les inégalités se renversent, et l'on en déduit comme condition à laquelle p doit satisfaire,

$$p^2 - p > 2,$$

inégalité qui sera vraie avec toutes les valeurs de p supérieures à 2.

Ainsi, comme je l'ai avancé, on pourrait obtenir, à l'égard de l'un des pôles de l'aiguille, la stabilité dans tous les sens à la fois, si les actions magnétiques suivaient la raison inverse de toute autre puissance de la distance que la deuxième; mais, on le voit en même temps, lorsque p est égal à 2, on a $p^2 - p = 2$, de sorte que les deux inégalités ci-dessus ne sont satisfaites ni l'une ni l'autre, et que par conséquent l'équilibre stable dans tous les sens cesse d'être possible.

Nous n'avons raisonné que pour un seul pôle; faisons comprendre actuellement de quelle manière, avec toutes les valeurs de p autres que 2, on rendrait stable l'équilibre de l'aiguille entière.

Concevons l'aiguille placée verticalement dans l'axe du système magnétique, et soit d'abord p inférieur à 2. Dans ce cas, il faudrait que l'aiguille fût tout entière au-dessous du plan des centres magnétiques, le pôle attiré en haut; rien ne nous empêcherait alors de lui attribuer une longueur assez grande pour que toutes les actions exercées sur son pôle inférieur fussent négligeables relativement à celles qui s'exerceraient sur son pôle supérieur; de cette façon il suffirait d'attribuer en même temps aux centres magnétiques une intensité assez considérable pour soutenir l'aiguille à une hauteur où le pôle supérieur serait stable dans tous les sens; on admettra aisément, en effet, que, dans ces conditions, l'aiguille entière prendrait une position d'équilibre stable. Seulement elle ne se tiendrait pas tout à fait verticale, car son pôle inférieur, supposé dans l'axe du système, serait instable horizontalement, et fuirait jusqu'à ce que la pesanteur qui tendrait à le ramener, établît l'équilibre. Je dis que, dans la position verticale de l'aiguille, le pôle inférieur de celle-ci serait instable horizontalement; on s'en assurera en appliquant la première des expressions [4] à ce pôle, si l'on fait attention que, pour lui, m serait négatif et z très-grand.

La difficulté serait moindre encore avec des valeurs de p supérieures à 2, car alors les actions magnétiques décroîtraient beaucoup plus rapidement par l'augmentation de la distance; observons qu'ici l'aiguille devrait traverser le plan des centres magnétiques, et avoir son pôle repoussé au-dessus de ce plan. On reconnaîtra, par les expressions [4], que, pour une longueur suffisante de l'aiguille, le pôle inférieur serait stable dans le sens horizontal, et qu'ainsi l'aiguille demeurerait verticale.

Malheureusement $p=2$ est le cas de la nature, et nous ne pouvons rien y changer. Rentrons donc dans la réalité, et étudions un nouvel exemple particulier.

Réduisons le système magnétique à deux centres seulement, situés sur une même horizontale; supposons-les répulsifs, pour fixer les idées, et ayant même intensité; continuons à ne considérer qu'un seul des pôles de l'aiguille, et plaçons-le verticalement au-dessus du milieu de la droite qui joint les centres magnétiques; enfin prenons pour origine ce point milieu, en laissant d'ailleurs indéterminée l'orientation de la droite des centres par rapport aux axes des x et des y.

Pour traiter cet exemple, revenons encore aux expressions [1]. D'après les positions respectives que nous venons d'adopter pour l'origine des coordonnées et pour le pôle de l'aiguille, z', z'', x et y seront nuls, et les expressions dont il s'agit deviendront simplement, en écrivant m au lieu de m', à cause de l'identité des deux centres magnétiques,

$$\Sigma\frac{m(2x'^2-y'^2-z^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}dx,\quad \Sigma\frac{m(2y'^2-x'^2-z^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}dy,\quad \Sigma\frac{m(2z^2-x'^2-y'^2)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}dz.$$

Mais on a évidemment ici $x''^2=x'^2$ et $y''^2=y'^2$, de sorte que les deux termes dont se composerait chaque somme écrite intégralement, seraient égaux, et si l'on désigne par a la distance de chacun des centres à l'origine, on a $x''^2+y''^2=x'^2+y'^2=a^2$. Par ces simplifications, les expressions prennent la forme :

$$\frac{2m(2x'^2-y'^2-z^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}dx,\quad \frac{2m(2y'^2-x'^2-z^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}dy,\quad \frac{2m(2z^2-a^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}dz;$$

enfin, si nous appelons α l'angle compris entre la droite des centres et l'axe des x, nous pourrons remplacer x'^2 par $a^2\cos^2\alpha$ et y'^2 par $a^2\sin^2\alpha$, et il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2m[(3\cos^2\alpha-1)a^2-z^2]}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}dx,\\[2ex] \dfrac{2m[(3\sin^2\alpha-1)a^2-z^2]}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}dy,\\[2ex] \dfrac{2m(2z^2-a^2)}{(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}dz.\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad [5]$$

