Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique

Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d’équilibre d’une masse liquide sans pesanteur. Deuxième série.

Joseph Plateau

RECHERCHES

EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES

SUR

LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE

MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR;

PAR

J. PLATEAU.

DEUXIÈME SÉRIE [1].

(PRÉSENTÉ A LA SÉANCE DE L'ACADÉMIE, LE 19 MAI 1847.)

[1] Le mémoire publié dans le tome XVI, sous le titre : *Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur, première partie*, constitue la *première série* de ces recherches. On a adopté un titre différent pour les autres séries, parce que le précédent ne convenait plus à l'ensemble du travail.

AVANT-PROPOS.

A l'époque où s'est déclaré chez moi le mal qui m'a privé complétement de la vue, j'avais terminé la plupart des expériences relatives à cette série ainsi qu'à la suivante. M. Duprez, correspondant de l'Académie, et M. Donny ont eu l'extrême obligeance d'entreprendre celles qui manquaient encore. J'ai constamment dirigé l'exécution de ces dernières, qui presque toutes ont été faites en ma présence, et j'en ai suivi tous les détails. J'ai donc cru pouvoir, afin de simplifier la rédaction, m'exprimer toujours, dans le cours de ce travail, comme si j'avais opéré moi-même.

Quant à la partie théorique, je dois aussi de précieux secours à l'un de mes collègues, M. Lamarle, qui a bien voulu consacrer de longues heures à entendre l'exposé de mes recherches, et m'aider à éclaircir plusieurs points difficiles. Je suis, en outre, redevable à un autre de mes collègues, M. Manderlier, de l'exécution d'une partie des calculs.

Qu'il me soit permis de témoigner ici toute ma reconnaissance à ces amis dévoués. Grâce à leur généreux concours, la carrière de la science demeure ouverte pour moi; je puis, malgré l'infirmité dont je suis atteint, mettre en ordre les matériaux que j'ai amassés, et même entreprendre des recherches nouvelles.

RECHERCHES

EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES

SUR

LES FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE

MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES ET PRINCIPES THÉORIQUES. — CONDITION GÉNÉRALE A LAQUELLE DOIT SATISFAIRE, DANS L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE, LA SURFACE LIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR. — SPHÈRE LIQUIDE.

§ 1. Le procédé que nous avons décrit dans le mémoire précédent [1], nous a permis de détruire l'action de la pesanteur sur une masse liquide d'un volume considérable, tout en laissant à cette masse une complète liberté de prendre la figure que lui assignent les autres forces qui la sollicitent. Ce procédé consiste essentiellement, on se le rappelle, à introduire une masse d'huile dans un mélange d'eau et d'alcool dont la densité soit exactement égale à celle de l'huile employée. La masse demeure alors suspendue au sein du liquide ambiant, et se comporte comme si elle était dépourvue de pesanteur. Nous avons étudié par ce moyen une série de

[1] Voir la note au bas du titre du mémoire actuel.

phénomènes de configuration dépendants soit simplement de l'attraction moléculaire propre de la masse, soit de la combinaison de cette force avec la force centrifuge. Nous allons maintenant abandonner cette dernière force, et en faire intervenir une autre d'une nature différente, savoir l'attraction moléculaire qui s'exerce entre les liquides et les solides. En d'autres termes, nous allons faire adhérer la masse liquide à des systèmes solides, et étudier les formes diverses que prendront, dans ces circonstances, les portions de sa surface demeurées libres.

Nous aurons donc de cette manière le curieux spectacle des figures d'équilibre qui conviendraient à une masse liquide absolument dénuée de pesanteur et adhérente à un système solide donné.

Mais les figures que nous obtiendrons offrent un autre intérêt : les portions libres de leur surface appartiennent, comme nous le ferons voir, à des figures plus étendues, que l'on peut concevoir par la pensée, et qui conviendraient, dans la même condition d'absence totale de pesanteur, à une masse liquide entièrement libre; ainsi, nos procédés réaliseront partiellement les figures d'équilibre d'une semblable masse. Ces dernières sont loin de se borner à la sphère; mais parmi elles la sphère seule peut être formée en entier, les autres présentant soit des dimensions infinies dans certains sens, soit d'autres particularités que nous indiquerons et qui rendent également impossible leur réalisation à l'état complet.

En outre, les résultats auxquels nous parviendrons constitueront autant de confirmations nouvelles et inattendues de la théorie des pressions que les liquides exercent sur eux-mêmes en vertu de l'attraction mutuelle de leurs molécules, théorie sur laquelle repose l'explication des phénomènes capillaires.

Enfin, nous découvrirons dans nos figures liquides des propriétés remarquables qui nous conduiront à d'importantes applications.

§ 2. Afin de nous guider dans nos expériences et de nous mettre à même de bien comprendre leur portée, nous allons d'abord envisager la question sous le point de vue purement théorique. L'action de la pesanteur étant éliminée et la masse liquide étant en repos, les seules forces d'où dépendra la figure d'équilibre, seront l'attraction moléculaire du liquide pour lui-même et celle qui s'exerce entre le liquide et le système solide auquel on le fait adhérer. L'action de cette dernière force s'éteint à une distance excessivement petite du solide; ainsi, pour tout point de la surface du liquide situé à une distance sensible du solide, il n'y a plus à considérer que la première des deux forces ci-dessus, c'est-à-dire l'attraction moléculaire du liquide pour lui-même.

L'adhérence entre le liquide et le solide a pour effet général d'obliger la surface du premier à passer par certaines lignes : par exemple, si l'on fait adhérer à une plaque elliptique une masse liquide d'un volume convenable, la surface de la masse passera par le contour elliptique de la plaque. Pour tout point de cette même surface situé à une distance sensible de ce contour, l'attraction moléculaire du liquide pour lui-même sera seule en jeu.

Examinons donc quelle est la condition fondamentale à laquelle devront satisfaire tous les points de la surface libre de la masse, en vertu de cette dernière force.

La détermination de cette condition et son expression analytique sont renfermées dans les belles théories qui servent de base à l'explication des phénomènes capillaires, bien que les géomètres ne se soient pas occupés spécialement du problème de la figure d'une masse liquide sans pesanteur adhérente à un système solide donné. Nous allons donc résumer ici les principes et les résultats des théories dont il s'agit, ceux du moins qui se rapportent directement à notre sujet.

§ 3. Dans l'intérieur d'une masse liquide, à toute distance notable de sa surface, chaque molécule est attirée également dans tous les sens; mais il n'en est pas de même à la surface et très-près de celle-ci. Considérons, en effet, une molécule située à une distance de la surface moindre que le rayon de la sphère d'activité sensible de l'attraction moléculaire, et concevons cette molécule comme le centre d'une petite sphère de ce même rayon. On voit qu'une portion de cette sphère se trouvant hors du liquide, la molécule centrale n'est plus attirée également dans tous les sens, et qu'il y a une attraction prépondérante dirigée vers l'intérieur de la masse. Si maintenant on imagine dans le liquide un canal rectiligne d'un très-petit diamètre, partant d'un point quelconque de la surface dans une direction normale à celle-ci, et s'étendant jusqu'à une profondeur égale au rayon d'activité ci-dessus, les molécules contenues dans ce petit canal seront, d'après ce qui précède, sollicitées vers l'intérieur de la masse, et l'intégrale de toutes ces actions constituera une pression dirigée dans ce même sens.

Or, l'intensité de cette pression dépend des courbures de la surface au point d'où part le petit canal. En effet, supposons d'abord la surface concave, et par le point dont il s'agit, faisons passer un plan tangent. Toutes les molécules situées extérieurement à ce plan et qui seront suffisamment rapprochées du petit canal pour que celui-ci pénètre dans leur sphère d'activité, solliciteront évidemment le filet moléculaire qu'il renferme, de l'intérieur vers l'extérieur de la masse. Si donc on supprimait la portion du liquide située extérieurement au plan, la pression exercée par le filet se trouverait augmentée. Il suit de là que la pression correspondante à une surface concave est moindre que celle qui correspond à une surface plane, et l'on conçoit qu'elle sera d'autant plus petite que la concavité sera plus prononcée.

Si la surface est convexe, la pression est au contraire plus forte que dans le cas d'une surface plane. Pour le faire voir, menons encore un plan tangent au point d'où part le filet moléculaire, et imaginons, pour un instant, que l'espace compris entre la surface convexe et ce plan soit rempli de liquide. Cela étant, considérons une molécule m de cet espace suffisamment rapprochée, et de ce point abaissons une perpendiculaire sur le petit canal. L'action de la molécule m sur la portion du filet comprise entre le pied de la perpendiculaire et la surface, sollicitera cette portion vers l'intérieur de la masse. Si ensuite nous prenons de l'autre côté de la perpendiculaire et à partir du pied de celle-ci une portion du filet égale à la première, l'action de la molécule m sur cette seconde portion sera égale et opposée à celle qu'elle exerçait sur la première; de sorte que l'ensemble de ces deux portions ne sera sollicité ni vers l'intérieur ni vers l'extérieur de la masse; si, au delà de ces deux mêmes portions, il y a encore une partie du filet qui soit comprise dans la sphère d'activité de m, cette partie sera évidemment sollicitée vers l'extérieur. L'action définitive de m sur le filet sera donc dirigée dans ce dernier sens. Il suit de là que toutes les molécules de l'espace compris entre la surface et le plan tangent qui seront assez rapprochées du filet pour exercer sur lui une action efficace, le solliciteront vers l'extérieur de la masse. Si donc on supprime cette portion du liquide, de manière à rétablir la surface convexe, il en résultera une augmentation de pression de la part du filet. Ainsi la pression correspondante à une surface convexe est plus forte que celle qui correspond à une surface plane, et elle sera évidemment d'autant plus considérable que la convexité sera plus prononcée.

§ 4. Si la surface est de courbure sphérique, on démontre qu'en représentant par P la pression correspondante à une surface plane, par r le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface, et par A une constante, la pression exercée par un filet moléculaire, et rapportée à l'unité de surface, a pour valeur

$$[1] \quad \dots\dots\dots\dots \quad P + \frac{A}{r},$$

r étant positif pour une surface convexe et négatif pour une surface concave.

Si la surface est d'une forme quelconque, imaginons deux sphères ayant pour rayons ceux de plus grande et de plus petite courbure au point que l'on considère. On conçoit que la pression exercée par le filet sera intermédiaire entre celles qui correspondraient à ces deux sphères, et le calcul démontre qu'elle en est exactement la moyenne. En désignant par R et R′ les deux rayons dont il s'agit, on aura donc pour représenter la pression exercée par le filet, et rapportée à l'unité de surface,

$$[2] \quad \dots\dots\dots\dots \quad P + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Les rayons R et R′ sont positifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures convexes, ou en d'autres termes, lorsqu'ils sont dirigés à l'intérieur de la masse; ils sont négatifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures concaves, c'est-à-dire lorsqu'ils sont dirigés à l'extérieur.

§ 5. Maintenant, on déduit aisément de ce qui précède la condition d'équilibre relative à la surface libre de la masse.

Les pressions exercées par les filets moléculaires qui partent des différents points de la surface se transmettant à toute la masse, il faudra nécessairement, pour qu'il y ait équilibre dans celle-ci, que toutes ces pressions soient égales entre elles. En effet, imaginons un petit canal partant normalement d'un point de la surface, et se recourbant ensuite pour aboutir normalement à un second point de cette même surface; il est évident que l'équilibre ne peut exister dans ce petit canal, que dans le cas où les pressions exercées par les filets qui occupent ses deux extrémités sont égales; et, si cette égalité a lieu, l'équilibre existera nécessairement. Or, les pressions exercées par les différents filets dépendent des courbures de la surface au point d'où ils partent; ces courbures devront donc être telles, aux différents points de la surface libre de la masse, qu'elles déterminent partout la même pression.

Telle est la condition à laquelle il s'agissait d'arriver, et qui doit régir, dans chaque cas, la surface libre de la masse.

L'expression analytique de cette condition se déduit immédiatement de la valeur générale de la pression, donnée dans le paragraphe précédent : il n'y a qu'à égaler cette valeur à une constante, et comme les quantités P et A sont elles-mêmes constantes, il suffira, en définitive, de poser

$$[3] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C,$$

la quantité C étant constante pour une même figure d'équilibre.

Cette équation est ce que deviennent celles qui ont été données par les géomètres pour les surfaces capillaires, lorsque, dans ces dernières équations, l'on suppose nulle la quantité qui représente la pesanteur.

On peut remplacer R et R′ par leurs valeurs analytiques : on est conduit ainsi à une équation différentielle compliquée, qui paraît n'être susceptible d'intégration que dans des cas particuliers. Du reste, l'équation [3] nous sera très-utile sous la forme simple ci-dessus.

Maintenant, on sait que les sections normales planes qui correspondent à la plus grande et à la plus petite courbure en un même point d'une surface, font entre elles un angle droit. Les géomètres ont démontré, en outre, que si par la même normale on fait passer deux autres plans rectangulaires quelconques, les rayons de courbure ρ et ρ' correspondants aux deux sections ainsi déterminées, seront tels que la quantité $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ sera égale à la quantité $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$. Il en résulte que l'on peut substituer la première de ces quantités à la seconde, et que, par conséquent, l'équation de l'équilibre dans sa plus grande généralité sera

$$[4] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = C,$$

équation dans laquelle ρ et ρ' désignent les rayons de courbure de deux sections rectangulaires quelconques passant par la même normale.

§ 6. Ces propriétés géométriques conduisent à une autre signification de l'équation [4]. On sait que l'unité divisée par le rayon de courbure correspondant à un point d'une courbe, est la mesure de la courbure en ce point. La quantité $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ représente donc la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires, au point que l'on considère sur la surface. Cela posé, si l'on imagine que le système des deux plans occupe successivement différentes positions en tournant autour de la même normale, à chacune de ces positions correspondra une somme de courbures $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho''} + \frac{1}{\rho'''}$, $\frac{1}{\rho^{iv}} + \frac{1}{\rho^{v}}$, etc., et, d'après la propriété rappelée dans le paragraphe précédent, toutes ces sommes auront la même valeur. Par conséquent, si on les ajoute, et que le nombre des positions du système des deux plans soit n, la somme totale sera égale à n fois la valeur de l'une des sommes partielles, ou à $n\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$. Or, cette somme totale est celle de toutes les courbures $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho''}$, $\frac{1}{\rho'''}$, etc., en nombre $2n$, correspondantes à toutes les sections déterminées par les deux plans. Si donc on divise la quantité équivalente ci-dessus par $2n$, le résultat $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$ représentera la moyenne entre toutes ces courbures. Or, ce résultat étant indépendant de la valeur de n, ou du nombre des positions occupées par le système des deux plans, il sera également vrai, si l'on suppose ce nombre infiniment grand, ou, en d'autres termes, si les positions successives du système des deux plans sont infiniment rapprochées, et, par conséquent, si ce même système tourne autour de la normale de manière à déterminer toutes les courbures qui appartiennent à la surface autour du point que l'on considère. La quantité $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)$ représente donc la moyenne entre toutes les courbures de la surface en un même point, ou la courbure moyenne en ce point.

Maintenant, si en passant d'un point à un autre de la surface la quantité $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$ conserve la même valeur, c'est-à-dire si l'on a, pour toute la surface, $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=C$, cette surface est donc telle, que sa courbure moyenne est constante.

Envisagée sous ce point de vue purement mathématique, l'équation [4] a été l'objet des recherches de plusieurs géomètres, recherches dont nous profiterons dans la suite de ce travail.

Ainsi nos surfaces liquides doivent satisfaire à cette condition, que la courbure moyenne y soit la même partout. Or, on comprend que si cela a lieu, l'effet moyen des courbures en chaque point sur la pression correspondante à ce point demeure aussi le même, et que de là résulte l'équilibre.

On voit donc maintenant d'une manière plus nette de quelle nature sont les surfaces que nous aurons à considérer, et pourquoi elles constituent des surfaces d'équilibre.

§ 6$^{\text{bis}}$. Nous devons appeler ici l'attention sur une conséquence immédiate des principes théoriques qui nous ont conduits à la condition générale de l'équilibre.

D'après ces principes, chacun des filets moléculaires qui exercent sur la masse les pressions d'où dépend la figure de celle-ci, part de la surface et se termine à une profondeur égale au rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire; de sorte que l'ensemble de ces filets constitue une couche superficielle dont l'épaisseur est égale à ce même rayon, et l'on sait que celui-ci est d'une extrême petitesse. De là résulte donc que les forces figuratrices exercées par le liquide sur lui-même, émanent uniquement d'une couche superficielle excessivement mince. Nous nommerons cette conséquence *le principe de la couche superficielle.*

§ 7. Une surface sphérique satisfait évidemment à la condition de l'équilibre, puisque toutes les courbures y sont les mêmes en chaque point; aussi lorsque notre masse est entièrement libre, c'est-à-dire lorsqu'elle n'est adhérente à aucun solide qui oblige sa surface à se courber d'une autre manière, elle prend en effet la forme d'une sphère, ainsi qu'on l'a vu dans le mémoire précédent.

§ 8. Avant d'aller plus loin, nous devons éclaircir un point d'une grande importance pour la partie expérimentale de notre travail. La masse liquide de nos expériences étant immergée dans un autre liquide, on peut demander si les actions moléculaires exercées par ce dernier sont sans influence sur la figure produite, ou en d'autres termes, si la figure d'équilibre d'une masse liquide adhérente à un système solide, et soustraite à l'action de la pesanteur par son immersion dans un autre liquide de même densité qu'elle, est exactement la même que si la masse adhérente au système solide était réellement dépourvue de pesanteur et se trouvait placée dans le vide.

Or, nous allons faire voir qu'il en est effectivement ainsi. Les actions moléculaires dues à la présence du liquide environnant sont de deux espèces, savoir celles qui résultent de l'attraction de ce liquide pour lui-même, et celles qui proviennent de l'attraction mutuelle des deux liquides. Occupons-nous d'abord des premières, en supposant, pour un instant, que les autres n'existent pas. Le liquide environnant étant appliqué contre la surface libre de la masse plongée, il présente en creux la même figure que cette masse présente en relief. Les molécules de ce même liquide voisines de la surface commune des deux milieux, doivent donc exercer vers l'intérieur du liquide auquel elles appartiennent, des pressions de la nature de celles que nous avons considérées dans tout ce qui précède, et ces pressions doivent tendre, par conséquent, à donner aussi à la surface creuse une figure d'équilibre; en sorte que si la masse plongée n'avait par elle-même aucune tendance à prendre une figure plutôt qu'une autre, le liquide environnant lui en donnerait une déterminée, en l'obligeant à se mouler dans la figure creuse ci-dessus. C'est ainsi qu'une bulle d'air prend dans un liquide la forme globulaire, uniquement en vertu des pressions exercées par ce liquide sur lui-même. Maintenant supposons que la masse plongée ait pris la figure qu'elle affecterait dans le vide si elle était réellement dépourvue de pesanteur. Alors la condition analytique du paragraphe 5 sera satisfaite quant à cette masse. Or, en chaque point de la surface commune des deux milieux, les rayons de courbure ρ et ρ' ont les mêmes valeurs absolues pour la masse plongée et pour la figure creuse du liquide environnant; seulement ils prennent des signes contraires selon qu'on les considère comme se rapportant à l'un ou à l'autre des deux liquides. Pour passer de l'une des deux figures à l'autre, il suffira donc de changer les signes de ρ et de ρ', ou, ce qui revient au même, de changer le signe de la constante C. Ce changement de signe ne détruira pas la condition de l'équilibre, et, par conséquent, si la masse plongée est en équilibre quant à ses propres attractions moléculaires, il en sera de même pour la figure creuse du liquide environnant. Les pressions propres de ce dernier liquide ne peuvent donc, à elles seules, apporter aucune modification dans la figure d'équilibre de la masse plongée.

