

# Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. Sixième série

Joseph Plateau

---

#### Citer ce document / Cite this document :

Plateau Joseph. Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. Sixième série. In: Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome 33, 1861. pp. 1-73;

doi : <https://doi.org/10.3406/marb.1861.3553>;

[https://www.persee.fr/doc/marb\\_0775-3225\\_1861\\_num\\_33\\_1\\_3553](https://www.persee.fr/doc/marb_0775-3225_1861_num_33_1_3553);

---

Fichier pdf généré le 25/03/2024

RECHERCHES  
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES  
SUR  
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE  
D'UNE  
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR:  
PAR  
J. PLATEAU.

---

SIXIÈME SÉRIE<sup>1</sup>.

THÉORIE DE LA GÉNÉRATION DES LAMES LIQUIDES. — LOIS QUI RÉGISSENT LES SYSTÈMES LAMINAIRES, THÉORIE ET EXPÉRIENCES; CONSTITUTION DE LA MOUSSE QUI SE FORME SUR CERTAINS LIQUIDES. — MODE DE GÉNÉRATION DES SYSTÈMES LAMINAIRES. — CONDITIONS POUR QU'UNE CHARPENTE POLYÉDRIQUE DONNE UN SYSTÈME LAMINAIRE PARFAIT, UN SYSTÈME LAMINAIRE IMPARFAIT, OU UN SYSTÈME LAMINAIRE NUL.

---

(Présenté le 5 juillet 1861.)

<sup>1</sup> Voir, pour les cinq séries précédentes, les tomes XVI, XXIII, XXX, XXXI et XXXIII des *Mémoires de l'Académie*.



RECHERCHES  
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES  
SUR  
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE  
D'UNE  
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

---

THÉORIE DE LA GÉNÉRATION DES LAMES LIQUIDES. — LOIS QUI RÉGISSENT LES SYSTÈMES LAMINAIRES, THÉORIE ET EXPÉRIENCES ; CONSTITUTION DE LA MOUSSE QUI SE FORME SUR CERTAINS LIQUIDES. — MODE DE GÉNÉRATION DES SYSTÈMES LAMINAIRES. — CONDITIONS POUR QU'UNE CHARPENTE POLYÉDRIQUE DONNE UN SYSTÈME LAMINAIRE PARFAIT, UN SYSTÈME LAMINAIRE IMPARFAIT, OU UN SYSTÈME LAMINAIRE NUL.

---

§ 1. — Poursuivons l'étude des lames liquides, étude commencée déjà dans la deuxième série et continuée dans la cinquième. Dans le § 28 de la deuxième série, j'ai considéré la génération des lames comme due à une tendance vers une nouvelle figure d'équilibre; j'abandonne aujourd'hui cette opinion, du moins en partie. Je persiste à croire que dans les cas où la pesanteur n'intervient pas, le système, une fois les lames produites, tend vers le nouvel état d'équilibre que j'ai signalé; mais je pense que la formation même des lames est un résultat de la cohésion et de la viscosité du liquide.

Examinons la chose de plus près. Prenons d'abord un exemple fort simple, celui de la lame en forme de calotte sphérique développée à la surface d'un

liquide par une bulle d'air qui s'est élevée de l'intérieur de ce liquide. Considérons la bulle d'air au moment où elle n'est plus qu'à quelques millimètres de la surface (*fig. 1*)<sup>1</sup>. Pour que son sommet franchisse la distance *mn* qui l'en sépare, il faut nécessairement que les molécules liquides situées tout autour de cette petite droite soient chassées dans tous les azimuts à la fois, de sorte que ces molécules éprouveront des déplacements relatifs. Imaginons, pour simplifier, que le mouvement ascensionnel de la bulle d'air soit uniforme, de manière que, dans des intervalles de temps égaux, la bulle chasse, d'entre elle et la surface supérieure du liquide, des quantités égales de ce liquide. Imaginons, de plus, que le liquide n'ait aucune viscosité. Alors, à mesure que la distance *mn* diminuera, les portions de liquide chassées pendant les intervalles de temps ci-dessus prendront des vitesses respectives de plus en plus grandes, puisqu'elles devront effectuer leurs mouvements dans des espaces de plus en plus étroits; ainsi les déplacements relatifs des molécules liquides sont d'autant plus rapides que le sommet de la bulle d'air est plus près d'atteindre la surface. J'ai supposé uniforme le mouvement ascensionnel de cette bulle; mais comme, en réalité, il est accéléré, son accélération augmentera encore l'accroissement de rapidité des déplacements relatifs en question.

Maintenant, on sait que la viscosité oppose aux déplacements relatifs des molécules des liquides une résistance qui croît considérablement avec la vitesse de ces déplacements. Si donc, pour passer au cas réel, nous restituons à notre liquide sa viscosité, la résistance au transport latéral des molécules liquides autour de *mn* ira en augmentant à mesure que cette droite diminuera de longueur, et deviendra très-grande lorsque cette même droite sera devenue très-petite. Il résulte nécessairement de là que lorsque le sommet de la bulle d'air est arrivé près de la surface, l'amincissement de la portion de liquide qui l'en sépare encore ne peut plus s'effectuer avec une rapidité égale à celle du mouvement ascensionnel de ce sommet, et dès lors, pour que l'air qui constitue la bulle continue à monter et passe au-dessus du niveau du liquide, il faut évidemment ou que ce liquide se déchire, ou qu'il soit sou-

<sup>1</sup> Dans ce dessin, on a représenté la bulle d'air un peu aplatie dans le sens vertical; c'est ce qui a lieu en effet, par suite de la résistance du liquide.

levé. Or on ne peut plus douter, depuis les belles recherches de MM. Donny<sup>1</sup> et Henry<sup>2</sup>, que la cohésion des liquides ne soit du même ordre que celle des solides; on comprend donc que lorsque la distance  $mn$  sera assez réduite pour que sa diminution ultérieure ne puisse plus se faire avec une rapidité à peu près égale à celle de l'ascension du sommet de la bulle, le liquide présentera encore en  $mn$  beaucoup trop de résistance à la désunion de ses molécules pour qu'il se déchire, et qu'ainsi il sera soulevé par la bulle sous la forme d'une lame; et comme cette lame, pendant sa génération, est poussée de bas en haut par la bulle d'air et qu'elle tient par son contour au liquide du vase, elle devra être convexe vers l'extérieur.

Dès que la lame a commencé à naître, elle doit se développer davantage: car, d'une part, incessamment poussée par la bulle d'air, elle doit continuer à s'élever, et, d'autre part, le liquide auquel adhère son contour ne peut la suivre en masse à cause de son poids; ce liquide devra donc rester en arrière; mais, la cohésion et la viscosité aidant, il ne pourra y avoir rupture entre la lame naissante et le liquide environnant, et la lame devra simplement s'accroître, jusqu'à ce que l'action de bas en haut exercée sur la partie inférieure de la bulle d'air ait eu tout son effet.

M. Hagen<sup>3</sup>, qui a cherché à prouver, contrairement au principe établi par Poisson dans sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, que la densité de la couche superficielle des liquides est plus grande que celle de leur intérieur, cite, à l'appui de son opinion, le fait de la formation des lames dont il s'agit ici; mais on voit qu'il n'est nullement nécessaire de recourir à une semblable hypothèse pour rendre raison de cette formation.

Dans le § 25 de la première série, j'ai dit que lorsqu'une masse d'huile un peu moins dense que le liquide alcoolique dans lequel elle est immergée s'élève à la surface de ce dernier, elle s'aplatit d'abord plus ou moins contre cette surface, comme si elle éprouvait une résistance à la traverser, puis qu'après quelque temps, elle se fait jour et présente alors une portion de surface

<sup>1</sup> *Mémoires de l'Académie*, tome XVII des *Mémoires couronnés et des savants étrangers*. Le travail de M. Donny a été présenté à l'Académie en décembre 1845.

<sup>2</sup> *Philos. Magaz.*, 1845, vol. XX, p. 541.

<sup>3</sup> *Ueber die Oberflächen der Flüssigkeiten* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1846, vol. LXVII, p. 1).

plane plus ou moins étendue, au niveau de celle du liquide alcoolique. Ce phénomène s'explique maintenant d'une manière naturelle par les considérations qui précédent : il en est de la sphère d'huile comme d'une bulle d'air, elle ne peut se faire jour à l'extérieur qu'en désunissant les molécules de la couche supérieure du liquide ambiant, mais celle-ci ne pouvant s'amincir assez vite à cause de sa viscosité, résiste à la rupture en vertu de sa cohésion. Seulement il est clair que, dans ce cas, la pellicule ne saurait être soulevée au-dessus du niveau.

§ 2. — Revenons à notre lame convexe développée par l'ascension d'une bulle d'air. Lorsqu'elle aura atteint tout son développement, et qu'ainsi elle demeurera stationnaire, elle devra (5<sup>me</sup> série, § 12) affecter l'une des figures d'équilibre qui conviendraient à la surface d'une masse liquide sans pesanteur; or cette figure, qui s'est formée par une action égale dans tous les azimuts autour de l'axe vertical de la bulle d'air, doit évidemment être de révolution, et, comme elle est fermée sur l'axe, elle ne peut (4<sup>me</sup> série, § 2) constituer qu'une portion de sphère.

Voyons maintenant ce que la théorie nous apprendra sur l'étendue de cette portion par rapport à la sphère complète. Au point de vue des actions moléculaires, la couche superficielle d'une masse liquide pleine peut, on le sait, être assimilée à une membrane tendue; notre lame liquide, qui est sensiblement réduite aux couches superficielles de ses deux faces, peut donc aussi être assimilée à une membrane tendue, et conséquemment elle fait effort pour occuper le moins d'étendue possible. Dès lors, si l'on néglige certaines particularités dont je parlerai bientôt et qui, du reste, n'ont pas d'influence sensible quand le volume d'air est un peu grand, la question est ramenée à chercher quel est, pour un volume donné, le segment de sphère dont la surface est la plus petite. Ce problème se traite aisément par le calcul, et l'on trouve ainsi que le segment dont il s'agit est un hémisphère; mais on arrive plus simplement encore au même résultat par le raisonnement suivant, dont je dois l'idée à M. Lamarle.

Concevons deux segments sphériques quelconques égaux entre eux et appliqués l'un contre l'autre par leurs bases. Pour que la surface convexe de chacun d'eux soit la moindre possible par rapport au volume renfermé entre

elle et la base commune, il suffit évidemment que la surface convexe totale de l'ensemble de ces deux segments soit la moindre possible par rapport au volume total; or, d'après un principe connu, cette dernière condition sera remplie si l'ensemble constitue une sphère unique, auquel cas chacun des deux segments sera un hémisphère.

Notre lame liquide, si elle contient un volume d'air suffisant, doit donc prendre la forme hémisphérique, et c'est ce que l'observation vérifie, comme tout le monde le sait.

§ 3. — Occupons-nous actuellement des petites particularités auxquelles j'ai fait allusion plus haut.

En premier lieu, le liquide du vase doit s'élever un peu, par l'action capillaire, sur la face extérieure et sur la face intérieure de la figure laminaire, comme il le ferait sur les deux faces d'une lame solide préalablement mouillée du même liquide et partiellement plongée; il doit donc former une petite masse annulaire à surfaces méridiennes concaves, et c'est aussi ce que l'observation confirme. Ainsi le bord de la lame liquide ne s'appuie pas immédiatement sur la surface plane du liquide du vase, mais bien sur la crête de la petite masse annulaire dont il s'agit.

En second lieu, on comprend, d'après cela, que si le volume d'air emprisonné est assez petit pour que l'espace circonscrit par le bord de la lame ait peu de diamètre, la surface du liquide, dans ce même espace, n'aura aucune partie plane, mais présentera, même en son milieu, une courbure concave plus ou moins prononcée, comme à l'intérieur d'un tube peu large. Ce résultat est également d'accord avec l'expérience, et je me suis assuré, par un moyen que j'indiquerai bientôt, que la portion centrale de la surface en question cesse de paraître plane lorsque le diamètre de la lame, à la crête de la petite masse annulaire, est au-dessous de 2 centimètres environ.

Enfin, en troisième lieu, même avec un volume d'air assez grand pour que, dans l'espace circonscrit par la lame, la surface du liquide se montre absolument plane dans la presque totalité de son étendue, cette surface doit être abaissée au-dessous du niveau extérieur par la pression que la lame, en vertu de sa courbure, exerce sur l'air emprisonné (3<sup>me</sup> série, § 21), et c'est encore ce que l'on constate par le procédé suivant :

Dans un grand plat de porcelaine posé sur une table en face d'une fenêtre, on verse une couche de liquide glycérique (5<sup>me</sup> série, § 13) d'environ 2 centimètres d'épaisseur ; puis, après avoir gonflé, au moyen d'une pipe de terre, une bulle du même liquide, on la dépose au milieu de la surface de cette couche, où elle forme aussitôt un segment sphérique. On se place alors de façon à voir le ciel par réflexion sur la surface dont il s'agit, et l'on tient un fil noir tendu horizontalement à une petite distance de la lame de telle manière qu'une portion de son image réfléchie s'aperçoive dans l'espace circonscrit par cette lame. L'image totale du fil se montre ainsi formée de trois parties, deux extérieures et une intérieure à la figure laminaire ; les deux premières se recourent au voisinage de la lame, par suite du relèvement capillaire dont j'ai parlé ; quant à la troisième, si la surface circonscrite a, en son milieu, une portion plane, on trouvera, en reculant ou en avançant le fil, une position de celui-ci pour laquelle le milieu de l'image sera rectiligne. C'est ce qui a lieu avec des lames dont le diamètre excède 2 centimètres, mais en deçà de cette limite, toute la partie de l'image intérieure à la lame paraît courbe.

Quand la lame a un grand diamètre, cette partie de l'image du fil est rectiligne dans presque toute sa longueur ; elle se recourbe seulement vers ses extrémités, à cause encore du relèvement capillaire ; mais sa portion droite n'est pas dans le prolongement des portions droites extérieures à la lame, on la voit un peu plus bas. Cet abaissement, qui montre que la surface plane circonscrite se trouve, comme je l'ai avancé, au-dessous du niveau extérieur, est d'autant moins prononcé que le diamètre de la lame est plus considérable, ce qui doit avoir lieu, en raison de la diminution de la courbure et, par suite, de la pression de la lame, mais il est encore très-sensible pour une lame d'un décimètre de diamètre.

§ 4. — Le raisonnement du § 2 suppose nécessairement que la lame s'appuie par son bord même sur la surface plane du liquide du vase, et que la portion de cette surface circonscrite par la lame conserve sa forme plane et son niveau ; or ces conditions n'étant jamais toutes entièrement remplies, ainsi que nous venons de le voir, il s'ensuit que le raisonnement en question ne peut être considéré comme suffisamment rigoureux, que lorsque la différence

d'avec les conditions imaginaires sur lesquelles il repose est peu notable. Essayons de préciser davantage.

Si l'on remplit de liquide glycérique, jusqu'un peu au-dessus du bord, une large soucoupe de porcelaine préalablement nivelée et posée sur une table vis-à-vis d'une fenêtre, puis qu'après y avoir déposé une bulle, on se place de manière à voir la lame se projeter sur un fond obscur, et que, fermant un œil, on tienne l'autre au niveau de la petite masse annulaire, on distingue parfaitement celle des deux lignes méridiennes de cette petite masse qui regarde l'extérieur de la figure, ainsi que le commencement, à partir du sommet de la crête, de celle qui regarde l'intérieur. On aperçoit donc très-bien ce sommet, et l'on peut dès lors estimer approximativement sa hauteur verticale au-dessus de la surface plane extérieure. On reconnaît ainsi que, pour les grosses bulles, cette hauteur dépasse à peine  $2^{\text{mm}}$ , et qu'elle est moindre encore pour les petites. D'autre part, quand la lame a de grandes dimensions, quand, par exemple, son diamètre est d'un décimètre, la portion de la surface du liquide circonscrite dans son intérieur peut être regardée comme exactement plane dans presque toute son étendue. Enfin il résulte des expériences du paragraphe précédent qu'avec une semblable lame, l'abaissement de cette surface, quoique bien sensible encore, est cependant très-minime. Il suit des résultats du § 28 de la 5<sup>me</sup> série que si la lame, supposée hémisphérique et d'un décimètre de diamètre, était, quoique formée de liquide glycérique, déposée sur de l'eau pure, l'abaissement dont il s'agit ne serait que de  $\frac{22.6}{100} = 0^{\text{mm}},226$ ; d'après cela, pour avoir la valeur de l'abaissement dans le cas réel, c'est-à-dire lorsque la lame est déposée sur le liquide glycérique, il suffit de diviser la quantité précédente par la densité 1,1065 de ce liquide, ce qui réduit en définitive l'abaissement à  $0^{\text{mm}},204$ . Avec un tel volume d'air et une lame hémisphérique, les choses se trouveraient donc sensiblement dans les conditions du raisonnement en question, et l'on en conclura qu'alors la lame devra prendre en effet cette forme ou que, du moins, l'écart sera inappréciable.

Mais il est aisé de faire voir qu'avec un volume d'air suffisamment petit la lame sera loin de constituer un hémisphère. Imaginons, par exemple, que la bulle d'air n'ait qu'un millimètre de diamètre, et supposons, pour un in-

stant, que la lame soit hémisphérique. Dans cette hypothèse, la portion de la surface du liquide circonscrite par la lame et comptée à partir du bord de celle-ci ou, si l'on veut, à partir de la crête de la petite masse annulaire, constituerait nécessairement, à cause de ses dimensions minimes, un hémisphère concave, de sorte que la bulle d'air continuerait à former une sphère entière d'un millimètre de diamètre. Cela posé, rappelons-nous que la pression exercée par une lame sphérique en vertu de sa courbure, est (5<sup>me</sup> série, § 23) la somme des actions dues séparément aux courbures de chacune de ses deux faces, ou, puisque ces deux actions sont égales, le double de l'une d'elles; or l'action de la face intérieure de notre petite lame hémisphérique serait, quant à son effort pour faire descendre la bulle d'air, contrebalancée par l'action opposée de l'hémisphère concave qui limiterait la bulle inférieurement, comme je l'ai dit, et il resterait, d'une part, l'action due à la face extérieure de la lame, action qui pousserait la bulle d'air de haut en bas, et, d'autre part, une petite pression hydrostatique qui pousserait cette bulle de bas en haut si le point inférieur de celle-ci était au-dessous du niveau du liquide. Mais, dans le cas du liquide glycérique, il suit encore des résultats du § 28 de la 5<sup>me</sup> série, en prenant, d'après la remarque faite plus haut, la moitié de la valeur qu'ils donnent, et en divisant par la densité du liquide, que la première des deux actions ci-dessus équivaudrait à une différence de niveau de 10<sup>mm</sup>, 21; tandis qu'en supposant même l'absence de la petite masse annulaire, la seconde ne proviendrait évidemment que d'une différence de niveau égale au rayon de la bulle d'air, c'est-à-dire à 0<sup>mm</sup>, 5. Avec notre petit volume d'air et une lame hémisphérique, l'équilibre est donc impossible; pour qu'il existe, il faut nécessairement que la bulle d'air demeure presque tout entière au-dessous du niveau du liquide, et ne donne ainsi naissance qu'à une lame à peine soulevée et d'une très-faible courbure; alors, en effet, la petite pression hydrostatique qui tendra à faire monter la bulle d'air équivaudra au poids minime d'un volume de liquide un peu moins que celui de cette bulle, et la légère pression exercée par la face extérieure de la lame en vertu de sa faible courbure suffira pour la contrebalancer.

L'expérience vérifie encore pleinement cette déduction de la théorie. On a

versé, jusqu'à une certaine hauteur, du liquide glycérique dans le vase à parois planes en verre servant aux expériences sur les masses d'huile; on a un peu agité le liquide pour qu'il s'y introduisit de petites bulles d'air; on en a choisi une d'environ 1<sup>mm</sup> de diamètre suffisamment rapprochée de l'une des parois, et on l'a observée à travers cette paroi, en plaçant l'œil successivement un peu au-dessous du niveau du liquide, puis au-dessus. On a reconnu de cette manière que la petite bulle paraissait sphérique, et qu'elle était presque entièrement plongée, de sorte que la saillie au-dessus du niveau était très-faible.