Ici, on le voit, l'angle α ne disparaît pas, et conséquemment pour notre système de deux centres, la force née d'un déplacement horizontal varie avec l'azimut de celui-ci. m étant négatif puisque nous supposons des actions répulsives, il y aura stabilité verticale si l'on a $2z^2 > a^2$, ou

$$z > \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

En ce qui concerne la stabilité horizontale, il suffira de considérer la première des expressions [5], car, en y faisant croître α de 0° à 90°, on passe par tous les azimuts; or cette première expression donne, pour la condition de stabilité, $(3 \cos^2 \alpha - 1)\, a^2 > z^2$, ou

$$a\sqrt{3 \cos^2 \alpha - 1} > z;$$

il sera donc possible d'avoir en même temps que la stabilité verticale, une stabilité horizontale entre certaines limites d'azimut, si l'angle α peut satisfaire à la condition

$$a\sqrt{3 \cos^2 \alpha - 1} > \frac{a}{\sqrt{2}};$$

or, de cette inégalité on déduit

$$\cos \alpha > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire $\alpha < 45°$. En donnant à l'aiguille un poids tel que, dans la position d'équilibre du pôle considéré, la hauteur z de celui-ci soit convenable, on pourra donc toujours obtenir, en même temps que la stabilité verticale, la stabilité horizontale pour des déplacements s'écartant de moins de 45° de la droite des centres. La stabilité horizontale sera à son maximum pour un déplacement parrallèle à cette droite, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, puisqu'alors, dans la première des expressions [5], le numérateur aura sa plus grande valeur, et l'on voit qu'à mesure que α grandira, la stabilité dont il s'agit ira en diminuant. Au delà d'un azimut de 45°, soit d'un côté, soit de l'autre de la droite des centres, il y a nécessairement instabilité horizontale, puisque l'angle α ne satisfait plus à la condition $\cos\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$: si, par exemple, on fait $\alpha = 90°$, le numérateur de la première des expressions [5] devient $2m\,(-a^2 - z^2)$, et ainsi, à cause de m négatif, toute la quantité est essentiellement positive.

Cette existence simultanée de la stabilité verticale et d'une stabilité horizontale limitée entre certains azimuts, est aussi l'un des résultats indiqués au commencement de ce mémoire; il nous servira également dans ce qui suit.

On peut déduire de nos formules certaines positions d'équilibre curieuses, bien qu'exigeant nécessairement l'emploi d'une résistance extérieure. Leur réalisation, que j'ai effectuée, constitue ainsi une vérification de ces mêmes formules.

1. Les expressions [3], relatives à un système symétrique de quatre centres, montrent, on l'a vu, qu'avec des actions attractives, si le pôle considéré de l'aiguille placé dans l'axe du système sous le plan des quatre centres, est distant de ce plan d'une quantité inférieure à une limite déterminée, l'équilibre est stable dans le sens vertical et instable dans le sens horizontal. Pour réaliser ces conditions, je m'y suis pris de la manière suivante :

Un fil de cuivre d'une fraction de millimètre d'épaisseur a été plié de manière à présenter en son milieu un petit anneau circulaire d'environ 3^{mm} de diamètre; les deux parties du fil ont été ensuite repliées à angle droit à quelques centimètres de part et d'autre de l'anneau et perpendiculairement au plan de celui-ci; ces portions repliées avaient 5^{mm} de longueur; on les a fixées avec de la cire normalement à la surface d'une grande plaque de verre mince; le plan du petit anneau se trouvait ainsi parallèle à la surface du verre, et distant de celle-ci de 5^{mm}. Cela fait, retournant la plaque de façon que le petit appareil en fil de cuivre fût en dessous, on l'a posée horizontalement sur deux supports assez éloignés pour laisser entre eux ce petit appareil. Sur la face supérieure de la plaque, on a placé, dans le prolongement l'un de l'autre, deux barreaux fortement aimantés tournant leurs pôles de même nom, que je supposerai des pôles sud, vers le point situé verticalement au-dessus du centre du petit anneau, puis on a placé de même, à angle droit avec ceux-ci, deux autres barreaux semblables tournant encore leurs pôles sud vers le même point. Ces quatre barreaux, à peu près égaux en dimensions, avaient, en moyenne, 146^{mm} de longueur, 13^{mm} de largeur, et 6^{mm} d'épaisseur; enfin leurs extrémités sud étaient distantes de 8^{mm} de la verticale passant par le centre du petit anneau. Nos pôles sud constituaient ainsi un système symétrique de quatre centres, tel que le supposent les expressions [3], en négligeant, bien entendu, comme trop faibles à cause de l'éloignement, les actions des autres pôles.