Faisons maintenant intervenir la seconde espèce d'actions moléculaires, c'est-à-dire l'attraction mutuelle des deux liquides, et voyons quels peuvent être ses effets. Imaginons pour un instant que la masse plongée, ou pour fixer les idées, la masse d'huile de nos expériences, soit remplacée par du liquide de même espèce que celui qui l'environne, c'est-à-dire par du mélange alcoolique. En d'autres termes, le vase étant supposé ne renfermer que du mélange alcoolique et le système solide, limitons par la pensée, dans le liquide, une portion de mêmes figure et dimensions, et placée de la même manière, que la masse d'huile précédente. Alors il est clair que les molécules de la masse voisines de sa surface étant, comme celles de l'intérieur, complétement environnées d'un même liquide jusqu'au delà de leur sphère d'activité, ces molécules n'exerceront plus de pression sur la masse. Par conséquent, les pressions qui existeraient si cette masse pouvait être isolée, doivent être considérées comme détruites par les attractions émanées du liquide environnant. Ces dernières forces sont donc toutes égales et opposées aux pressions dont il s'agit. Or, puisque celles-ci sont toutes égales entre elles d'après la figure que nous avons attribuée à la surface imaginaire de la masse, les attractions émanées du liquide environnant seront aussi toutes égales entre elles. Si maintenant nous rétablissons la masse d'huile, les attractions émanées du liquide environnant pourront bien changer de valeur absolue, mais il est évident qu'elles conserveront leurs directions, et qu'elles demeureront égales entre elles; on voit donc qu'elles ne feront que diminuer d'une même quantité toutes les pressions exercées par la masse d'huile sur elle-même, et, par conséquent, toutes les différences demeurant égales entre elles, la condition de l'équilibre sera encore satisfaite quant à cette masse. Il est évident que le même mode de raisonnement peut s'appliquer aux pressions exercées par le liquide environnant sur lui-même, pressions qui conserveront leurs directions, et seront seulement diminuées toutes d'une même quantité par les attractions émanées de l'huile, de sorte que la condition de l'équilibre ne cessera pas non plus d'être satisfaite quant à la figure creuse du liquide environnant.

Ainsi, l'ensemble des actions moléculaires dues à la présence du liquide environnant ne tendra en aucune manière à modifier la figure d'équilibre de la masse plongée, figure qui sera, par conséquent, identiquement la même que si cette masse était réellement sans pesanteur, et qu'elle fût placée dans le vide. Nous pourrons donc faire complétement abstraction du liquide environnant, dont l'unique fonction est de neutraliser l'action de la pesanteur sur la masse objet des expériences.

§ 9. Nous allons passer maintenant à la partie expérimentale. Et d'abord, pour éviter des répétitions inutiles, nous dirons quelques mots relativement aux appareils dont nous ferons usage.

Le liquide étant toujours une masse d'huile immergée dans un mélange alcoolique de même densité qu'elle, nos systèmes solides seront tous en fer; voici pour quels motifs. Dans les circonstances ordinaires, l'huile contracte, je pense, une adhérence parfaite avec tous les solides; mais il n'en est plus tout à fait ainsi lorsque cette même huile est plongée dans un mélange d'eau et d'alcool : alors, pour certains solides, pour le verre, par exemple, les phénomènes d'adhérence éprouvent parfois des modifications qui apportent du trouble dans les expériences. Nous en verrons un exemple dans la suite de ce travail. Or, les métaux ne présentent pas cet inconvénient; d'ailleurs les formes que nous avons données à la plupart de nos systèmes solides, rendraient leur construction difficile avec une substance autre qu'un métal. Maintenant, parmi les métaux, nous choisissons le fer et non le cuivre, parce que l'huile n'enlève rien au fer, tandis que, dans un contact prolongé avec le cuivre, elle attaque légèrement celui-ci, prend une couleur verte, et, ce qui est un grave inconvénient, augmente de densité [1].

Lorsqu'on voudra employer un de ces systèmes solides en fer, il faudra, avant de l'introduire dans le vase, le mouiller entièrement d'huile, et pour cela, il ne suffirait pas de le tremper simplement dans ce liquide, il faut l'en frotter soigneusement avec le doigt : la présence de cet enduit facilite l'adhérence de la masse liquide.

Nous continuerons à nous servir du vase à parois planes décrit § 8 du mémoire précédent [2]; un flacon de forme ordinaire ou le ballon dont j'ai

[1] M. Faraday, dans une lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'adresser à l'occasion du mémoire précédent, m'apprend qu'ayant eu l'intention de répéter mes expériences devant un auditoire nombreux, et voulant, à cet effet, rendre plus prononcée encore la différence d'aspect des deux liquides, il a dissous à dessein un peu d'oxyde de cuivre dans l'huile, afin de colorer cette dernière en vert. La combinaison étant ainsi faite à l'avance et rendue bien homogène, et le mélange alcoolique étant réglé d'après la densité de l'huile modifiée, la présence du cuivre en dissolution ne peut entraîner d'inconvénient; seulement il est bien entendu que, dans ce cas aussi, les systèmes solides doivent être en fer.

[2] En exécutant les expériences relatives au mémoire actuel, j'ai reconnu qu'il était nécessaire de faire subir de légères modifications à l'appareil dont il s'agit. La seconde ouverture percée dans la plaque qui sert de couvercle au vase, doit être peu inférieure en grandeur à l'ouverture centrale, elle doit avoir son goulot moins élevé, et enfin elle doit être placée près de l'autre; en la laissant telle qu'elle a été décrite et figurée, l'emploi des instruments accessoires dont il va être question serait impossible.

En outre, le goulot de l'ouverture centrale doit être muni d'un petit rebord, afin qu'on puisse le saisir facilement lorsqu'on veut enlever la plaque couvercle : par exemple, quand il s'agit d'attacher à la tige qui traverse le bouchon un système solide trop grand pour passer par cette même ouverture.

Enfin, le vase doit être muni d'un robinet à sa partie inférieure, pour qu'on puisse le vider avec facilité.

parlé §§ 5 et 8 du même mémoire seraient peu convenables, parce qu'ils ne laisseraient pas voir la véritable figure de la masse.

Quand le système solide est d'une seule pièce, il est porté par un fil de fer vertical, lequel se visse à l'extrémité inférieure de la tige qui traverse le bouchon métallique; mais pour certaines expériences, le système solide est formé de deux parties isolées, et alors c'est seulement l'une d'elles que l'on attache à la tige comme je viens de le dire; l'autre est supportée par de petits pieds qui reposent sur le fond du vase.

Il est inutile d'ajouter qu'il faudra n'employer que des liquides préparés de manière à être sans action chimique l'un sur l'autre (§§ 6 et 24 du mémoire précédent).

Outre le petit entonnoir destiné à introduire la masse d'huile dans le vase, le fil de fer qui sert à réunir les sphères isolées, etc., dont j'ai parlé dans le mémoire précédent, les expériences exigent encore quelques autres instruments accessoires, savoir :

En premier lieu, une petite seringue en verre, dont le bec est allongé et légèrement recourbé. On la fait servir comme pompe aspirante, pour enlever, par exemple, une partie de l'huile qui constitue la masse liquide lorsqu'on veut diminuer le volume de celle-ci, ou pour extraire du vase la masse d'huile tout entière, opération dont la nécessité se présente quelquefois, etc.

En second lieu, deux spatules en bois, l'une un peu recourbée, l'autre droite, recouvertes d'une étoffe fine de toile ou de coton. Lorsque ces spatules sont introduites dans le vase, et que le linge dont elles sont garnies s'est bien imprégné du liquide alcoolique, la masse d'huile ne contracte aucune adhérence avec elles. On peut donc, au moyen de l'une ou de l'autre de ces spatules, pousser la masse dans le liquide ambiant, et la conduire au lieu qu'on veut lui faire occuper dans l'intérieur du vase, sans qu'il en demeure rien à la spatule. C'est là l'usage auquel ces instruments sont destinés. Quand on les a employés, il faut toujours, avant de les laisser sécher, avoir soin de les laver en les agitant dans de l'alcool pur; sans cette précaution, le mélange alcoolique dont ils sont imprégnés abandonnerait sur leur surface, en s'évaporant, la petite quantité d'huile qu'il tient en dissolution, et lorsqu'on se servirait de nouveau de ces mêmes instruments, la masse d'huile pourrait alors y adhérer.

En troisième lieu, une spatule en fer légèrement recourbée, pour des usages que nous indiquerons en leur lieu.

Enfin, comme il est nécessaire, dans toutes les expériences que nous avons à rapporter, que le liquide alcoolique soit homogène, on ne peut plus employer le procédé indiqué § 25 du mémoire précédent, pour empêcher que la masse d'huile n'aille parfois adhérer au fond du vase; mais on arrive au même résultat en recouvrant ce fond d'un carré d'étoffe.

EXPÉRIENCES NOUVELLES A L'APPUI DES PRINCIPES THÉORIQUES RAPPELÉS DANS CE QUI PRÉCÈDE. — FIGURES D'ÉQUILIBRE TERMINÉES PAR DES SURFACES DE COURBURE SPHÉRIQUE. — PRINCIPE NOUVEAU RELATIF AUX LAMES LIQUIDES.

§ 10. Les faits que nous allons décrire en premier lieu, peuvent être considérés comme constituant la démonstration expérimentale du principe de la couche superficielle (§ 6bis).

Concevons un système solide quelconque plongé dans l'intérieur de la masse liquide, et donnons à cette masse un volume tel, qu'elle puisse constituer une sphère qui enveloppe complétement le système solide sans que celui-ci en atteigne la surface en aucun point. Alors, si le principe ci-dessus est vrai, la présence du système solide n'aura aucune influence sur la figure d'équilibre, puisque dans ces circonstances la couche superficielle, d'où émanent les actions figuratrices, demeure entièrement libre; tandis que si ces actions émanaient de tous les points de la masse, une modification non symétrique apportée aux parties intérieures de celle-ci en amènerait nécessairement une dans la forme extérieure.

C'est ce qui est confirmé par l'expérience. La condition d'un système solide complétement enveloppé par la masse d'huile serait assez difficile à réaliser; mais nous rappellerons ici que, dans les expériences relatives au mémoire précédent, le système du disque au moyen duquel on faisait tourner la masse sur elle-même, se trouvait à peu près dans cette condition, puisqu'il n'atteignait la surface extérieure de la masse que dans les deux très-petits espaces qui donnaient passage à son axe. Or, nous avons vu alors (§ 9 du mémoire précédent), que lorsque la masse était en repos, sa sphéricité n'était que très-peu altérée par la présence de ce système.

On peut approcher davantage de la condition théorique, en prenant, pour former l'axe de ce même système, un fil métallique très-fin; dans ce cas, la déformation est tout à fait insensible. L'axe étant supposé vertical, le disque peut d'ailleurs indifféremment être placé de manière que son centre coïncide avec celui de la masse d'huile, ou bien être situé au-dessus ou au-dessous de ce dernier.

Voici un autre fait d'une nature analogue. Dans le cours des expériences, il arrive parfois que des portions du liquide alcoolique se trouvent emprisonnées dans l'intérieur de la masse d'huile, et y forment autant de sphères isolées. Or, ces sphères peuvent être placées d'une manière quelconque dans l'intérieur de la masse, sans qu'il en résulte la moindre altération dans la figure extérieure de celle-ci.

§ 11. Faisons encore pénétrer dans la masse liquide un système solide quelconque; mais donnons maintenant à la masse un volume trop petit pour qu'elle puisse constituer une sphère qui enveloppe complétement ce système. Alors ce dernier atteindra nécessairement la couche superficielle, et, si le principe en question est vrai, la figure de la masse liquide devra se modifier, ou, en d'autres termes, ne pourra plus demeurer sphérique. C'est ce qui a lieu en effet, comme on devait s'y attendre : la masse liquide s'étend sur les portions du système solide qui font saillie en dehors de sa surface; elle finit par occuper soit la totalité de ces portions, soit seulement une partie de leur étendue, selon la forme et les dimensions du système solide, et prend ainsi une nouvelle figure d'équilibre. Nous en verrons des exemples plus loin (§§ 14, 15, 17).

§ 12. Au lieu de faire pénétrer le système solide dans l'intérieur de la masse liquide, mettons-le simplement en contact avec la surface extérieure de celle-ci. Alors une action s'établissant sur un point de la couche superficielle, l'équilibre devra être rompu et la figure de la masse liquide devra encore se modifier. C'est, en effet, ce qui arrive : la masse s'étend sur la surface qui lui est offerte, et prend, par conséquent, une figure nouvelle. On pouvait d'ailleurs prévoir ce résultat d'après ce qui se passe dans les circonstances ordinaires, lorsqu'on pose une goutte d'eau sur une surface solide préalablement mouillée.

On pourrait croire que ce cas rentre, quant au résultat définitif, dans celui du paragraphe précédent ou dans celui du paragraphe 10 : car il semble que la masse liquide, en s'étendant sur le système solide pour atteindre la nouvelle figure d'équilibre, doit finir par occuper ou envelopper ce système de la même manière que si l'on avait primitivement fait pénétrer celui-ci dans son intérieur. Il y a, en effet, des circonstances dans lesquelles les choses doivent se passer ainsi; mais les expériences que nous allons rapporter font voir qu'il y a d'autres circonstances pour lesquelles le résultat est tout différent.

§ 13. Prenons pour système solide une plaque circulaire mince [1] attachée par son centre au fil de fer qui doit la supporter (*fig.* 1), et faisons naître l'adhérence entre sa surface inférieure et la partie supérieure de la masse d'huile [2]. Aussitôt le contact bien établi, l'huile s'étend rapidement sur la surface qui lui est offerte; mais, ce qui est remarquable, quoique l'on ait pris la précaution de frotter d'huile tout le système (§ 9), c'est-à-dire les deux faces de la plaque ainsi que son bord, l'huile s'arrête nettement à ce même bord sans passer de l'autre côté de

[1] Le diamètre de celle dont je me suis servi était de quatre centimètres. Je mentionne ce diamètre pour fixer les idées : on comprend que dans nos expériences les dimensions des appareils sont tout à fait arbitraires; seulement si ces dimensions dépassaient certaines bornes, les opérations deviendraient embarrassantes par les quantités trop considérables de liquide qu'elles exigeraient.

[2] Pour que cette opération puisse s'effectuer avec facilité, il faut, d'abord, que la sphère d'huile se tienne, dans le liquide ambiant, au-dessous de l'ouverture centrale du couvercle : alors, la plaque étant introduite dans le vase, on n'a plus qu'à l'abaisser à l'aide de la tige qui traverse le bouchon, pour l'amener vers la masse liquide. Si cette dernière n'occupait pas la position dont il s'agit, on l'y conduirait préalablement à l'aide d'une spatule recouverte d'étoffe (§ 9).

Nous devons faire remarquer ici que le contact réel entre la plaque et la sphère d'huile ne s'établit pas ordinairement de suite : il y a une certaine résistance à vaincre, analogue à celle dont il a été question dans la note du paragraphe 4 du mémoire précédent; mais pour la surmonter, il suffit de pousser un peu la sphère liquide à l'aide de la plaque; la pression légère qui en résulte détermine bientôt la rupture de l'obstacle et la production de l'adhérence.

la plaque, et présente ainsi une interruption brusque dans la courbure de sa surface.

Dans le cas dont il s'agit, la nouvelle figure que prend la masse est une portion de sphère. Cette portion sera d'autant plus grande relativement à la sphère complète, que le volume de la masse d'huile est plus considérable; mais toujours la courbure s'arrêtera nettement au contour de la plaque (voyez la *fig.* 2, qui représente la coupe du système solide et de la masse adhérente, pour trois volumes différents de celle-ci).

Quant à la cause de cette singulière discontinuité, on la comprend sans peine : la plaque atteignant par son contour la couche superficielle, il est naturel qu'il se manifeste le long de ce contour quelque chose de particulier, et que la continuité dans la forme cesse là où s'exerce sans transition sur la couche superficielle une action attractive étrangère.

§ 14. Servons-nous encore de la plaque ci-dessus; mais au lieu de présenter l'une de ses faces à l'extérieur de la sphère d'huile, faisons maintenant pénétrer la plaque par son bord dans l'intérieur de cette sphère [1]. Alors le liquide s'étendra nécessairement sur les deux faces du solide, et si le diamètre de la sphère primitive était moindre que celui de la plaque, on verra l'huile former, sur les deux faces dont il s'agit, deux segments sphériques dont les courbures s'arrêteront encore nettement au contour de la plaque. Ces deux segments peuvent être égaux ou

[1] Voici comment s'exécute cette manœuvre. On soutient à quelque distance au-dessus du goulot de l'ouverture centrale le bouchon qui porte le système de la plaque, de manière, cependant, que celle-ci plonge à une profondeur suffisante dans le mélange alcoolique. On a ainsi la liberté de faire faire à la plaque des mouvements assez étendus, et on l'amène vers la masse liquide. Cette dernière doit, pour cela, occuper préalablement une position convenable. Une fois la masse liquide entamée, on tient la plaque en repos jusqu'à ce que l'action soit terminée, après quoi l'on pose avec précaution le bouchon dans le goulot.

On peut encore se servir d'un procédé inverse du précédent. On fait d'abord en sorte que la masse liquide se tienne du côté de la seconde ouverture, et assez loin de la verticale qui passe par le milieu de l'ouverture centrale; puis, après avoir placé le système solide à demeure dans la position définitive qu'il doit occuper, on amène vers lui la masse liquide, et lorsque celle-ci est entamée, on laisse l'action se continuer seule.