§ 5. — Il est clair, d'après cela, que si l'on forme des lames successives à la surface de l'eau de savon ou du liquide glycérique en leur donnant des diamètres de moins en moins grands, à partir d'un décimètre, on arrivera à une limite au-dessous de laquelle les lames commenceront à se montrer sensiblement affaissées, c'est-à-dire à paraître constituer moins qu'un hémisphère. Pour déterminer approximativement cette limite à l'égard du liquide glycérique, on a déposé, comme je l'ai indiqué dans le paragraphe précédent, les bulles sur la surface du liquide contenu dans une soucoupe un peu plus que pleine, et l'on s'est assuré qu'elles ne paraissent hémisphériques que pour des diamètres supérieurs à 3 centimètres environ; au-dessous de cette valeur, les bulles forment des segments sensiblement moindres par rapport à la sphère entière, et cette diminution est d'autant plus prononcée que le diamètre de leur base est plus petit.

§ 6. — Bien qu'une lame de courbure sphérique ainsi formée à la surface d'un liquide soit en équilibre de figure, le repos absolu n'y existe cependant pas: elle s'aminecit lentement, comme on le sait, jusqu'à ce qu'elle crève. Les causes principales de cet amincissement ont été signalées depuis long-temps: ce sont, d'une part, l'évaporation, dans le cas des liquides qui en sont susceptibles, et, d'autre part, l'action de la pesanteur qui fait incessamment descendre le liquide du sommet de la lame vers sa partie inférieure. Et ici encore la viscosité a une grande influence: si elle est très-faible, il est clair que le glissement des molécules du haut en bas de la lame s'effectuera avec une grande rapidité, et que, par suite, la lame n'aura presque aucune persistance; aussi lorsqu'on parvient à former des lames avec de l'eau pure, elles

persistent à peine. Cette remarque concernant le rôle de la viscosité dans la durée des lames avait déjà été présentée, quoique d'une manière un peu différente, par M. Henry <sup>1</sup> à l'égard des bulles de savon comparées à celles d'eau pure.

§ 7. --- Imaginons actuellement qu'une seconde bulle d'air s'élève du fond du vase, et qu'au moment où elle est près d'atteindre la surface, elle se trouve en partie sous la première lame; elle déterminera aussi la formation d'une lame, qui soulèvera nécessairement la première d'un côté, de sorte que les deux quantités d'air respectivement emprisonnées par ces deux lames seront séparées par une portion de la seconde, comme par une cloison liquide. Mais cette cloison ne gardera pas la courbure du reste de la seconde lame, ainsi que je vais le faire voir.

En vertu de leur nature liquide, des lames ne peuvent évidemment se rencontrer sous des angles à arêtes linéaires: il faut, pour la continuité, qu'il se forme, tout le long de la ligne de rencontre, une petite masse à surfaces fortement concaves dans le sens perpendiculaire à cette même ligne; c'est ce que l'on constate, comme nous l'avons vu (2<sup>me</sup> série, §§ 31 et 32), lorsqu'on produit, au sein du liquide alcoolique, une figure laminaire d'huile par l'exhaustion graduelle d'un polyèdre. Rappelons encore, à cet égard, l'expérience du § 2 de la 5<sup>me</sup> série, expérience dans laquelle une masse semblable, mais épaisse, établit le passage entre une lame plane et deux lames courbes, comme on le voit en coupe méridienne dans la fig. 1 de cette 5<sup>me</sup> série. On comprend donc que, dans le cas de nos lames d'eau de savon ou de liquide glycéérique, une masse de ce genre existe, bien que trop minime pour être distinguée, sur toute la longueur de l'arc de jonction de la cloison et des deux autres lames; or les surfaces de ces dernières et celle de la cloison étant ainsi raccordées par de petites surfaces ayant leurs courbures propres, il est clair que ces petites surfaces établissent une entière indépendance entre les courbures respectives des autres. C'est ainsi, par exemple, que dans l'expérience rappelée plus haut, une lame plane est rattachée à deux lames qui sont des portions de caténoïdes. Dans cette expérience, il est vrai, la jonction

<sup>1</sup> Voir l'article cité dans la 5<sup>me</sup> note du § 1.

a lieu par une masse épaisse ; mais le résultat doit évidemment demeurer le même, quant à l'indépendance des courbures, quelque minimes que soient les dimensions transversales de la masse servant d'intermédiaire.

Cela étant, remarquons que la cloison doit constituer aussi une portion de sphère, car elle se trouve dans les mêmes conditions que les deux autres lames, c'est-à-dire qu'elle a, comme celles-ci, pour limites la petite masse de jonction et l'eau du vase. Quant à sa courbure, elle dépend évidemment de la différence des actions exercées sur ses deux faces par les deux portions d'air emprisonnées. Si ces deux portions d'air sont égales, les deux lames appartiendront à des sphères égales, qui presseront les deux volumes d'air avec la même intensité, et conséquemment la cloison, soumise sur ses deux faces à des actions égales, n'aura aucune courbure, ou, en d'autres termes, sera plane ; mais si les deux quantités d'air sont inégales, auquel cas les deux lames appartiendront à des sphères de diamètres différents, et, par suite, presseront inégalement ces deux quantités d'air, la cloison sollicitée sur ses deux faces par des actions inégales se bombera du côté où l'élasticité de l'air est la moindre, jusqu'à ce que l'effort qu'elle exerce, en vertu de sa courbure, du côté de sa face concave, contre-balance l'excès d'élasticité de l'air qui baigne cette face.

Soient  $\rho$ ,  $\rho'$  et  $r$  les rayons des sphères auxquelles appartiennent respectivement la plus grande lame, la plus petite et la cloison, et soient  $p$ ,  $p'$  et  $q$  les pressions respectives qu'elles exercent, en vertu de leurs courbures, sur l'air qui baigne leurs faces concaves. Ces pressions étant (5<sup>me</sup> série, §§ 22 et 28) en raison inverse des diamètres, et conséquemment des rayons, on aura

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{\rho}, \text{ et } \frac{p'}{q} = \frac{r}{\rho'};$$

mais, d'après ce que nous avons vu plus haut, il faut, pour l'équilibre, que l'on ait

$$q = p' - p;$$

d'où

$$1 = \frac{p'}{q} - \frac{p}{q}.$$

Portant dans cette dernière équation les valeurs ci-dessus de  $\frac{p'}{q}$  et de  $\frac{p}{q}$ , et résolvant par rapport à  $r$ , il vient

$$r = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'},$$

formule qui donnera le rayon de la cloison quand on connaîtra ceux des deux lames.

Si, par exemple, ces deux lames appartiennent à des sphères égales, on a  $\rho = \rho'$ , et la formule donne  $r = \infty$ ; c'est-à-dire qu'alors la cloison est plane, ainsi que nous l'avons déjà trouvé. Si le rayon de la plus petite des deux lames est moitié de celui de la plus grande, en d'autres termes, si l'on a  $\rho' = \frac{1}{2}\rho$ , la formule donne  $r = \rho$ ; dans ce cas, la courbure de la cloison sera conséquemment égale à celle de la plus grande lame.

§ 8. — Pour compléter l'étude de notre système laminaire, il ne nous reste plus qu'à chercher sous quels angles se coupent les deux lames et la cloison. Pour cela, remarquons que la petite masse de jonction qui règne tout le long de l'arête commune de ces angles et dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent, doit avoir par elle-même son équilibre de figure; or comme elle a trois surfaces, il faut que les courbures de celles-ci aient entre elles une relation qui permette cet équilibre. La petite masse a, suivant sa longueur, des courbures qui ne sont pas de même sens pour ses trois surfaces; mais, par suite de l'extrême exiguité de son épaisseur, ses courbures transversales sont énormes relativement aux courbures longitudinales dont il s'agit, de sorte que l'influence de ces dernières peut être négligée à côté de celle des premières. D'autre part, les deux petites surfaces qui regardent l'intérieur du système sont poussées par les élasticités respectives des deux portions d'air emprisonnées, élasticités qui sont en général inégales et qui excèdent la pression atmosphérique, tandis que la petite surface qui regarde l'extérieur n'est soumise qu'à cette dernière pression; mais comme les différences entre ces trois actions de l'air résultent des courbures des deux lames, courbures qui sont extrêmement faibles comparées aux courbures transversales de la petite masse, l'influence de ces mêmes différences devient aussi tout à fait négligeable à côté de celle des courbures transversales en ques-

tion. Dès lors il faut évidemment, pour l'équilibre de la petite masse , et, par suite , pour celui de tout le système , que si l'on conçoit cette petite masse coupée par un plan perpendiculaire à son axe , les trois arcs concaves qui limiteront la section soient sensiblement identiques ; or de cette presque identité il résulte nécessairement que les deux lames et la cloison aboutissent à la petite masse sous des angles soit rigoureusement égaux , soit à fort peu près tels , angles dont chacun sera par conséquent de  $120^\circ$  ou ne différera de cette valeur que d'une quantité inappréciable <sup>1</sup>. Nous verrons bientôt ce résultat et ceux du paragraphe précédent vérifiés par l'expérience.

§ 9. — Si la bulle d'air qui fait naître la seconde lame (§ 7) aboutit à la surface du liquide assez loin de la première lame pour que les deux calottes sphériques soient complètes et isolées , ou bien , ce qui revient au même , si l'on dépose sur le liquide deux bulles suffisamment éloignées l'une de l'autre , les deux calottes sphériques , sollicitées par les actions capillaires à la manière des corps légers flottants , se rapprocheront par degrés jusqu'au contact , du moins si elles n'étaient pas séparées originairement par un trop grand intervalle. Pour faire comprendre ce qui doit arriver ensuite , rappelons un fait que manifestent , au sein de mon mélange alcoolique , les sphères d'huile pleines. Lorsque deux semblables sphères viennent à se toucher , leur ensemble n'est point à l'état d'équilibre ; aussitôt le contact établi , les deux sphères s'unissent pour n'en former qu'une seule , et il est facile d'en saisir la raison : on ne saurait produire ce contact en un point unique ; il a lieu nécessairement suivant une petite surface , de sorte que les deux masses n'en forment plus qu'une en réalité ; or puisque celle-ci est finie et entièrement libre , et qu'elle est de révolution , la seule figure d'équilibre qu'elle puisse affecter est (4<sup>me</sup> série , §§ 2 et 38) celle d'une sphère unique. Maintenant il est visible que la même chose doit tendre à se produire à l'égard de nos deux calottes sphériques laminaires , dès que les deux petites masses annulaires qui règnent le long de leurs bases (§ 3) se sont unies à l'endroit de leur contact , c'est-à-dire que les deux calottes tendront à n'en former qu'une seule ; mais pour que cette tendance pût avoir son plein effet , il faudrait que les deux lames

<sup>1</sup> En considérant les lames liquides comme des membranes tendues (§ 2) , on arriverait également à l'égalité des angles entre trois lames qui se joignent suivant une même arête liquide.

liquides s'ouvrent à l'endroit du contact, et comme la cohésion s'y oppose, on comprend que l'ouverture sera remplacée par une cloison, et qu'ainsi le système se coordonnera comme celui des deux paragraphes précédents. Nous vérifierons également ces résultats par l'expérience.

§ 10. — Nous avons vu (§ 7) que l'on détermine le rayon  $r$  de la cloison, quand on connaît les rayons  $\rho$  et  $\rho'$  des deux lames, en partant des valeurs relatives des pressions respectivement exercées par ces trois portions de calottes sphériques sur les deux quantités d'air emprisonnées. D'autre part, la considération des conditions d'équilibre de la petite masse de jonction nous a conduits à cette conséquence, que les deux lames et la cloison devaient se couper sous des angles, soit exactement, soit à fort peu près de  $120^\circ$ , et il est évident que cette nécessité de se couper sous des angles de  $120^\circ$  peut également servir à déterminer le rayon de la cloison. Or on ne voit à priori aucune relation entre les deux principes qui servent de bases à ces deux déterminations, et l'on peut se demander si les deux résultats coïncident; c'est ce que je vais examiner.

Pour éviter les complications qui naîtraient des petites irrégularités signalées dans le § 3, je supposerai deux lames formant primitivement deux sphères complètes, sphères qui se sont ensuite en partie pénétrées de manière à donner lieu à une cloison, et j'imaginerai tout ce système coupé par un plan passant par les centres des deux lames; il est clair que le centre de la sphère à laquelle appartient la cloison se trouvera sur la droite qui contient les deux centres ci-dessus.

Cela posé, si les angles sous lesquels les deux lames et la cloison se rencontrent sont de  $120^\circ$ , il est clair que les rayons des deux lames menés à un point de la ligne d'intersection de celles-ci feront entre eux un angle de  $60^\circ$ , et l'on verra sans peine que le rayon de la cloison mené au même point fera également un angle de  $60^\circ$  avec celui des deux autres dont il est le plus près. Soit donc (*fig. 2*)  $p$  l'un des deux points où viennent aboutir les trois arcs suivant lesquels les deux lames et la cloison sont coupées par le plan en question, plan que nous prendrons pour celui de la figure, et soit  $pc = \rho$  le rayon de la plus grande lame. Menons les droites indéfinies  $pm$  et  $pn$  de telle manière que les angles  $cpm$  et  $mpn$  soient chacun de  $60^\circ$ . Sur  $pm$  prenons

$pc'$  égale à  $\rho'$ , c'est-à-dire au rayon de la plus petite lame; joignons  $cc'$  et prolongeons la droite jusqu'à sa rencontre, en  $d$ , avec  $pn$ . Les trois points  $c$ ,  $c'$  et  $d$  seront évidemment les trois centres, et  $pd$  sera le rayon  $r$  de la cloison, de sorte que si, de ces trois centres et avec ces rayons, on trace trois portions de circonférences aboutissant d'une part au point  $p$  et de l'autre à son symétrique  $q$ , on aura, comme le montre la figure, et toujours dans l'hypothèse des angles de  $120^\circ$ , la coupe du système des deux lames et de la cloison. Cherchons maintenant à déterminer le rayon de cette cloison en fonction des deux autres. Pour cela, prenons  $pf = pc'$  et joignons  $c'f$ ; l'angle  $cpc'$  étant de  $60^\circ$ , le triangle  $fpc'$  sera équilatéral, et l'on aura conséquemment  $fc' = pc' = \rho'$ ; par la même raison, l'angle  $fc'p$  sera de  $60^\circ$  comme l'angle  $c'pd$ , d'où il suit que les droites  $fc'$  et  $pd$  seront parallèles; on pourra donc poser

$$\frac{pd}{fc'} = \frac{pc}{fc};$$

enfin, remplaçant, dans cette formule,  $pd$ ,  $fc'$  et  $pc$  par leurs valeurs respectives  $r$ ,  $\rho'$  et  $\rho$ , et observant que  $fc$  est égal à  $\rho - \rho'$ , on en tirera

$$r = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'}.$$

C'est identiquement la valeur qu'avait donnée la première méthode (§ 7); ainsi les deux lois, en apparence indépendantes, conduisent au même résultat.

Il ne suit pas cependant de là que les trois angles soient rigoureusement égaux : car ce que je viens de démontrer n'a pas de réciproque nécessaire; en d'autres termes, le rayon de la cloison peut avoir la valeur ci-dessus dans le cas d'angles différent entre eux; mais comme ces angles, s'ils ne sont pas identiques, doivent approcher excessivement de l'égalité, ainsi que je l'ai fait voir, et comme, d'autre part, leur égalité rigoureuse entraîne la valeur théorique du rayon de la cloison, on doit regarder comme très-probable que cette égalité parfaite a lieu.

§ 11. — L'existence des cloisons est un fait bien connu de tous ceux qui se sont amusés à faire des bulles de savon; mais j'avais à soumettre au contrôle de l'expérience les résultats établis dans ce qui précède à partir du § 7,

et d'abord ceux qui concernent la courbure de la cloison et les angles sous lesquels cette cloison et les deux lames se coupent.

Dans ce but, j'ai fait tracer, sur trois feuilles de papier, trois figures représentant les bases de trois systèmes formés chacun de deux portions de sphères laminaires et d'une cloison. J'entends par la base d'un semblable système l'ensemble des arcs de cercle suivant lesquels il s'appuie sur la surface du liquide, abstraction faite des petites masses annulaires. Ces trois dessins sont reproduits, au tiers de leur grandeur, par les *fig. 3, 4 et 5*; ils ont été construits d'après la même méthode que la *fig. 2*; les arcs y ont été marqués en traits larges d'environ un millimètre, on verra bientôt pourquoi. Dans le premier dessin les diamètres des deux lames étaient égaux, dans le second ils étaient comme 2 à 1, et dans le troisième comme 3 à 1. Pour employer l'un de ces dessins, on le plaçait sur une table et l'on posait par-dessus une plaque de verre minee, dont on mouillait ensuite la face supérieure avec du liquide glycérique. Cela fait, on gonflait une bulle du même liquide, que l'on déposait sur la plaque au-dessus de la portion de circonférence qui représentait la base de la plus petite lame; cette bulle s'y étalait aussitôt de manière à constituer un hémisphère; on s'arrangeait de façon que la base de celui-ci eût un diamètre un peu moindre que la portion de circonférence en question. On gonflait alors une seconde bulle, que l'on déposait de même au-dessus de la portion de circonférence représentant la base de l'autre lame, et en s'arrangeant aussi de manière qu'après s'être étalée sur la plaque elle eût un diamètre un peu trop petit. Comme, en déposant cette seconde lame, on devait la mettre en contact avec la première, les deux hémisphères se pénétraient partiellement et demeuraient unis avec une cloison. Les choses étant ainsi préparées, on trempait l'orifice de la pipe dans le liquide glycérique, comme pour gonfler une bulle, puis on appliquait cet orifice vers la partie inférieure de la plus petite lame, on soufflait un peu, puis on faisait la même opération pour l'autre lame, on revenait à la première, puis à la seconde, et ainsi de suite, en faisant glisser en même temps, de petites quantités, la plaque de verre sur le dessin, et, avec les ménagements convenables, on parvenait à donner aux deux lames les diamètres des portions de circonférence tracées, et alors la base du système laminaire ob-

tenu, base formée de celles des deux lames et de celle de la cloison, recouvriraient exactement le dessin. J'ai dit que les dessins étaient en traits larges; c'est que ces traits doivent être vus à travers les petites masses annulaires; s'ils étaient fins, les réfractions produites par les petites masses dont il s'agit empêcheraient de les distinguer.

§ 12. — Pour vérifier également les résultats du § 9, on déposait successivement sur la surface du liquide glycérique contenu dans le grand plat de porcelaine (§ 3), deux bulles de ce même liquide de manière que les deux calottes sphériques qu'elles formaient fussent séparées par un certain intervalle. Quand celui-ci était au plus d'un centimètre, les lames marchaient, en effet, l'une vers l'autre, et s'unissaient avec une cloison; seulement si les deux lames avaient de grands diamètres (10 centimètres ou plus), la cloison ne se produisait en général que lorsque la réunion avait lieu peu d'instants après la formation de ces lames; quand celles-ci étaient d'abord un peu trop distantes l'une de l'autre, de façon que le temps nécessaire pour leur rapprochement spontané fût assez long, elles s'unissaient sans cloison en se transformant en un seul grand hémisphère, sans doute parce qu'elles étaient devenues trop minces, de sorte que la cloison naissante se brisait avant qu'on pût en constater l'existence.

§ 13. — Si une troisième calotte sphérique laminaire s'accoste à deux autres déjà unies, le système aura évidemment trois cloisons, savoir une provenant de la réunion des deux premières lames, et deux de la réunion de chacune de ces mêmes lames avec la troisième. Ces trois cloisons aboutiront nécessairement à un même arc de jonction, et, en supposant qu'elles aient encore des courbures sphériques, il faudra qu'aux trois lignes de jonction de chacune d'elles avec deux des lames, les angles soient encore de  $120^\circ$ ; il faudra, en outre, par les raisons que j'ai données (§ 8), qu'à l'arc de jonction de ces trois cloisons entre elles, les angles soient aussi de  $120^\circ$ .