D'après cela, imaginons que l'on prenne en main une aiguille à coudre aimantée dont la tête soit le pôle nord, et qu'on la tienne verticalement sous la plaque de verre, dans l'axe du système magnétique, et la tête en haut. Si elle n'est pas trop éloignée de la plaque, on comprend que les actions répulsives exercées sur la pointe par nos pôles sud seront, à cause de la plus grande distance, beaucoup moins énergiques que les actions attractives exercées sur la tête; elles ne feront qu'affaiblir un peu celles-ci, sans les détruire ou les masquer. Dès lors, si l'aiguille est assez légère et qu'on la rapproche suffisamment de la plaque, on devra atteindre un point où l'excès de la résultante verticale des attractions sera égal au poids de l'aiguille, et où la tête sera stable dans le sens vertical, mais instable dans le sens horizontal. Si donc, dans ces circonstances, on abandonne l'aiguille à elle-même, la tête devra être lancée de côté, et si la partie supérieure de l'aiguille rencontre un obstacle, tel que la circonférence intérieure du petit anneau, elle devra simplement s'y appuyer, et l'aiguille devra demeurer en cet état sans tomber, maintenue seulement par le contact avec un point de sa surface latérale.

Or c'est ce qui m'a parfaitement réussi, avec une aiguille fine de 3 centimètres de longueur. Après en avoir passé la tête dans le petit anneau jusqu'à ce qu'elle fût très-près de la plaque de verre, on soutenait momentanément la pointe sur le bout du doigt, et l'aiguille allait en effet s'appuyer contre un point de l'intérieur de l'anneau; on ôtait alors le doigt, et l'aiguille restait suspendue, mais légèrement inclinée. On faisait ensuite glisser un peu l'ensemble des barreaux sur la plaque de verre, sans changer leurs positions relatives, de manière à amener le point de contact de l'aiguille et de l'anneau très-près de l'axe du système magnétique, et l'aiguille prenait une position sensiblement verticale, la tête étant à 2^{mm} environ de la plaque de verre. Quand on marchait dans la chambre ou qu'on donnait de petits coups sur la plaque, l'aiguille oscillait fortement, mais sans se détacher.

Je dois ajouter que j'ai eu quelque peine à trouver une aiguille qui se maintînt si bien; sans doute, avec des barreaux plus puissants, cette difficulté ne se présenterait pas.

2. Comme on l'a vu aussi par les expressions [3], si le pôle attiré est notablement plus éloigné du plan des centres magnétiques, il y a, verticalement, changement de la stabilité en instabilité, et, horizontalement, de l'instabilité en stabilité. Il s'ensuit que si l'on descend l'aiguille d'une certaine quantité au-dessous du petit anneau, en la maintenant verticalement dans l'axe du système, qu'on en pose la pointe sur un support horizontal, et qu'on l'abandonne à elle-même, elle devra demeurer en équilibre sur sa pointe, dans la position verticale. C'est encore ce que l'expérience a pleinement confirmé, et l'on a pu, sans détruire cet équilibre, descendre le support qui soutenait la pointe jusqu'à ce que la tête fût à 37^{mm} de la plaque de verre.

3. D'après les expressions [3] encore, on se le rappelle, si les actions sont répulsives, les conditions de stabilité se renversent; en d'autres termes, lorsque la distance du pôle considéré au plan des centres magnétiques est inférieure à la même limite que pour l'attraction, il y a stabilité horizontale et instabilité verticale, et, au delà de la limite en question, il y a au contraire instabilité horizontale et stabilité verticale. De plus, il est aisé de reconnaître, à l'inspection des deux premières des expressions [3], que, toujours pour des actions répulsives, et conséquemment pour m négatif, le maximum de la stabilité horizontale correspond à $z = o$, c'est-à-dire au cas où le pôle repoussé est dans le plan même des centres magnétiques. Si donc on substitue à la plaque de verre une plaque de carton percée d'une ouverture circulaire de quelques centimètres de diamètre, qu'on dispose les barreaux autour du centre de cette ouverture comme ils l'étaient précédemment par rapport à l'axe du petit anneau, qu'on aimante l'aiguille de manière

que sa tête soit un pôle sud, que, tenant l'aiguille verticalement sous le carton, on en passe la tête dans l'axe de l'ouverture et entre les barreaux, qu'on amène un support sous la pointe, et enfin qu'on abandonne l'aiguille, celle-ci devra encore se maintenir dans sa position verticale en équilibre sur sa pointe.