Ces procédés sont employés de même dans d'autres expériences, et il suffira de les avoir indiqués une fois. Il y a des circonstances où le second est seul praticable : c'est ce dont il sera facile de juger en faisant les expériences.

inégaux, selon qu'on aura introduit le bord de la plaque dans la sphère liquide de manière que le plan de cette plaque passe, ou non, par le centre de la sphère. Le segment supérieur sera légèrement déformé par l'action du fil de suspension; mais cet effet sera d'autant moins sensible que le fil dont il s'agit sera plus mince. La *fig.* 3 représente le résultat de l'expérience avec deux segments inégaux.

La discontinuité dans les courbures est un fait très-général, que nous verrons se reproduire fréquemment dans le cours de nos expériences; il nous conduira plus loin à des conséquences fort importantes.

§ 15. J'ai répété la même expérience en substituant à la plaque circulaire une plaque de forme elliptique. Dans ce cas, comme dans le précédent, l'huile s'étend sur les deux faces du solide, de manière à les occuper tout entières, et, si le volume de la masse liquide n'est pas trop grand, les courbures s'arrêtent encore nettement tout le long du contour de la plaque. En augmentant successivement le volume de la sphère d'huile primitive, mais cependant sans le rendre assez grand pour que la masse puisse envelopper complétement la plaque en gardant la forme sphérique, il arrive une limite où le bord de la plaque n'atteint plus la couche superficielle de la nouvelle figure d'équilibre qu'aux deux sommets de l'ellipse. Alors aussi la discontinuité dans les courbures n'a plus lieu qu'en ces deux endroits. Les *figures* 4 et 5 montrent le résultat de l'expérience dans ce dernier cas. Dans la *fig.* 4, l'ellipse présente à l'œil son grand axe, et dans la *fig.* 5, son petit axe.

§ 16. Tous les faits que nous avons rapportés jusqu'ici montrent donc que tant qu'on ne modifie que l'intérieur de la masse liquide, la forme extérieure de celle-ci n'éprouve aucune altération; mais que dès que l'on agit sur la couche superficielle, la masse prend une autre figure. Pour achever de prouver, à l'aide de l'expérience seule, que les actions figuratrices exercées par le liquide sur lui-même n'émanent que de la couche superficielle, il ne s'agirait plus que de pouvoir réduire une masse liquide à sa couche superficielle, ou, du moins, à une pellicule mince, et de voir si, dans cet état, elle prendrait la même figure d'équilibre qu'une masse pleine. Or, c'est précisément ce que réalisent les bulles de savon. Ces bulles, en effet, lorsqu'elles sont détachées du tube qui a servi à les former, prennent, comme on sait, la figure sphérique, c'est-à-dire la même figure que nous voyons prendre dans notre appareil à une masse pleine et soustraite à l'action de la pesanteur, lorsque cette masse est entièrement libre.

Lorsque la masse adhère à un système solide qui en modifie la figure, il est clair que l'action figuratrice totale se compose de deux parties : l'une qui appartient au système solide, et l'on voit que ce système ne l'exerce qu'en agissant sur la couche superficielle; l'autre qui appartient au liquide, et qui émane directement de la portion libre de cette même couche superficielle. Les faits que nous avons rapportés montrent bien quel est le siége de cette seconde partie de l'action figuratrice totale, mais ils ne nous font pas connaître la nature des forces qui la constituent.

Si nous consultons la théorie, nous voyons que ces forces consistent en des pressions exercées sur la masse par tous les éléments de la couche superficielle, pressions dont l'intensité dépend des courbures de la surface aux points auxquels elles correspondent. Il suit de là que la masse est pressée par la totalité de sa couche superficielle, avec une intensité qui dépend de la même manière des courbures de la surface. Par exemple, une masse dont la surface libre présente une courbure sphérique convexe, sera pressée par la couche superficielle totale qui appartient à cette surface libre, avec une intensité plus grande que si cette même surface était plane, et cette intensité sera d'autant plus considérable que la courbure sera plus forte, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface sera plus petit.

Voyons si l'expérience nous conduira aux mêmes conclusions.

§ 17. Le système solide que nous allons employer, est une plaque circulaire percée (*fig.* 6). Elle est placée verticalement, et attachée par un point de sa circonférence au fil de fer qui la supporte. Donnons à la sphère d'huile un diamètre moindre que celui de la plaque, et faisons pénétrer celle-ci par son bord dans la masse, suivant une direction qui ne passe point par le centre de la sphère. L'huile formera d'abord, comme dans l'expérience du paragraphe 14, deux segments sphériques inégaux; mais les choses ne persisteront point dans cet état : on verra le segment le plus convexe diminuer graduellement de volume, et par conséquent de courbure, tandis que l'autre augmentera, jusqu'à ce qu'ils soient devenus parfaitement égaux entre eux. Une partie de l'huile passe donc par l'ouverture de la plaque pour se porter de l'un des segments liquides vers l'autre, jusqu'à ce que l'égalité ci-dessus soit atteinte.

Maintenant, examinons quelles sont les conséquences que l'on peut déduire de cette expérience, en s'appuyant sur les précédentes, et indépendamment de toute considération théorique.

Une fois l'huile étendue sur les deux faces de la plaque, de manière que la couche superficielle s'appuie sur tout le contour de celle-ci, l'action du système solide est complétée, et les mouvements qui surviennent ensuite dans la masse liquide, pour atteindre la figure d'équilibre, ne peuvent plus être dus qu'à une action émanant de la partie libre de la couche superficielle. C'est donc cette dernière qui oblige le liquide à passer à travers l'ouverture de la plaque, et le phénomène doit nécessairement résulter, ou d'une pression exercée par la portion de la couche superficielle qui appartient au segment le plus convexe, ou d'une traction opérée par la portion de cette même couche qui appartient à l'autre segment. Notre expérience seule ne pouvant déterminer le choix entre ces deux manières d'expliquer l'effet dont il s'agit, adoptons provisoirement la première, c'est-à-dire celle qui l'attribue à une pression. Dans notre expérience, cette pression émane de la couche superficielle du segment le plus courbe; mais il est aisé de voir que la couche superficielle de l'autre segment exerce aussi une pression, qui, seulement, est moindre que la précédente. En effet, si au segment le plus courbe on venait à substituer un segment qui fût, au contraire, moins courbe que l'autre, l'huile serait alors chassée en sens opposé. Il suit de tout cela que la couche superficielle totale de la masse exerce une pression sur le liquide qu'elle renferme, et que l'intensité de cette pression dépend des courbures de la surface libre. En outre, puisque le liquide marche du segment le plus courbe à celui qui l'est moins, on voit que, pour une surface convexe de courbure sphérique, la pression est d'autant plus forte que la courbure est plus prononcée, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface est plus petit. Enfin, une surface plane pouvant être considérée comme appartenant à une sphère d'un rayon infiniment grand, on voit encore que la pression correspondante à une surface convexe de courbure sphérique, est supérieure à celle qui correspondrait à une surface plane.

Tous ces résultats étaient annoncés par la théorie; ils vérifient donc parfaitement la partie de celle-ci à laquelle ils se rapportent, et cette concordance doit maintenant décider en faveur de l'hypothèse de la pression. Cette même partie de la théorie se trouvait déjà vérifiée, dans son application aux liquides soumis à l'action de la pesanteur, par le phénomène de la dépression que présentent les liquides dans les tubes capillaires dont ils ne mouillent pas les parois; mais la série de nos expériences prenant la théorie à partir de ses éléments, et la suivant pas à pas, en donne des vérifications bien plus directes et plus complètes.

Notre dernière expérience conduit encore à d'autres conséquences. Le liquide marchant de l'un des segments à l'autre tant que leurs courbures ne sont pas devenues identiques, et les pressions correspondantes aux deux portions de la couche superficielle devenant égales entre elles en même temps que les deux courbures, il en résulte que la masse n'atteint sa figure d'équilibre que lorsque cette égalité de pression est établie. On a donc ainsi une première vérification de la condition générale d'équilibre qui régit nos figures liquides, condition en vertu de laquelle les pressions exercées par la couche superficielle doivent être partout les mêmes.

En outre, il est évident que si une couche superficielle de courbure sphérique exerce par elle-même une pression, ce principe doit être vrai quelque petite qu'on suppose l'étendue de cette couche. Il s'ensuit qu'une portion extrêmement minime de la couche superficielle de notre masse, prise où l'on voudra sur l'un quelconque des deux segments, doit être par elle-même le siége d'une petite pression, et que, par conséquent, la pression totale exercée par la couche superficielle est le résultat de pressions individuelles émanant de tous les éléments de cette couche. C'est encore ce qu'indiquait la théorie.

De plus, en suivant le même raisonnement, on voit que l'intensité de chacune des petites pressions individuelles doit dépendre de la courbure de l'élément de couche correspondant, ce qui est pareillement conforme à la théorie.

Enfin, dans l'état d'équilibre, les deux segments appartenant à des sphères de rayons égaux, la courbure est la même en tous les points de la surface de la masse, d'où il suit que toutes les petites pressions élémentaires sont égales entre elles. La condition générale de l'équilibre (§ 5) se trouve donc vérifiée, pour le cas de notre expérience, d'une manière complète.

§ 18. Le principe de la couche superficielle appliqué à l'expérience précédente, permet de modifier celle-ci de manière à obtenir un résultat fort remarquable. La figure d'équilibre une fois atteinte, ce n'est plus que par son bord extérieur que la plaque percée agit sur la couche superficielle. Tout le reste de cette plaque est donc alors sans influence sur la figure dont il s'agit. Il suit de là que cette figure serait encore la même si l'on rendait l'ouverture plus grande; seulement, plus le diamètre de cette dernière sera considérable, moins il faudra de temps pour que l'égalité entre les deux courbures soit établie. Enfin, l'on doit pouvoir, sans changer la figure d'équilibre, agrandir l'ouverture jusque près du bord de la plaque, ou, en d'autres termes, réduire le système solide à un simple anneau de fil de fer mince.

Or, c'est ce que l'expérience confirme; mais, pour la mettre à exécution, l'on ne pourrait pas se borner, comme précédemment, à faire pénétrer le système solide dans une sphère d'huile d'un diamètre moindre que celui de ce même système, et à laisser ensuite agir les forces moléculaires : car le fil métallique, à cause de son peu de surface, n'exercerait pas sur la couche superficielle une action suffisante pour que le liquide s'étendît de manière à adhérer à la totalité de l'anneau. La masse demeurerait alors traversée par une partie de celui-ci, et sa forme sphérique ne serait pas sensiblement altérée si le fil métallique est mince; seulement la surface liquide se relèverait quelque peu sur ce fil dans les deux petits espaces par où il sortirait de la masse.

Pour parler plus exactement, il y a, dans les circonstances dont il s'agit, deux figures d'équilibre possibles. L'une de ces figures s'écarte très-peu de la sphère; elle n'est pas symétrique par rapport à l'anneau, dont une partie la traverse tandis que l'autre partie reste libre. La seconde figure est parfaitement symétrique par rapport à l'anneau, et embrasse tout le contour de celui-ci; sa surface se compose de deux calottes sphériques égales, dont les bords s'appuient sur l'anneau. En d'autres termes, elle constitue une véritable lentille bi-convexe à courbures égales. C'est cette figure qu'il s'agit d'obtenir.

Pour cela, on commence par donner à la sphère d'huile un diamètre un peu supérieur à celui de l'anneau métallique; puis on introduit ce dernier dans la masse de manière qu'il soit complétement enveloppé; enfin, à l'aide de la petite seringue en verre (§ 9), on enlève graduellement du liquide à la masse [1]. Alors celle-ci diminuant de volume, sa surface s'appuie bientôt sur tout le contour de l'anneau, et, le volume continuant à diminuer, la forme lenticulaire se manifeste. On peut ensuite, par de nouvelles soustractions de liquide, réduire les courbures des deux surfaces au degré que l'on juge convenable. On obtient de cette manière une belle lentille bi-convexe, entièrement liquide à l'exception de sa circonférence. De plus, en vertu de l'excès considérable de l'indice de réfraction de l'huile d'olive sur celui du mélange alcoolique, la lentille dont il s'agit possède toutes les propriétés des lentilles de convergence : par exemple, elle grossit les objets que l'on regarde au travers, et l'on peut faire varier ce grossissement à volonté, en enlevant ou en ajoutant du liquide à la masse.

Notre figure liquide réalise donc ce qu'on ne pourrait obtenir avec les lentilles de verre, c'est-à-dire qu'elle constitue une lentille à courbure et à grossissement variables.

Celle que j'ai formée avait un diamètre de sept centimètres, et l'épais-

[1] On introduit le bec de l'instrument dans le vase par la seconde ouverture du couvercle.

seur du fil métallique était d'environ un demi-millimètre. On pourrait employer avec le même succès un fil bien plus mince; mais alors l'appareil deviendrait incommode par sa trop grande facilité à se déformer.

On peut, en agissant avec précaution, diminuer les courbures de la lentille jusqu'à les rendre presque nulles : j'ai pu réduire, par exemple, la lentille que j'ai formée et dont le diamètre était, comme je l'ai dit, de sept centimètres, à n'avoir plus que deux ou trois millimètres d'épaisseur. On doit présumer, d'après cela, qu'il est possible d'obtenir, à l'aide de procédés convenables, une lame d'huile à faces planes. C'est, en effet, ce que l'expérience confirme, comme nous le verrons plus loin.

§ 19. Pour arriver à rendre très-peu prononcées les courbures de la lentille liquide, il faut naturellement appliquer le bec de la seringue au milieu de cette même lentille, puisque c'est là que se trouve le maximum d'épaisseur. Or, lorsqu'on atteint une certaine limite, la masse se désunit tout à coup en ce point, et alors on voit se produire un phénomène curieux. Le liquide se retire rapidement dans tous les sens vers la circonférence métallique, et forme, le long de celle-ci, un joli anneau liquide; mais cet anneau ne persiste que pendant une ou deux secondes, après quoi il se résout spontanément en plusieurs petites masses à peu près sphériques, et adhérentes à différentes parties de l'anneau de fil de fer, qui les traverse comme les perles d'un collier.

§ 20. On peut généraliser le raisonnement qui nous a conduits, au commencement du paragraphe 18, à réduire le système solide primitif à un simple fil métallique représentant la ligne suivant laquelle ce système est rencontré par la couche superficielle appartenant à la nouvelle figure d'équilibre. On en conclura que toutes les fois qu'un système solide introduit dans la masse n'est rencontré par la couche superficielle de la figure produite que suivant des lignes de peu de largeur, on pourra substituer au système solide employé, de simples fils de fer représentant les lignes dont il s'agit. Seulement, si le système solide primitif avait un volume notable, il faudrait évidemment ajouter à la masse d'huile un volume équivalent de ce liquide, pour occuper la place des parties solides supprimées.

Il y a cependant une exception à ce principe ; elle se présente lorsque le système solide sépare la masse totale en portions isolées, comme dans l'expérience du paragraphe 14 : car alors ces portions prennent des figures indépendantes les unes des autres, et qui peuvent correspondre à des pressions différentes; dans ce cas, la suppression d'une portion du système solide mettrait en communication les figures primitivement isolées, et l'inégalité des pressions amènerait nécessairement un changement dans la figure totale.

A part cette exception, le principe est général, et il en résulte qu'on obtiendra des effets de configuration très-développés, en employant, pour systèmes solides, de simples fils de fer. L'expérience de la lentille bi-convexe en fournit un premier exemple, et nous en verrons plus loin un grand nombre d'autres.

Du reste, pour comprendre l'influence d'un simple fil métallique sur la configuration de la masse liquide, il n'est pas nécessaire d'envisager ce fil comme substitué à un système solide plein; on peut aussi le considérer en lui-même. Il est clair, en effet, que le fil solide agissant par attraction sur la couche superficielle de la masse, les courbures des deux portions de surface qui s'appuient sur lui ne doivent plus avoir entre elles aucune relation de continuité. Le fil métallique pourra donc déterminer un passage brusque entre ces deux portions de surface, dont les courbures viendront s'arrêter nettement à la limite qu'il leur pose.

Les principes que nous venons d'établir doivent sans doute être mis au nombre des conséquences les plus remarquables et les plus curieuses du principe de la couche superficielle, et l'on ne peut s'empêcher de s'étonner lorsqu'on voit le liquide maintenu sous des formes si diverses par une action exercée sur des parties extrêmement minimes de la couche superficielle de la masse.

§ 21. Nous venons d'étudier, à l'aide de l'expérience, l'influence des surfaces convexes de courbure sphérique; voyons maintenant ce que l'expérience peut nous apprendre à l'égard des surfaces planes et des surfaces concaves de courbure sphérique.

Prenons pour système solide une large bande de fer courbée circulairement de manière à constituer un cylindre creux, et attachée au fil de fer de suspension par un point de sa surface extérieure (*fig.* 7). Pour ne pas amener dans l'expérience la production de phénomènes accessoires, nous supposerons que la largeur de la bande métallique est inférieure au diamètre du cylindre formé par cette même bande, ou qu'elle lui est tout au plus égale. Faisons adhérer la masse d'huile avec la surface intérieure de ce système, et supposons que le liquide soit en quantité assez considérable pour qu'il fasse alors saillie au dehors du cylindre. Dans ce cas, la masse présentera, de chaque côté, une surface convexe de courbure sphérique, et les courbures de ces deux surfaces seront égales. Cette figure est une conséquence de ce que nous avons vu précédemment, et nous ne devons pas nous y arrêter; mais elle va nous servir comme point de départ, pour arriver aux autres figures dont nous avons besoin.

Appliquons le bec de la seringue à l'une des surfaces convexes ci-dessus, et enlevons graduellement du liquide. Les deux surfaces diminueront alors en même temps de courbure, et, en agissant avec précaution, nous arriverons ainsi à les rendre parfaitement planes. Il suit de ce premier résultat, qu'une surface plane est aussi une surface d'équilibre, ce qui est évidemment conforme à la théorie.

Maintenant, appliquons le bec de l'instrument à l'une de ces surfaces planes, et enlevons encore une petite quantité de liquide. Alors les deux surfaces se creuseront simultanément, et constitueront deux surfaces concaves de courbure sphérique, dont les bords s'appuient sur ceux de la bande métallique, et dont les courbures sont les mêmes. Enfin, par de nouvelles extractions de liquide, les courbures des deux surfaces deviendront de plus en plus fortes, en demeurant toujours égales entre elles.

Il résulte d'abord de là que les surfaces concaves de courbure sphérique sont encore des surfaces d'équilibre, ce qui est pareillement d'accord avec la théorie.

En outre, puisque la surface plane laissée libre s'enfonce spontanément dès que celle à laquelle on applique l'instrument devient concave, il faut en conclure que la couche superficielle appartenant à la première exerçait une pression, qui se trouvait contre-balancée par une force égale émanée de la couche superficielle plane opposée, mais qui cesse de l'être et qui chasse le liquide, dès que cette couche opposée commence à se creuser. De plus, puisqu'une nouvelle extraction de liquide détermine une nouvelle rupture d'équilibre, de manière que la surface concave opposée à celle sur laquelle on agit directement manifeste un nouvel enfoncement spontané lorsque l'autre surface augmente de courbure, il en résulte que la couche superficielle concave appartenant à la première exerçait encore une pression, qui, d'abord, était neutralisée par une pression égale provenant de l'autre couche concave, mais qui devient prépondérante et chasse de nouveau le liquide, lorsque cette autre couche augmente de courbure.