Cela posé, voyons par quel moyen nous pourrons tracer la base d'un système de ce genre, de même que nous avons tracé (*fig. 2*) celle d'un système de deux lames. Après avoir décrit (*fig. 6*) les bases des deux premières lames, bases ayant pour centres *c* et *c'* et pour rayons les longueurs données que nous désignerons encore par *s* et *s'*, portons, à partir du point *s*

où aboutissent ces deux bases, et sur les rayons  $sc$  et  $sc'$ , deux longueurs  $sf$  et  $sf'$  égales entre elles et au rayon donné  $\rho''$  de la troisième base, puis, des points  $c$  et  $c'$  comme centres et avec les longueurs  $cf$  et  $c'f'$  comme rayons, traçons deux arcs de cercle; leur point d'intersection  $c''$  sera le centre de la base de la troisième lame, base qu'on décrira ensuite avec le rayon  $\rho''$ .

En effet, supposons le problème résolu et cette base tracée. Si l'on mène, du point  $u$  où elle aboutit à l'une des premières, les droites  $uc$  et  $uc''$ , qui seront respectivement égales à  $\rho$  et à  $\rho''$ , ces droites feront entre elles un angle de  $60^\circ$ , comme les droites  $sc$  et  $sc'$ ; d'où il suit que le triangle  $ucu$  sera égal au triangle  $csf$ , dans lequel  $sc$  et  $sf$  sont aussi respectivement égaux à  $\rho$  et  $\rho''$ , et qu'ainsi  $uc''$  sera égal à  $cf$ ; par les mêmes raisons, le triangle  $c'vc''$  sera égal au triangle  $c'sf'$ , et conséquemment  $c'c''$  sera égal à  $c'f'$ .

Proposons-nous maintenant de tracer les bases des trois cloisons. Celles des trois lames étant décrites (*fig. 6<sup>bis</sup>*) par le tracé précédent, on déterminera, comme dans la *fig. 2*, le centre  $d$  de la cloison appartenant aux deux premières lames et partant de  $s$ , en menant  $sd$  faisant avec  $sc'$  un angle de  $60^\circ$ , jusqu'à sa rencontre, en  $d$ , avec la droite  $cc'$  prolongée; on déterminera de même le centre  $f$  de la cloison appartenant à la première et à la troisième lame en menant  $uf$  faisant un angle de  $60^\circ$  avec  $c''u$ , jusqu'à sa rencontre, en  $f$ , avec  $cc''$  prolongée; enfin on déterminera encore par le même procédé le centre  $g$  de la troisième cloison. Il ne restera plus alors qu'à décrire, des points  $d$ ,  $f$  et  $g$  comme centres, et avec les rayons  $ds$ ,  $fu$  et  $gv$ , trois arcs de cercle partant respectivement des points  $s$ ,  $u$  et  $v$ , et se dirigeant vers le milieu de la figure; ces arcs seront les bases des trois cloisons, toujours dans l'hypothèse où ces cloisons seraient des portions de sphères.

Si l'on a construit la figure avec soin, on reconnaîtra : 1<sup>o</sup> que les arcs dont je viens de parler aboutissent tous trois à un même point  $o$ ; 2<sup>o</sup> que les trois centres  $f$ ,  $d$  et  $g$  sont disposés en ligne droite; 3<sup>o</sup> que si l'on joint le point  $o$  à ces trois centres, les angles  $fod$  et  $god$  sont égaux et de  $60^\circ$ .

§ 14. — Mais comme on pourrait croire que ces résultats d'une construction graphique sont simplement très-approchés et non tout à fait exacts, je vais les établir d'une manière complète, en admettant toutefois que les angles des lames entre elles et avec les cloisons sont rigoureusement de  $120^\circ$ . Je dois

cette démonstration à M. Vander Mensbrugghe, jeune docteur en sciences de notre université.

Démontrons d'abord que les trois centres  $f$ ,  $d$  et  $g$  sont en ligne droite. Pour cela, répétant ce que nous avons fait dans la *fig. 2*, portons sur  $sc$  une longueur  $sw = sc' = \rho'$ , et joignons  $c'w$ ; nous savons que cette dernière droite sera parallèle à  $sd$ , et conséquemment nous pourrons poser

$$\frac{dc}{dc'} = \frac{sc}{sw} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Par la même raison, en considérant les deux portions de circonférences qui ont pour centres  $c$  et  $c''$  et qui se coupent en  $u$ , on aura, en renversant seulement les deux rapports,

$$\frac{fc''}{fc} = \frac{\rho''}{\rho};$$

et enfin les deux portions de circonférences ayant pour centres  $c'$  et  $c''$  et qui se coupent en  $v$ , donneront de même

$$\frac{gc'}{gc''} = \frac{\rho'}{\rho''}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, il vient

$$\frac{dc \cdot fc'' \cdot gc'}{dc' \cdot fc \cdot gc''} = 1.$$

Remarquons maintenant : 1<sup>o</sup> que les trois centres  $d$ ,  $f$  et  $g$  sont sur les prolongements des côtés du triangle  $c c' c''$ ; 2<sup>o</sup> que les six quantités  $dc$ ,  $fc''$ ,  $gc'$ ,  $dc'$ ,  $fc$  et  $gc''$  sont les distances, comptées sur ces mêmes prolongements, des trois points  $d$ ,  $f$  et  $g$  aux trois sommets  $c$ ,  $c'$  et  $c''$ ; 3<sup>o</sup> que, dans la dernière formule ci-dessus, les trois facteurs du numérateur représentent des droites dont deux quelconques n'ont pas d'extrémité commune, et qu'il en est de même des trois facteurs du dénominateur. Or on sait, par un théorème de la théorie des transversales, que lorsque la condition exprimée par cette formule est remplie à l'égard d'un triangle quelconque, les trois points en

question, pris sur les prolongements des trois côtés, sont nécessairement en ligne droite. Nos trois centres  $d$ ,  $f$  et  $g$  jouissent donc de cette propriété.

Ce premier point établi, démontrons les autres. Considérons le point  $o$  comme étant simplement l'intersection des deux arcs  $uo$  et  $vo$  ayant pour centres  $f$  et  $g$ ; joignons  $od$ ,  $of$  et  $og$ , et, sans chercher d'abord si  $od$  est bien réellement le rayon de l'arc ayant pour centre  $d$  et partant du point  $s$ , faisons voir que les angles  $fod$  et  $god$  sont chacun de  $60^\circ$ , ou, ce qui revient au même, que l'angle  $fog$  est de  $120^\circ$ , et que la droite  $od$  en est la bissectrice.

Cherchons d'abord à déterminer les longueurs  $fd$  et  $gd$ , et, à cet effet, considérons-les comme appartenant respectivement aux triangles  $fc'd$  et  $gc'd$ , dans lesquels nous pourrons évaluer les côtés  $fc$ ,  $dc$ ,  $gc'$  et  $dc'$ , ainsi que les angles qu'ils comprennent. Pour arriver à ces dernières valeurs, calculons les côtés du triangle  $cc'c''$ . Au moyen du triangle  $csc'$ , où les côtés  $cs$  et  $c's$  sont respectivement  $\rho$  et  $\rho'$  et comprennent entre eux un angle de  $60^\circ$ , on trouve sans peine

$$cc' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'};$$

les triangles  $cuc''$  et  $c'vc''$  donnent de même

$$cc'' = \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}, \text{ et } c'c'' = \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho''}.$$

On déduit de là, par la formule connue,

$$\cos c'cc'' = \cos dc'f = \frac{\rho^2 + (\rho - \rho')(\rho - \rho'')}{2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}};$$

on trouvera de la même manière

$$\cos cc'c'' = \cos gc'd = \frac{\rho'^2 + (\rho - \rho')(\rho'' - \rho')}{2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'} \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho''}}.$$

D'un autre côté, on a

$$fd = \sqrt{fc^2 + dc^2 - 2 \overline{dc} \cdot \overline{fc} \cdot \cos dc'f}, \text{ et } gd = \sqrt{dc'^2 + gc'^2 - 2 \overline{dc}' \cdot \overline{gc}' \cdot \cos dc'g},$$

formules où les droites  $dc$ ,  $fc$ ,  $dc'$ ,  $gc'$  restent encore à déterminer; mais,

dans le triangle  $csd$ , où  $wc'$  est, nous le savons, parallèle à  $sd$ , on a :

$$\frac{dc}{cs} = \frac{dc'}{sw} = \frac{cc'}{cw};$$

d'où, en remplaçant  $cs$ ,  $sw$  et  $cw$  par leurs valeurs  $\rho$ ,  $\rho'$  et  $\rho - \rho'$ , ainsi que  $cc'$  par sa valeur trouvée plus haut, on obtient

$$dc = \frac{\rho}{\rho - \rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}, \text{ et } dc' = \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \sqrt{\rho'^2 + \rho'^2 - \rho\rho'};$$

les triangles  $cuf$  et  $c'vg$  donneront de leur côté

$$fr = \frac{\rho}{\rho - \rho''} \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}, \text{ et } gc' = \frac{\rho'}{\rho'' - \rho'} \sqrt{\rho''^2 + \rho'^2 - \rho'\rho''}.$$

Il vient donc, après substitutions et réductions, et en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{\rho^2\rho'^2 + \rho^2\rho''^2 + \rho'^2\rho''^2 - \rho^2\rho'\rho'' - \rho\rho'^2\rho'' - \rho\rho'\rho''^2} = P,$$

$$fd = \frac{\rho}{(\rho - \rho')(\rho - \rho'')} \cdot P,$$

$$gd = \frac{\rho'}{(\rho - \rho')(\rho'' - \rho')} \cdot P,$$

et conséquemment

$$fg = \frac{\rho''}{(\rho - \rho'')(\rho'' - \rho')} \cdot P.$$

On tire de là

$$\frac{fd}{gd} = \frac{\rho(\rho'' - \rho')}{\rho'(\rho - \rho'')}.$$

D'autre part, d'après le résultat du § 7, on a, en observant que  $fo$  et  $go$  sont respectivement égaux aux rayons  $fu$  et  $gv$  des deux cloisons que nous considérons,

$$fo = \frac{\rho\rho''}{\rho - \rho''}, \quad go = \frac{\rho''\rho'}{\rho'' - \rho'}, \quad \text{d'où } \frac{fo}{go} = \frac{\rho(\rho'' - \rho')}{\rho'(\rho - \rho'')};$$

les deux rapports  $\frac{fd}{gd}$  et  $\frac{fo}{go}$  sont donc égaux, et, par conséquent, la droite  $do$  est la bissectrice de l'angle  $fog$ .

Connaissant, par ce qui précède, les trois côtés du triangle  $fog$ , on en déduit, toute réduction faite,

$$\cos fog = -\frac{1}{2},$$

d'où il résulte que l'angle  $fog$  est de  $120^\circ$ , et, par suite, que les angles  $fod$  et  $god$  sont chacun de  $60^\circ$ .

Cherchons enfin la longueur de la bissectrice  $do$ . Pour cela, remarquons que, dans tout triangle dont l'un des angles est de  $120^\circ$ , il y a une relation fort simple entre la bissectrice de cet angle et les deux côtés qui le comprennent. Soit, en effet (fig. 7),  $abc$  un triangle où l'angle en  $a$  soit de  $120^\circ$ ; prolongeons le côté  $ba$  d'une quantité  $ad$  égale à  $ac$ , et joignons  $dc$ ; cette droite sera parallèle à la bissectrice  $ah$ , car l'angle  $dac$  sera de  $60^\circ$ , et puisque  $ad$  est égal à  $ac$ , le triangle  $dac$  sera équilatéral, et l'angle  $daa$  sera de  $60^\circ$  comme l'angle  $cah$ ; on aura donc

$$\frac{dc}{ah} = \frac{ba}{ba + ad},$$

ou, à cause de  $dc = ad = ac$ ,

$$\frac{ah}{ac} = \frac{ba}{ba + ac},$$

et enfin

$$ah = \frac{ba + ac}{ba + ac}.$$

Ce résultat appliqué au triangle  $fog$  (fig. 6<sup>bis</sup>), donne donc

$$do = \frac{fo + go}{fo + go}.$$

et, après les substitutions,

$$do = \frac{\rho \tilde{\rho}'}{\rho - \tilde{\rho}};$$

or c'est là précisément (§ 7) la valeur du rayon  $ds$  de la troisième cloison.

De tout cela il résulte donc, comme nous nous étions proposé de le démontrer, que les centres des trois cloisons sont en ligne droite, que les

bases de ces trois cloisons aboutissent à un même point, enfin que les rayons de ces bases partant du point dont il s'agit font entre eux des angles de  $60^\circ$ , et qu'ainsi ces mêmes bases se joignent sous des angles de  $120^\circ$ .

Maintenant, pour que nous puissions considérer les trois cloisons comme constituant réellement des portions de sphères, il reste encore à établir que ces trois portions se coupent suivant un arc unique; or c'est ce qui suit évidemment de ce que les centres  $f$ ,  $d$ ,  $g$  de ces trois sphères sont en ligne droite, et de ce que ces mêmes sphères ont un point commun en  $o$ .

Ainsi toutes les conditions théoriques sont satisfaites par trois cloisons de courbure sphérique disposées, avec les trois calottes, de manière à former un système ayant pour base celle que l'on trace par la construction du paragraphe précédent; on doit donc regarder comme extrêmement probable que le système prendra réellement cette forme.

§ 15. — C'est, en effet, ce que j'ai vérifié par l'expérience, en employant le moyen décrit plus haut (§ 11), c'est-à-dire que l'on a tracé en traits larges sur un papier, par la méthode indiquée, la base d'un système de trois calottes sphériques avec leurs cloisons, puis que l'on a placé par-dessus la plaque de verre humectée de liquide glycérique, et enfin que l'on a déposé sur celle-ci, au-dessus des trois portions de circonférences, trois bulles d'abord un peu trop petites, dont on a successivement augmenté les diamètres par la petite manœuvre mentionnée, en faisant en même temps glisser, quand cela était nécessaire, la plaque de verre sur le papier. Or la base du système laminaire ainsi réalisé s'est encore superposée parfaitement au dessin.

Les constructions graphiques que j'ai données dans ce qui précède pour les bases des systèmes de calottes sphériques supposent implicitement (§ 10) la loi de la raison inverse de la pression au diamètre; la coïncidence exacte des bases des systèmes réalisés avec les bases tracées fournit donc une vérification nouvelle de cette loi, à ajouter à la vérification directe obtenue dans le § 28 de la 5<sup>me</sup> série. C'est aux expériences actuelles que j'ai fait allusion dans le paragraphe que je viens de citer.

§ 16. — Si l'on imagine qu'une quatrième calotte sphérique vienne s'ajouter au système des trois précédentes, on pourra concevoir deux dispositions différentes de l'ensemble, à part, bien entendu, celle où la quatrième

calotte se placerait de manière à ne s'unir qu'à une seule des autres. L'une de ces dispositions contiendrait quatre cloisons se joignant par une seule arête, et l'autre en contiendrait cinq se joignant par deux arêtes. Pour simplifier la question et les constructions graphiques, je supposerai les quatre calottes égales en diamètre, auquel cas toutes les cloisons seront évidemment planes.

Alors, on peut admettre, en premier lieu, que les quatre calottes s'unissent de façon que leurs centres soient placés comme les quatre sommets d'un carré, ce qui donnera le système dont la base est représentée *fig. 8*, où il y a quatre cloisons aboutissant à une même arête sous des angles droits; ce système est évidemment un système d'équilibre, puisque tout y est symétrique.

On peut admettre, en second lieu, que, trois calottes s'étant d'abord unies, la quatrième s'unisse à deux d'entre elles; dans cet arrangement, les quatre centres seront aux sommets d'un losange, et l'on aura le système dont la base est représentée *fig. 9*, où il y a cinq cloisons. Ce système est évidemment aussi, à cause de sa symétrie, un système d'équilibre; mais ici, à une même arête liquide n'aboutissent plus que trois cloisons, faisant entre elles des angles de  $420^\circ$ .

Or si l'on essaie de réaliser sur la plaque de verre le premier de ces deux systèmes, on n'y parvient pas, ou, s'il se produit, ce n'est que pendant un instant inappréhensible, et pour passer rapidement au second. Quant à ce dernier, on l'obtient directement sans aucune difficulté, et il persiste.

On doit conclure de là que, dans le premier système, l'équilibre est instable, et ainsi il devient probable que quatre cloisons aboutissant à une même arête ne peuvent coexister.

Remarquons d'ailleurs que, dans l'assemblage laminaire de la *fig. 2*, l'arête liquide semi-circulaire qui unit les deux calottes sphériques n'est commune qu'à trois lames, savoir à ces deux calottes et à la cloison, et, nous le savons, ces trois lames font entre elles des angles égaux; de même dans l'assemblage de la *fig. 6<sup>bis</sup>*, chacune des arêtes liquides qui unissent deux à deux les calottes n'est, comme celle qui unit les trois cloisons, commune qu'à trois lames faisant entre elles des angles égaux; enfin c'est ce qui a encore lieu évidemment dans l'assemblage de la *fig. 9*.

Rapprochons ces faits de l'un de ceux que nous ont montrés tous les systèmes laminaires qui occupent mes charpentes polyédriques en fil de fer quand on retire celles-ci de l'eau de savon ou du liquide glycérique. Nous avons vu (5<sup>me</sup> série, § 49) que, dans chacun de ces systèmes, il n'y a jamais que trois lames aboutissant à une même arête liquide. C'est donc là une loi générale des assemblages laminaires. En outre, il suit des considérations exposées plus haut (§ 8) que les angles sous lesquels les trois lames se coupent doivent toujours être égaux ou ne différer que de quantités inappréhensibles, et cette égalité se vérifie aisément, comme nous le verrons bientôt, dans tous ceux de nos systèmes qui sont composés de lames planes.

A l'égard de l'instabilité d'un système où plus de trois lames aboutiraient à une même arête liquide, je rappellerai, comme autre preuve, le phénomène curieux que m'a présenté la production du système linaire de l'octaèdre régulier, quand j'opérais avec de l'huile au sein du liquide alcoolique : ainsi que je l'ai dit (2<sup>me</sup> série, § 35), lorsqu'après avoir formé l'octaèdre plein on lui enlève graduellement de l'huile au moyen de la petite seringue, les huit faces se creusent à la fois également, et, lorsque les lames commencent à se former mais sont encore jointes par des masses épaisses, elles se dirigent toutes vers le centre de la figure, de sorte que le système tend vers la disposition que je représente de nouveau ici (*fig. 40*), disposition dans laquelle à une même arête liquide aboutissent quatre lames ; mais lorsque l'épaisseur des masses de jonction est diminuée jusqu'à une certaine limite, un changement spontané s'effectue, et le système prend définitivement une autre forme. J'ajouterai maintenant que, dans cette dernière, à chaque arête liquide n'aboutissent plus que trois lames.

Enfin le système linaire de la pyramide quadrangulaire offre un autre exemple analogue et également curieux : j'ai donné, dans la 2<sup>me</sup> série, comme dessin de ce système, celui que je reproduis ici (*fig. 41*), dans lequel l'arête liquide *ab* est commune aux quatre lames qui partent des quatre arêtes obliques de la charpente ; mais ce qui m'a trompé alors c'est que, avec de l'huile et au sein du liquide alcoolique, cette arête conserve une épaisseur assez grande qu'il est impossible de lui enlever sans déterminer la rupture de l'une des lames, épaisseur qui maintient la stabilité du système ; or lorsqu'on

réalise le système laminaire de cette charpente au moyen du liquide glycérique, l'arête en question se trouve remplacée par une lamelle additionnelle (*fig. 12*), et alors chaque arête liquide n'est plus commune qu'à trois lames.