C'est en effet ce qui a lieu; mais si l'on veut obtenir cet équilibre, il faut écarter deux causes perturbatrices. D'abord les expressions [3] supposent égales les intensités magnétiques des quatre barreaux, condition qui évidemment ne se réalise pas dans la pratique; or si l'on adapte les expressions [1] à notre système symétrique de quatre centres, comme nous l'avons fait pour arriver aux expressions [3], mais avec cette différence qu'on laisse inégales les intensités magnétiques, on trouvera que cette inégalité a une très-grande influence sur la stabilité horizontale, en ce sens qu'elle la fait varier beaucoup avec l'azimut du déplacement. Si, pour simplifier, on ne suppose, par exemple, que deux intensités différentes, l'une se rapportant à l'un des couples de barreaux en regard et l'autre à l'autre couple, on reconnaît que si ces intensités sont dans le rapport de 2 à 1, la stabilité est annulée dans l'azimut perpendiculaire à la direction du couple le plus fort, et que si le rapport est plus grand encore, il y a instabilité dans ce même azimut; pour éviter des longueurs, je ne donne pas ici le calcul, mais il ne présente aucune difficulté. Il suit de là qu'il faut tâcher de se procurer des barreaux à peu près égaux en force, et qu'en outre, pour rendre la stabilité sensiblement égale dans tous les azimuts, il faut altérer un peu la symétrie de position de ces barreaux; je dirai ci-après comment on règle les tâtonnements à cet égard.

La seconde cause perturbatrice consiste en ce que la proximité des centres répulsifs modifie la distribution du magnétisme dans l'aiguille; aussi, avec une aiguille ordinaire, il est impossible d'obtenir l'équilibre cherché; mais j'ai obvié à cet inconvénient en faisant tremper l'aiguille très-dur, et en lui donnant ainsi plus de force coercitive.

Dans mon expérience, la distance entre les extrémités en regard était, pour deux des barreaux, de 24^{mm}, et, pour les deux autres, de 19^{mm}, et la tête de l'aiguille était peu au-dessous du niveau de la surface supérieure des barreaux; l'aiguille avait les mêmes dimensions que dans les expériences 1 et 2.

Pour diriger les tâtonnements relatifs à la meilleure disposition des barreaux, je m'y suis pris de la manière suivante : Les barreaux ayant été d'abord placés régulièrement, les extrémités en regard étant, dans chaque couple, à 30^{mm} l'une de l'autre, on a aimanté l'aiguille de façon que sa pointe fût repoussée, puis on l'a suspendue par la tête, au moyen d'un fil court, au bras horizontal d'un support indépendant du carton; on a donné à ce support une position telle que, si l'aiguille et les barreaux eussent été sans magnétisme, la pointe de l'aiguille se fût trouvée dans l'axe du système et au niveau de la surface inférieure des barreaux. Par suite de l'inégalité des actions magnétiques, l'aiguille ainsi suspendue et mise dans cette position, puis abandonnée, rapprochait davantage sa pointe de l'un des barreaux; on a fait alors avancer un peu ce dernier jusqu'à ce que la pointe se trouvât au milieu de l'intervalle qui le séparait du barreau en regard, et on a dérangé aussi les autres de petites quantités pour amener la pointe au milieu de leur intervalle. Ceci atteint, on a fait glisser successivement le carton avec le système magnétique, d'environ 5^{mm} dans les quatre azimuts rectangulaires correspondants aux directions des quatre barreaux, et l'on a constaté que la pointe ne suivait pas également bien ce mouvement dans les quatre sens; on a rapproché l'un de l'autre les deux barreaux dans le sens desquels la stabilité était moindre, et l'on est parvenu, après quelques tâtonnements, à déterminer une stabilité sensiblement uniforme; enfin on a rapproché encore par degrés tous les barreaux, en maintenant cette uniformité, jusqu'à ce qu'un déplacement de 5^{mm} du carton entraînât, dans les quatre azimuts, un déplacement de la pointe d'au moins 4^{mm}.