Il suit donc de là 1° qu'une surface plane détermine une pression sur le liquide; 2° qu'une surface concave de courbure sphérique détermine aussi une pression; 3° que cette dernière est inférieure à celle qui correspond à une surface plane; 4° qu'elle est d'autant moindre que la concavité est plus prononcée, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface est plus petit.

Ces résultats étaient encore indiqués par la théorie, et avaient déjà été vérifiés, dans l'application de celle-ci aux liquides soumis à l'action de la pesanteur, par le phénomène de l'élévation d'une colonne liquide dans un tube capillaire dont elle peut mouiller les parois.

Maintenant, en raisonnant ici comme nous l'avons fait à la fin du paragraphe 17 à l'égard des surfaces convexes de courbure sphérique, nous arriverons à conclure que la pression totale exercée par une couche superficielle concave de courbure sphérique, est le résultat de petites pressions individuelles provenant de tous les éléments de cette couche, et que l'intensité de chacune de ces petites pressions dépend de la courbure de l'élément de couche d'où elle émane.

Notre dernière expérience vérifie donc parfaitement la partie de la théorie qui se rapporte aux surfaces planes et aux surfaces concaves de courbure sphérique.

Enfin, dans l'état d'équilibre de notre figure liquide, la courbure étant la même en tous les points de chacune des deux surfaces concaves, on voit encore que toutes les petites pressions élémentaires sont égales entre elles, ce qui donne une nouvelle vérification complète de la condition générale d'équilibre.

§ 22. La figure que nous venons d'obtenir, constitue une lentille bi-concave à courbures égales, et elle jouit de toutes les propriétés des lentilles de divergence, c'est-à-dire qu'elle rapetisse les objets que l'on regarde au travers, etc. En outre, comme on peut augmenter ou diminuer la courbure des deux surfaces par degrés aussi petits qu'on le veut, il en résulte que l'on a ainsi une lentille de divergence à courbure et à effets variables.

§ 23. Maintenant, supposons que l'on ait augmenté les courbures de la lentille jusqu'à ce que les deux surfaces soient près de se toucher par leurs sommets [1]. On doit présumer que si l'on continuait à enlever du liquide, la masse se désunirait au point où s'effectuerait ce contact, et que l'huile se retirerait en tout sens vers la bande métallique. Pourtant il n'en est point ainsi : on observe alors, au centre de la figure, la formation d'un petit espace circulaire nettement terminé, à travers lequel les objets ne paraissent plus diminués, et l'on reconnaît aisément que ce petit espace est occupé par une lamelle d'huile à faces planes. Si l'on continue à enlever graduellement du liquide, cette lamelle augmente de plus en plus en diamètre, et on peut l'étendre ainsi jusqu'à une assez petite distance de la surface solide. Dans mon expérience, le cylindre métallique avait un diamètre de sept centimètres, et j'ai pu agrandir la lamelle jusqu'à ce que sa circonférence ne fût plus distante de la surface solide que d'environ cinq millimètres; mais, à cet instant, elle s'est rompue, et le liquide qui la constituait s'est retiré avec rapidité vers celui qui demeurait encore adhérent à la bande métallique.

Le fait que nous venons de décrire est extrêmement remarquable, tant en lui-même que par les singulières conséquences théoriques aux-

[1] Pour effectuer cette opération, on comprend qu'il faut appliquer le bec de la seringue non plus au milieu de la figure, comme dans le cas de la lentille bi-convexe, mais, au contraire, près de la bande métallique, puisque c'est là que se trouve maintenant la plus grande épaisseur du liquide.

quelles il nous conduira. En effet, la partie de la masse à laquelle la lamelle tient par son bord, présente des surfaces concaves, tandis que celles de la lamelle sont planes; or, un tel système de surfaces dans une masse liquide continue semble en opposition avec la théorie, puisqu'il paraît évident que les pressions ne peuvent y être égales. Cependant, examinons la question de plus près.

§ 24. D'après la théorie, la pression correspondante à un point de la surface d'une masse liquide est, comme nous l'avons vu (§ 3), l'intégrale des pressions exercées par chacune des molécules qui composent un filet rectiligne normal à la surface en ce point et d'une longueur égale au rayon de la sphère d'activité de l'attraction moléculaire. L'expression analytique de cette intégrale ne renferme de variables que les rayons de plus grande et de plus petite courbure au point que l'on considère (§ 4), et, par conséquent, la pression dont il s'agit ne varie qu'avec les courbures de la surface en ce même point. Cela est rigoureusement vrai lorsque le liquide a une épaisseur notable; mais nous allons faire voir que, dans le cas d'une lame liquide extrêmement mince, il y a un autre élément qui influe sur la pression.

Imaginons une lame liquide dont l'épaisseur soit moindre que le double du rayon de la sphère d'activité sensible de l'attraction moléculaire. Concevons chaque molécule comme le centre d'une petite sphère de ce même rayon (§ 3), et considérons d'abord une molécule située au milieu de l'épaisseur de la lame. La petite sphère dont cette molécule occupe le centre sera coupée par les deux surfaces de la lame, et, par conséquent, elle ne sera pas entièrement pleine de liquide; mais les segments supprimés à l'extérieur des deux surfaces étant égaux, la molécule ne sera pas plus attirée, suivant la normale, dans un sens que dans l'autre. Faisons maintenant passer par cette même molécule une petite droite normale aux deux surfaces et se terminant à ces dernières, et considérons une seconde molécule située en un autre point quelconque de cette droite. Il se pourra que la petite sphère qui appartient à la seconde molécule dont il s'agit, soit encore coupée par les deux surfaces de la lame; mais alors les deux segments supprimés seront inégaux, et la molécule sera, par conséquent, soumise à une attraction prépondérante, évidemment dirigée vers le milieu de l'épaisseur de la lame. La molécule exercera donc une pression dans ce sens, et il faut remarquer que cette pression sera moindre que si le liquide avait une épaisseur notable, la molécule étant située à la même distance de la surface : car, dans le dernier cas, la petite sphère ne serait coupée que d'un seul côté, et sa partie opposée serait entièrement pleine de liquide. Il se pourra aussi que la petite sphère qui appartient à la molécule que nous considérons dans la lame mince, ne soit plus coupée que d'un seul côté; alors la molécule exercera encore une pression dans le même sens, mais celle-ci aura une intensité aussi grande que dans le cas d'une masse épaisse. Il est facile de voir que si l'épaisseur de la lame est moindre que la simple longueur du rayon de l'attraction moléculaire, les petites sphères seront toutes coupées des deux côtés; tandis que si l'épaisseur dont il s'agit est comprise entre la longueur du rayon ci-dessus et le double de cette même longueur, une partie des petites sphères ne seront coupées que d'un seul côté.

Dans les deux cas, la pression exercée par une molécule quelconque étant toujours dirigée vers le milieu de l'épaisseur de la lame, on voit que la pression intégrale correspondante à un point de l'une ou de l'autre des deux surfaces, sera le résultat des pressions exercées individuellement par chacune des molécules rangées, à partir du point dont il s'agit, sur la moitié de la longueur de la petite normale. Or, chacune des deux moitiés de la petite normale étant moindre que le rayon de la sphère d'activité de l'attraction moléculaire, il s'en suit que le nombre des molécules composant le filet qui exerce la pression intégrale, est plus petit que dans le cas d'une masse épaisse. Ainsi, d'un côté, les intensités d'une partie ou de la totalité des pressions élémentaires qui composent la pression intégrale, seront plus petites que dans le cas d'une masse épaisse, et, d'un autre côté, le nombre de ces pressions élémentaires sera moindre; or, il résulte évidemment de là que la pression intégrale sera inférieure à celle qui aurait lieu dans le cas d'une masse épaisse. P désignant toujours la pression correspondante à un point d'une surface plane appartenant à une masse épaisse (§ 4), la pression correspondante à un point de l'une ou de l'autre des surfaces d'une lame plane extrêmement mince sera donc moindre que P. En outre, cette pression sera d'autant plus petite que la lame sera plus mince, et elle pourra diminuer ainsi indéfiniment : car il est clair qu'elle se réduirait à zéro si l'on supposait que l'épaisseur de la lame ne fût plus égale qu'à celle d'une simple molécule.

On peut obtenir des lames liquides à surfaces courbes : les bulles de savon en offrent un exemple, et nous en verrons d'autres dans la suite de ce travail. Or, en supposant l'épaisseur d'une lame semblable moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire, on arriverait évidemment ainsi à conclure que les pressions correspondantes soit à l'une soit à l'autre de ses deux surfaces, ont des intensités inférieures à celles qui sont données par l'expression du paragraphe 4, et qu'en outre ces intensités sont d'autant moindres que l'épaisseur de la lame est plus petite.

Ainsi, nous arrivons à ce principe nouveau :

Pour toute lame liquide dont l'épaisseur serait moindre que le double du rayon de la sphère d'activité de l'attraction moléculaire, la pression ne dépendrait pas seulement des courbures des surfaces; elle varierait encore avec l'épaisseur de la lame.

§ 25. On voit maintenant qu'une lame liquide plane extrêmement mince, tenant par son bord à une masse épaisse dont les surfaces sont concaves, peut constituer avec cette masse un système en équilibre : car on pourra toujours supposer à l'épaisseur de la lame une valeur telle, que la pression correspondante aux surfaces planes de cette lame soit égale à celle qui correspond aux surfaces concaves de la masse épaisse.

Un tel système est bien remarquable aussi sous le point de vue de la forme, en ce que des surfaces de nature différente, savoir des surfaces concaves et des surfaces planes, y font suite les unes aux autres. Cette hétérogénéité de forme est, du reste, une conséquence naturelle du changement que subit la loi des pressions en passant de la partie épaisse à la partie mince.

§ 26. La théorie démontre, comme nous l'avons vu, la possibilité de l'existence d'un semblable système à l'état d'équilibre. Quant à l'expérience qui nous a conduits à ces considérations, bien que le résultat qu'elle présente tende à réaliser d'une manière absolue le résultat théorique, une circonstance fâcheuse s'oppose cependant à ce que cette réalisation soit complète. On comprend que la mobilité relative des molécules de l'huile n'est pas assez grande pour que la lame liquide puisse se former immédiatement avec l'excessive minceur qui convient à l'équilibre : l'épaisseur de cette lame, bien que très-petite absolument parlant, est sans doute, dans les premiers moments, un grand multiple de l'épaisseur théorique. Si donc on produit la lame, sans l'étendre jusqu'à la limite où elle pourrait crever pendant l'opération, et qu'on l'abandonne ensuite à elle-même, la pression correspondante à ses surfaces planes surpassera encore celle qui correspond aux surfaces concaves du reste du système liquide. Il en résulte que l'huile intérieure à la lame sera chassée vers cette autre partie du système, et que l'épaisseur de la lame diminuera progressivement. L'équilibre de la figure ne sera donc alors qu'apparent, et la lame sera, en réalité, le siége de mouvements continuels. La diminution d'épaisseur s'effectuera, du reste, d'une manière lente, parce que, dans un espace aussi étroit, les mouvements du liquide sont nécessairement gênés; c'est ainsi que, dans l'expérience du paragraphe 17, la masse ne prend que lentement sa figure d'équilibre, parce qu'il y a une cause qui entrave les mouvements du liquide. L'épaisseur de la lame marche donc par degrés vers la valeur théorique d'où résulterait l'équilibre du système; mais malheureusement, il arrive toujours qu'avant d'atteindre ce point, la lame se brise spontanément. Cet effet est dû, sans doute, aux mouvements intérieurs dont j'ai parlé plus haut : on conçoit, en effet, que lorsque la lame est devenue d'une très-grande minceur, la cause la plus légère suffit pour en déterminer la rupture. La figure exacte qui correspond à l'équilibre, est donc une limite vers laquelle tend la figure produite, limite dont cette dernière approche extrêmement, et qu'elle atteindrait si elle n'était elle-même détruite auparavant par une cause étrangère.

Notre expérience nous a conduits à modifier les résultats de la théorie dans un cas particulier; mais, on le voit maintenant, bien loin de porter atteinte aux principes de cette théorie, elle en fournit, au contraire, tout incomplète qu'elle est, une nouvelle et frappante vérification.

La conversion de la lentille bi-concave en un système comprenant une lame mince, se rattache à un ordre de faits général : nous verrons qu'un grand nombre de nos figures liquides se transforment, par la diminution graduellement effectuée de la masse qui les constitue, en des systèmes composés de lames ou dans lesquels entrent des lames.

§ 27. Si, par quelque modification de notre dernière expérience, on parvenait à obtenir l'équilibre du système liquide, il serait possible d'en déduire un résultat d'un grand intérêt : savoir un indice sur la valeur du rayon de la sphère d'activité de l'attraction moléculaire. En effet, il y aurait peut-être moyen de déterminer l'épaisseur de la lame; celle-ci pourrait, par exemple, présenter alors des couleurs, dont la teinte conduirait à cette détermination; or, nous avons vu que, dans l'état d'équilibre de la figure, la demi-épaisseur de la lame serait moindre que le rayon dont il s'agit; on aurait donc ainsi une limite au-dessus de laquelle devrait se trouver la valeur de ce même rayon. En d'autres termes, on saurait que l'attraction moléculaire produit encore des effets sensibles, à une distance de son centre d'action supérieure à cette limite. Notre expérience, bien qu'insuffisante, peut donc être considérée comme un premier pas vers la détermination de la distance d'activité sensible de l'attraction moléculaire, distance dont on ne sait jusqu'ici autre chose, sinon qu'elle est d'une excessive petitesse.

§ 28. Revenons maintenant aux masses épaisses. Il résulte des expériences rapportées dans les paragraphes 13, 14, 17, 18 et 21, que lorsqu'une portion continue de la surface d'une semblable masse s'appuie sur une périphérie circulaire, cette portion de surface est toujours de courbure sphérique ou plane. Mais pour admettre ce principe dans toute sa généralité, il faudrait pouvoir le déduire de la théorie. C'est ce que nous ferons dans la série suivante, du moins en supposant que la portion de surface dont il s'agit est de révolution. Nous verrons alors que ce même principe est d'une grande importance.

Remarquons ici que, dans l'expérience du paragraphe 23, la lame commence à paraître dès que les surfaces ne peuvent plus constituer des calottes sphériques. Or, nous verrons de même, que dans les autres cas où une figure pleine se convertit, par l'extraction graduelle du liquide, en un système composé de lames ou dans lequel entrent des lames, celles-ci commencent à se former lorsque la figure d'équilibre que déterminerait la loi ordinaire des pressions, cesse d'être possible. La masse prend alors ou tend à prendre une autre figure, compatible avec une modification dans cette loi. Tel est le principe général de la formation des lames dans les circonstances dont il s'agit.

§ 29. Après avoir formé une lentille liquide de convergence et une lentille liquide de divergence, il m'a paru curieux de combiner ces deux espèces de lentilles, afin d'en former une lunette liquide. Pour cela, j'ai d'abord substitué à l'anneau de fil de fer du paragraphe 18, une plaque circulaire de même diamètre percée d'une grande ouverture (*fig.* 8); cette plaque étant coupée au tour, j'étais certain de l'avoir parfaitement circulaire, tandis qu'il serait bien difficile de remplir cette condition avec un simple fil de fer courbé. En second lieu, j'ai pris, pour la partie solide de la lentille bi-concave, une bande d'environ 2 centimètres de largeur et courbée suivant un cylindre de 3 ½ centimètres de diamètre. Ces deux systèmes ont été assemblés comme le représente la *fig.* 9, de manière que tout l'appareil étant suspendu verticalement dans le mélange alcoolique par le fil de fer *a*, et les deux lentilles liquides étant formées, leurs deux centres fussent à la même hauteur, et distants l'un de l'autre de 10 centimètres. Dans cette disposition, on ne peut pas ajuster la lunette en modifiant la distance entre l'objectif et l'oculaire; mais on parvient au même but en faisant varier les courbures de ces deux lentilles. A l'aide de quelques tâtonnements, je suis aisément parvenu à obtenir ainsi une excellente lunette de Galilée, grossissant environ deux fois les objets éloignés, comme les lorgnettes de spectacle ordinaires, et donnant des images parfaitement nettes et extrêmement peu irisées. La *figure* 10, qui représente une coupe du système, montre l'ensemble des deux lentilles.

FIGURES D'ÉQUILIBRE TERMINÉES PAR DES SURFACES PLANES. — POLYÈDRES LIQUIDES. — FIGURES D'ÉQUILIBRE LAMINAIRES.

§ 30. Dans l'expérience du paragraphe 21, nous avons obtenu une figure qui présentait des surfaces planes. Celles-ci étaient au nombre de deux, parallèles entre elles, et limitées par des périphéries circulaires; mais il est évident que ces conditions ne sont pas nécessaires pour que des surfaces planes puissent appartenir à une masse liquide en équilibre. On comprend que les formes des contours solides doivent être indifférentes, pourvu qu'elles constituent des figures planes. On comprend, en outre, que le nombre et les directions relatives des surfaces planes peuvent être quelconques, puisque ces circonstances n'influent en rien sur les pressions qui correspondent à ces surfaces, pressions qui demeureront toujours égales entre elles. Enfin, il résulte du principe auquel nous sommes arrivés à la fin du paragraphe 20 relativement à l'influence des fils solides, que pour établir le passage entre une surface plane et une autre, il suffira d'un fil métallique représentant l'arête de l'angle d'intersection de ces deux surfaces.

Tout cela nous conduit à cette curieuse conséquence, que l'on doit pouvoir former des polyèdres entièrement liquides à l'exception de leurs seules arêtes. Or, c'est ce que l'expérience vérifie pleinement : si l'on prend pour système solide une charpente en fil de fer représentant l'ensemble des arêtes d'un polyèdre quelconque, et que l'on fasse adhérer à cette charpente une masse d'huile d'un volume convenable, on obtient, en effet, d'une manière parfaite, le polyèdre dont il s'agit, et l'on a ainsi le curieux spectacle de parallélipipèdes, de prismes, etc., formés d'huile, et qui n'ont de solide que leurs arêtes seules.