La pyramide des *fig. 11* et *12* a plus de hauteur que celle qui est représentée dans la 2<sup>me</sup> série ; c'est qu'avec cette dernière, le système laminaire obtenu au moyen du liquide glycérique présente toujours, soit dès sa formation, soit peu de temps après, une petite irrégularité dans la position des quatre arêtes liquides dirigées vers les sommets de la base, irrégularité qui ne se produit pas avec une pyramide plus élevée. Je reviendrai plus loin sur cette même irrégularité, qui se rattache à un ordre de faits dont j'aurai à m'occuper, et j'en indiquerai alors la cause.

§ 17. — Remarquons actuellement que dans les systèmes des *fig. 6* et *9*, il y a quatre arêtes aboutissant à un même point, savoir les trois qui unissent deux à deux les calottes sphériques et celle qui unit les trois cloisons. Or, ainsi que nous l'avons vu (5<sup>me</sup> série, § 19), le même fait se retrouve dans tous nos systèmes laminaires obtenus avec le liquide glycérique : toujours les arêtes liquides qui aboutissent à un même point liquide sont au nombre de quatre ; c'est donc là encore une loi générale des assemblages laminaires. Ajoutons que si l'on applique au point dont il s'agit les considérations avancées (§ 8) à l'égard des arêtes, on en conclura que celles-ci doivent se couper en ce même point sous des angles égaux ou excessivement rapprochés de l'égalité. Et en effet, le raccordement des petites surfaces concaves appartenant aux arêtes détermine nécessairement, autour du point où elles s'unissent, quatre petites surfaces fortement concaves dans tous les sens, surfaces dont l'équilibre capillaire exige des courbures égales ou sensiblement telles, ce qui entraîne l'égalité, rigoureuse ou extrêmement approchée, des angles dont nous nous occupons.

Cherchons la valeur de ces angles, en regardant leur égalité comme rigoureusement exacte. Quand les arêtes liquides sont courbes, il est clair qu'il faut remplacer les arcs par leurs tangentes au point où ils aboutissent, de sorte qu'il suffit, dans tous les cas, de se figurer quatre droites aboutissant à un même point sous des angles égaux. D'après cela, pour suivre la voie la plus simple, considérons un tétraèdre régulier *abcd* (*fig. 13*). Soit *o*

le centre de ce tétraèdre. Menons les droites  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$ ,  $od$  aux quatre sommets; ces droites feront évidemment entre elles des angles égaux, dont la valeur sera, par conséquent, celle qu'il s'agit d'obtenir. Cela posé, prolongeons la droite  $ao$  jusqu'en  $p$ , où elle atteint la base, et joignons  $pd$ ; le triangle  $opd$  sera rectangle en  $p$ . Maintenant remarquons que le point  $o$  est le centre de gravité du tétraèdre, et que le point  $p$  est le centre de gravité de la base  $bcd$ ; or on sait que si, dans une pyramide quelconque, on joint le sommet au centre de gravité de la base, le centre de gravité de la pyramide est situé sur cette droite, aux trois quarts de sa longueur à partir du sommet;  $op$  est donc le tiers de  $oa$ , et comme le point  $o$  est à égale distance des quatre sommets,  $op$  est également le tiers de  $od$ . Dans le triangle rectangle  $opd$ , on a conséquemment  $\cos dop = \frac{1}{3}$ ; d'où résulte enfin

$$\cos doa = - \frac{1}{3}.$$

Ainsi lorsque quatre droites aboutissent à un même point sous des angles égaux, chacun de ces angles est celui qui a pour cosinus  $-\frac{1}{3}$ ; on trouve, d'après cela, que cet angle est de  $109^\circ 28' 16''$ , c'est-à-dire à fort peu près de  $109$  degrés et demi.

Telle est donc la valeur que doivent avoir, dans les assemblages laminaires, les angles sous lesquels quatre arêtes liquides aboutissent à un point liquide. Chacune de ces arêtes unit évidemment trois lames, et, du moins dans le cas d'arêtes rectilignes, il résulte nécessairement de la symétrie de l'ensemble que ces lames doivent faire entre elles des angles égaux.

Réciproquement si les lames qui se joignent trois à trois suivant chacune des quatre arêtes liquides font entre elles des angles égaux, ces quatre arêtes font nécessairement aussi entre elles des angles égaux. En effet, en supposant les lames planes, le système constitue évidemment l'ensemble de quatre angles triédres dans chacun desquels les trois angles dièdres sont égaux; or, en vertu d'un théorème connu, cette égalité entraîne, pour l'un quelconque de ces angles triédres, celle des angles plans; mais, chacun de ces derniers étant commun à deux des angles triédres, il s'ensuit que, dans le système, tous les angles plans, c'est-à-dire les angles que font entre elles les quatre

arêtes, sont égaux. Si les lames, et conséquemment aussi les arêtes, sont courbes, il est clair qu'on pourra, au point commun à ces arêtes, remplacer les lames par leurs plans tangents et les arêtes par leurs tangentes, qui seront les intersections de ces plans; d'où il résulte que, dans tous les cas, l'égalité des angles sous lesquels les arêtes aboutissent à leur point commun et l'égalité des angles sous lesquels trois lames s'unissent à une même arête, sont, du moins au voisinage immédiat du point dont il s'agit, des conséquences nécessaires l'une de l'autre.

§ 18. — Appliquons ce principe à l'assemblage laminaire dont la *fig. 6<sup>bis</sup>* représente la base. La construction graphique de cette base est fondée sur l'égalité des angles sous lesquels les lames et les cloisons aboutissent trois à trois à leurs arêtes communes, et elle s'est trouvée (§ 15) pleinement vérifiée par l'expérience; les quatre arêtes du système aboutissent donc nécessairement à leur point commun sous des angles égaux.

Le principe s'applique évidemment de même aux deux points de l'assemblage de la *fig. 9* où viennent aboutir quatre arêtes.

§ 19. — Revenons aux systèmes formés dans les charpentes en fil de fer. Ceux d'entre eux qui sont composés de lames planes permettent de constater cette égalité des angles entre les quatre arêtes liquides qui aboutissent à un même point liquide, car on peut en général leur appliquer des mesures; ils permettent conséquemment aussi (§ 17) de vérifier l'égalité des angles entre les trois lames qui aboutissent à une même arête liquide. Les systèmes de cette nature qui se sont réalisés dans mes charpentes sont au nombre de trois, savoir celui du tétraèdre régulier, celui du prisme triangulaire équilatéral, et celui de l'octaèdre régulier; j'en reproduis ici les dessins (*fig. 14, 15 et 16*). On ne doit pas oublier, pour l'intelligence de ces dessins et de la plupart des suivants, que, dans les systèmes laminaires qu'ils représentent, de chacune des arêtes solides part une lame se dirigeant vers l'intérieur de la charpente et rattachée aux autres lames par les arêtes liquides que les dessins figurent en traits fins. Dans le premier, l'égalité dont il s'agit est évidente, tout étant parfaitement symétrique dans tous les sens; on voit d'ailleurs que les quatre arêtes liquides occupent précisément les positions des droites *oa, ob, oc, od* de la *fig. 13*. Dans le second, l'angle entre l'arête

verticale  $mn$  et l'arête oblique  $np$ , par exemple, devant avoir —  $\frac{1}{3}$  pour cosinus, il s'ensuit que la hauteur verticale du point  $n$  au-dessus du plan de la base est le tiers de  $np$ ; d'où l'on déduit aisément qu'en désignant par  $a$  l'arête  $pq$  de la base, cette hauteur verticale est égale à  $\frac{a}{2\sqrt{6}}$ . D'après cela, si  $b$  désigne l'arête latérale  $pr$  de la charpente, on a

$$mn = b - \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Dans la charpente que j'ai employée, l'arête  $b$  était de 70<sup>mm</sup>,70, et l'arête  $a$  de 69<sup>mm</sup>,23<sup>1</sup>; en substituant ces nombres dans la formule ci-dessus, on trouve

<sup>1</sup> Il est nécessaire d'expliquer ici de quelle manière ces évaluations ont été obtenues. Une charpente en fil de fer ne pouvant être géométriquement parfaite, on a mesuré séparément chacune des arêtes latérales, et l'on a pris la moyenne des résultats, puis on a agi de même à l'égard des arêtes des bases; mais ces mesures n'ont pas été effectuées directement sur les arêtes, parce que les terminaisons de celles-ci étaient plus ou moins masquées par les soudures; voici comment on a procédé: la charpente étant placée verticalement, et l'une de ses faces latérales en regard du cathétomètre, on a déterminé, en visant aussi près de l'arête verticale de droite que le permettaient les soudures, la distance comprise entre les deux arêtes horizontales, puis on a fait la même chose près de l'arête verticale de gauche; ensuite on a tourné le prisme sur son axe de façon à présenter successivement au cathétomètre les deux autres faces latérales, et l'on a répété sur chacune d'elles les mêmes opérations; on a eu ainsi, pour la longueur des arêtes latérales, six valeurs peu différentes, dont la moyenne s'est trouvée de 69<sup>mm</sup>,85.

Cela fait, on a disposé la charpente horizontalement sur des supports convenables de telle manière que, l'une de ses faces latérales regardant encore le cathétomètre, les deux arêtes des bases qui la limitaient à droite et à gauche fussent verticales, et l'on a opéré à l'égard de celles-ci comme à l'égard des précédentes, puis, tournant le prisme sur son axe, on a passé de même aux deux autres faces, de sorte qu'on a eu aussi, pour les arêtes des bases, six valeurs, dont la moyenne était 68<sup>mm</sup>,56.

Mais ces deux moyennes devaient subir une petite correction; en effet, les lames liquides n'aboutissent point aux fils solides suivant les génératrices de ceux-ci dont on a mesuré les distances, mais suivant d'autres génératrices situées plus en dedans de la charpente, d'où il suit que les deux nombres ci-dessus sont un peu trop petits. Pour arriver à la correction d'une manière simple, remarquons que lorsqu'une lame liquide s'appuie sur une surface solide mouillée, c'est nécessairement par l'intermédiaire d'une petite masse à courbures transversales concaves, et que, si la lame est plane, il faut, pour l'équilibre, que ces courbures soient identiquement les mêmes des deux côtés, ce qui exige évidemment que le plan de la lame soit normal à la surface solide. Il résulte de là que si l'on prolonge par la pensée les lames de notre système, chacune d'elles passera par l'axe du fil solide sur lequel elle s'appuie, et que, par conséquent, les arêtes liquides prolongées de même iront aboutir aux points où ces axes se coupent; nous

$mn = 42^{mm},44$ ; or la mesure au cathétomètre a donné  $mn = 42^{mm},37$ , valeur qui ne diffère de la précédente que de  $0^{mm},07$ , c'est-à-dire de moins que les deux millièmes de l'une ou de l'autre.

Quant au système de l'octaèdre régulier, il est composé de lames planes lorsqu'on l'obtient avec du liquide glycérique, ainsi que je l'ai déjà dit dans la 5<sup>me</sup> série, tandis qu'il est formé de lames courbes lorsqu'on le réalise avec de l'huile au sein du liquide alcoolique (2<sup>me</sup> série, § 35); j'indiquerai plus loin la cause de cette différence, mais je ne m'occuperaï maintenant que du système de lames planes. Ce système est fort beau et fort remarquable; il consiste, comme le montre la *fig. 16*, dans les parties suivantes: 1<sup>o</sup> six quadrilatères allongés dans le sens d'un de leurs angles, ayant chacun le sommet de cet angle à l'un de ceux de la charpente et le sommet opposé au centre de la figure; dans chaque couple aboutissant à deux sommets opposés de la charpente, les plans des deux quadrilatères sont à angle droit l'un sur l'autre; 2<sup>o</sup> les douze lames partant des arêtes solides, lames dont chacune est triangulaire et limitée à deux des longues arêtes des quadrilatères ci-dessus.

Il y a, dans chacun de ces quadrilatères, une dimension facile à mesurer au cathétomètre: c'est la distance comprise entre les sommets *t* et *u* des deux angles obtus opposés. D'un autre côté, en partant du principe que ces deux angles ainsi que celui dont le sommet est au centre de la figure, doivent avoir  $-\frac{1}{3}$  pour cosinus, on arrive aisément à démontrer que cette distance *tu* doit être exactement le tiers de la longueur des arêtes de l'octaèdre. Pour le faire voir, soit *stu* (*fig. 17*) l'un des quadrilatères; menons les deux diagonales *tu* et *os*, qui se couperont à angle droit en *m*; désignons par *d* la distance *tu*, par  $\alpha$  la valeur commune des trois angles obtus, et par *a* la longueur de l'arête de l'octaèdre. Dans le triangle *ots*, l'angle en *t* étant  $\alpha$ , et

pouvons donc, sans altérer en aucune manière le système laminaire et, par suite, la longueur de l'arête liquide *mn*, substituer, par la pensée, à notre charpente, l'ensemble des axes des fils solides qui la composent, ce qui revient évidemment à ajouter à chacun de nos deux nombres le diamètre de ces fils; or ce diamètre, déterminé encore au moyen du cathétomètre, a été trouvé, comme moyenne de dix mesures prises sur les différents fils, égal à  $0^{mm},87$ ; c'est par l'addition de cette quantité à nos deux nombres, que l'on a obtenu enfin les valeurs de *b* et de *a* données dans le texte.

l'angle en  $o$  étant  $\frac{1}{2} \alpha$ , l'angle en  $s$  sera  $180^\circ - \frac{3}{2} \alpha$ ; d'après cela, les deux triangles rectangles  $omt$  et  $smt$  donneront  $om = \frac{\frac{1}{2}d}{\tan \frac{1}{2} \alpha}$ , et  $ms = \frac{\frac{1}{2}d}{\tan (180^\circ - \frac{3}{2} \alpha)}$ . Remarquons maintenant que la diagonale  $os$ , ou la somme des deux longueurs  $om$  et  $ms$ , est la demi-hauteur de l'octaèdre, et conséquemment, comme on le verra sans peine, est égale à  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ; on aura donc  $\frac{1}{2}d \left\{ \frac{1}{\tan \frac{1}{2} \alpha} + \frac{1}{\tan (180^\circ - \frac{3}{2} \alpha)} \right\} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Mais, sachant que le cosinus de l'angle  $\alpha$  est  $-\frac{1}{3}$ , on trouvera  $\tan \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{2}$ , et  $\tan (180^\circ - \frac{3}{2} \alpha) = \frac{1}{3} \sqrt{2}$ . Ces valeurs étant substituées dans la formule ci-dessus, on obtient, comme je l'ai avancé,

$$d = \frac{a}{3}.$$

Dans ma charpente, les mesures ont donné<sup>1</sup> pour  $a$  la valeur 69<sup>mm</sup>,49, dont le tiers est 23<sup>mm</sup>,46; et pour la distance  $d$ , la valeur 23<sup>mm</sup>,44. La différence 0<sup>mm</sup>,02 entre la valeur calculée et la valeur mesurée est, on le voit, plus insignifiante encore que dans le cas précédent.

J'ai dit (5<sup>me</sup> série, § 19) qu'une charpente solide étant donnée de forme, on pourrait se proposer, comme problème géométrique, d'en occuper l'intérieur par un ensemble de surfaces soumis aux lois qui régissent mes systèmes laminaires; or c'est ce qu'a fait M. Lamarle<sup>2</sup> à l'égard de l'octaèdre régulier en supposant toutes les surfaces planes, et il a trouvé ainsi un système identique à celui qu'il avait vu se produire dans ma charpente.

<sup>1</sup> Une charpente octaédrique régulière pouvant être considérée comme formée de l'ensemble de trois carrés en fils de fer dont les plans se coupent suivant les diagonales, la charpente a été placée de manière que ces carrés se présentassent l'un après l'autre en face du cathétomètre avec deux de leurs côtés dirigés verticalement, et, dans les trois positions de la charpente, on a mesuré, aussi près que possible de chacun de ces fils verticaux, la distance comprise entre les deux fils horizontaux. On a obtenu ainsi douze valeurs, dont la moyenne était 68<sup>mm</sup>,59; on a pris, en outre, sur les différents fils, huit mesures du diamètre de ceux-ci, mesures qui ont donné pour moyenne 0<sup>mm</sup>,90. D'après les considérations exposées dans la note précédente, on a ajouté ce diamètre au nombre ci-dessus, et c'est ainsi qu'on a trouvé la valeur de  $a$  indiquée dans le texte.

Quant à la valeur de  $d$ , comme les petites irrégularités de la charpente devaient introduire de légères différences entre les six quadrilatères, on a mesuré cette distance dans chacun d'eux, et la valeur de  $d$  donnée dans le texte est la moyenne de ces six mesures.

<sup>2</sup> La note de M. Lamarle est encore inédite, mais elle doit paraître incessamment.

§ 20. — Les systèmes laminaires des autres charpentes, c'est-à-dire ceux qui contiennent des lames courbes et conséquemment des arêtes liquides courbes, vérifient encore, et d'une manière bien curieuse, quoiqu'un peu moins précise, l'égalité des angles sous lesquels ces arêtes aboutissent à un même point liquide ; ils vérifient ainsi également, du moins dans le voisinage immédiat de celui-ci (§ 17), l'égalité des angles entre les trois lames qui se joignent suivant chacune de ces mêmes arêtes.

Prenons comme premier exemple le système laminaire de la charpente cubique, système dont la *fig. 18* reproduit le dessin<sup>1</sup>. Chacun des angles de la lamelle quadrangulaire centrale devant être de 109 degrés et demi, et conséquemment supérieur à un droit, il en résulte que les côtés de cette lamelle ne peuvent être rectilignes et doivent constituer des arcs légèrement convexes vers l'extérieur; or c'est, en effet, ce que montre le système réalisé.

J'ai représenté dans la *fig. 15* le système laminaire du prisme triangulaire équilatéral, et j'ai dit qu'en désignant par *a* la longueur des arêtes des bases, la hauteur de chacune des pyramides laminaires qui s'appuient sur ces bases est égale à

$$\frac{a}{2\sqrt{6}};$$

mais on comprend que si la hauteur du prisme est moindre que le double de cette quantité, ou, en d'autres termes, moindre que les 0,4 des côtés des bases, le système en question ne saurait se produire. Dans ce cas, l'analogie avec d'autres systèmes dont je parlerai ci-après m'avait conduit à prévoir que le système se composerait d'une lame triangulaire équilatérale parallèle aux bases, placée à égales distances de ces dernières, et rattachée par d'autres lames à toutes les arêtes solides; mais comme les angles de ce triangle laminaire devaient être de 109 degrés et demi, et que les angles d'un triangle équilatéral à côtés rectilignes ne sont que de 60°, il fallait nécessairement que les côtés de notre triangle laminaire fussent convexes vers l'extérieur, comme ceux de la lamelle du système du cube, mais que leurs courbures

<sup>1</sup> Dans ce système, en réalité, les arêtes liquides qui partent des sommets de la charpente ne sont pas tout à fait droites; mais, comme je l'ai déjà dit dans la 5<sup>me</sup> série, à propos du même dessin, les courbures de ces arêtes sont trop faibles pour que la gravure puisse les indiquer.

fussent beaucoup plus prononcées; or c'est ce que l'expérience a pleinement vérifié; seulement les courbures ne se sont montrées très-fortes que dans le voisinage des sommets. La hauteur de ma charpente était environ le tiers de la longueur des côtés des bases; la *fig. 19* représente le système vu par-dessus; ce système constitue donc un second exemple à l'appui de la proposition dont il s'agit.