Disons en passant que si, avant d'ôter l'aiguille pour l'aimanter en sens contraire et la placer verticalement sur sa pointe dans la position d'équilibre qu'il s'agit de réaliser, on soulève graduellement le support, on atteint bientôt une hauteur où l'aiguille quitte brusquement sa direction verticale : la pointe se jette de côté, et l'aiguille se maintient ainsi dans une position fortement inclinée au-dessus du système des barreaux. On vérifie par là le changement de la stabilité horizontale en instabilité lorsque le pôle repoussé de l'aiguille dépasse une certaine limite de distance au plan des centres magnétiques.

4. Il y a encore un autre moyen de maintenir une aiguille en équilibre sur sa pointe; il consiste à placer verticalement au-dessus de la tête le pôle attractif d'un barreau, à une distance un peu trop grande pour que l'aiguille s'y élance. Ce moyen est bien connu, je pense; mais je vais montrer qu'il se déduit également de mes formules.

Ne considérons que l'action exercée sur le pôle supérieur de l'aiguille, celle qui sollicite le pôle inférieur étant trop faible, à cause de la distance. Les formules à employer sont donc les expressions [1], et, puisqu'il n'y a qu'un seul centre magnétique, il faut se borner au premier terme de chacune des sommes que représentent ces expressions. Comme le pôle influencé et le centre magnétique sont sur une même verticale, les différences $x'-x$ et $y'-y$ sont nulles, et les trois expressions se réduisent conséquemment à

$$\frac{-m'}{(z'-z)^3}\,dx, \qquad \frac{-m'}{(z'-z)^3}\,dy, \qquad \frac{2m'}{(z'-z)^3}\,dz.$$

Or, puisqu'il s'agit de l'attraction, m' est positif, et l'ordonnée z' du centre magnétique étant nécessairement plus grande que l'ordonnée z du pôle considéré de l'aiguille, le dénominateur est de même positif; les deux premières expressions sont donc essentiellement négatives, et indiquent ainsi la stabilité horizontale du pôle en question. Quant à la troisième, qui est positive, elle montre qu'il y a instabilité dans le sens vertical; mais cette instabilité est neutralisée par la résistance du plan sur lequel repose la pointe.

5. Les expressions [3], relatives à un système symétrique de deux centres agissant sur un seul pôle, vont aussi nous fournir des positions d'équilibre remarquables. D'après ces expressions, comme je l'ai fait voir, lorsque les actions sont répulsives et que le pôle considéré est au-dessus du milieu de l'intervalle des deux centres à une hauteur comprise entre deux limites déterminées, il y a stabilité à la fois dans le sens vertical et dans le sens horizontal parallèle à la droite qui joint les deux centres, mais instabilité dans le sens horizontal perpendiculaire à cette droite.

Cela étant, concevons deux barreaux posés horizontalement dans le prolongement l'un de l'autre, leurs pôles sud en regard, mais séparés par un certain intervalle; ces deux pôles sud, s'ils sont sensiblement égaux en force, pourront être regardés comme constituant le système magnétique dont il s'agit. Suspendons par la tête à un fil fin de quelques centimètres de longueur une aiguille de mêmes dimensions que les précédentes, aimantée de manière que la pointe soit aussi un pôle sud; prenons d'une main l'extrémité du fil, et, soutenant l'aiguille dans une position horizontale à l'aide d'un doigt de l'autre main passé par-dessous, amenons la partie voisine de la pointe au-dessus du milieu de l'intervalle de nos barreaux, l'aiguille ayant une direction perpendiculaire à leur longueur. Si elle n'est pas trop pesante et si l'intervalle des barreaux est convenable, nous devrons trouver une hauteur telle qu'après avoir ôté le doigt, l'aiguille demeure soutenue, sans se jeter de côté, et avance ou recule seulement dans le sens de sa longueur; or en mettant obstacle à ce mouvement par une obliquité suffisante du fil en arrière ou en avant, l'aiguille devra se maintenir dans sa position horizontale, suspendue simplement par la tête à un fil oblique, à moins toutefois que l'action des centres répulsifs ne diminue trop le magnétisme de la pointe.

L'expérience réussit, en effet, parfaitement : les barreaux étaient pris parmi ceux des expériences précédentes, et l'aiguille était aussi de même espèce; les extrémités en regard des deux barreaux étaient distantes l'une de l'autre de 18^{mm}, et l'aiguille se soutenait horizontalement à 17^{mm} au-dessus du système. Au lieu de tenir le fil en main, on l'avait attaché à un petit support, ce qui avait permis de lui donner plus de longueur; il était long de 10 centimètres, et faisait avec la verticale un angle d'à peu près 30°.