Pour déterminer l'adhérence entre la masse liquide et la totalité de la charpente métallique, on donne d'abord à cette masse un volume un peu supérieur à celui du polyèdre qu'elle doit former; puis on l'amène dans la charpente, et enfin, à l'aide de la spatule de fer (§ 9), que l'on introduit par la seconde ouverture du couvercle du vase et que l'on fait pénétrer dans la masse, on oblige aisément celle-ci à s'attacher successivement à toute la longueur de chacune des arêtes solides. Alors on enlève graduellement l'excès d'huile au moyen de la seringue, et toutes les surfaces deviennent ainsi à la fois exactement planes. Seulement, pour que ce but puisse être atteint d'une manière complète, il faut évidemment que l'équilibre de densité entre l'huile et le mélange alcoolique soit parfaitement établi, et la plus légère différence à cet égard suffit pour altérer les surfaces d'une manière sensible. Nous devons encore avertir que la manœuvre de la spatule détermine parfois l'introduction de bulles alcooliques dans l'intérieur de la masse d'huile; mais on enlève facilement ces bulles en les aspirant au moyen de la seringue.

§ 31. Maintenant, un polyèdre étant formé, voyons ce qui arrivera si nous lui enlevons graduellement du liquide. Prenons pour exemple le cube, dont la charpente solide est représentée avec son fil de suspension dans la *fig.* 11 [1]. Appliquons le bec de la seringue vers le milieu de l'une des faces, et aspirons une petite quantité d'huile. Aussitôt toutes les faces s'enfonceront simultanément et de la même quantité, de manière que les contours solides carrés serviront de bases à six figures creuses identiques. On conçoit qu'il en doit être ainsi pour le maintien de l'égalité entre les pressions.

Si l'on enlève de nouvelles portions de liquide, les faces se creuseront de plus en plus; mais, pour bien apprécier ce qui se passe lorsqu'on continue cette manœuvre, il est nécessaire d'énoncer ici une proposition préalable. Supposons que l'on introduise dans le vase une plaque carrée en fer, dont les côtés aient la même longueur que les arêtes de la charpente métallique; puis que l'on mette en contact avec l'une des faces de cette plaque une masse d'huile égale en volume à celle qui est perdue par l'une des faces du cube; je dis que le liquide, après s'être étendu sur la plaque, présentera en relief la même figure que la face du cube modifié présente en creux. Alors, en effet, en passant de la surface creuse à la surface en relief, les rayons de courbure correspondants à chaque point

[1] Les arêtes de la charpente que j'ai employée avaient chacune sept centimètres de longueur.

ne feront que changer à la fois de signe, sans changer de valeurs absolues; et, par conséquent (§ 8), puisque la condition de l'équilibre est satisfaite à l'égard de la première de ces surfaces, elle le sera également à l'égard de la seconde.

Maintenant, imaginons un plan passant par l'un des côtés de la plaque, et tangent à la surface du liquide qui y adhère. Tant que ce liquide sera en petite quantité, on conçoit, et l'expérience le vérifie, que le plan dont il s'agit sera fortement incliné vers la plaque; mais si l'on augmente graduellement la quantité du liquide, l'angle compris entre le plan et la plaque ira aussi en croissant, et pourra, d'aigu qu'il était, devenir obtus. Or, tant que cet angle sera inférieur à 45°, la surface convexe du liquide adhérent à la plaque demeurera identique avec les surfaces concaves de la masse attachée à la charpente métallique et convenablement amoindrie; mais au delà de cette limite, la coexistence, dans la charpente, des six surfaces creuses identiques avec la surface en relief, devient évidemment impossible : car ces surfaces devraient se couper mutuellement. Ainsi, quand on continue à enlever du liquide à la masse qui formait le cube, il arrive un point où la figure d'équilibre cesse d'être réalisable d'après la loi ordinaire des pressions. Eh bien, alors se présente une nouvelle vérification du principe énoncé § 28 : c'est-à-dire que des lames commencent à se former. Ces lames sont planes; elles partent de chacun des fils de la charpente, et lient à ces derniers le reste de la masse, qui continue à présenter six surfaces concaves.

On conçoit, en effet, que par cette modification de la figure liquide, l'existence de l'ensemble de celle-ci dans la charpente métallique redevient possible, ainsi que l'équilibre du système : car rien n'empêche plus alors les surfaces concaves de prendre une forme qui s'accorde avec la loi ordinaire des pressions, et, d'un autre côté, en supposant les lames suffisamment minces, la pression qui leur appartient pourra être égale à celle qui correspond à ces mêmes surfaces concaves (§ 25).

Si l'on enlève encore de nouvelles portions de liquide, les lames iront en s'agrandissant, tandis que la masse pleine, qui occupe le milieu de la figure, diminuera de volume, et l'on pourra ainsi réduire cette masse à des dimensions très-minimes ; la *fig.* 12 représente tout le système dans ce dernier état. Il est même possible de faire disparaître entièrement la petite masse centrale, et d'obtenir ainsi un système laminaire complet; mais pour cela, il est nécessaire d'employer certaines précautions que je vais indiquer. Lorsque la masse centrale est devenue assez petite, il faut d'abord essuyer parfaitement le bec de la seringue, sans quoi l'huile adhère à l'extérieur de celui-ci jusqu'à une certaine hauteur, et cette attraction maintient autour de lui une certaine quantité d'huile que l'instrument ne peut absorber dans son intérieur. En second lieu, il faut amener le bec de la seringue assez bas pour qu'il soit près d'atteindre la surface inférieure de la petite masse. Cela étant, on voit, pendant la succion, cette surface s'élever jusqu'à toucher l'orifice de l'instrument, et ce dernier absorbe alors autant de mélange alcoolique que d'huile ; mais on ne doit pas s'inquiéter de cette circonstance, et l'on voit la petite masse diminuer par degrés, pour disparaître enfin complétement. Le système se compose alors de douze lames triangulaires, dont chacune part de l'un des fils de la charpente, et dont tous les sommets se réunissent au centre de la figure; il est représenté *fig.* 13. Mais ce système ne se forme que pendant l'action même de la seringue : si, lorsqu'il est complet, on retire lentement le bec de l'instrument, on voit se développer, au centre de la figure, une lamelle additionnelle de forme carrée (*fig.* 14). Tel est donc le système laminaire définitif auquel se réduit le cube liquide, par l'amoindrissement graduel de sa masse.

§ 32. Dans l'expérience précédente, comme dans celle du paragraphe 25, l'épaisseur des lames commence par être supérieure à celle qui conviendrait à l'équilibre. Si donc on abandonne le système à lui-même lorsqu'il contient encore une masse centrale, on conçoit qu'une portion du liquide des lames sera chassée lentement vers cette masse, et que les lames devront aller en s'amincissant par degrés. Aussi arrive-t-il toujours que l'une ou l'autre de ces dernières crève après quelque temps, sans doute par la même cause que nous avons déjà signalée (§ 26).

De là résulte, pour la réussite parfaite de la transformation du cube en système laminaire, la nécessité d'une précaution dont nous n'avons point parlé. Elle consiste en ce qu'à partir de l'instant où les lames prennent naissance, il faut faire marcher l'épuisement du liquide le plus rapidement possible jusqu'à ce que la masse centrale ait atteint un certain degré de petitesse. En effet, dès que les lames commencent à se former, leur tendance à s'amincir commence aussi à se développer, et, si l'opération s'effectuait avec trop de lenteur, le système pourrait se rompre avant qu'elle fût terminée. Lorsque la masse centrale est suffisamment réduite, et l'expérience apprend bientôt à juger du point convenable, il faut ralentir de plus en plus l'action de la seringue, et enfin employer les autres précautions que nous avons mentionnées.

On peut donc s'expliquer la rupture des lames tant qu'il y a une masse centrale grande ou petite; mais lorsque le système laminaire est complet, on ne voit pas, au premier abord, de raison pour que l'épaisseur des lames diminue, et, par conséquent, pour qu'il y ait destruction du système. Néanmoins, la rupture finit par avoir lieu dans ce cas comme dans l'autre, et le temps pendant lequel le système persiste, atteint rarement une demi-heure.

Pour trouver la cause de ce phénomène, remarquons que les intersections des surfaces des différentes lames ne peuvent se faire brusquement, ou se réduire à de simples lignes : il est évident que le passage libre entre deux surfaces liquides ne saurait s'établir ainsi d'une manière discontinue. Il faut donc que ces passages s'effectuent par l'intermédiaire de petites surfaces concaves, et, avec un peu d'attention, l'on reconnaît, en effet, que les choses ont lieu ainsi. Dès lors, on comprend que l'huile des lames doit également être chassée vers les lieux de jonction de celles-ci, et que, par conséquent, l'absence de la petite masse centrale n'empêche pas l'amincissement graduel des lames et la destruction finale du système.

§ 33. Lorsqu'on est arrivé, pendant l'action de la seringue, au système de la *fig.* 13, si au lieu de retirer l'instrument avec lenteur, on le détache brusquement par une petite secousse dans le sens vertical, la lamelle additionnelle ne se développe pas; mais on voit se reformer très-rapidement la petite masse de la *fig.* 12. Ce fait confirme d'une manière remarquable l'explication que nous avons donnée dans le paragraphe précédent. En effet, à l'instant où le bec de l'instrument se sépare du système, celui-ci peut être considéré comme composé de pyramides creuses; or, il résulte encore des raisons de continuité, que les sommets de ces pyramides doivent constituer non de simples points, mais de petites surfaces concaves. Maintenant, ces petites surfaces ayant de très-fortes courbures dans tous les sens, elles donneront lieu à bien moins de pression encore que celles qui établissent les passages entre les surfaces des lames deux à deux : car, dans ces dernières, la courbure est nulle suivant une direction. L'huile des lames sera donc chassée avec beaucoup plus de force vers le centre de la figure que vers les autres parties des jonctions de ces lames. D'une autre part, les douze lames aboutissant à ce même centre, l'huile y afflue par un grand nombre de sources à la fois. Ces deux causes concurrentes doivent donc déterminer, conformément à l'expérience, la réapparition rapide de la petite masse centrale, et l'on comprend pourquoi il est impossible d'obtenir le système complet des pyramides autrement que pendant l'action même de la seringue.

§ 34. Tous les autres polyèdres liquides se transforment, comme le cube, en systèmes laminaires, lorsqu'on diminue graduellement la masse qui les constitue. Parmi ces systèmes, les uns sont complets, les autres renferment encore de très-petites masses que l'on ne peut faire disparaître entièrement. Des considérations analogues à celles que nous avons employées à l'égard du cube feraient voir, dans chaque cas, que les lames prennent naissance dès que les surfaces creuses qui correspondraient à la loi ordinaire des pressions cessent de pouvoir coexister dans la charpente solide. Les *fig.* 15, 16, 17 et 18 représentent les systèmes laminaires provenant du prisme triangulaire, du prisme hexaèdre, du tétraèdre et de la pyramide à base carrée, ces systèmes étant supposés complets; tous sont formés de lames planes partant de chacun des fils métalliques, et celui du prisme hexaèdre renferme, comme on voit, une lame additionnelle au centre de la figure.

§ 35. Le système provenant de l'octaèdre régulier présente une exception singulière que je n'ai pu m'expliquer. Les lames dont se compose ce système sont courbes et forment un assemblage bizarre, dont il est difficile de donner une idée précise par des représentations graphiques. La *fig.* 19 en offre les projections sur deux plans verticaux rectangulaires, et l'on voit que les aspects du système observé sur deux côtés adjacents, sont inverses l'un de l'autre.

La formation de ce système présente une particularité curieuse. Au commencement de l'opération, toutes les faces de l'octaèdre se creusent à la fois, les lames naissantes sont planes et symétriquement placées, de manière que le système tend vers la forme représentée *fig.* 20. Mais, lorsqu'on atteint une certaine limite, un changement brusque s'opère, les lames se courbent et le système se dispose à prendre la forme singulière dont nous avons parlé. J'ai recommencé plusieurs fois l'expérience, en variant autant que possible les circonstances de l'épuisement du liquide, et les mêmes effets se sont toujours reproduits.

J'indiquerai, dans la suite de ce travail, un autre procédé pour obtenir les systèmes laminaires; procédé extrêmement simple, et qui a, en outre, l'avantage de donner tous ces systèmes à l'état complet.

§ 36. Pour terminer ce qui concerne les polyèdres liquides, je ferai remarquer que le prisme triangulaire peut être employé à produire les phénomènes de la dispersion : l'on obtient ainsi un beau spectre solaire à l'aide d'un prisme à faces liquides. Seulement, comme l'effet n'est dû qu'à l'excès de l'action réfringente de l'huile sur celle du liquide alcoolique, il faut, pour avoir un spectre bien étalé, que l'angle réfringent du prisme soit obtus : un angle de 110° donne un très-bon résultat. En outre, il faut évidemment que les faces du prisme soient parfaitement planes, ce que l'on obtient en employant une charpente travaillée avec soin, en établissant un équilibre exact de densité entre les deux liquides, et enfin, en arrêtant l'action de la seringue au point précisément convenable.

FIGURES D'ÉQUILIBRE DE RÉVOLUTION AUTRES QUE LA SPHÈRE. CYLINDRE LIQUIDE.

§ 57. Cherchons maintenant à former de nouvelles figures liquides. Celles qui se prêteraient le mieux aux considérations théoriques, seraient les figures terminées par des surfaces de révolution, à part la sphère et les figures lenticulaires, que nous avons déjà étudiées. Les surfaces de révolution, en effet, jouissent de propriétés simples à l'égard des rayons de plus grande et de plus petite courbure en chaque point : on sait que l'un de ces deux rayons est le rayon de courbure de la ligne méridienne, et que l'autre est la portion de la normale à cette ligne, comprise entre le point que l'on considère et l'axe de révolution.

Nous allons donc essayer d'obtenir des figures de cette nature.

§ 58. Prenons pour système solide deux anneaux en fil de fer égaux et parallèles entre eux et placés en regard l'un de l'autre. L'un de ces anneaux repose sur le fond du vase par trois pieds en fil de fer, et l'autre est porté, à l'aide d'une pièce intermédiaire, par la tige qui traverse le bouchon central, de manière qu'on peut l'approcher ou l'éloigner du premier, en abaissant ou en élevant cette tige [1]. Le système de ces deux anneaux est représenté *fig.* 20 *bis;* ceux que j'ai employés avaient un diamètre de 7 centimètres.

Après avoir soulevé autant que possible l'anneau supérieur, formons une sphère d'huile d'un diamètre quelque peu plus grand que celui des anneaux, et conduisons-la vers l'anneau inférieur, de manière à la faire adhérer à tout le contour de celui-ci; puis abaissons l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il vienne se mettre en contact avec la masse liquide, et que cette dernière s'y attache également. La masse étant ainsi adhérente au système des deux anneaux, soulevons lentement l'anneau supérieur; alors, pour un écartement convenable des deux anneaux, le liquide

[1] Pour les expériences que nous avons maintenant à décrire, il faut substituer à la tige courte qui est représentée dans la *fig.* 2 du mémoire précédent, et qui nous a suffi jusqu'ici, une autre tige d'environ 15 centimètres de longueur.

prendra la forme représentée en projection verticale par la *fig.* 21, dans laquelle les lignes *a b* et *c d* sont les projections des anneaux. Les deux portions de surface qui s'appuient respectivement sur chacun des anneaux, sont des calottes sphériques convexes, et la portion comprise entre les deux anneaux constitue une figure de révolution dont la courbe méridienne est, comme on voit, convexe vers l'extérieur. Nous reviendrons, dans la série suivante, sur cette partie de la figure liquide.

Maintenant, si nous continuons à soulever graduellement l'anneau supérieur, la courbure des deux calottes et la courbure méridienne de la portion intermédiaire diminueront, et, s'il y a équilibre exact de densité entre l'huile et la liqueur ambiante, nous verrons la surface comprise entre les deux anneaux prendre une forme parfaitement cylindrique (*fig.* 22). Les deux bases de la figure liquide sont encore des calottes sphériques convexes; seulement leur courbure est moindre que dans la figure précédente.

Si nous augmentions encore l'écartement des anneaux, il est évident que la surface comprise entre eux perdrait sa forme cylindrique, et qu'il devrait en résulter une figure nouvelle. C'est, en effet, ce qui aurait lieu; mais la figure ainsi produite ne doit nous occuper que plus tard.

Au lieu donc d'accroître immédiatement la distance des anneaux, commençons par ajouter à la masse une certaine quantité d'huile, ce qui rendra de nouveau bombée la surface comprise entre les anneaux. Soulevons alors graduellement l'anneau supérieur, et nous reproduirons un cylindre qui aura plus de hauteur que le premier. Si nous répétons la même manœuvre un nombre de fois convenable, nous arriverons enfin à donner au cylindre résultant toute la hauteur que permet notre appareil. J'ai obtenu ainsi une masse de 7 centimètres de diamètre et d'environ 14 centimètres de hauteur, parfaitement cylindrique (*fig.* 23).

Pour que le cylindre liquide auquel on donne une hauteur si considérable soit bien parfait, il faut que l'on établisse aussi une égalité parfaite entre les densités de l'huile et du liquide alcoolique. Une très-légère différence dans un sens ou dans l'autre tendant à faire descendre ou monter la masse, celle-ci prend, d'une manière plus ou moins prononcée, l'une des deux formes représentées *fig.* 24. Lors même que, par des additions convenables d'alcool à 16 degrés ou d'alcool pur, selon le besoin (§ 24 du mémoire précédent), on est arrivé à obtenir la cylindricité, de légers changements de température suffisent pour l'altérer et reproduire l'une des deux formes ci-dessus.

§ 39. Maintenant, examinons les résultats de ces expériences sous le point de vue théorique. D'abord, il est évident qu'une surface cylindrique satisfait à la condition générale de l'équilibre des figures liquides, puisque les courbures y sont les mêmes en chaque point. En outre, une semblable surface étant convexe dans tous les sens, excepté dans celui de la ligne méridienne, où la courbure est nulle, la pression qui lui correspond doit être supérieure à celle qui correspond à une surface plane.

Les mêmes conclusions se déduisent des formules générales [2] et [3] des paragraphes 4 et 5. En effet, comme nous l'avons déjà rappelé dans le paragraphe 37, l'une des quantités R et R' est le rayon de courbure de la ligne méridienne, et l'autre est la portion de la normale à cette ligne comprise entre le point que l'on considère et l'axe de révolution. Or, dans le cas du cylindre, la ligne méridienne étant une ligne droite, son rayon de courbure est partout infiniment grand; et, d'un autre côté, cette même droite étant parallèle à l'axe de révolution, la portion de la normale qui constitue le second rayon de courbure, n'est autre que le rayon même du cylindre. Il suit de là que l'un des termes de la quantité $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ disparaît, et que l'autre est constant; cette même quantité est donc constante, et, par conséquent, la condition d'équilibre est satisfaite. Maintenant, si nous désignons par λ le rayon du cylindre, la valeur générale de la pression deviendra, pour cette surface,

$$P + \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Or, λ étant positif puisqu'il est dirigé à l'intérieur du liquide (§ 4), la valeur ci-dessus est supérieure à P, c'est-à-dire à celle qui correspondrait à une surface plane.