En troisième lieu, si l'on prend pour charpente celle d'un prisme pentagonal régulier dont la hauteur ne soit pas trop grande relativement aux dimensions des bases, le système laminaire présente, au milieu de sa hauteur, une lame pentagonale parallèle aux bases, et à laquelle viennent se rattacher, comme à la lame triangulaire du système précédent, toutes les lames partant des arêtes solides; or l'angle de deux côtés contigus d'un pentagone régulier étant de  $108^\circ$ , c'est-à-dire très-voisin de notre angle de  $109^\circ \frac{1}{2}$ , il s'ensuit que les côtés de la lame pentagonale doivent être sensiblement droits, et c'est encore ce que l'expérience confirme: dans la charpente que j'ai employée, la longueur des arêtes des bases est de 5 centimètres, et la hauteur du prisme de 6 centimètres; les côtés de la lame pentagonale ont environ 2 centimètres, et l'œil ne peut y distinguer aucune courbure. Dans ce système, les lames qui partent des arêtes solides des bases et vont se rattacher aux côtés du pentagone central, paraissent planes, et cela doit être, puisqu'elles s'appuient d'une part sur les arêtes rectilignes des bases et d'autre part sur les côtés sensiblement droits de la lame centrale; il suit de là que les arêtes liquides obliques qui vont des sommets des bases à ceux du pentagone central, semblent droites. Quant aux lames triangulaires qui partent des arêtes verticales solides, elles sont rigoureusement planes par suite de la symétrie de leur position. Le système dont il s'agit est représenté *fig. 20*.

En quatrième lieu enfin, si la charpente est celle d'un prisme hexagonal régulier, le système laminaire est analogue au précédent dans sa disposition générale, la lame centrale étant, bien entendu, hexagonale; mais comme l'angle de deux côtés contigus d'un hexagone régulier est de  $120^\circ$ , c'est-à-dire notablement supérieur à notre angle de  $109^\circ \frac{1}{2}$ , les côtés de la lame en question doivent être sensiblement courbés vers l'intérieur, et c'est également

ce que montre le système réalisé. La hauteur de la charpente que j'ai employée est à la distance de deux côtés opposés de la base, ou, en d'autres termes, au diamètre du cercle que l'on inscrirait à cette base, comme 7 à 6.

§ 24. — Les faits dont j'ai parlé (§ 16) pour montrer qu'un système dans lequel plus de trois lames aboutissent sous des angles égaux à une même arête liquide est à l'état d'équilibre instable, se rapportent à des systèmes qui offriraient en même temps plus de quatre arêtes aboutissant à un même point liquide. L'instabilité pourrait donc être attribuée également à cette dernière circonstance, et il faut décider si elle appartient exclusivement à l'une ou à l'autre, ou seulement à leur ensemble.

Pour cela, prenons comme charpente solide l'ensemble de deux rectangles qui se coupent à angle droit au milieu de deux de leurs côtés opposés (*fig. 21*). Le système laminaire le plus simple que l'on puisse concevoir dans cette charpente, se composerait de quatre lames planes occupant respectivement les quatre moitiés des rectangles et aboutissant à une arête rectiligne unique *ab* (*fig. 22*), qui joindrait les deux points d'intersection de ces mêmes rectangles. Ce système, à cause de sa symétrie, serait évidemment un système d'équilibre, et il ne présenterait aucun point liquide commun à plusieurs arêtes ; mais l'arête *ab* serait commune à quatre lames. Or, quand on retire cette charpente du liquide glycérique, on ne la trouve jamais occupée par le système que je viens d'indiquer : dans celui qui se réalise, au lieu de l'arête *ab*, il y a (*fig. 23*) une lame plane terminée par deux arêtes courbes auxquelles viennent se rattacher les lames partant des arêtes solides, lames qui sont alors nécessairement courbes. Ici, on le voit, chacune des deux arêtes liquides n'est commune qu'à trois lames, et il faut conclure de là que l'instabilité est bien réellement une propriété des systèmes laminaires dans lesquels cette condition ne serait pas remplie.

Quant à la seconde circonstance, je ferai d'abord remarquer que si, dans la charpente cubique, on conçoit un système formé de douze lames planes triangulaires partant respectivement des douze arêtes solides et aboutissant au centre de la charpente (*fig. 24*), ce système, à cause de sa parfaite symétrie, sera nécessairement un système d'équilibre, et l'on voit sans peine qu'à chaque arête liquide n'aboutiront que trois lames qui, de plus, feront

entre elles des angles égaux ; mais il y aura huit arêtes liquides aboutissant au point central. Or nous savons qu'avec le liquide glycérique, ce système ne se produit pas, et qu'on obtient toujours celui de la *fig. 18*, dans lequel à chacun des sommets de la lamelle quadrangulaire centrale n'aboutissent que quatre arêtes liquides. On peut conclure de ce fait que l'instabilité appartient aussi à tout système dans lequel un même point liquide est commun à plus de quatre arêtes.

En décrivant (2<sup>me</sup> série, §§ 31 et 33) l'opération au moyen de laquelle on produit, avec de l'huile, dans le liquide alcoolique, le système laminaire du cube, j'ai dit que l'on arrive, avec certaines précautions, mais seulement pendant l'action de la petite seringue, au système de la *fig. 24*, et c'est encore là une preuve curieuse à l'appui de ce qui précède. En effet, l'extrémité du bec de la seringue, qui occupe le centre du système, constitue, en ce centre, un point solide, et l'on comprend que cette condition suffit pour maintenir la stabilité; aussi, comme je l'ai dit encore dans les paragraphes cités, quand on enlève la seringue, les choses changent : si on la retire lentement, on voit se développer la lamelle additionnelle quadrangulaire de la *fig. 18*, et si on la retire brusquement, on voit se reformer avec rapidité une petite masse centrale d'une certaine épaisseur, et le système se maintient encore ; mais nous savons (§ 16) qu'une petite masse épaisse peut donner de la stabilité à un système qui serait instable sans sa présence.

On peut obtenir également, et d'une manière permanente, avec le liquide glycérique, le système de la *fig. 24* ; mais c'est aussi en introduisant dans ce système une partie solide ; il suffit, en effet, de tendre, d'un sommet de la charpente au sommet opposé, un fil de fer très-fin. Cependant, quand on retire du liquide glycérique la charpente ainsi disposée, le système qui l'occupe n'est pas immédiatement celui dont il s'agit ; il contient encore une lamelle quadrangulaire ; seulement celle-ci est beaucoup plus petite que celle de la *fig. 18*, et n'est point placée symétriquement par rapport à la charpente : elle s'appuie par l'un de ses sommets sur le milieu de la diagonale solide ; mais on la voit bientôt diminuer spontanément d'étendue, jusqu'à s'annuler complètement, de sorte que le système devient alors celui de la *fig. 24*. Les choses se bornent là, et le système demeure parfaitement stable en cet état, quand

le décroissement de la lamelle s'est effectué avec assez de lenteur; mais souvent ce décroissement est plus rapide, et alors se produit un autre phénomène singulier: à l'instant où la lamelle s'annule, on voit s'en reformer une autre beaucoup plus petite encore, située du côté opposé de la diagonale solide, ayant son plan perpendiculaire à celui de la première, et s'appuyant, non plus par un sommet, mais par le milieu de l'un de ses côtés, sur le milieu de la diagonale solide<sup>1</sup>; puis cette seconde lamelle décroît et s'annule comme la précédente; dans ce cas donc, le système n'atteint sa forme définitive que par une espèce d'oscillation.

J'indiquerai, dans une autre série, la raison de l'instabilité des systèmes dans lesquels plus de trois lames aboutissent à une même arête liquide et plus de quatre arêtes à un même point liquide; mais on entrevoit, dès à présent, que la stabilité doit exister dans le cas de trois lames à une même arête liquide, et de quatre arêtes à un même point liquide: car trois est évidemment le plus petit nombre possible de lames aboutissant à une même arête, et l'on se convaincra sans peine que quatre est le plus petit nombre possible d'arêtes aboutissant à un même point liquide.

§ 22. — On doit, je pense, regarder maintenant comme bien établies pour tous les assemblages laminaires, les deux lois que je viens de discuter. Or ces lois nous conduisent à une conséquence fort remarquable: la mousse qui se forme sur certains liquides, par exemple sur le vin de Champagne, sur la bière, sur l'eau de savon que l'on agite, le blanc d'œuf battu, etc., sont évidemment des assemblages laminaires, composés d'une foule de lamelles ou cloisons qui s'entrecoupent et emprisonnent entre elles de petites portions de gaz; conséquemment, bien que tout y semble régi par le hasard, ils doivent être soumis à ces mêmes lois; ainsi leurs innombrables cloisons se joignent nécessairement partout trois à trois sous des angles égaux, et toutes leurs arêtes se distribuent de manière qu'il y en ait toujours quatre aboutissant à un même point, en y faisant des angles égaux.

<sup>1</sup> Ma charpente ayant été accidentellement déformée, puis réparée, la seconde lamelle, quand elle se produisait, ne se plaçait plus tout à fait de la manière indiquée ci-dessus; la différence provenait sans doute d'une petite irrégularité existant dans la charpente soit avant, soit après la réparation de celle-ci.

J'ai vérifié ces faits par l'expérience suivante : on a plongé au fond d'un vase contenant du liquide glycérique la tête d'une pipe tenue un peu obliquement, et l'on a soufflé d'une manière continue par le tuyau, de façon à produire une série nombreuse de bulles d'air assez grosses qui traversaient le liquide. On a déterminé ainsi, comme le font les enfants avec de l'eau de savon, la formation d'un édifice cloisonné s'élevant au-dessus des bords du vase, édifice évidemment de la même constitution que la mousse, mais dont les différentes parties ont des dimensions beaucoup plus grandes; or, aussi loin que l'œil pouvait plonger dans ce système sans s'égarter, on a reconnu que partout une même arête n'était commune qu'à trois cloisons, et qu'il n'y avait jamais que quatre arêtes aboutissant à un même point. Quant à l'égalité des angles entre ces arêtes, il y avait certains endroits où trois de celles qui aboutissaient à un point semblaient être à peu près dans un même plan ; mais, en regardant avec attention, on constatait que ces arêtes s'infléchissaient fortement en approchant de leur point de concours.

On s'explique d'ailleurs aisément la génération d'un semblable édifice, et conséquemment celle de la mousse : les premières bulles de gaz qui arrivent à la surface du liquide, donnent naissance à des calottes sphériques qui s'accroient comme celles dont nous nous sommes occupés précédemment, et bientôt toute la surface du liquide en est couverte; alors les lames que produisent les bulles gazeuses subséquentes soulèvent nécessairement ce premier assemblage, en déterminant la formation de cloisons inférieures, de manière qu'il y a, en peu de temps, deux systèmes de lames superposés, puis, les bulles gazeuses arrivant toujours, cet ensemble est soulevé à son tour, et ainsi de suite, le tout se disposant avec plus ou moins de symétrie, suivant les différences de volume des bulles gazeuses successives et la distribution des points où elles atteignent la surface du liquide, et le léger édifice composé de cloisons emprisonnant dans les espaces qu'elles séparent tous les volumes de gaz qui constituaient respectivement les bulles, acquiert de plus en plus de hauteur. Si les bulles sont très-minimes, l'édifice cloisonné se composera de parties trop petites pour que l'œil les distingue en général, et l'on aura ainsi de la mousse.

§ 23. — Revenons enceore aux systèmes laminaires des charpentes, et

complétons-en l'étude. Voyons d'abord comment s'engendrent les lames qui partent de chacune des arêtes solides, et, pour cela, prenons un exemple fort simple. Supposons que l'on plonge dans l'eau de savon ou dans le liquide glycérique l'un des anneaux supérieurs du § 14 de la 5<sup>me</sup> série, c'est-à-dire un anneau horizontal en fil de fer porté par une fourche comme nos charpentes, puis qu'on le soulève hors du liquide avec une vitesse convenable, en le maintenant toujours parallèle à la surface de ce liquide. Tant que la distance de l'anneau au plan de celle-ci sera très-petite, le liquide s'élèvera un peu, par l'action capillaire, en présentant, à l'extérieur et à l'intérieur de ce même anneau, deux petites surfaces à courbures méridiennes concaves. Or il est aisé de voir qu'à mesure que l'anneau continuera à monter, ces deux petites surfaces iront en se creusant progressivement dans le sens méridien. On sait, en effet, que lorsqu'on soulève lentement un disque solide préalablement mis en contact par sa face inférieure avec la surface d'un liquide susceptible de le mouiller, la portion de ce liquide soulevée par le disque au-dessus du niveau extérieur présente bientôt, dans le sens méridien, un creusement qui augmente à mesure que le disque monte; la chose doit donc avoir lieu aussi pour celle de nos petites surfaces qui regarde l'extérieur, et il est clair que l'autre petite surface, c'est-à-dire celle qui regarde l'espace intérieur à l'anneau, doit, pour l'équilibre capillaire de la petite masse soulevée par celui-ci, subir des modifications analogues.

Nos deux petites surfaces iront donc en se rapprochant mutuellement à mesure que l'anneau poursuivra sa marche ascensionnelle, jusqu'à ce qu'elles soient près de se toucher. Mais elles ne peuvent se rapprocher ainsi qu'en chassant une portion du liquide compris entre elles; or si l'ascension de l'anneau n'est pas trop lente, la viscosité et la cohésion du liquide agiront ici comme dans le cas du § I, et il se formera, par les mêmes raisons, une lame, qui s'étendra entre la petite portion de liquide demeurée suspendue le long de l'anneau et la petite masse annulaire soulevée à la surface du liquide du vase.

Il est clair que ces considérations s'appliqueraient également au cas où l'anneau, pendant qu'on le retire, serait oblique ou vertical, au lieu d'être horizontal, et qu'elles s'appliqueraient de même à celui où le fil de fer, au

lieu d'être courbé circulairement, serait plié suivant un polygone quelconque : toujours il se formerait, par les mêmes causes, une lame entre lui et la surface du liquide ; si donc nous plongeons dans l'eau de savon ou dans le liquide glycérique l'une de nos charpentes, les fils de fer qui la composent devront, à mesure qu'ils sortent du liquide, être rattachés à celui-ci par des lames, comme le montre, en effet, l'expérience.

§ 24. — Examinons, en second lieu, la manière dont les lames qui doivent constituer le système se disposent pendant qu'on retire la charpente et immédiatement après qu'on l'a retirée.

Commençons par le cas d'une charpente prismatique, que l'on retire en la tenant de façon que ses bases soient horizontales. Quand la base supérieure sortira du liquide, chacune des arêtes solides dont elle se compose sera, d'après ce qui précède, suivie d'une lame. Cela étant, si l'angle compris entre deux faces latérales adjacentes du prisme est égal ou supérieur à  $120^\circ$ , c'est-à-dire à l'un des angles égaux que forment entre elles trois lames aboutissant à une même arête liquide, les lames, qui partiront, comme je viens de le dire, de toutes les arêtes de la base, devront, on va le voir, demeurer attachées aux arêtes solides verticales, et cela tant que la base inférieure ne sera pas sortie du liquide.

Prenons comme exemple la charpente d'un prisme hexagonal régulier, prisme pour lequel l'angle de deux faces latérales adjacentes est de  $120^\circ$ , et considérons la lorsqu'elle n'est encore qu'en partie hors du liquide. Supposons, pour un instant, que les lames qui partent des arêtes de la base supérieure rentrent vers l'intérieur de la charpente, auquel cas d'autres lames partiront nécessairement des arêtes verticales pour aboutir aux arêtes liquides qui uniront les premières. Toutes ces lames se rattacheront au liquide du vase par de petites masses soulevées le long de leurs bords inférieurs (§ 3), masses qui présenteront, dans le sens de leur hauteur, de fortes courbures concaves. Cela posé, portons seulement notre attention sur celles de ces petites masses qui garnissent le bas des lames partant des arêtes de la base ; si elles sont incurvées dans le sens de leur longueur, cette courbure longitudinale sera toujours, on le comprend, très-faible relativement aux courbures transversales ci-dessus, de sorte que l'influence de ces dernières prédominera

beaucoup ; il faudra donc, pour l'équilibre capillaire de ces mêmes petites masses, que les courbures transversales de leurs deux surfaces soient sensiblement les mêmes, ce qui exige évidemment que les lames qui s'appuient sur leurs crêtes y aboutissent suivant des directions à fort peu près verticales. Les lames en question, c'est-à-dire celles qui partent des arêtes de la base, devront conséquemment s'infléchir en descendant vers le liquide, et ainsi elles seront, dans le sens de leur hauteur, convexes vers l'intérieur de la figure. Mais comme elles seront en contact par leurs deux faces avec l'atmosphère libre, elles ne pourront exercer de pression sur l'air, et dès lors il faudra (3<sup>me</sup> série, § 12) que leur courbure moyenne soit nulle, ou, en d'autres termes, qu'en chacun de leurs points, les courbures, dans deux directions rectangulaires, soient égales et opposées ; donc, puisque les lames en question sont convexes dans le sens de leur hauteur, elles seront concaves dans le sens de leur largeur ; or, par la double raison de cette concavité et de leur direction rentrante vers l'intérieur de la charpente, nos lames feront nécessairement entre elles deux à deux des angles supérieurs à ceux des faces du prisme, et conséquemment supérieurs à 120°, ce qui, nous le savons, est impossible ; ainsi ces mêmes lames devront rester, comme je l'ai avancé, adhérentes aux arêtes solides latérales tant que toute la charpente n'est pas hors du liquide.

Cette déduction est pleinement confirmée par l'expérience : quand on retire du liquide glycérique, dans la position indiquée, la charpente d'un prisme hexagonal régulier, on obtient simplement, jusqu'à ce que la base inférieure soit sortie, des lames planes occupant toutes les faces latérales.

L'épaisseur des fils solides, épaisseur qui, dans mes charpentes, approche d'un millimètre, semblerait, à la vérité, suffire pour établir l'indépendance entre ces lames ; mais ici elle n'est pour rien dans le phénomène : j'ai fait construire une charpente prismatique hexagonale dans laquelle les arêtes latérales étaient de simples crins, et les choses se sont passées absolument de la même manière. Dans cette charpente, dont la disposition serait difficile à représenter en petit par la gravure, la base supérieure est soulevée par de petits ressorts, de façon que les crins, qui s'allongent dans le liquide, soient toujours tendus.

§ 25. — Mais, on le comprend, il ne peut plus en être ainsi dans le cas d'une charpente dont les bases ont moins de six côtés, car alors les faces latérales faisant entre elles des angles moindres que  $120^\circ$ , les lames qui partent de deux arêtes adjacentes de la base supérieure et qui, le long de l'arête solide verticale correspondante, seraient en communication par l'intermédiaire du liquide qui mouille cette arête, doivent tendre à se détacher de cette même arête et à se diriger toutes deux vers l'intérieur de la charpente, afin de rétablir entre elles l'angle de  $120^\circ$ ; alors aussi, bien entendu, elles développeront une troisième lame partant de l'arête solide verticale en question, de telle manière que ces trois lames soient unies par une arête liquide oblique partant du point de jonction des trois arêtes solides.

C'est ce que l'expérience vérifie également : quand on retire du liquide une charpente prismatique à base carrée ou la charpente cubique, on voit, dès que la base supérieure est sortie, les lames prendre une direction rentrante, et l'effet est plus prononcé encore avec la charpente du prisme triangulaire équilatéral; on constate, en même temps, que ces lames se comportent comme je l'ai avancé dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire qu'elles s'infléchissent pour aboutir à la surface du liquide suivant des directions sensiblement verticales, et qu'elles sont concaves dans le sens de leur largeur.

Quant au prisme pentagonal régulier, pour lequel l'angle de deux faces latérales adjacentes est de  $108^\circ$ , et conséquemment peu inférieur à  $120^\circ$ , on conçoit que la tendance des lames à rentrer doit être faible, et qu'ainsi l'épaisseur des fils métalliques dont sont formées les arêtes solides de mes charpentes ordinaires, est suffisante, dans ce cas, pour établir l'indépendance entre les lames; aussi, avec la charpente pentagonale de la *fig. 20*, on n'obtient encore, pendant qu'on la retire, que des lames planes dans les faces latérales; mais j'ai fait faire une charpente dans laquelle les arêtes latérales étaient en fils de fer très-fins, et alors les lames rentraient; seulement, comme cela devait être, elles rentraient beaucoup moins que pour les deux charpentes précédentes. Cette charpente à arêtes latérales fines est représentée *fig. 25*; la base supérieure est maintenue par deux anses *a* et *b*, par lesquelles on tient la charpente pour la plonger.