Il semble que si, l'aiguille étant dans cette position d'équilibre, on ajoute deux barreaux ayant leurs extrémités nord en regard, et disposés par rapport au pôle de l'aiguille voisin de la tête comme les premiers le sont par rapport au pôle voisin de la pointe, l'aiguille tout entière serait soutenue, sans autre tendance qu'à avancer ou reculer dans le sens de sa longueur, de sorte que, dans le premier cas, on l'empêcherait d'aller plus loin en donnant au fil une direction horizontale. Chacun des deux couples de barreaux agirait, à la vérité, non-seulement sur le pôle de l'aiguille qu'il doit soutenir, mais, en même temps, sur l'autre pôle; et ces actions étant de nature contraire aux premières les affaibliraient nécessairement; néanmoins, comme elles seraient beaucoup plus faibles à cause de l'obliquité et de la plus grande distance, on pourrait s'attendre à ce que leur influence fût peu sensible; d'ailleurs on l'atténuerait encore en prenant une aiguille plus longue. D'autre part, toutes les actions simultanées sur les deux pôles de l'aiguille tendraient à renverser le magnétisme de celle-ci, mais on pourrait amoindrir cette influence en employant une aiguille trempée très-dur.

J'ai donc essayé l'expérience, d'abord avec une aiguille de 30^{mm} de longueur, trempée très-dur; mais je ne suis point parvenu à la soutenir; une aiguille de 45^{mm} également trempée très-dur, ne m'a pas donné plus de résultat.

6. La principale cause de cet insuccès, c'est-à-dire l'altération du magnétisme de l'aiguille, disparaît évidemment si l'on substitue les actions attractives aux actions répulsives, en plaçant, bien entendu, l'aiguille sous le système des barreaux; alors, en effet, toutes les actions simultanées concourent, au contraire, à maintenir le magnétisme.

Mais, dans cette nouvelle disposition de l'expérience, il est aisé de voir que les conditions de stabilité sont différentes: si, dans les expressions [5], on fait m positif, on reconnaît que la stabilité verticale, au lieu de commencer au delà d'une certaine limite de distance du pôle de l'aiguille à la droite qui joint les centres magnétiques, n'existe au contraire qu'en deçà, et que la stabilité horizontale est dans le sens perpendiculaire à cette droite, tandis que l'instabilité horizontale est dans le sens parallèle. Concevons donc deux systèmes magnétiques de cette espèce disposés de manière que, l'aiguille étant placée horizontalement au-dessous de leur ensemble, ils agissent tous les deux par attraction, l'un sur la tête, l'autre sur la pointe, et que, dans chacun d'eux, la droite qui joint les deux centres magnétiques soit perpendiculaire à l'aiguille. Alors si cette dernière est à une distance moindre que la limite en question, elle devra être stable dans le sens vertical et dans le sens de sa longueur, mais instable dans le sens horizontal perpendiculaire à cette longueur, et tendra conséquemment à s'élancer dans ce sens; or, pour l'arrêter, il suffira, on le comprend, de deux fils très-fins attachés l'un à la tête, l'autre à la pointe, dirigés horizontalement en sens contraire de la tendance ci-dessus, et fixés à un support par leurs autres extrémités; il faudra, bien entendu, que l'aiguille soit déjà un peu déplacée du côté où elle exerce une traction sur les fils.

L'expérience confirme ces déductions; je l'ai effectuée d'abord au moyen de mes barreaux posés sur la plaque de verre de l'expérience 1, l'aiguille étant sous cette plaque; mais on réussit avec beaucoup plus de facilité et sur une échelle plus grande, en employant, au lieu des barreaux, deux puissants aimants en fer à cheval placés soit horizontalement, soit un peu inclinés, et se regardant par les pôles de même nom. C'est ce que j'ai fait également : les deux aimants étaient inclinés à l'horizon de 30° à peu près, et les arêtes inférieures des surfaces polaires de l'un d'eux étaient distantes d'environ 70mm des arêtes correspondantes de l'autre; l'aiguille avait 50mm de longueur, et, retenue par deux fils horizontaux qui lui étaient perpendiculaires et longs de 50 centimètres, elle demeurait parfaitement suspendue en l'air à 10mm au-dessous du plan passant par les arêtes inférieures des quatre surfaces polaires.