On voit, d'après cela, que les bases de notre cylindre liquide doivent nécessairement être convexes, comme le montre l'expérience : car l'équilibre exigeant que la pression soit la même dans toute l'étendue de la figure, il faut que ces bases déterminent aussi une pression supérieure à celle qui correspond à une surface plane.

Notre figure liquide satisfait donc pleinement à la théorie; mais on peut pousser la vérification plus loin encore. La théorie permet de déterminer avec facilité le rayon des sphères dont les bases font partie. En effet, si nous représentons ce rayon par x, la formule [1] du paragraphe 4 donnera, pour la pression correspondante aux sphères dont il s'agit,

$$P + A \cdot \frac{1}{x}.$$

Or, cette pression devant être égale à celle qui correspond à la surface cylindrique, nous aurons :

$$P + \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = P + A \cdot \frac{1}{x},$$

d'où nous déduirons :

$$x = 2\lambda.$$

Ainsi, le rayon de la courbure des calottes sphériques qui constituent les bases, est égal au diamètre du cylindre.

D'après cela, connaissant ce diamètre, qui est le même que celui des anneaux solides, on peut calculer la hauteur des calottes sphériques, et si, par un procédé quelconque, on mesure ensuite cette hauteur dans la figure liquide, on aura ainsi une vérification de la théorie jusque dans les nombres. Nous allons nous occuper de ce sujet.

§ 40. Si l'on imagine la figure liquide coupée par un plan méridien, la section de chacune des calottes sera un arc appartenant à un cercle dont le rayon devra, d'après ce qui précède, être égal à 2λ, et la flèche de cet arc sera la hauteur de la calotte. Si l'on suppose infiniment minces les fils métalliques qui forment les anneaux, de manière que chacune des calottes s'appuie sur la circonférence même du cylindre, la corde de l'arc ci-dessus sera aussi égale à 2λ, et si l'on désigne par h la hauteur des calottes, on aura :

$$h = \lambda\,(2 - \sqrt{3}\,) = 0{,}268\,.\,\lambda.$$

Or, le diamètre extérieur exact de mes anneaux, ou la valeur de 2λ correspondante à mes expériences, était de $71^{mm},4$, ce qui donne $h = 9^{mm},57$.

Mais les fils métalliques ayant une certaine épaisseur, et les calottes ne s'appuyant pas sur la circonférence extérieure des anneaux, il en résulte que la corde de l'arc méridien est un peu moindre que 2λ, et que, par conséquent, la hauteur théorique réelle des calottes est un peu plus petite que ne le donne la formule précédente. Pour la déterminer exactement, désignons la corde par $2c$, ce qui donnera

$$h = 2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - c^2}.$$

Maintenant, remarquons que le plan méridien coupe chacun des anneaux suivant deux petits cercles auxquels est tangent l'arc méridien de la calotte, et sur chacun desquels la corde de cet arc intercepte un petit segment. Or, l'arc méridien étant tangent aux sections des fils, il en résulte que les petits segments ci-dessus sont semblables à celui de la calotte; et comme la corde de ce dernier diffère fort peu du rayon du cercle auquel l'arc appartient, les cordes des petits segments pourront être considérées comme égales au rayon des petites sections, rayon que nous désignerons par r. Il est visible, en outre, que l'excès du rayon extérieur de l'anneau sur la demi-corde c n'est autre chose que l'excès du rayon r sur la demi-corde des petits segments, demi-corde qui, d'après ce qui précède, est égale à $\frac{1}{2}r$. On déduit donc de là, $\lambda - c = \frac{1}{2}r$, d'où $c = \lambda - \frac{1}{2}r$, et il n'y aura qu'à substituer cette valeur dans la formule précédente, pour avoir la valeur théorique réelle de h. L'épaisseur des fils qui forment mes anneaux est de $0^{mm},74$, d'où $\frac{1}{2}\,r = 0^{mm},18$, ce qui donne, pour la hauteur théorique réelle des calottes dans ces circonstances,

$$h = 9^{mm},46.$$

Je ferai remarquer qu'il est difficile de distinguer, dans la figure liquide, la limite précise des calottes, c'est-à-dire les circonférences de contact de leurs surfaces avec celles des anneaux. Pour écarter cet inconvénient, je n'ai mesuré la hauteur des calottes qu'à partir des plans extérieurs des anneaux, c'est-à-dire, pour chaque calotte, à partir d'un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, et s'appuyant sur la surface de l'anneau du côté qui regarde le sommet de la calotte. La quantité ainsi mesurée est évidemment égale à la hauteur totale moins la flèche des petits segments que nous avons considérés plus haut, et, par conséquent, d'après la similitude entre ces petits segments et celui de la calotte, on a, pour déterminer cette flèche que nous désignerons par f, la proportion $\frac{h}{c} = \frac{f}{\frac{1}{2}r}$, ce qui donne, pour notre figure liquide, $f = 0^{mm},05$, d'où

$$h - f = 9^{mm},41.$$

Telle est donc, en définitive, la valeur théorique de la quantité qu'il s'agissait de mesurer.

§ 41. Avant d'indiquer le procédé que j'ai employé à cet effet, et de faire connaître le résultat de l'opération, je dois présenter ici quelques remarques importantes.

Si les densités du mélange alcoolique et de l'huile ne sont pas rigoureusement égales, la masse tend légèrement à monter ou à descendre, et la hauteur de l'une des calottes est alors un peu trop grande, tandis que celle de l'autre est un peu trop petite; mais on comprend que si leur différence est minime, on obtiendra encore un résultat exact en prenant la moyenne entre ces deux hauteurs. On évite ainsi une partie des tâtonnements qu'exigerait l'établissement d'une égalité parfaite entre les deux densités.

Mais une chose à laquelle il faut donner le plus grand soin, c'est la parfaite homogénéité de chacun des deux liquides. Si cette condition n'est pas remplie à l'égard du mélange alcoolique, c'est-à-dire si la partie supérieure de ce mélange demeure un peu plus chargée d'alcool que sa partie inférieure, la figure liquide peut se montrer régulière et présenter des calottes égales : il suffit, pour cela, que la densité moyenne de la partie du mélange qui se trouve à la même hauteur que la masse, soit égale à la densité de l'huile; mais, dans ces circonstances, la hauteur des deux calottes est trop petite. En effet, l'huile qui forme la calotte supérieure est alors en contact avec un liquide moins dense qu'elle, et tend par conséquent à descendre, tandis que l'inverse a lieu pour l'huile qui forme la calotte inférieure [1].

L'hétérogénéité de l'huile produit un effet opposé, c'est-à-dire qu'elle rend trop grande la hauteur des calottes. En effet, les portions les moins denses gagnant le haut de la masse, tendent à le soulever, tandis que les portions les plus denses descendent à la partie inférieure et tendent à abaisser celle-ci. Or, les quantités d'alcool pur et d'alcool à 16° que l'on ajoute au mélange alcoolique pour équilibrer la masse, amènent nécessairement une altération dans l'homogénéité de l'huile : car, en premier lieu, l'huile se trouvant, pendant ces opérations, en contact avec des mélanges tantôt plus tantôt moins chargés d'alcool, elle doit absorber ou perdre de celui-ci par sa surface; en second lieu, ces mêmes additions d'alcool au mélange, font que ce dernier n'est plus saturé d'huile, de sorte qu'il en enlève à la masse, et cette action ne s'exerce sans doute pas d'une manière égale sur les deux principes qui composent l'huile. Il faut donc aussi, avant de prendre les mesures, mêler intimement entre elles les différentes parties de l'huile, ce que l'on fait en introduisant dans la masse une spatule de fer que l'on y promène dans tous les sens, et cela pendant longtemps, car, à cause de sa viscosité, l'huile ne se mêle que très-difficilement d'une manière parfaite.

Afin d'écarter l'influence des réactions qui rendent l'huile hétérogène, il faut conduire les opérations de la manière suivante. La masse étant

[1] En établissant à dessein une hétérogénéité très-prononcée dans le mélange alcoolique (§ 9 du mémoire précédent), et en employant les précautions convenables, on peut même former un cylindre sensiblement régulier dont les bases sont absolument planes.

introduite dans le vase et attachée aux deux anneaux, et l'égalité des densités étant sensiblement établie, laisser d'abord séjourner ainsi la masse dans le liquide alcoolique pendant deux ou trois jours, en rétablissant de temps en temps l'équilibre des densités altéré par les réactions chimiques et les variations de la température. Oter ensuite du vase les deux anneaux, de sorte que la masse demeure libre; faire passer, à l'aide d'un siphon [1], la presque totalité de celle-ci dans un flacon que l'on bouche soigneusement; enlever avec la seringue la petite portion d'huile qui est restée dans le vase, et rejeter cette portion. Cela fait, replacer les deux anneaux, et mêler parfaitement le liquide alcoolique; puis introduire de nouveau l'huile dans le vase, en prenant la précaution d'envelopper d'un linge plusieurs fois replié sur lui-même le flacon qui la contient, afin que sa température ne soit pas sensiblement modifiée par la chaleur de la main [2]. Attacher alors la masse à l'anneau inférieur seulement, l'anneau supérieur étant soulevé autant que possible; mêler intimement l'huile comme nous l'avons dit plus haut; abaisser ensuite l'anneau supérieur, y faire adhérer la masse, le relever de manière à former un cylindre exact, et procéder immédiatement aux mesures.

§ 42. L'instrument le plus convenable pour effectuer d'une manière précise ces dernières opérations, est, sans contredit, celui auquel on a

[1] Le siphon doit être amorcé avec une portion de l'huile même de la masse, portion que l'on extrait au moyen de la seringue.

[2] Voici pour quelle raison il faut d'abord faire sortir l'huile du vase avant de l'employer définitivement à l'expérience. Après un séjour prolongé dans le liquide alcoolique, l'huile se trouve enveloppée d'une sorte de pellicule mince; ou, pour parler plus exactement, la couche superficielle de la masse a perdu une partie de sa liquidité, effet qui provient sans doute de l'action chimique inégale exercée par l'alcool sur les principes qui constituent l'huile. Or, il résulte nécessairement de là que la masse a perdu en même temps une partie de sa tendance à prendre une figure d'équilibre déterminée, tendance qu'il faut, par conséquent, lui restituer d'une manière complète. C'est dans ce but que l'on extrait l'huile au moyen du siphon. En effet, la pellicule ne pénètre point dans l'intérieur de celui-ci, et continue à envelopper, en se contractant, la petite masse restante; de sorte qu'après avoir enlevé celle-ci au moyen de la seringue, qui finit par absorber la pellicule elle-même, on se trouve entièrement débarrassé de cette dernière.

Avant que l'on ait fait agir le siphon, la pellicule a trop peu de consistance et d'épaisseur pour que l'on puisse s'apercevoir directement de sa présence; mais lorsque l'opération du siphon est près d'être terminée, et que, par conséquent, la masse est considérablement réduite, on voit la donné le nom de *cathétomètre*, et qui se compose essentiellement, comme on sait, d'une lunette horizontale mobile le long d'une règle verticale divisée. On mesure d'abord, à l'aide de cet instrument, la distance comprise entre les sommets des deux calottes; puis on mesure, par le même moyen, la distance comprise entre les plans extérieurs des deux anneaux (§ 40). La différence entre le premier et le second résultat donne évidemment la somme des deux hauteurs dont il faut prendre la moyenne, et, par conséquent, cette moyenne, ou la quantité cherchée $h-f$, est égale à la moitié de la différence dont il s'agit.

La mesure de la distance entre les plans extérieurs des anneaux exige quelques précautions particulières. D'abord, comme les points des anneaux auxquels il faut viser ne sont pas tout à fait à la surface extérieure de la figure, l'huile interposée entre ces points et l'œil doit produire des effets de réfraction qui introduiraient une petite erreur dans la valeur obtenue. Pour écarter cet inconvénient, il suffit de mettre les anneaux à nu, en faisant écouler les liquides du vase par le robinet (note 2 du § 9), puis d'enlever les petites portions du liquide qui demeurent adhérentes aux anneaux, en promenant légèrement sur la surface de ceux-ci une petite bande de papier à filtre que l'on introduit dans le vase par la seconde

surface de celle-ci former des plis, et accuser ainsi l'existence d'une enveloppe. En outre, lorsque le siphon est enlevé, la petite masse restante, qui demeure alors librement suspendue dans le liquide alcoolique, ne prend plus la figure sphérique : elle conserve un aspect irrégulier, et paraît indifférente à toutes les formes.

Cette indifférence aux figures d'équilibre, provenant d'une diminution dans la liquidité de la couche superficielle, constitue une preuve nouvelle et curieuse du principe fondamental relatif à cette couche (§§ 6 *bis* et 10 à 16).

M. Hagen (*Mémoire sur la surface des liquides*, voir les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1845) a observé un fait remarquable, auquel le précédent paraît devoir se rattacher. Ce fait consiste en ce que la surface de l'eau abandonnée pendant quelque temps à elle-même, éprouve une modification particulière, par suite de laquelle l'eau s'élève alors dans les espaces capillaires à des hauteurs très-notablement moindres qu'elle ne le fait lorsque sa surface est exempte ou débarrassée de cette altération.

On expliquerait peut-être ce fait, en admettant que l'eau dissout une faible proportion de la matière du solide avec lequel elle est en contact, et que l'air extérieur agissant chimiquement à la surface du liquide sur la substance dissoute, donne lieu aussi à la formation d'une légère pellicule qui modifie les effets des forces moléculaires.

ouverture. Il faut aussi absorber, par le même moyen, les gouttes de liquide alcoolique qui restent attachées à la face interne de la paroi antérieure du vase. En second lieu, comme il serait difficile que les anneaux fussent rigoureusement parallèles, il faut mesurer leur distance de deux côtés opposés du système, et prendre la moyenne des deux valeurs ainsi trouvées.

Voici maintenant les résultats que j'ai obtenus. La mesure de la distance entre les sommets a donné d'abord, par quatre opérations successives, les valeurs $76^{mm},77$, $76^{mm},80$, $76^{mm},85$, et $76^{mm},75$, c'est-à-dire, en moyenne, $76^{mm},79$. Mais le liquide alcoolique ayant été alors agité de nouveau pendant quelque temps afin que sa parfaite homogénéité fût plus certaine, deux nouvelles mesures prises immédiatement après, ont donné $77^{mm},05$ et $77^{mm},00$, ou, en moyenne, $77^{mm},02$.

La distance entre les plans extérieurs des anneaux s'est trouvée, d'un côté, par deux observations exactement concordantes, de $57^{mm},75$; de l'autre côté, deux observations ont fourni les valeurs $57^{mm},87$ et $57^{mm},85$, ou, en moyenne, $57^{mm},86$. Prenant donc la moyenne de ces deux résultats, on a, pour la distance entre les centres des plans extérieurs, la valeur $57^{mm},79$.

D'après cela, si l'on part de la première des deux valeurs obtenues pour la distance des sommets, savoir $76^{mm},79$, on trouvera :

$$h - f = \frac{76{,}79 - 57{,}79}{2} = 9^{mm},50\,;$$

et si l'on part du second résultat, savoir $77^{mm},02$, on trouvera :

$$h - f = \frac{77{,}02 - 57{,}79}{2} = 9^{mm},61.$$

Ces deux hauteurs s'écartent bien peu, comme on le voit, de la hauteur $9^{mm},41$ déduite de la théorie (§ 40) : pour la première, la différence ne s'élève pas au centième de cette valeur théorique, et, pour la seconde, elle en surpasse à peine les deux centièmes.

Ces légères différences provenaient sans doute de faibles restes d'hétérogénéité dans les liquides; il est probable que, dans le premier cas, aucun des deux liquides n'était absolument homogène, et que les deux effets contraires qui résultaient de là (§ 41) se neutralisaient en partie, tandis que, dans le second cas, le liquide alcoolique étant rendu tout à fait homogène, l'effet de la petite hétérogénéité de l'huile se manifestait en entier.

Quoi qu'il en soit, ces mêmes différences sont l'une et l'autre assez minimes pour qu'on puisse considérer l'observation comme d'accord avec la théorie, dont elle offre, comme on voit, une confirmation bien remarquable.

§ 43. Considérée mathématiquement, une surface cylindrique s'étend à l'infini dans le sens de l'axe de révolution. Il résulte de là que le cylindre compris entre les deux anneaux ne constitue qu'une portion de la figure d'équilibre complète. Il en résulte encore que si la masse liquide était libre, elle ne pourrait prendre, comme figure d'équilibre, la forme cylindrique : car cette masse ayant un volume limité, il faudrait que le cylindre se terminât des deux côtés par des portions de surface présentant d'autres courbures, ce que ne permet pas la loi de continuité. Mais cette hétérogénéité de courbure, impossible lorsque la masse est libre, devient réalisable, comme nos expériences le montrent, par l'intermédiaire des anneaux solides. Chacun de ceux-ci rendant indépendantes l'une de l'autre les courbures des deux portions de surface qui s'appuient sur lui (§ 20), la surface comprise entre les deux anneaux peut alors être de courbure cylindrique, tandis que les deux bases de la figure peuvent présenter des courbures sphériques.

Nous arrivons donc à cette conséquence bien remarquable, qu'avec une masse liquide d'un volume limité, on peut obtenir des portions isolées de figures d'équilibre qui, dans leur état complet, devraient s'étendre à l'infini.

§ 44. Dans le but d'obtenir un cylindre pour lequel le rapport entre la hauteur et le diamètre fût plus considérable encore que pour celui de la *fig.* 25, j'ai substitué aux anneaux précédemment employés, d'autres anneaux dont le diamètre n'était que de 2 centimètres. J'ai d'abord essayé la formation d'un cylindre de 6 centimètres de hauteur, c'est-à-dire d'une hauteur triple du diamètre, et, dans cette opération, j'ai fait usage d'un procédé un peu différent de celui du paragraphe 38. L'égalité entre les densités des deux liquides étant sensiblement établie, j'ai d'abord donné à la masse d'huile un volume un peu plus grand que celui que devait comprendre le cylindre; puis, après avoir attaché la masse aux deux anneaux, j'ai soulevé l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il fût à une distance de 6 centimètres de l'autre : cette distance était mesurée à l'aide d'une règle divisée introduite dans le vase, et maintenue verticalement à côté de la figure liquide. A cause de l'excès d'huile, la ligne méridienne de la figure était convexe vers l'extérieur, et, comme il y avait encore une légère différence entre les densités, cette convexité n'était pas symétrique par rapport aux deux anneaux. J'ai corrigé cette irrégularité par des additions successives d'alcool pur et d'alcool à 16°, opération qui a exigé de grands ménagements, et vers la fin de laquelle j'ai dû n'ajouter l'un ou l'autre de ces deux liquides que par gouttes uniques. La figure étant enfin parfaitement symétrique, j'ai enlevé avec précaution l'excès d'huile, en appliquant le bec de la petite seringue en un point de l'équateur de la masse, et j'ai obtenu ainsi un cylindre parfait.