§ 26. — Voyons actuellement comment ces divers systèmes se complètent,

quand on continue à soulever les charpentes. Reprenons d'abord le cas du prisme hexagonal, et supposons que la charpente ait le rapport de dimensions indiqué à la fin du § 20. Lorsque la base inférieure sortira du liquide, il se formera, comme avec l'anneau du § 23, une lame s'étendant de cette base à la surface du liquide, lame qui ira en se rétrécissant de haut en bas. Si l'on soulève encore la charpente, on atteindra bientôt un point où l'équilibre de cette dernière lame n'est plus possible; car elle se resserre alors spontanément avec rapidité, se ferme en se séparant du liquide du vase, et vient constituer une lame plane dans la base inférieure du prisme. Mais cette lame plane faisant des angles droits avec celles qui occupent les faces latérales, ne pourra, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, persister ainsi; les choses devront se disposer de façon qu'elle fasse avec les lames latérales des angles de  $120^\circ$ . Or c'est ce qui s'effectue de la manière la plus simple: la lame plane dont il s'agit grimpe dans l'intérieur de la charpente en diminuant d'étendue, comme si elle tirait à elle les lames latérales, chacune de ces dernières se plie en deux à l'arête liquide qui l'unit à la première, tandis que d'autres lames, partant de chacun des fils solides verticaux se rattachent aussi aux précédentes suivant les arêtes liquides qui unissent celles-ci deux à deux, et l'équilibre s'établit lorsque la lame centrale a atteint la moitié de la hauteur de la charpente, parce qu'alors tout est symétrique; on a ainsi le système dont j'ai parlé à la fin du § 20.

On comprend que, dans ce système, les lames obliques qui se dirigent vers la lame centrale, ne peuvent faire deux à deux des angles de  $120^\circ$  qu'à la condition d'être convexes, dans le sens de leur largeur, vers l'intérieur de la figure, ce qu'entraîne d'ailleurs la courbure rentrante des côtés de la lame centrale; mais, par suite de la nécessité d'une courbure moyenne nulle, cette convexité exige que les lames dont il s'agit soient concaves dans le sens de leur hauteur; de cette manière toutes les lois sont satisfaites, et, dans le système réalisé, on constate effectivement ces deux courbures opposées dans les lames obliques. Quant à la lame centrale et aux lames qui partent des arêtes solides latérales, elles sont nécessairement planes, à cause de leur position symétrique par rapport aux autres.

Une chose à remarquer, c'est que, dans ce même système, les arêtes

liquides obliques qui vont aux sommets de la lame centrale, ne partent pas exactement des sommets des deux bases, mais bien de points situés à une petite distance de ces derniers sommets, sur les arêtes solides latérales; on en verra plus loin la raison.

§ 27. — Passons aux cas du prisme pentagonal à arêtes latérales fines, du prisme quadrangulaire ou du cube, et du prisme triangulaire, cas dans lesquels les lames partant des arêtes de la base supérieure prennent, comme nous l'avons vu, des directions rentrantes dès que cette base sort du liquide. Quand ces lames commenceront à se montrer, les petites masses soulevées à leurs bords inférieurs dessineront nécessairement sur la surface du liquide un polygone du même nombre de côtés que la base solide, c'est-à-dire, suivant la charpente, un pentagone, un quadrilatère ou un triangle. Seulement, comme les lames en question sont sensiblement verticales à leur partie inférieure et qu'elles se joignent sous des angles de  $120^\circ$ , il faudra que les côtés des polygones ci-dessus fassent aussi entre eux des angles de  $120^\circ$ , ce qui exige évidemment qu'ils soient convexes vers l'extérieur; ces côtés doivent d'ailleurs partager la courbure horizontale des lames, courbure que nous savons être concave vers l'intérieur de la figure et conséquemment convexe vers l'extérieur. Cette convexité des côtés de nos polygones devra, on le comprend, être légère pour le pentagone, plus prononcée pour le quadrilatère, et plus encore pour le triangle. Tout cela est également vérifié par l'expérience.

Ces premiers faits établis, suivons séparément le développement du système laminaire dans chacune des trois charpentes, à mesure qu'on la soulève davantage.

Avec la charpente pentagonale, le pentagone curviligne dessiné à la surface du liquide va d'abord en se resserrant un peu, jusqu'à ce qu'une partie assez considérable de la hauteur de la charpente soit hors du liquide; puis il s'élargit de nouveau, et, quand la base inférieure affleure le liquide, les lames rentrantes viennent s'appliquer, par leurs bords inférieurs, sur les côtés de cette base. Cependant ces lames n'occupent pas alors les faces latérales du prisme: elles font légèrement, dans le sens de leur hauteur, ventre vers l'intérieur de la charpente, de sorte qu'elles sont unies deux à deux par des

arêtes liquides dont chacune constitue un arc de faible courbure s'appuyant par ses deux extrémités sur celles d'une arête solide latérale. Enfin, peu après la sortie de la base inférieure, les phénomènes s'achèvent comme avec la charpente du paragraphe précédent, c'est-à-dire que la lame produite entre la base dont il s'agit et le liquide vient, sous la forme plane, occuper cette même base, puis monte rapidement en tirant à elle les autres lames, pour donner, en définitive, le système de la *fig. 20*.

Avec la charpente du prisme quadrangulaire, le quadrilatère curviligne dessiné sur le liquide décroît jusqu'à s'annuler, puis est remplacé par une petite arête liquide horizontale, des extrémités de laquelle partent deux arêtes liquides descendantes, qui vont en s'écartant l'une de l'autre; ces trois arêtes limitent une lame plane verticale parallèle à deux des faces du prisme et se rattachant par d'autres lames aux arêtes solides. Les choses ne changent pas de nature quand on continue à soulever: la lame plane en question va simplement en augmentant de hauteur et en devenant de plus en plus large à sa partie inférieure, jusqu'à ce que la base inférieure du prisme commence à se faire jour à la surface du liquide; alors les deux arêtes liquides descendantes s'appuient par leurs extrémités sur les milieux de deux côtés opposés de cette base; puis, après la sortie complète de celle-ci, la lame qui vient l'occuper se transforme rapidement en quatre lames obliques, deux trapèzes et deux triangles, qui complètent le système. Dans le cas particulier du cube, on a ainsi le système de la *fig. 18*. Si la hauteur de la charpente est plus grande que la longueur des côtés des bases, les lames obliques qui s'appuient sur ces dernières sont identiquement les mêmes que pour le cube, et les lames partant des arêtes latérales ainsi que la lame plane centrale ont simplement plus de hauteur.

Enfin, avec la charpente du prisme triangulaire, le triangle curviligne à la surface du liquide décroît plus vite, et s'annule quand la charpente n'est sortie encore que d'une quantité assez petite, de manière que la pyramide triangulaire qui doit s'appuyer sur la base supérieure dans le système définitif, se trouve complétée; puis, en continuant à soulever, on voit une arête liquide droite verticale s'étendre du sommet de cette pyramide à la surface du liquide, arête qui est commune aux trois lames partant des arêtes

solides latérales. Les choses restent les mêmes pendant qu'on soulève encore, les trois lames ci-dessus et l'arête liquide verticale allant seulement en augmentant de hauteur, jusqu'après la sortie de la base inférieure; alors la lame qui se rend dans cette base se convertit instantanément en la seconde pyramide triangulaire, qui complète ainsi le système de la *fig. 15*; je suppose, bien entendu, que la charpente ait une hauteur suffisante pour ne pas donner le système de la *fig. 49*.

§ 28. — Prenons actuellement une charpente symétrique autour d'un axe passant par un sommet, telle que celle d'une pyramide régulière, celle de l'octaèdre régulier, etc., et retirons la par ce sommet. Il est évident que, dans ce cas, il ne saurait se former de lames occupant les faces qui aboutissent au sommet dont il s'agit, car l'espace qu'elles laisseraient entre elles et le liquide serait vide d'air; il faut donc, de toute nécessité, que les lames partant respectivement de chacune des arêtes solides se dirigent vers l'intérieur de la charpente.

S'il n'y a que trois arêtes solides se joignant au sommet en question et symétriquement disposées, comme dans le tétraèdre, ou dans le cube que l'on retirerait par un sommet, il est clair que les lames partant de ces trois arêtes solides seront unies par une arête liquide unique descendant verticalement du sommet solide à la surface du liquide du vase, et c'est ce qui a lieu en effet. Avec le tétraèdre régulier, les choses vont ainsi jusqu'après la sortie de la base solide, puis le système s'achève de la même manière que celui du prisme triangulaire, et donne le résultat de la *fig. 44*.

S'il y a plus de trois arêtes solides aboutissant au sommet que l'on retire, il devra nécessairement, par le fait d'instabilité dont j'ai parlé §§ 16 et 24, se former des lames additionnelles. Prenons comme exemple l'octaèdre régulier. On comprend que les lames partant des quatre arêtes solides s'uniront, non suivant une arête liquide unique, mais suivant deux arêtes liquides partant du sommet et terminant une lame auxiliaire verticale, de manière qu'à chacune de ces dernières arêtes aboutissent trois lames faisant entre elles des angles égaux. La lame auxiliaire est destinée à former, dans le système laminaire complet, le quadrilatère supérieur (*fig. 46*). Jusqu'à ce que le carré, base commune des deux pyramides qui constituent l'octaèdre, sorte

du liquide, l'ensemble des lames conserve la même disposition ; puis, pendant que l'on continue à retirer la charpente, on voit se produire des modifications qu'il serait un peu long de décrire, et par suite desquelles le système tend vers la forme dessinée *fig. 26*, où les deux faces *abc* et *a'b'c* sont occupées chacune par une lame plane. Cette forme est complètement atteinte au moment où le sommet inférieur de la charpente sort du liquide ; mais aussitôt un changement s'opère, et le système prend la forme de la *fig. 16*. Bien que ce changement soit très-rapide, on peut cependant, avec une attention suffisante, et en recommençant plusieurs fois l'expérience, observer comment il se produit : les deux lames qui occupaient (*fig. 26*), comme je l'ai dit, les faces *abc* et *a'b'c*, se relèvent vers l'intérieur de la charpente en tournant autour des arêtes solides *ab* et *a'b'*, et en même temps se développent, à partir du sommet inférieur, un quadrilatère d'abord très-petit, qui grandit jusqu'à ce que son sommet supérieur atteigne le centre de la charpente, et qui constitue alors le quadrilatère inférieur du système définitif ; en même temps aussi les sommets *f* et *g* du quadrilatère curviline *sfgc* remontent d'une certaine quantité, ce quadrilatère se raccourcit, ses arêtes deviennent droites, et il forme enfin le quadrilatère supérieur du même système définitif. La *fig. 27* représente le phénomène en voie de formation, saisi au moment où le quadrilatère qui s'accroît a acquis la moitié de sa hauteur finale. On comprendra aisément, d'après ce dessin, comment s'engendent les quatre autres quadrilatères de la *fig. 16*.

Pour que tous ces phénomènes se produisent à peu près à coup sûr, il faut retirer la charpente bien verticalement ; il faut, de plus, que cette charpente soit bien construite, que les fils de fer qui la composent aient le moins d'épaisseur possible, et surtout qu'aux sommets de l'octaèdre, ils s'unissent d'une manière bien nette, du moins du côté qui regarde l'intérieur de la charpente ; quand il n'en est pas ainsi, on obtient souvent des systèmes laminaires irréguliers.

Ajoutons que cette même charpente donne quelquefois, quand on l'incline un peu en la retirant du liquide, un système tout différent de celui de la *fig. 16*, régulier aussi, mais formé de lames courbes. Ce second système contient, en son milieu, une lame hexagonale placée parallèlement à deux

des faces de l'octaèdre, et ayant les côtés légèrement rentrants (§ 20); ces côtés sont rattachés aux sommets des deux faces ci-dessus par des lames triangulaires, et aux arêtes de ces mêmes faces par des lames trapézoïdales; en outre, les sommets de la lame dont il s'agit sont rattachés par des lames triangulaires aux autres arêtes solides.

Les différents exemples que j'ai donnés avec détails suffiront pour faire comprendre comment s'engendrent les systèmes laminaires, et pour montrer que la théorie peut rendre compte de toutes les particularités que présente cette génération.

§ 29. — Dans le § 19 de la 5<sup>me</sup> série, j'ai énoncé les lois qui régissent les systèmes laminaires des charpentes polyédriques, quand ces systèmes sont formés. De ces lois, qui sont au nombre de cinq, trois ont été discutées dans ce qui précède (§§ 16 à 23): elles concernent le nombre des lames aboutissant à une même arête liquide et l'égalité des angles entre ces lames, le nombre des arêtes liquides aboutissant à un même point liquide et l'égalité de leurs angles, enfin la formation d'une lame partant de chaque arête solide. Examinons aussi les deux autres lois.

L'une de celles-ci consiste en ce que si l'on a soin qu'il n'y ait point de bulle d'air à la surface du liquide du vase ayant d'y plonger la charpente, le système laminaire ne présentera aucun espace fermé de tous les côtés par des lames, et qu'ainsi toutes les lames seront en contact par leurs deux faces avec l'air libre. En effet, pendant qu'on retire la charpente, si le système, avant qu'il éprouve la modification rapide qui lui donne sa disposition finale, contenait un espace fermé de tous les côtés par des lames, cet espace aurait dû naître et grandir à mesure du soulèvement de la charpente; or cela est impossible, puisque l'air qui devrait le remplir n'aurait eu aucune issue pour y pénétrer; par la même raison, le système, dans cette période de sa génération, ne saurait présenter d'espace fermé en partie par des lames et en partie par la surface du liquide; enfin, quand s'opère la modification rapide, la lame ou les lames qui remontent alors dans le système ne trouvant point d'espace de la seconde espèce pour en achever la fermeture laminaire, le système complet satisfera nécessairement à la loi en question.

La dernière loi est la suivante: lorsque les conditions des autres lois peu-

vent être remplies par des surfaces planes, les lames prennent cette forme; lorsque la chose ne se peut, toutes les lames ou plusieurs d'entre elles se courbent plus ou moins, mais toujours de manière à constituer des surfaces à courbure moyenne nulle. La première partie de cette loi se sent plutôt qu'elle ne se démontre; le plan étant la surface la plus simple, la nature, qui procède toujours par la voie la moins compliquée, ne donnera point sans nécessité des formes courbes aux lames. Quant à la seconde partie de la loi, elle est évidente, et j'en ai déjà fait l'application dans ce que j'ai exposé précédemment sur les systèmes laminaires des charpentes prismatiques.

C'est ici le lieu de rendre raison de cette particularité, que le système laminaire de l'octaèdre régulier est formé de lames courbes quand on l'obtient avec de l'huile dans le liquide alcoolique. Nous avons vu (§ 16) que, dans ce mode de production des systèmes laminaires, l'épaisseur des petites masses restantes a une grande influence; or, dans la charpente octaédrique, quand, en enlevant graduellement de l'huile, on est arrivé au point où le système se modifie spontanément, les masses de jonction ayant encore une assez grande épaisseur, et l'huile qui les compose s'accumulant, dans le système définitif, tout autour des points où devraient aboutir quatre arêtes liquides de manière à y former des masses beaucoup plus grosses que les arêtes en question, enfin plusieurs de ces mêmes arêtes étant assez courtes pour que les masses qui occupent leurs extrémités soient en communication de courbure entre elles, on comprend qu'il doit résulter de là une influence sur la forme des arêtes et des lames, et il n'est pas douteux que si l'on pouvait, sans déterminer la rupture du système, réduire suffisamment l'épaisseur des masses dont il s'agit, toutes les lames ne devinssent planes.

§ 30. — Revenons aux systèmes des charpentes prismatiques. Outre les faits que j'ai exposés, ces systèmes m'en ont présenté d'autres également curieux que je vais rapporter ici.

Le système que l'on obtient avec la charpente pentagonale de la *fig. 20* est, on l'a vu (§ 20), composé de lames sensiblement planes; or si l'on considère les lames obliques qui partent de deux côtés homologues des deux bases pour s'unir à l'un des côtés de la lame pentagonale centrale, et si l'on fait attention que ces deux lames obliques doivent former entre elles un angle

de  $120^\circ$ , on verra évidemment que, pour des bases de dimensions données, une augmentation dans la hauteur du prisme entraîne une diminution dans l'étendue de la lame pentagonale centrale, et qu'il y a une limite de hauteur au-delà de laquelle l'existence de cette lame est impossible. On trouvera sans peine que la limite dont il s'agit correspond au cas où le rapport entre la hauteur du prisme et le diamètre du cercle que l'on inscrirait à la base serait égal à  $\sqrt{3}$ , c'est-à-dire à 1,732.

On doit naturellement se demander ce que devient le système laminaire quand cette limite est dépassée. Pour le savoir, j'ai fait construire une charpente dans laquelle la hauteur était environ  $2\frac{1}{2}$  fois le diamètre du cercle inscrit, et elle m'a donné un résultat singulier : quand on la retire du liquide glycérique, comme les arêtes latérales sont en fil de fer ordinaire, toutes les faces latérales sont d'abord occupées par des lames planes, et, après la sortie complète, une lame plane se forme aussi dans la base inférieure, puis grimpe entre les autres en formant un pentagone qui va en décroissant, tout cela comme avec la charpente de la *fig. 20* ; mais la lame pentagonale décroît beaucoup plus rapidement, puis s'annule, et, à l'instant, le système éprouve un changement brusque, en prenant une disposition bizarre qu'il serait difficile de représenter d'une manière nette par un dessin perspectif, mais dont je vais cependant essayer de donner une idée. Sur les deux bases s'appuient respectivement deux assemblages identiques composés de cinq lames courbes, et dont l'un est représenté en projection sur le plan de la base par la *fig. 28* ; on voit qu'il y a, dans chacun d'eux, une lame pentagonale, deux lames quadrangulaires et deux triangulaires ; ces deux assemblages sont reliés entre eux par les lames qui partent des cinq arêtes latérales du prisme, et par deux autres lames intermédiaires dirigées aussi suivant la longueur de la charpente et partant des arêtes liquides *ab* et *bc* de l'un de ces mêmes assemblages pour aboutir aux arêtes liquides homologues de l'autre.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que la même chose se produirait encore si, au lieu de dépasser la limite indiquée, on se bornait à l'atteindre, c'est-à-dire si l'on donnait au prisme la hauteur qui correspondrait précisément à la simple annulation de la lame pentagonale ; en effet, il y aurait alors

dix arêtes liquides aboutissant, au centre du système, à un même point liquide, et conséquemment l'équilibre serait instable.

§ 31. — Bien que, dans les systèmes laminaires des prismes à un plus grand nombre de côtés, les lames obliques doivent être notablement courbes, il me paraissait probable qu'il devait y avoir aussi, pour chacun de ces prismes, une limite de hauteur au delà de laquelle le système ne pourrait plus renfermer de lame polygonale centrale, et que cette limite devait différer peu de celle relative au prisme pentagonal. Pour vérifier la chose, j'ai essayé d'abord le prisme hexagonal, avec une charpente dont la hauteur était aussi à peu près  $2\frac{1}{2}$  fois le diamètre du cercle qui serait inscrit à la base. Or, à ma grande surprise, il s'est encore formé une lame hexagonale centrale, quoique beaucoup plus petite qu'avec la charpente du § 20; mais le système avait subi une modification qui maintenait à l'existence de cette lame sa possibilité : les points des arêtes solides latérales d'où partaient les arêtes liquides obliques (§ 26) étaient situés beaucoup plus loin des sommets des bases, de sorte que les choses s'arrangeaient à peu près comme si, en réalité, la charpente eût été raccourcie. Dans cette disposition, les lames partant des côtés des deux bases restent donc, jusqu'à une assez grande distance de ceux-ci, adhérentes aux arêtes latérales solides, d'où il suit que l'on doit considérer l'ensemble comme un système laminaire imparfait, résultant d'une lutte entre la tendance des lames à occuper les faces latérales du prisme et l'espèce de traction que ces lames subissent de la part de la lame hexagonale qui monte entre elles; je dis imparfait, parce que les lames qui partent de tous les côtés d'une même base sont, dans les parties qui demeurent attachées aux arêtes solides latérales, séparées les unes des autres et rendues indépendantes par ces arêtes.