7. On a vu, à propos de l'expérience 4, que lorsqu'un seul centre magnétique agit par attraction sur un seul pôle placé au-dessous de lui, il y a toujours, quelle que soit la distance, stabilité horizontale dans tous les azimuts, mais instabilité verticale. D'après cela, supposons qu'on suspende verticalement un puissant aimant en fer à cheval, les pôles en bas, puis qu'on amène sous les surfaces polaires une aiguille aimantée placée horizontalement et tournée de manière que chacun de ses pôles soit attiré par le pôle situé au-dessus de lui. Il y aura nécessairement une distance aux surfaces polaires pour laquelle le poids de l'aiguille fera exactement équilibre à l'attraction de l'aimant, et si nous négligeons, à cause de leur moindre énergie, les actions répulsives exercées respectivement par les deux pôles de l'aimant sur les pôles de l'aiguille qui ne sont pas directement au-dessous d'eux, nous pourrons considérer chacun des pôles de l'aiguille comme simplement soumis à une force attractive de la part d'un seul centre magnétique. Dès lors, en vertu de ce qui précède, l'équilibre de l'aiguille entière sera stable horizontalement dans toutes les directions, et instable verticalement, de sorte que l'aiguille abandonnée à elle-même ou bien tombera, ou bien s'élancera à l'aimant.

Maintenant imaginons deux chaînes en fil de cuivre attachées l'une à la tête, l'autre à la pointe de l'aiguille, et descendant jusqu'à un support horizontal sur lequel reposent leurs parties inférieures. Si ces chaines sont assez légères, il est clair qu'il y aura encore une hauteur à laquelle le poids de l'aiguille plus celui des parties descendantes des deux chaines fera équilibre à l'action attractive de l'aimant; mais alors l'équilibre sera permanent. En effet, si l'aiguille s'abaisse de la moindre quantité, le chaînon inférieur de chacune des portions de chaine pendantes s'appuiera par son point le plus bas sur le plan solide, de sorte que la moitié de son poids sera supportée par ce plan; le poids total que soutenait l'aimant sera donc diminué brusquement, de chaque côté, du poids d'un demi-chaînon. Si, au contraire, l'aiguille monte de la moindre quantité, le premier des chaînons couchés sur le plan solide sera légèrement soulevé dans chaque chaîne, et le poids total augmentera brusquement, de chaque côté, de celui d'un demi-chaînon. Ainsi, pour des changements de hauteur qui ne feraient varier l'attraction de l'aimant que de quantités insignifiantes, le poids variera dans le même sens de quantités relativement considérables; l'aiguille ne pourra donc ni monter ni descendre.

J'ai essayé l'expérience, et l'équilibre permanent s'est réalisé. Les deux branches de l'aimant en fer à cheval dont je me suis servi étaient distantes l'une de l'autre de 46^{mm} à leurs extrémités inférieures; l'aiguille avait 50^{mm} de longueur, et environ $0^{mm},3$ d'épaisseur; le fil de cuivre qui formait les chaines avait aussi à peu près cette épaisseur, et chaque chainon était long de 4^{mm}. Ajoutons que, la tête de l'aiguille paraissant avoir plus de tendance que la pointe à s'élancer vers l'aimant, on y avait attaché un peu de cire, pour contre-balancer par une petite addition de poids l'excès de tendance en question. On a pu obtenir l'équilibre permanent avec cinq chaînons pendants de chaque côté, et l'aiguille était alors à 18^{mm} des surfaces polaires de l'aimant.

Cette expérience présente un fait singulier qui, au premier abord, semble paradoxal. Voici, en effet, comment on procède, et ce qui se produit pendant les opérations : L'aiguille étant posée sur la tablette du support, sous l'aimant et bien symétriquement par rapport aux deux surfaces polaires, mais à une distance trop grande pour que le poids soit vaincu par l'attraction de l'aimant, et les deux chaînes étant étalées d'arrière en avant, on fait monter le support jusqu'à ce que l'aiguille soit près de céder à l'attraction magnétique, et on le fixe à cette hauteur. Tenant alors de la main droite un bout de fil de cuivre mince, on le passe sous l'aiguille, près de la tête, et on soulève celle-ci avec précaution, en même temps que, de l'autre main et au moyen d'un second bout de fil de cuivre, on fait reculer un peu la chaine qui se trouve de ce côté, de façon à rendre le premier chaînon vertical sans que l'aiguille ait reculé ou avancé; on retire les deux bouts de fil de cuivre, et l'aiguille conserve la position qu'on lui a donnée. On passe ensuite à la pointe, on y dresse de la même manière le premier chaînon, et l'aiguille se maintient ainsi avec un chaînon dressé de chaque côté. On revient à la tête, on y dresse, toujours par le même moyen, un second chaînon, et l'aiguille reste encore comme on l'a placée, puis on retourne à la pointe, et l'aiguille demeure en équilibre avec deux chaînons dressés de part et d'autre. On continue ces manœuvres, en dressant les chaînons les uns après les autres, sans que l'aiguille tombe ou s'élève d'elle-même, jusqu'à ce qu'on atteigne une limite, qu'on a déterminée par un essai préalable, au delà de laquelle l'aiguille s'élancerait à l'aimant, entraînant les chaînes avec elle.