Ensuite, après avoir ajouté de l'huile à la masse, j'ai augmenté la distance des anneaux jusqu'à ce qu'elle fût égale à 8 centimètres, c'est-à-dire au quadruple de leur diamètre. L'huile était en quantité suffisante pour que la ligne méridienne de la figure fût convexe vers l'extérieur; mais la courbure n'était pas tout à fait symétrique, et j'ai rencontré, pour la régulariser, des difficultés plus grandes encore que dans le cas précédent. Le défaut de symétrie étant enfin corrigé, la convexité méridienne présentait une flèche d'environ 3 millimètres (*fig.* 25). J'ai procédé alors à l'extraction de l'excès d'huile; mais, avant que la flèche fût réduite à 2 millimètres, la figure a paru tendre à s'amincir dans sa partie inférieure et à se renfler dans sa partie supérieure, comme si tout à coup l'huile avait légèrement diminué de densité. A cet instant j'ai retiré la seringue, afin de mieux observer l'effet dont il s'agit; alors le changement de forme s'est prononcé de plus en plus, la partie inférieure de la figure a présenté bientôt un véritable étranglement, dont le cercle de gorge était situé à peu près au quart de la distance des anneaux (*fig.* 26); cette partie étranglée a continué à s'amincir graduellement, tandis que la partie supérieure de la figure se gonflait; enfin, le liquide s'est séparé en deux masses inégales, qui sont demeurées respectivement adhérentes aux deux anneaux; la masse supérieure constituait une sphère complète, et la masse inférieure une lentille bi-convexe. L'ensemble de ces phénomènes a duré fort peu de temps.

Pour découvrir si quelque cause particulière avait en réalité fait varier le rapport des densités, j'ai rapproché les anneaux, puis, après avoir réuni les deux masses liquides, j'ai soulevé de nouveau, et avec précaution, l'anneau supérieur, mais en m'arrêtant à la hauteur de 7 centimètres et demi, afin que la flèche de la convexité méridienne fût un peu plus forte que pour 8 centimètres. Or, la figure s'est montrée alors parfaitement symétrique, et n'a manifesté aucune tendance à se déformer, d'où il suit que l'égalité des densités n'avait éprouvé aucune altération appréciable.

J'ai recommencé, avec plus de soins encore, l'expérience de la figure de 8 centimètres de hauteur, et j'ai pu approcher davantage de la forme cylindrique; mais avant qu'elle fût atteinte, les mêmes phénomènes se sont reproduits; seulement, la déformation s'est effectuée d'une manière inverse : c'est-à-dire que la figure s'est amincie par le haut et renflée par le bas, de sorte qu'après la séparation en deux masses, la sphère complète se trouvait dans l'anneau inférieur, et la lentille dans l'anneau supérieur. En réunissant ensuite, comme précédemment, les deux masses, et plaçant les anneaux à la distance de 7 centimètres et demi, la figure s'est de nouveau montrée régulière et permanente.

Ainsi, lorsqu'on essaie d'obtenir, entre deux anneaux solides, un cylindre liquide dont la hauteur soit quadruple du diamètre, la figure se détruit toujours spontanément, sans cause apparente, avant même que l'on soit arrivé à la forme cylindrique exacte. Or, comme le cylindre est nécessairement une figure d'équilibre quel que soit le rapport entre la hauteur et le diamètre, il faut conclure du fait précédent, que, pour un cylindre dont la hauteur est quadruple du diamètre, l'équilibre est instable.

Les cylindres de moindre hauteur que j'avais obtenus ne m'ayant pas présenté d'effets analogues, j'ai voulu m'assurer si ces cylindres étaient réellement stables. J'ai donc reformé, avec les mêmes anneaux, un cylindre de 6 centimètres de hauteur; mais celui-ci, abandonné à lui-même pendant une demi-heure entière, n'a présenté qu'une trace d'altération dans sa forme, et encore cette trace s'était montrée un quart d'heure environ après la formation du cylindre, et n'avait plus augmenté ensuite, ce qui montre qu'elle était due à une petite cause accidentelle.

Les faits ci-dessus nous conduisent donc aux conclusions suivantes : 1° le cylindre constitue une figure d'équilibre stable, lorsque le rapport entre sa hauteur et son diamètre est égal à 3, et, à plus forte raison, lorsque ce rapport est inférieur à 3; 2° le cylindre constitue une figure d'équilibre instable, lorsque le rapport entre sa hauteur et son diamètre est égal à 4, et, à plus forte raison, lorsqu'il surpasse 4; 3° il existe, par conséquent, un rapport intermédiaire, qui correspond au passage de la stabilité à l'instabilité : nous nommerons ce dernier rapport *la limite de la stabilité du cylindre.*

§ 45. Cependant, on pourrait faire à ces conclusions une objection fondée. Notre figure liquide est complexe, puisque sa surface totale se compose d'une portion cylindrique et de deux portions présentant une courbure sphérique. Or, on ne peut pas affirmer que ces deux dernières portions sont sans influence sur la stabilité ou l'instabilité de la portion intermédiaire, et, par suite, sur la valeur du rapport qui constitue la limite entre ces deux états. Pour que les conclusions précédentes fussent rigoureusement applicables au cylindre, il faudrait donc faire en sorte que la figure ne présentât d'autre surface libre que la surface cylindrique, ce qui est facile en remplaçant les anneaux par des disques pleins.

J'ai effectué cette substitution, en employant des disques de même diamètre que les anneaux précédents; mais les résultats n'ont pas changé : le cylindre de 6 centimètres de hauteur s'est bien formé et s'est montré stable, tandis que la figure de 8 centimètres de hauteur a commencé à s'altérer avant d'être exactement cylindrique, et s'est rapidement détruite; seulement le résultat final de cette destruction ne se composait plus, comme dans le cas des anneaux, d'une sphère complète et d'une lentille bi-convexe, mais bien, ainsi que cela devait évidemment être, de deux portions inégales de sphères, respectivement adhérentes aux deux surfaces solides en regard.

La limite de la stabilité du cylindre se trouve donc réellement comprise entre 3 et 4.

Les expériences que nous venons de rapporter sont très-délicates : elles exigent quelque habitude. Ici, comme dans tous les cas où il s'agit de mesures, il faut laisser séjourner l'huile dans le mélange alcoolique pendant deux ou trois jours, puis se débarrasser de la pellicule (note 2 de la page 53); ensuite, lorsque la masse introduite de nouveau dans le vase a été attachée aux deux disques solides, il faut attendre encore quelque temps, afin que les deux liquides soient bien exactement à la même température; en outre, on comprend que les expériences doivent être exécutées dans un appartement dont la température demeure aussi constante que possible. Enfin, il est à peine nécessaire d'ajouter que lorsqu'on mêle le liquide alcoolique après y avoir versé de petites quantités d'alcool pur ou d'alcool à 16°, les mouvements de la spatule doivent être très-lents, afin de ne pas communiquer trop d'agitation à la masse d'huile; on est même parfois obligé d'abaisser momentanément le disque supérieur, pour donner plus de stabilité à la masse, et empêcher ainsi les mouvements dont il s'agit d'en amener la désunion.

§ 46. On peut se demander si la non-symétrie qui se montre constamment dans la modification spontanée des figures instables ci-dessus, est le résultat d'une loi qui régit ces figures, ou bien si elle provient tout simplement, comme on serait tenté de le croire au premier abord, de différences imperceptibles laissées encore entre les densités des deux liquides, différences qui, agissant sur des figures instables, pourraient, malgré leur extrême petitesse, déterminer cette non-symétrie.

Après avoir terminé les expériences précédentes, je réfléchis que, pour résoudre la question dont il s'agit, il suffirait de disposer les choses de manière que l'axe de la figure, au lieu d'être vertical comme dans ces mêmes expériences, fût placé dans une direction horizontale. En effet, dans ce dernier cas, une différence minime entre les densités doit avoir pour résultat d'arquer légèrement la figure, mais ne peut évidemment donner au liquide aucune tendance à se porter en plus grande masse vers l'une des extrémités de la figure que vers l'autre; d'où il suit que si alors la déformation spontanée de la figure s'effectue encore d'une manière non symétrique, ce ne peut être qu'en vertu d'une loi particulière.

D'un autre côté, si la figure tend réellement par elle-même à se déformer d'une manière non symétrique, il est clair que, dans le cas de la position verticale de l'axe, l'effet d'une trace de différence entre les densités doit concourir avec celui de l'instabilité, et accélérer ainsi l'instant où la figure commence à s'altérer spontanément. En écartant donc cette cause accessoire par la direction horizontale de l'axe de la figure, on peut espérer d'approcher plus près de la forme cylindrique, ou même d'atteindre exactement cette forme, et l'on comprend, en outre, que la difficulté des opérations pourra se trouver considérablement diminuée.

J'ai donc fait construire un système solide présentant deux disques verticaux de même diamètre placés parallèlement entre eux, à la même hauteur, et en regard l'un de l'autre. Chacun de ces disques est porté par un fil de fer fixé normalement à son centre, puis replié verticalement de haut en bas, et les extrémités inférieures de ces deux fils sont attachées à une même tige horizontale munie de quatre petits pieds. Ce système est représenté en perspective dans la figure 27. Le diamètre des disques est de 30^{mm}; mais la distance qui les sépare n'est pas quadruple de ce diamètre : j'ai pensé qu'en rapprochant davantage la figure de la limite de la stabilité, les opérations exigeraient encore moins de peine; la distance dont il s'agit n'est que de 108^{mm}, de sorte que le rapport entre la longueur et le diamètre du cylindre liquide qui s'étendrait de l'un à l'autre disque, serait égal à 3, 6.

Voici maintenant ce qu'a donné l'emploi de ce système. En premier lieu, les opérations ont été effectivement beaucoup plus faciles [1]. En second

[1] Les deux disques étant placés, dans le système solide dont il s'agit, à une distance invariable l'un de l'autre, il est nécessaire, pour faire adhérer à leur ensemble une masse d'huile dont le volume ne soit pas trop considérable, d'employer une pièce accessoire, qui se compose d'un anneau

lieu, la figure tendait encore à se déformer avant d'être rendue tout à fait cylindrique; mais cette tendance se présentait toujours d'une manière non symétrique, comme dans les figures verticales; d'où l'on peut déjà conclure que la non-symétrie du phénomène n'est pas occasionnée par une différence entre les densités des deux liquides. En troisième lieu, j'ai pu, à l'aide d'un petit artifice, pousser l'expérience plus loin, et parvenir à former un cylindre exact [1]. Celui-ci a paru persister pendant un instant; puis il a commencé à s'étrangler sur une partie de sa longueur pour se renfler sur l'autre, comme les figures verticales, et le phénomène de la désunion s'est achevé de la même manière, en donnant lieu à deux masses finales de volumes différents.

J'ai répété plusieurs fois l'expérience, et toujours avec les mêmes résultats; seulement la séparation s'est effectuée tantôt d'un côté, tantôt de l'autre du milieu de la longueur de la figure. Du reste, si le phénomène s'opère d'une manière non symétrique par rapport au milieu de la longueur de la figure soit horizontale soit verticale, la symétrie subsiste, au contraire, toujours par rapport à l'axe; en d'autres termes, pendant toute la durée du phénomène, la figure ne cesse pas d'être de révolution. Ajoutons ici que, dans la figure horizontale, les longueurs respectives des portions étranglée et renflée paraissent égales entre elles; nous démontrerons, dans la série suivante, que cette égalité est rigoureusement exacte, du moins au premier instant du phénomène.

On voit donc maintenant, que le mode de déformation de ces cylindres

en fil de fer de même diamètre que les disques, porté par un fil droit de même métal dont on tient à la main l'extrémité libre; à l'aide de cet anneau, on étire sans peine la masse préalablement attachée à l'un des disques, jusqu'à ce qu'elle s'attache également à l'autre; puis on enlève l'anneau. Celui-ci entraîne alors avec lui une petite portion de la masse; mais, en sortant du vase, il abandonne cette portion dans le liquide alcoolique, et on la fait disparaître au moyen de la seringue.

[1] Voici, pour cela, comment il faut procéder dans l'extraction de l'excès d'huile. On fait d'abord marcher l'opération avec une rapidité convenable, jusqu'à ce que la figure commence à se déformer; alors on promène légèrement l'extrémité du bec de la seringue le long de la partie supérieure de la masse, en allant de la portion la plus épaisse vers l'autre : cette faible action suffit pour ramener vers cette dernière une petite quantité d'huile, et rétablir ainsi la symétrie de la figure; puis on exécute une nouvelle absorption, l'on régularise encore la figure, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on atteigne exactement la forme cylindrique.

est bien le résultat d'une propriété qui leur est inhérente. Nous déduirons, plus loin, cette propriété, comme conséquence nécessaire des lois qui régissent un phénomène plus général.

Il résulte, en outre, de l'expérience ci-dessus, que le rapport 3,6 est encore supérieur à la limite de la stabilité; de sorte que la valeur exacte de celle-ci doit se trouver entre les nombres 3 et 3,6.

On comprend que ce mode d'expérience pourrait être employé à la détermination très-approchée de la valeur dont il s'agit; c'est ce que je me propose de faire plus tard, et je rendrai compte du résultat dans la série suivante, où j'aurai à revenir sur la question de la limite de la stabilité du cylindre.

§ 47. Dans les cylindres instables que nous venons de former, le rapport entre la longueur et le diamètre était peu considérable; mais qu'arriverait-il si l'on parvenait à obtenir des cylindres d'une grande longueur relativement à leur diamètre? Or, on peut, dans certaines conditions, réaliser des figures de cette espèce plus ou moins exactement cylindriques, et nous allons voir quels sont alors les résultats de la rupture spontanée de l'équilibre.

Un fait que j'ai décrit dans le paragraphe 20 du mémoire précédent, et que je vais rapporter de nouveau avec plus de détails, donne un premier moyen d'obtenir un semblable cylindre, et d'en observer la destruction spontanée.

Lorsqu'on introduit de l'huile à l'aide d'un petit entonnoir dans un mélange alcoolique qui renferme un léger excès d'alcool, et que l'on verse l'huile avec assez de rapidité pour maintenir l'entonnoir plein, le liquide forme, à partir du bec de celui-ci jusqu'au fond du vase où la masse se rassemble, une longue traînée, dont le diamètre va en augmentant un peu de la partie supérieure à la partie inférieure, de manière à former une sorte de cône très-allongé qui ne diffère pas beaucoup d'un cylindre[1]. Cette figure à peu près cylindrique, dont la hauteur est consi-

[1] Ce petit accroissement de diamètre est dû au retard qu'occasionne dans le mouvement de l'huile la résistance du liquide ambiant.

dérable par rapport au diamètre, se maintient sans altération sensible tant que l'huile qui la constitue a une vitesse de translation suffisante; mais lorsqu'on cesse de verser de l'huile dans l'entonnoir, et que, par suite, le mouvement de translation se ralentit, on voit bientôt le cylindre se résoudre rapidement en une série de sphères sensiblement égales en diamètre, également espacées, et ayant leurs centres rangés sur la droite qui formait l'axe du cylindre.

Pour que l'on obtienne ainsi une complète réussite, les éléments de l'expérience doivent avoir entre eux certaines proportions : l'entonnoir dont je me suis servi, avait un orifice d'environ 3 millimètres de diamètre, et une hauteur de 11 centimètres; il reposait dans le goulot d'un grand flacon qui renfermait le mélange alcoolique, et son orifice n'était plongé que de quelques millimètres au-dessous de la surface du liquide; enfin, la longueur du cylindre d'huile, ou la distance entre l'orifice et la masse inférieure, était à peu près de 20 centimètres. Dans ces circonstances, il s'est constamment formé trois sphères, dont la supérieure demeurait adhérente au bec de l'entonnoir; cette dernière était, par conséquent, incomplète. Ajoutons ici, que l'excès d'alcool contenu dans le mélange ne doit être ni trop grand ni trop petit; on le rend convenable à l'aide de quelques essais préliminaires.

§ 48. La constance et la régularité du résultat de cette expérience achèvent donc de montrer que les phénomènes auxquels donne lieu la rupture spontanée de l'équilibre d'un cylindre liquide instable sont régis par des lois déterminées.

Dans cette même expérience, la transformation s'effectue avec trop de rapidité pour que l'on puisse bien en observer les phases; mais les phénomènes que nous ont présentés les cylindres plus gros et moins allongés, savoir la formation d'un renflement et d'un étranglement juxtaposés et égaux, ou à peu près, en longueur, l'accroissement graduel en épaisseur de la portion renflée et l'amincissement simultané de la portion étranglée, etc., autorisent à conclure que, dans le cas d'un cylindre dont la longueur est considérable par rapport au diamètre, les choses se passent de la manière suivante : la figure commence par se modifier de manière à offrir une suite régulière et uniforme de portions renflées séparées par des portions étranglées de même longueur qu'elles, ou à peu près; cette altération, d'abord très-faiblement indiquée, va en se prononçant de plus en plus, les portions étranglées s'amincissant graduellement, tandis que les portions renflées augmentent d'épaisseur, et la figure ne cessant pas d'être de révolution; enfin les étranglements se rompent, et les parties de la figure ainsi complétement isolées les unes des autres prennent chacune la forme sphérique.

Nous devons ajouter ici, que la fin du phénomène est accompagnée d'une particularité remarquable, dont nous n'avons point encore parlé; mais comme elle ne constitue, pour ainsi dire, qu'une partie accessoire du phénomène général, nous en renvoyons la description plus loin (voir § 62).

§ 49. On doit se demander pourquoi, dans l'expérience que nous avons décrite en dernier lieu, le cylindre ne se résout en sphères que lors d'un affaiblissement dans la vitesse de translation du liquide qui le constitue. On ne voit pas, en effet, comment un mouvement de translation pourrait donner de la stabilité à une figure liquide qui serait instable à l'état de repos. Pour nous expliquer cette singularité apparente, remarquons que, la transformation spontanée d'un cylindre instable s'effectuant sous l'action de forces continues, la vitesse avec laquelle le phénomène s'opère doit être accélérée; c'est d'ailleurs ce que l'on constate aisément dans les expériences relatives aux cylindres plus gros et moins allongés; cette même vitesse doit donc toujours être très-petite à l'origine du phénomène. Or, dans le cas dont nous nous occupons, les changements de figure s'opérant dans le liquide du cylindre pendant que ce liquide est animé d'un mouvement de translation, l'on voit, d'après ce qui précède, que si ce mouvement de translation est suffisamment rapide, les changements de figure ne pourront acquérir, durant le trajet du bec de l'entonnoir à la masse rassemblée au fond du vase, qu'un développement très-peu prononcé; de sorte que, le liquide se renouvelant continuellement, aucune déformation n'aura le temps de devenir bien sensible à l'œil. Ainsi, tant que la vitesse d'écoulement sera assez grande, la figure liquide semblera conserver sa forme à peu près cylindrique, bien qu'ayant une longueur considérable relativement à son diamètre. Au contraire, pour une vitesse de translation suffisamment petite, les déformations auront le temps de s'effectuer d'une manière complète, et l'on pourra voir le cylindre se résoudre en sphères sur toute sa longueur.