§ 32. — Cela devient plus évident avec des prismes dont le nombre des faces latérales excède six; alors l'angle de deux faces latérales adjacentes étant supérieur à  $120^\circ$ , les lames tendent davantage à occuper toutes ces faces, et les portions qui demeurent attachées aux arêtes solides latérales sont, en effet, beaucoup plus étendues. Par exemple, avec une charpente octogonale dans laquelle le rapport entre la hauteur et le diamètre du cercle inscrit à la base est à peu près le même que dans les charpentes ci-dessus, la

lame octogonale centrale, au lieu d'être petite, est au contraire très-grande, et les deux arêtes liquides obliques partant de l'un quelconque de ses sommets vont s'attacher à l'arête latérale solide correspondante en deux points dont la distance n'est qu'environ le sixième de la longueur de cette arête, et conséquemment un peu moins de la moitié du diamètre du cercle inscrit à la base; dans ce cas donc les lames qui partent de deux côtés homologues des bases n'abandonnent les arêtes solides latérales pour se diriger vers la lame octogonale centrale qu'en approchant du milieu de la hauteur de la charpente, et, jusque-là, elles occupent, sous une forme sensiblement plane, les faces latérales du prisme.

Dans la charpente hexagonale du paragraphe précédent, la distance entre les points où s'attachent à une même arête solide latérale les deux arêtes liquides partant de l'un des sommets de la lame centrale, est environ le double du diamètre du cercle inscrit; dans la charpente octogonale, elle est, nous venons de le voir, un peu plus petite que la moitié de ce diamètre; dans une charpente heptagonale, elle est, comme on devait s'y attendre, intermédiaire entre ces deux valeurs, et égale à peu près aux trois quarts de ce même diamètre. J'ai essayé aussi une charpente décagonale, et, dans celle-ci, la distance en question n'est que le sixième du diamètre.

Les faits que je viens de rapporter constituaient une exception à celle de nos lois d'après laquelle sur chacun des fils solides de la charpente doit s'appuyer une lame, puisque, à partir de l'une et de l'autre base jusqu'aux points où naissent les arêtes liquides obliques, à chacune des arêtes solides latérales sont attachées deux lames; mais, ainsi que je l'ai montré, les systèmes laminaires en question sont des systèmes impairs.

Ces mêmes faits ne sont pas dus à l'épaisseur des fils métalliques: ils se produisent encore avec des charpentes dans lesquelles les arêtes latérales sont en fil de fer très-fin; seulement, dans ce cas, l'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques augmente un peu.

§ 33. — J'ai fait construire ensuite une charpente octogonale dont la hauteur n'était que le tiers du diamètre du cercle inscrit. Alors, d'après la valeur donnée plus haut pour l'écartement des points d'attache en question, tous ces points auraient dû être aux sommets du prisme; mais il n'en était

pas ainsi : ces mêmes points se trouvaient encore à une certaine distance des sommets, et leur écartement n'était plus que le sixième du diamètre du cercle inscrit ; aussi la lame octogonale s'était-elle encore agrandie. Le même effet s'est produit avec un prisme heptagonal dont la hauteur était la moitié du diamètre du cercle inscrit, c'est-à-dire moindre aussi que l'écartement des points d'attache évalué précédemment à l'égard des prismes de ce nombre de côtés.

Du reste, la chose a lieu même dans le prisme hexagonal, puisque (§ 26) avec une charpente de cette espèce dont la hauteur n'était que  $1 \frac{1}{6}$  fois le diamètre du cercle inscrit, les points d'attache des arêtes liquides obliques se trouvaient encore à une petite distance des sommets.

§ 34. — Essayons de découvrir la cause de ces derniers faits. Considérons une charpente prismatique octogonale ou heptagonale assez haute pour que les lames qui partent des côtés des bases occupent sous une forme sensiblement plane des portions notables des faces latérales. Aux endroits où ces lames quittent les faces en question pour se diriger vers les côtés de la lame polygonale centrale, elles sont nécessairement convexes vers l'extérieur dans le sens de leur longueur ; mais, par suite de la nécessité d'une courbure moyenne nulle, il faut qu'en ces mêmes endroits, elles soient concaves vers l'extérieur dans le sens de leur largeur ; si donc on conçoit la charpente traversée par deux plans perpendiculaires à son axe et passant par les deux séries de points où naissent, sur les arêtes solides latérales, les arêtes liquides obliques, ces deux plans couperont les lames suivant des arcs concaves vers l'extérieur, et si l'on imagine ces arcs solidifiés, l'équilibre du système ne sera pas troublé. D'après cela, si l'on construisait une charpente ayant pour hauteur l'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques sur une même arête solide latérale, et si l'on donnait aux fils de fer qui forment les côtés des bases la courbure des arcs ci-dessus, il est clair que le système laminaire réalisé dans cette charpente aurait ses arêtes liquides obliques partant exactement des sommets ; mais avec une charpente de cette hauteur ou d'une hauteur moindre et dont les côtés des bases sont droits, la condition relative aux courbures transversales des lames rentrantes, et conséquemment à la forme d'équilibre de ces lames, ne peut évidemment être satisfaite que si

les points d'attache des arêtes liquides obliques se placent à une certaine distance des sommets sur les arêtes solides latérales.

§ 35. — Si, dans les différents systèmes que nous venons d'étudier, on compare entre elles les lames polygonales centrales, on constate que la courbure de leurs côtés va en augmentant de la lame hexagonale à la lame déca-gonale, ce qui constitue de nouveaux faits à ajouter à ceux du § 20 en confirmation de la loi relative aux angles sous lesquels les arêtes liquides aboutissent à un même point liquide.

La courbure transversale (§ 34) des lames obliques qui se dirigent vers les côtés de la lame polygonale centrale étant liée à la courbure de ces mêmes côtés, elle doit être moindre dans le prisme heptagonal que dans l'octogonal, et moindre encore dans l'hexagonal; c'est à cause de la faiblesse de la courbure en question dans ce dernier prisme, qu'il donne, quand il n'a pas trop de hauteur, un système laminaire presque parfait, avec sa lame hexagonale.

§ 36. — En réfléchissant à la génération des systèmes laminaires, je me suis demandé si, au moins dans le prisme hexagonal, et avec la charpente du § 34, on ne réaliseraît pas un système exempt de lame polygonale centrale en retirant la charpente du liquide glycérique de manière que l'axe du prisme fût horizontal, au lieu d'être vertical comme dans les expériences précédentes. J'ai donc fait donner à la fourche une disposition qui me permit d'agir ainsi, et j'ai, en effet, réussi complètement. Bien plus, j'ai obtenu deux systèmes différents, suivant que la charpente était retirée de façon que deux arêtes latérales sortissent en même temps du liquide, ou qu'on en fit sortir d'abord une, puis simultanément ses deux voisines; ces deux systèmes sont du genre de celui qui se réalise dans une charpente pentagonale suffisamment haute (§ 30), c'est-à-dire qu'ils sont composés de deux assemblages de lames courbes obliques reliés entre eux par d'autres lames dirigées suivant la longueur du prisme. La projection de l'un de ces assemblages sur le plan de la base est représentée, dans le premier mode, par la *fig. 29*, et, dans le second, par la *fig. 30*.

Mais ce n'est pas tout; pour produire le premier de ces deux systèmes, il faut, quand on a retiré du liquide la moitié de la charpente,achever l'opé-

ration avec une très-grande lenteur; quand on agit sans cette précaution, il se forme un troisième système d'un autre genre encore, système dont, malgré sa simplicité, il est assez difficile de donner une idée nette par une description ou par un dessin: il contient deux lames hexagonales courbes s'appuyant respectivement, par un de leurs côtés, sur l'un de ceux des bases, et se dirigeant obliquement vers l'intérieur de la charpente; les autres côtés de ces hexagones ont, comme toujours, une courbure concave; les côtés courbes de chacun de ces mêmes hexagones sont reliés aux côtés correspondants de la base voisine et aux côtés homologues de l'autre hexagone par des lames courbes; enfin aux arêtes liquides qui unissent ces dernières lames deux à deux aboutissent d'autres lames partant des arêtes latérales de la charpente. Les côtés des bases sur lesquels s'appuient les deux lames hexagonales appartiennent à la face du prisme qui est sortie la première du liquide.

Le prisme heptagonal donne des résultats analogues, avec une charpente ayant ses dimensions dans le même rapport. Seulement, d'abord, les trois systèmes sont imparfaits, en ce sens que, dans les deux premiers, les lames qui partent des côtés des bases demeurent, jusqu'à une certaine distance des sommets, adhérentes aux arêtes solides latérales, et que, dans le troisième, les lames qui vont des côtés courbes de l'une des lames heptagonales aux côtés homologues de l'autre, sont attachées, sur la plus grande partie de leur longueur, aux arêtes solides latérales, en affectant, dans cette étendue, une forme sensiblement plane; en outre, nouvelle bizarrerie, le système fourni par le second mode est instable; à peine formé, il commence à se modifier spontanément: les deux assemblages situés près des bases s'allongent, d'abord lentement, puis de plus en plus vite, s'atteignent, et aussitôt apparaît le système imparfait avec la lame heptagonale au milieu. La projection, sur le plan de la base, de l'un des assemblages du système dû au premier mode est représentée *fig. 34*; la projection relative au second mode n'a pu être dessinée, parce que les modifications spontanées qu'éprouve le système empêchent de bien observer celui-ci.

Les faits que je viens de décrire, joints à celui que j'ai rapporté à la fin du § 28, montrent qu'avec certaines charpentes, les résultats diffèrent suivant la manière dont on retire ces charpentes du liquide glycérique.

Présumant que l'instabilité du second système de la charpente heptagonale pouvait tenir à ce que cette charpente n'avait pas assez de longueur, j'en ai fait construire une autre dans laquelle la longueur était triple du diamètre du cercle inscrit; mais je n'ai rien gagné; en outre, les deux premiers systèmes se produisaient plus difficilement, et l'on obtenait presque toujours le troisième, c'est-à-dire celui qui contient deux lames heptagonales obliques partant respectivement de l'un des côtés des bases. Enfin, avec une charpente plus allongée encore, on n'a jamais que ce dernier système.

Quant au prisme octogonal, quel que soit le rapport entre sa longueur et le diamètre du cercle inscrit, il refuse obstinément de donner autre chose que les systèmes imparfaits avec la lame octogonale au milieu ou avec les deux lames octogonales obliques, et ce dernier est aussi le seul qui se réalise quand le rapport est suffisamment grand.

§ 37. — J'ai dit (§ 16) qu'avec la pyramide à base carrée qui m'avait servi pour les expériences de la 2<sup>me</sup> série, le système laminaire présentait toujours une petite irrégularité. Celle-ci consiste en ce qu'une ou plusieurs des quatre arêtes liquides obliques dirigées vers les sommets de la base n'aboutissent pas tout à fait à ces sommets. Je puis maintenant en indiquer la cause: si l'on cherche quelle est la hauteur d'une pyramide quadrangulaire dans laquelle deux faces triangulaires adjacentes font entre elles un angle de 120°, on trouve que cette hauteur est la moitié du côté de la base; si donc on emploie une charpente ayant cette hauteur ou une hauteur moindre, il est clair que les lames occuperont simplement les quatre faces triangulaires, et c'est ce que l'expérience vérifie: une semblable charpente ne donne jamais autre chose, de quelque manière qu'on la retire du liquide. Or, dans la charpente des expériences de la 2<sup>me</sup> série, la longueur du côté de la base était de 67<sup>mm</sup>, et la hauteur de la pyramide était de 50<sup>mm</sup>; cette hauteur n'atteignait donc que les trois quarts environ de la longueur du côté en question; mais, dans une semblable pyramide, les lames qui partent des côtés de la base ne doivent avoir qu'une tendance assez faible à se séparer des arêtes solides obliques, et l'on comprend dès lors qu'elles peuvent leur demeurer adhérentes sur une certaine étendue.

§ 38. — Nous venons de voir qu'avec une pyramide quadrangulaire dont  
TOME XXXIII. 8

la hauteur est au plus égale à la moitié du côté de la base, on n'obtient jamais que des lames planes occupant les faces triangulaires ; or un ensemble de cette espèce ne constitue pas un système laminaire, car toutes ces lames sont rendues indépendantes les unes des autres par les fils solides intermédiaires.

De tout ce que j'ai exposé à partir du § 32, on peut évidemment déduire la conclusion suivante : lorsque, dans une charpente polyédrique, il y a une suite continue et revenant sur elle-même de faces adjacentes identiques faisant entre elles des angles supérieurs à  $120^\circ$ , et toutes disposées de la même manière comme la suite des faces latérales d'un prisme heptagonal, octogonal, etc., ou comme celle des faces latérales d'une pyramide hexagonale, etc., cette charpente donne un système laminaire imparfait, c'est-à-dire contenant des lames qui, sur une portion de leur étendue, adhèrent à la fois à deux arêtes solides, ou bien elle ne donne aucun système, c'est-à-dire que toutes les faces, moins une, sont simplement occupées par des lames planes ; je dis moins une, car, dans ce cas, il faut bien qu'une face demeure ouverte pour permettre l'introduction de l'air ; dans la pyramide quadrangulaire indiquée plus haut, par exemple, la face qui reste ouverte est la base.

Nous pouvons faire de ce principe une application intéressante. Parmi les polyèdres réguliers, nous avons vu que le tétraèdre, le cube et l'octaèdre fournissent des systèmes laminaires parfaits, et, dans ces trois polyèdres, l'angle de deux faces adjacentes est, en effet, moindre que  $120^\circ$  ; restent le dodécaèdre et l'icosaèdre ; or, dans le premier de ceux-ci, l'angle de deux faces adjacentes n'est que de  $116^\circ$  et une fraction, et conséquemment est encore moindre que  $120^\circ$ , tandis que, dans le second, il est de  $138^\circ$  et une fraction ; on doit donc prévoir que le dodécaèdre donnera, comme les polyèdres réguliers précédents, un système laminaire parfait, mais qu'il n'en sera pas de même de l'icosaèdre, et c'est ce que l'expérience confirme : avec l'icosaèdre, de quelque manière qu'on retire la charpente, on n'obtient jamais que des lames planes dans 19 des faces et la vingtième vide. Quant au système du dodécaèdre, il y aurait de la difficulté à le décrire ou à en faire le dessin.

§ 39. — Pour donner plus de précision à ces résultats, je dirai :

1<sup>o</sup> La charpente d'un polyèdre quelconque dans lequel tous les angles dièdres sont inférieurs à 120°, donne un système laminaire parfait : telles sont les charpentes du tétraèdre, du cube, de l'octaèdre, du dodécaèdre, des prismes dont le nombre des faces latérales est moindre que six, etc. Il y a cependant quelques rares exceptions, comme celle que présente la charpente d'une pyramide quadrangulaire dont la hauteur ne dépasse pas beaucoup la moitié du côté de la base.

2<sup>o</sup> La charpente d'un polyèdre quelconque dans lequel tous les angles dièdres sont supérieurs à 120°, donne un système laminaire nul. Exemples : la charpente de l'icosaèdre régulier, celle de l'ensemble de deux pyramides hexagonales ou d'un plus grand nombre de côtés, réunies par leurs bases, et telles qu'aux arêtes de la base commune les angles dièdres surpassent 120°, etc.

Cependant quand tous les angles dièdres dépassent peu 120°, on obtient, dans quelques cas, un système laminaire réel : c'est ce qui a lieu, par exemple, avec la charpente du polyèdre formé en abattant les sommets d'un cube par des sections équilatérales qui se joignent, de manière qu'il n'y ait que des faces triangulaires et des faces carrées. Mais dans ce polyèdre, tous les angles dièdres ne sont que d'environ 125° ; d'ailleurs le système laminaire réel et symétrique se produit avec difficulté, et seulement quand on retire la charpente par une face triangulaire ; quand on la retire par une face carrée ; elle donne toujours un système nul.

3<sup>o</sup> Une charpente dont les angles dièdres sont les uns inférieurs et les autres supérieurs à 120°, mais où les faces qui comprennent entre elles ces derniers angles, sont identiques, disposées de la même manière, et forment une suite continue revenant sur elle-même, donne un système laminaire imparfait ou un système laminaire nul : par exemple, le système est imparfait dans les charpentes des prismes dont le nombre des côtés excède six, dans celle d'une pyramide hexagonale quand on la retire du liquide par son sommet, etc. ; il est nul dans celle d'une pyramide quadrangulaire dont la hauteur est moindre que la moitié du côté de la base, dans celle d'une pyramide hexagonale quand on la retire du liquide par sa base, etc.

4° Quand la charpente ne rentre dans aucune des catégories précédentes, le système laminaire est tantôt parfait, tantôt imparfait, tantôt nul. Par exemple, on a un système laminaire parfait avec la charpente d'un prisme ayant pour base un losange dont les deux angles obtus excèdent ou égalent  $120^\circ$ ; on a, comme nous l'avons vu, un système imparfait avec la charpente d'un prisme hexagonal suffisamment élevé, quand on la retire l'axe étant vertical; avec une charpente représentant l'ensemble de deux pyramides pentagonales réunies par leurs bases et assez hautes pour que, dans chacune d'elles, les angles dièdres soient moindres que  $120^\circ$ , tandis que les angles dièdres qui ont pour arêtes celles de la base commune sont plus grands que  $120^\circ$ , on a un système nul quand on la retire l'axe étant vertical, et un système imparfait quand on la retire l'axe étant horizontal; etc.

§ 40. — Signalons encore quelques modifications curieuses de nos systèmes laminaires.

En premier lieu, dans le système de la charpente cubique (*fig. 18*), la lamelle quadrangulaire centrale est, nous le savons, parallèle à deux faces opposées du cube; mais, à cause de la symétrie de la charpente, il est évidemment indifférent, pour l'équilibre, que ce parallélisme ait lieu par rapport à un couple de faces ou par rapport à un autre; la lamelle peut donc occuper également trois positions, et l'on comprend qu'il suffit d'une cause très-légère pour déterminer son choix. Aussi, quand on retire la charpente du liquide glycérique, trouve-t-on la lamelle en question tantôt parallèle aux faces antérieure et postérieure, tantôt parallèle aux faces de droite et de gauche, et il arrive même quelquefois qu'elle se place horizontalement. De plus, on peut la faire passer à volonté, et plusieurs fois de suite, de l'une de ces trois positions à une autre; il suffit, pour cela, de souffler très-légèrement sur l'une de ses arêtes par la face de la charpente du côté de laquelle se trouve cette arête: on voit alors la lamelle se rétrécir dans le sens du souffle, se réduire à une simple ligne, puis se reproduire dans sa nouvelle position. Ces derniers phénomènes m'ont été indiqués par M. Van Rees, qui a bien voulu répéter mes expériences en Hollande.

En second lieu, on peut forcer un système laminaire à sortir de celle de nos lois d'après laquelle il ne renfermerait aucune portion d'air emprisonnée

de tous les côtés par des lames, et alors, dans plusieurs charpentes, on obtient, en s'y prenant convenablement, des résultats nouveaux et fort jolis. Le procédé, qui m'a également été indiqué par M. Van Rees, consiste à produire d'abord le système ordinaire, puis à replonger de quelques millimètres la face inférieure de la charpente, et enfin à retirer de nouveau celle-ci; on conçoit, en effet, qu'il se forme ainsi, dans cette face, une lame plane qui emprisonne de l'air entre elle et les lames obliques partant des côtés de cette même face, et qui, grimpant aussitôt entre ces lames obliques, pousse la portion d'air devant elle, en donnant lieu à un système nouveau, lequel se symétrise quand la chose est possible. Par exemple, avec la charpente cubique, le nouveau système, qui est représenté *fig. 32*, contient, en son milieu, un cube laminaire rattaché par ses arêtes aux lames partant des arêtes solides; seulement les arêtes, et conséquemment aussi les faces de ce cube laminaire sont légèrement convexes, ce qu'on s'explique aisément par la loi relative aux angles des arêtes liquides entre elles. De même, avec la charpente du tétraèdre, le nouveau système contient, en son milieu, un tétraèdre laminaire à arêtes et à faces convexes. On obtient encore des résultats analogues avec la charpente du prisme pentagonal et avec celle du prisme hexagonal; mais celle du prisme triangulaire donne une figure non symétrique. Celle de l'octaèdre, si l'on en replonge une face bien parallèlement à la surface du liquide et qu'on la retire de même, fournit un résultat symétrique, mais dans lequel l'octaèdre laminaire central a quatre faces triangulaires et les quatre autres hexagonales.