Or, si l'on réfléchit, on doit se demander d'où peut provenir l'espèce d'indifférence de l'aiguille amenée à ces hauteurs successives. En effet, quand on dresse les chaînons les uns après les autres, le poids total supporté augmente en progression arithmétique, et la distance aux pôles de l'aimant diminue en progression arithmétique aussi, tandis que l'attraction de l'aimant croît suivant une loi plus rapide. Voici l'explication de cette difficulté apparente : Lorsque l'aiguille est soutenue avec un seul chaînon dressé de chaque côté, l'attraction de l'aimant peut excéder d'une petite quantité la somme des poids de l'aiguille et de ces deux chaînons, car, on l'a vu plus haut, pour que les chaînons suivants ne puissent être soulevés par cette attraction, il suffit que l'excès, à chaque chaîne, soit inférieur au poids d'un demi-chaînon; maintenant, quand on exécute les opérations indiquées, la loi plus rapide de l'attraction magnétique a pour résultat de faire croître l'excès de cette force sur le poids total soutenu, à mesure que de nouveaux chaînons sont dressés, mais c'est seulement lorsque ce même excès atteint ou dépasse de chaque côté le poids d'un demi-chaînon que l'aiguille peut céder à l'attraction de l'aimant.

Terminons en allant au-devant de certaines objections.

En premier lieu, notre démonstration générale suppose constantes les quantités m', m'', m''', etc., ce qui revient à regarder comme invariables le magnétisme de l'aiguille et celui des centres qui agissent sur elle. Cette supposition était indispensable pour rendre le problème accessible au calcul. Or il n'en est pas tout à fait ainsi dans la réalité : avec des actions attractives, le magnétisme de l'aiguille, et même celui des centres, augmente plus ou moins en intensité quand l'aiguille se rapproche de ces centres, de sorte qu'alors les actions exercées suivent une loi un peu plus rapide que la raison inverse du carré des distances; avec des actions répulsives, c'est le contraire qui a lieu, et la loi des actions réelles devient un peu moins rapide que la raison inverse du carré des distances.

Je répondrai d'abord que, sauf dans le cas particulier où il y a à la fois répulsion sur les deux pôles de l'aiguille (voir la deuxième des expériences 5), on peut, je pense, considérer ces variations de magnétisme comme négligeables pour les déplacements minimes qui figurent dans la démonstration. J'ajouterai, et c'est là le point capital, que ces mêmes variations, petites ou grandes, loin de pouvoir amener la stabilité de l'équilibre, doivent, au contraire, lui être défavorables. En effet, j'ai montré que si les actions magnétiques suivaient la raison inverse d'une puissance de la distance autre que la deuxième, on obtiendrait l'équilibre stable dans tous les sens, et il semble bien probable, d'après cela, qu'on arriverait également à la stabilité avec toute autre loi plus rapide ou moins rapide que la raison inverse en question; mais, ainsi qu'on l'a vu alors, la stabilité dans tous les sens exigerait la condition expresse qu'avec une loi moins rapide on se servît des actions attractives, et qu'avec une loi plus rapide on employât les actions répulsives; or c'est précisément dans le sens opposé que les choses se passent, puisque, comme je l'ai rappelé, si l'on met en jeu les actions attractives, la loi augmente en rapidité, et si l'on fait usage des actions répulsives, elle diminue en rapidité.

En second lieu, la partie de notre démonstration qui concerne le cas exceptionnel où les coefficients de dx, de dy et de dz dans les expressions [2] sont tous les trois égaux à zéro, suppose que les pôles de l'aiguille occupent des positions fixes sur celle-ci; or ces pôles, c'est-à-dire les points d'application des résultantes respectives des actions de tous les centres magnétiques sur les deux moitiés de l'aiguille, changent nécessairement quand l'aiguille se déplace par rapport aux centres magnétiques; mais comme ces changements ne sauraient être considérables pour de grands mouvements de l'aiguille, il s'ensuit que pour les mouvements très-minimes dont il s'agit dans la démonstration, on peut les négliger complétement. Enfin la même chose s'applique aux pôles des barreaux, pôles qui, dans un système réel, constituent ce que nous avons nommé les centres magnétiques.

FIN.