Ces systèmes sont évidemment des systèmes mixtes, dans lesquels une partie des lames est à courbure moyenne nulle, tandis que l'autre est à courbure moyenne finie et constante.

Enfin si, après avoir réalisé l'un de ces systèmes mixtes, on crève l'une des lames qui composent le polyèdre central, on voit l'ensemble repasser instantanément, ou en un temps très-court, au système ordinaire. Par exemple, lorsque, dans le système mixte de la *fig. 32*, on crève l'une des lames du cube laminaire, le système reprend aussitôt la disposition de la *fig. 18*. C'est encore là une transformation curieuse. Pour crever ces lames, le mieux est de se servir d'une pointe de papier à filtre.

En troisième lieu, si, après avoir formé le système ordinaire du cube (*fig. 18*), on crève, par le moyen que je viens d'indiquer, la lamelle quadrangulaire, le système prend immédiatement une disposition toute différente et également régulière ; le nouveau système présente un vide en son milieu, mais il peut encore être considéré comme parfait, en ce sens que des lames partent de toutes les arêtes solides. De même lorsque, dans le système de la pyramide quadrangulaire (*fig. 12*), on crève la lamelle supérieure, on obtient un nouveau système fort beau, parfait encore, et qui présente aussi un vide. Enfin on amène un résultat analogue, mais avec deux vides, en crevant, dans le système de l'octaèdre (*fig. 16*), d'abord le quadrilatère supérieur, puis la lame qui remplace alors le quadrilatère inférieur.

§ 44. — Terminons cette série par une remarque relative à la persistance des systèmes laminaires. Tous ceux des charpentes polyédriques durent moins que les figures formées d'une seule lame, telles que les bulles sphériques ou les figures de révolution (5<sup>me</sup> série, §§ 14 et 15).

L'explication de ce fait repose sur les considérations exposées dans les §§ 32 et 33 de la 2<sup>me</sup> série, à propos des systèmes laminaires réalisés avec de l'huile au sein du liquide alcoolique, considérations que je vais reproduire ici d'une manière plus complète.

Rappelons-nous qu'une lame liquide adhérente à un fil solide est nécessairement jointe à celui-ci, ou plutôt à la couche liquide qui le mouille, par une petite masse à courbures transversales fortement concaves. Les deux surfaces de cette petite masse exercent donc une pression capillaire moindre que celles qui correspondent aux deux surfaces de la lame, et conséquemment l'excès de pression de ces dernières doit chasser incessamment le liquide vers les premières. De là une cause de plus pour l'amincissement progressif de la lame, et, par suite, pour la destruction de la figure. Cette cause existe dans toute figure laminaire adhérente à un fil ou à des fils solides ; mais, dans les systèmes formés à l'intérieur des charpentes polyédriques, s'y ajoute une cause de même nature et plus énergique encore. Tous ces systèmes, en effet, contiennent des arêtes liquides, qui viennent quatre à quatre s'unir en des points liquides, et dont plusieurs s'attachent par leur autre extrémité aux fils solides ; or, sur ces arêtes ainsi qu'en leurs points extrêmes, il y a aussi,

nous le savons, de petites surfaces fortement concaves. Celles qui appartiennent aux arêtes ne sont, comme celles qui règnent le long des fils solides, concaves que dans un sens, et, par conséquent, leur action pour amincir les lames est du même ordre; mais, aux points de jonction des arêtes liquides et aux points où ces arêtes aboutissent aux fils solides, les petites surfaces sont concaves dans tous les sens, de sorte que leur succion capillaire est environ deux fois plus forte encore, et qu'ainsi l'afflux du liquide vers ces mêmes points doit être beaucoup plus grand. Dans les systèmes dont il s'agit, l'amincissement des lames doit donc être plus rapide, et dès lors ces systèmes doivent durer moins longtemps, comme le montre l'expérience. On ne remarque cependant aucune augmentation graduelle d'épaisseur ni dans les arêtes liquides ni dans leurs points de jonction, mais c'est que, à mesure que le liquide y afflue, il est entraîné par la pesanteur vers le bas du système.

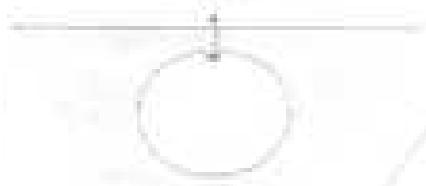
La persistance de chacun de ces systèmes est, du reste, très-variable, ce que l'on comprend aisément, car, par suite de leur complication, de petites causes accidentelles peuvent agir tantôt plus, tantôt moins, pour amener leur destruction; ainsi celui de tous qui se maintient en général le plus long-temps, est le plus simple, savoir celui du tétraèdre.

Je reviendrai de nouveau sur les systèmes laminaires, pour en envisager la théorie sous un point de vue plus général. En effet, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer (§ 2 et note du § 8), les lames liquides qui les composent peuvent être assimilées à des membranes tendues, et dès lors, on le conçoit, chaque système se disposera de manière que la somme des surfaces de toutes ses lames soit un minimum. Mais je réserve ce sujet pour une autre série.

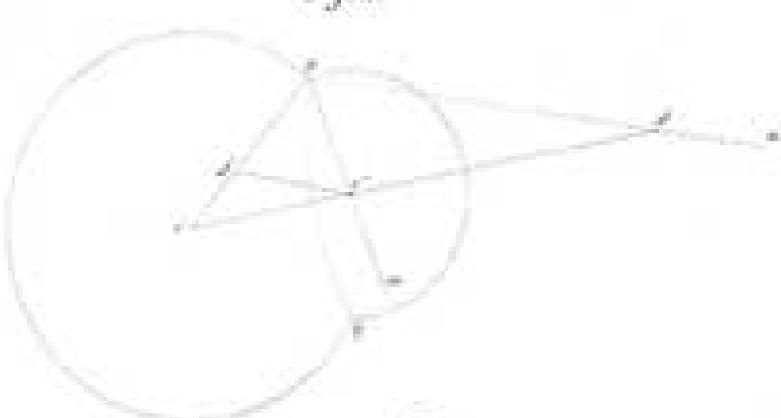
---



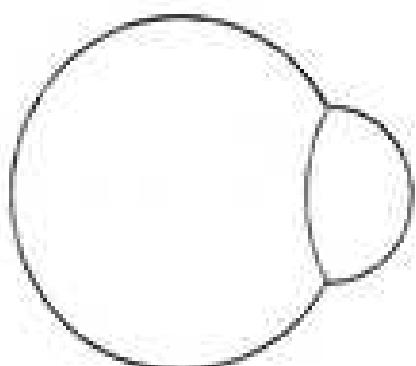
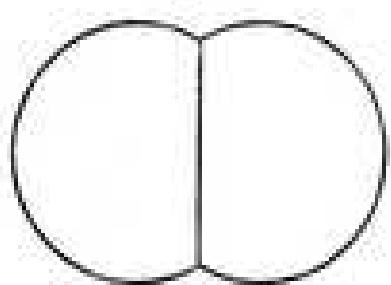
*Fig. 1.*



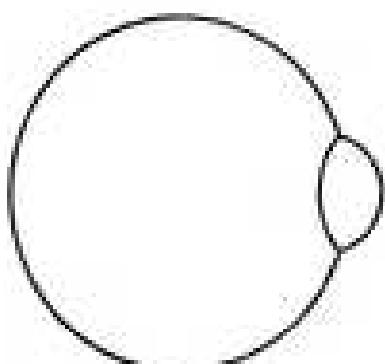
*Fig. 2.*



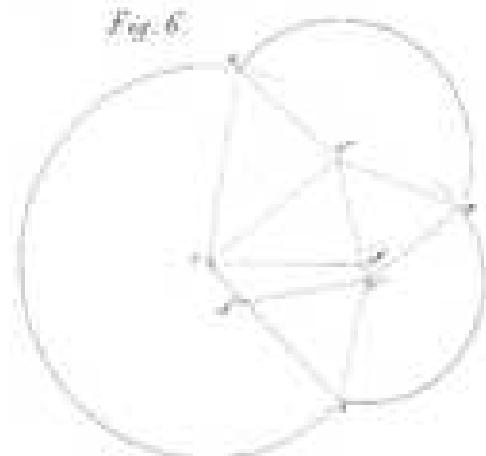
*Fig. 3.*



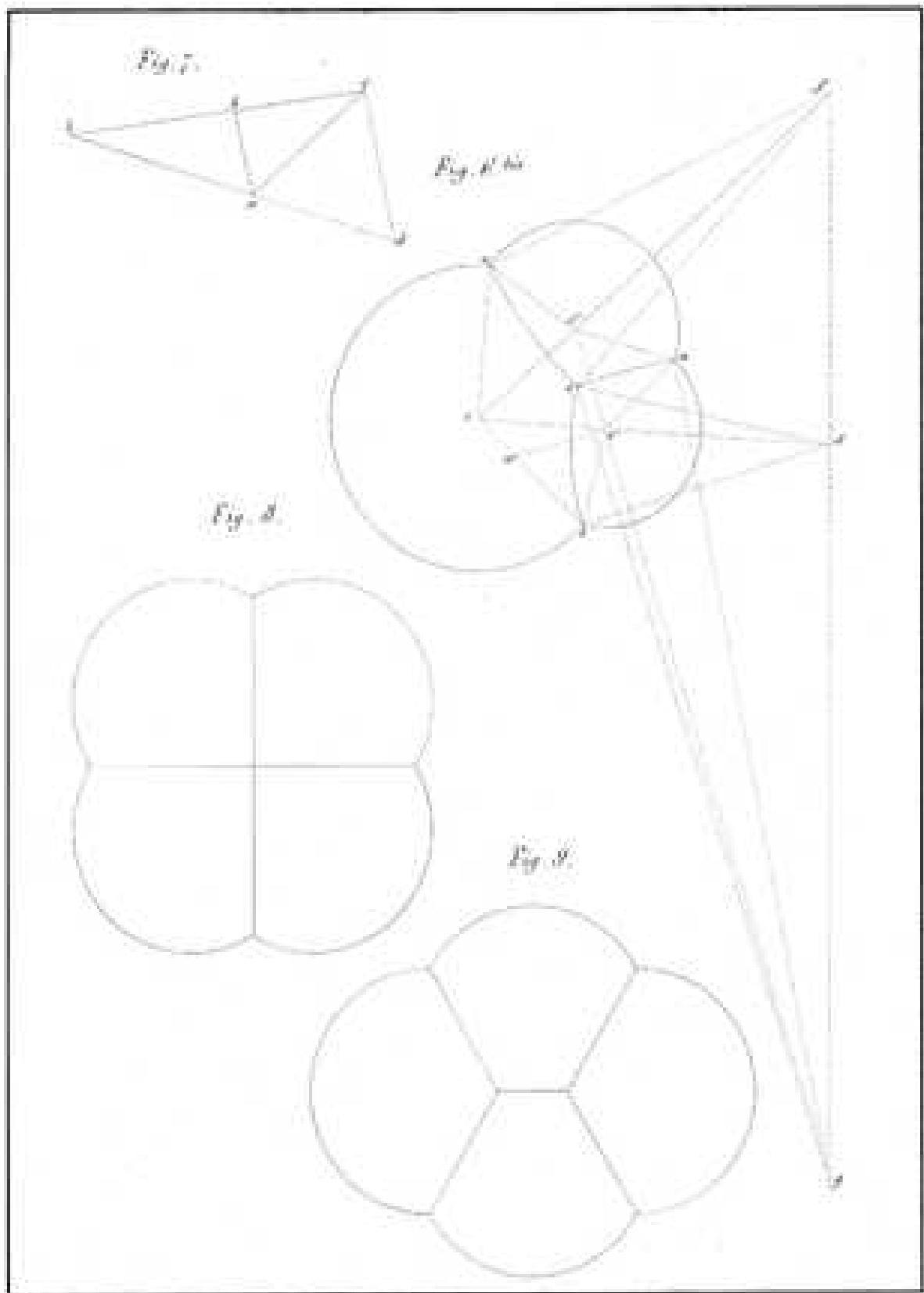
*Fig. 4.*



*Fig. 5.*

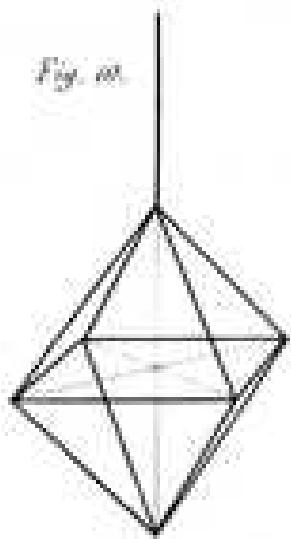








*Fig. 63.*



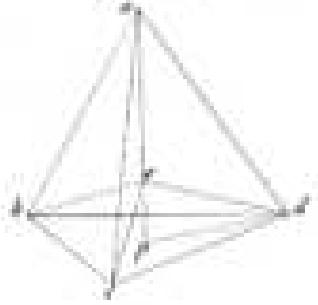
*Fig. 64.*



*Fig. 65.*



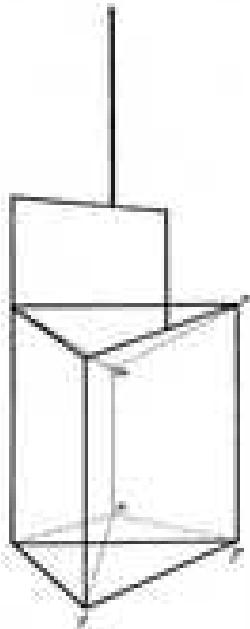
*Fig. 66.*



*Fig. 67.*



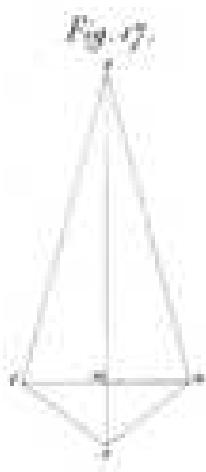
*Fig. 68.*



*Fig. 69.*



*Fig. 70.*





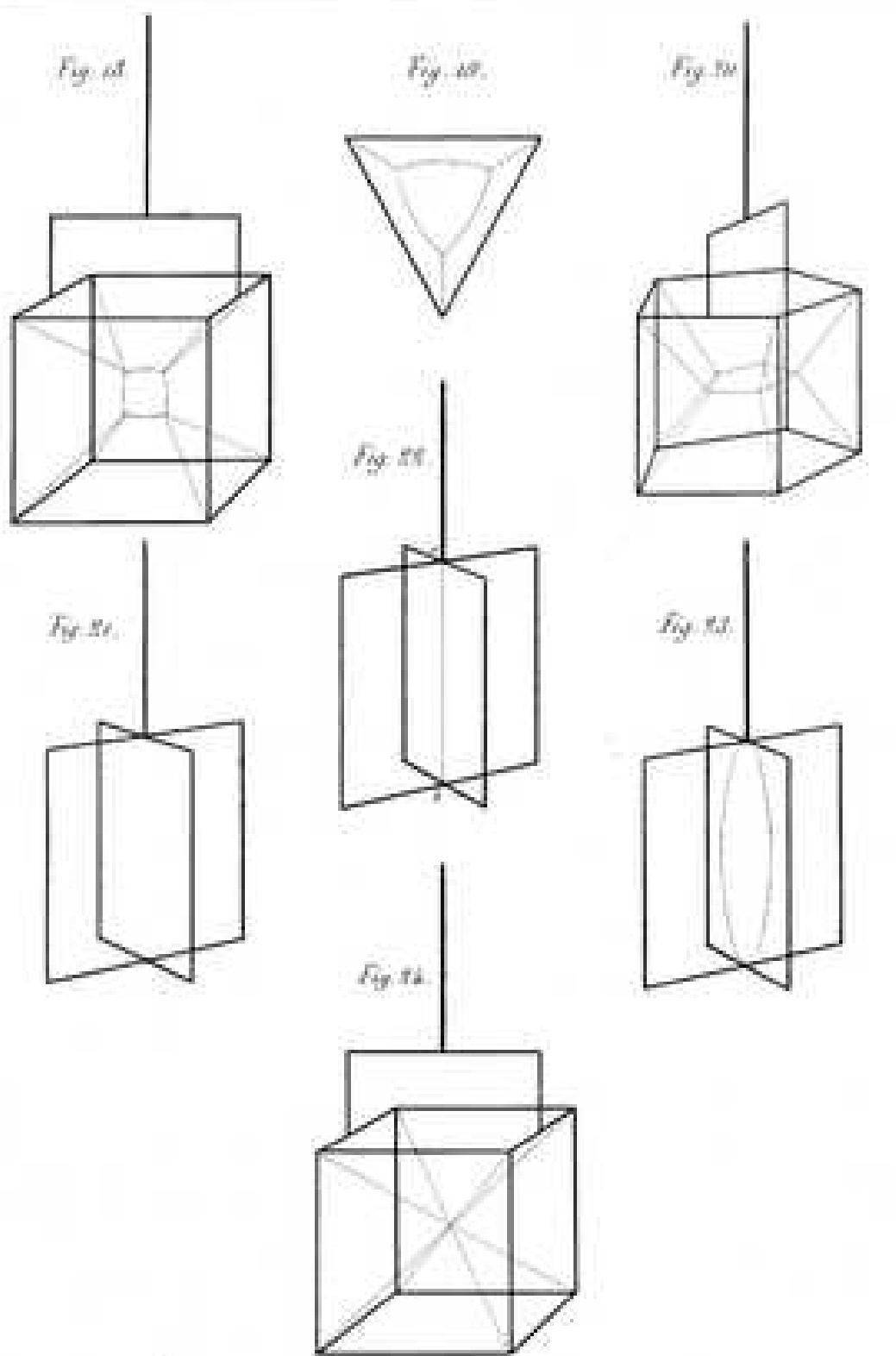




Fig. 35.

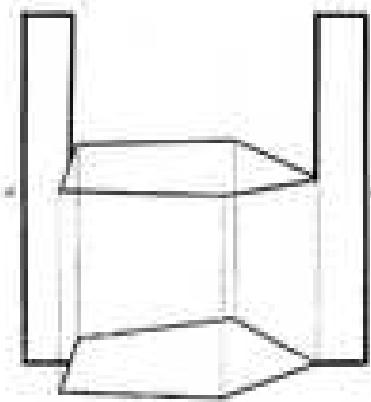


Fig. 36.

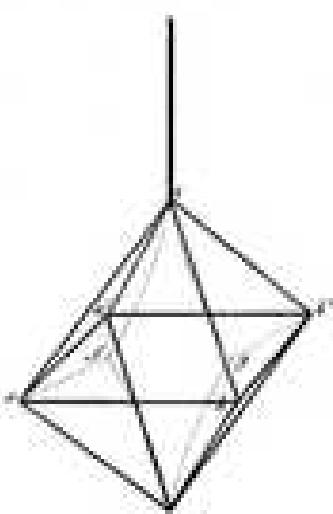


Fig. 37.



Fig. 38.



Fig. 39.



Fig. 40.

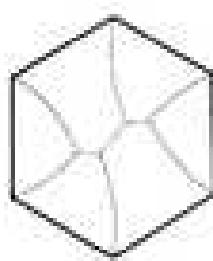


Fig. 41.

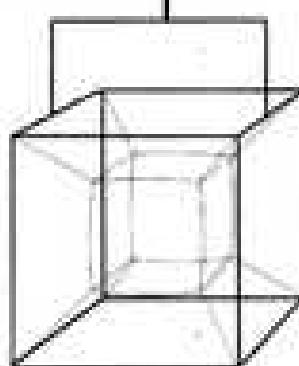


Fig. 42.