§ 50. Voici maintenant un autre mode d'expérience, qui permet d'observer le résultat de la transformation dans des conditions moins restreintes et plus régulières, sous certains rapports, que celles de l'expérience précédente, et qui nous conduira, en outre, à de nouvelles conséquences relativement aux lois du phénomène. Nous allons d'abord décrire d'une manière succincte l'appareil et les opérations, et nous ajouterons ensuite les détails nécessaires.

Les pièces principales de l'appareil sont : 1° une plaque rectangulaire de verre à glace, de 25 centimètres de longueur sur 20 de largeur; 2° deux bandes du même verre, longues de 15 centimètres, larges de 2, et épaisses de 5 à 6 millimètres, parfaitement dressées et polies sur leur épaisseur; 3° deux bouts de fil de cuivre d'environ 1 millimètre d'épaisseur, et de 5 centimètres de longueur; ces fils doivent être bien droits, et l'une des extrémités de chacun d'eux doit être coupée bien nettement, puis soigneusement amalgamée.

La plaque étant placée horizontalement, on pose à plat sur sa surface, et parallèlement à ses grands côtés, les deux bandes de verre, de manière à laisser entre elles un intervalle d'environ un centimètre; puis on introduit dans celui-ci les deux fils de cuivre, en les plaçant en ligne droite dans le sens de la longueur des bandes, et de manière que les extrémités amalgamées se regardent et soient distantes l'une de l'autre de quelques centimètres. Cela fait, on dépose entre ces mêmes extrémités un globule de mercure bien pur, de 5 à 6 millimètres de diamètre, puis on rapproche les deux bandes de verre jusqu'à ce qu'elles viennent toucher les fils, de sorte qu'alors elles ne laissent plus entre elles qu'un intervalle égal en largeur au diamètre de ces mêmes fils.

La petite masse de mercure comprimée ainsi latéralement, est obligée de s'allonger et de marcher des deux côtés vers les surfaces amalgamées. Si elle ne les atteint pas, on fait glisser les fils vers elle, jusqu'à ce que le contact et l'adhérence soient établis. Alors on fait glisser les fils en sens contraire, de manière à les éloigner l'un de l'autre, ce qui détermine un nouvel allongement de la petite masse liquide, et une diminution de ses dimensions verticales. En agissant avec précaution, et en accompagnant l'opération de petits coups donnés avec le doigt sur l'appareil pour faciliter les mouvements du mercure, on parvient à étendre la petite masse jusqu'à ce que son épaisseur verticale soit partout égale à son épaisseur horizontale, c'est-à-dire à celle des fils de cuivre. Le mercure forme ainsi un fil liquide de même diamètre que les fils solides auxquels il est attaché, et d'une longueur de 8 à 10 centimètres. Ce fil, vu la petitesse de son diamètre, qui rend l'action de la pesanteur insensible relativement à celle de l'attraction moléculaire, pourra être considéré comme exactement cylindrique; de sorte que l'on aura, de cette manière, un cylindre liquide ayant une longueur de 80 à 100 fois son diamètre, et attaché par ses extrémités à des parties solides, cylindre qui conserve sa forme tant qu'il demeure emprisonné entre les bandes de verre.

Les choses étant dans cet état, on pose des poids sur les parties des deux fils de cuivre qui font saillie au delà des extrémités des bandes, afin de maintenir ces fils dans des positions bien fixes; puis enfin, à l'aide d'un moyen que nous indiquerons plus bas, on enlève verticalement les deux bandes de verre. Au même instant, le cylindre liquide, libre de ses entraves, se transforme en une série nombreuse de sphères isolées, rangées en ligne droite suivant la direction du cylindre qui leur a donné naissance [1]. Ordinairement la régularité du système de sphères ainsi obtenu laisse à désirer : les sphères présentent des différences dans leurs diamètres respectifs et dans les distances qui les séparent, ce qui provient sans doute de petites causes accidentelles dépendantes du mode d'opération; mais quelquefois les différences sont si minimes, que l'on peut alors considérer la régularité comme parfaite. Quant au nombre de sphères correspondant à un cylindre d'une longueur déterminée, il varie d'une ex-

[1] C'est sans doute encore, pour le dire en passant, au même ordre de phénomènes qu'il faut rapporter la conversion en globules d'un fil de métal fondu par une décharge électrique convenable.

périence à une autre; mais ces variations, qui sont dues également aux petites causes accidentelles, demeurent comprises entre des limites peu étendues.

§ 51. Complétons maintenant la description de l'appareil, et ajoutons quelques détails concernant les opérations.

La plaque de verre devant être amenée à une position parfaitement horizontale, elle est portée, à cet effet, par quatre pieds à vis.

A chacune des extrémités de la surface inférieure des bandes de verre, est collée une petite bande transversale de papier mince, de sorte que les bandes de verre reposant sur la plaque par l'intermédiaire de ces petits papiers, leur surface inférieure n'est pas en contact avec la surface de la plaque. Sans cette précaution, les bandes de verre pourraient contracter avec la plaque une certaine adhérence, qui introduirait un obstacle lors de l'enlèvement vertical de ces mêmes bandes. Celles-ci portent, en outre, sur leur surface supérieure et à 6 millimètres de chacune de leurs extrémités, une petite vis implantée verticalement, la pointe en haut, dans le verre, bien fixée à celui-ci avec du mastic, et s'élevant de 8 millimètres au-dessus de sa surface. Ces quatre vis sont destinées à recevoir des écrous servant à fixer les bandes au système à l'aide duquel on les enlève.

Ce système est en fer; il se compose, en premier lieu, de deux plaques rectangulaires ayant 55 millimètres de longueur, 12 de largeur, et 3 d'épaisseur. Chacune d'elles est percée perpendiculairement à ses grandes faces, de deux trous placés de telle manière qu'en posant chacune de ces plaques transversalement sur les extrémités des deux bandes de verre, les vis dont ces dernières sont munies puissent s'engager dans ces quatre ouvertures. Les vis étant assez longues pour faire saillie au-dessus des ouvertures, on peut alors y adapter de petits écrous, de sorte qu'en serrant ceux-ci, les bandes de verre se trouvent fixées dans une position invariable l'une par rapport à l'autre. Les ouvertures ont une forme allongée dans le sens de la longueur des plaques de fer; de cette manière on peut, après avoir desserré les écrous, augmenter ou diminuer la distance des deux bandes de verre sans être obligé d'enlever les plaques. Sur le milieu de la surface supérieure de chacune des plaques, est implantée une tige verticale de 5 centimètres de hauteur, et les extrémités supérieures de ces deux tiges sont réunies par une tige horizontale, du milieu de laquelle part une troisième tige verticale, dirigée de bas en haut, et longue de 15 centimètres. Cette dernière tige est à section carrée, et son épaisseur est de 5 millimètres. Lorsque les écrous sont serrés, on voit que les bandes de verre, les plaques de fer, et l'espèce de fourche qui réunit celles-ci, constituent un système invariable. La longue tige verticale sert à diriger le mouvement de ce système; à cet effet, elle passe à frottement très-doux dans un conduit de même section qu'elle et de 5 centimètres de hauteur, percé dans une pièce qui est soutenue d'une manière bien fixe, par un support convenable, à 10 centimètres au-dessus de la plaque de verre. Enfin, la pièce percée est munie latéralement d'une vis de pression, qui permet de serrer la tige dans le conduit. A l'aide de cette disposition, si tout l'ensemble de l'appareil a été travaillé avec soin, les deux bandes de verre, une fois les petits écrous serrés, ne pourront se mouvoir qu'avec une parfaite simultanéité, parallèlement à elles-mêmes, et toujours identiquement dans une même direction perpendiculaire à la plaque de verre. Lorsque le cylindre liquide est bien formé, et que les poids sont posés sur les portions libres des fils de cuivre, on passe le doigt sous la branche horizontale de la fourche, et l'on soulève le système mobile jusqu'à une hauteur convenable au-dessus de la plaque de verre; puis on le maintient à cette hauteur en serrant la vis de pression, afin d'observer le résultat de la transformation du cylindre.

L'amalgamation des extrémités des fils de cuivre s'étendant toujours un peu sur la surface convexe de ceux-ci, on enduit cette surface d'un vernis, afin que l'amalgamation ne reste à découvert que sur la petite section plane.

Il serait à peu près impossible de juger, à la simple vue, du point précis où il faut cesser d'éloigner les fils de cuivre l'un de l'autre pour que le liquide ait atteint la forme cylindrique. Afin d'écarter cette difficulté, on se donne d'avance la longueur du cylindre, et l'on marque cette longueur, par deux traits déliés, sur la surface latérale de l'une des bandes de verre; puis l'on détermine, par le calcul, d'après le diamètre connu des fils, le poids du globule de mercure qui doit former un cylindre de ce diamètre et de la longueur voulue; enfin, au moyen d'une balance sensible, on fait en sorte que le globule destiné à l'expérience ait exactement ce poids. Il n'y a plus alors qu'à étirer la petite masse jusqu'à ce que les extrémités des fils de cuivre entre lesquels elle est comprise aient atteint les marques tracées sur le verre.

Enfin, lorsqu'on fait une série d'expériences, on peut se servir plusieurs fois du même mercure, en réunissant, à la suite de chaque observation, les sphères isolées en une seule masse. Cependant, après un certain nombre d'expériences, le mercure semble perdre de sa fluidité, et la masse se désunit toujours en quelque point, malgré toutes les précautions possibles, avant qu'elle ait été étirée jusqu'à la longueur voulue, phénomènes qui proviennent de ce que les fils solides cèdent un peu de cuivre au mercure. Il faut alors enlever ce dernier, nettoyer les plaques de verre et les bandes, et prendre un nouveau globule. On est parfois aussi obligé de renouveler l'amalgamation des fils.

§ 52. A l'aide de l'appareil et des procédés ci-dessus, j'ai exécuté une suite d'expériences sur la transformation des cylindres; mais, avant d'en rapporter les résultats, il est nécessaire, pour l'interprétation de ceux-ci, d'envisager le phénomène d'un peu plus près.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur considérable relativement à son diamètre, et attaché par ses extrémités à deux bases solides; supposons-le effectuant sa transformation, et considérons la figure à une époque du phénomène antérieure à la séparation des masses, c'est-à-dire lorsque cette même figure se compose encore de renflements alternant avec des étranglements. Les surfaces des renflements faisant saillie en dehors de la surface cylindrique primitive, et celles des étranglements se trouvant, au contraire, en dedans de cette même surface, nous pouvons concevoir dans la figure une série de sections planes perpendiculaires à l'axe, et ayant toutes un diamètre égal à celui du cylindre; ces sections constitueront évidemment les limites qui séparent les portions renflées des portions étranglées, en sorte que chaque portion, soit étranglée soit renflée, sera terminée par deux d'entre elles; en outre, les deux bases solides étant nécessairement au nombre des sections dont il s'agit, chacune de ces bases devra occuper l'extrémité même d'une portion étranglée ou renflée.

Cela posé, trois hypothèses se présentent relativement à ces deux portions de la figure, c'est-à-dire à celles qui s'appuient respectivement sur chacune des bases solides. En premier lieu, nous pouvons supposer que ces portions soient toutes deux renflées. Dans ce cas, chacun des étranglements enverra dans les deux renflements qui lui sont immédiatement adjacents le liquide qu'il perd, les mouvements de transport du liquide s'effectueront d'une même manière dans toute l'étendue de la figure, et la transformation pourra s'opérer avec une parfaite régularité, en donnant lieu à des sphères isolées exactement égales en diamètre et également espacées. Seulement, cette régularité ne s'étendra pas aux deux renflements extrêmes : car chacun de ceux-ci se trouvant terminé d'un côté par une surface solide, il ne recevra de liquide que de l'étranglement situé de l'autre côté, et acquerra, par conséquent, moins de développement que les renflements intermédiaires. Dans ces circonstances, on trouverait donc, après la terminaison du phénomène, deux portions de sphère respectivement adhérentes aux deux bases solides, et présentant chacune un diamètre un peu moindre que celui des sphères isolées rangées entre elles.

En second lieu, nous pouvons admettre que les portions extrêmes de la figure soient l'une un étranglement et l'autre un renflement. Alors le liquide perdu par la première ne pouvant traverser la base solide, il sera nécessairement chassé en totalité dans le renflement voisin, de sorte que celui-ci recevant d'un seul côté tout le liquide nécessaire à son développement, il ne devra rien recevoir du côté opposé, et que, par conséquent, tout le liquide perdu par le second étranglement se rendra de même dans le second renflement, et ainsi de suite jusqu'au renflement extrême. La distribution des mouvements de transport sera donc encore uniforme dans toute la figure, et la transformation pourra également s'effectuer d'une manière parfaitement régulière. La régularité s'étendra même évidemment aux deux portions extrêmes, du moins tant que les étranglements n'auront pas atteint leur plus grande profondeur ; mais, au delà de ce point, il n'en sera plus tout à fait ainsi : car alors l'indépendance s'établissant entre les masses, chacun des renflements, à l'exception de celui qui s'appuie sur la base solide, se grossira par les deux côtés à la fois, pour passer à l'état de sphère isolée, en s'appropriant les deux demi-étranglements adjacents, tandis que le renflement extrême ne pourra se grossir que d'un seul côté. Ainsi, après la terminaison du phénomène, on trouverait, à l'une des bases solides, une portion de sphère d'un diamètre peu inférieur à celui des sphères isolées, et, à l'autre base, une portion de sphère beaucoup plus petite, provenant du demi-étranglement qui y est demeuré attaché.

Enfin, en troisième lieu, supposons que les portions extrêmes de la figure soient toutes deux des étranglements, ce qui, après la terminaison du phénomène, laisserait, à chacune des bases solides, une portion de sphère égale à la plus petite des deux ci-dessus. Dans ce cas, pour fixer les idées, partons de l'un de ces étranglements extrêmes, par exemple de celui de gauche. Tout le liquide perdu par ce premier étranglement étant chassé dans le renflement contigu, et suffisant au développement de celui-ci, admettons que tout le liquide perdu par le second étranglement se rende de même dans le second renflement, et ainsi de suite; alors tous les renflements, à l'exception du dernier à droite, prendront simplement leur développement normal; mais le renflement de droite, qui reçoit, comme chacun des autres, de la part de l'étranglement qui le précède la quantité de liquide nécessaire à son développement, reçoit, en outre, la même quantité de liquide de la part de l'étranglement qui s'appuie sur la base solide voisine, de sorte qu'il sera plus volumineux que les autres. On voit donc que, dans le cas dont il s'agit, les actions opposées des deux étranglements extrêmes introduisent dans le reste de la figure un excès de liquide. Or, quelque autre hypothèse que l'on fasse sur la distribution des mouvements de transport, il faudra toujours, ou bien que l'excès de volume se répartisse sur tous les renflements à la fois, ou bien qu'il augmente seulement les dimensions d'un ou deux d'entre eux; mais la première de ces suppositions est évidemment inadmissible, à cause de la complication qu'elle exigerait dans les mouvements de transport; il faudrait donc admettre la seconde, et alors les sphères isolées ne seraient pas toutes égales. Ainsi ce troisième mode de transformation amènerait nécessairement par lui-même une cause d'irrégularité, et, en outre, il ne permettrait pas une distribution uniforme des mouvements de transport, puisqu'il y aurait opposition, à l'égard de ces mouvements, au moins dans les deux étranglements extrêmes.

On doit donc regarder comme bien probable que la transformation se disposera suivant l'un ou l'autre des deux premiers modes, et jamais suivant le troisième : c'est-à-dire que les choses s'arrangeront de manière que la figure qui se transforme ait pour portions extrêmes, soit deux renflements, soit un étranglement et un renflement, mais non deux étranglements. Dans le premier cas, ainsi que nous l'avons vu, le mouvement du liquide de tous les étranglements s'effectuerait des deux côtés à la fois; et, dans le second, ce mouvement aurait lieu pour tous dans un seul et même sens. Si telle est réellement la disposition naturelle au phénomène, on comprend, en outre, que celui-ci la conservera lors même qu'il serait troublé dans sa régularité par de petites causes étrangères. Or, c'est ce que confirment, comme nous le verrons, les expériences relatives au cylindre de mercure : bien que la transformation de ce cylindre ait rarement donné un système de sphères parfaitement régulier, j'ai trouvé, dans la grande majorité des résultats, soit chacune des bases solides occupée par une masse peu inférieure en diamètre aux sphères isolées, soit l'une des bases occupée par une semblable masse et l'autre par une masse beaucoup plus petite.

§ 53. Nommons, pour abréger, *divisions* du cylindre, les portions de la figure dont chacune fournit une sphère, soit que nous considérions ces portions par la pensée dans le cylindre même, avant le commencement de la transformation, soit que nous les prenions pendant l'accomplissement du phénomène, c'est-à-dire pendant les modifications qu'elles subissent pour arriver à la forme sphérique. La longueur d'une division est évidemment la distance qui, pendant la transformation, se trouve comprise entre les cercles de gorge de deux étranglements voisins, et elle est, par conséquent, égale à la somme des longueurs d'un renflement et de deux demi-étranglements. D'après cela, voyons comment la longueur dont il s'agit, c'est-à-dire celle d'une division, se déduira du résultat d'une expérience.

Supposons la transformation parfaitement régulière, et soit λ la longueur d'une division, l celle du cylindre, et n le nombre de sphères isolées trouvées après la terminaison du phénomène. Chacune de ces sphères étant fournie par une division complète, et chacune des deux masses extrêmes par une portion de division, la longueur l se composera de n fois λ, plus deux fractions de λ. Pour estimer les valeurs de ces fractions, rappelons-nous que la longueur d'un étranglement est exactement ou sensiblement égale à celle d'un renflement (§ 46); or, dans le premier des deux cas normaux (§ précéd.), c'est-à-dire lorsque les masses demeurées adhérentes aux bases après la terminaison du phénomène sont toutes deux de la grande espèce, chacune d'elles provient évidemment d'un renflement plus un demi-étranglement, et, par conséquent, des trois quarts d'une division; la somme des longueurs des deux portions du cylindre qui ont fourni ces masses est donc égale à une fois et demie λ, et l'on aura, dans ce cas, $l=(n+1,5)\lambda$, d'où $\lambda=\frac{l}{n+1,5}$. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque les masses extrêmes sont l'une de la grande et l'autre de la petite espèce, cette dernière provient d'un demi-étranglement, ou du quart d'une division, de sorte que la somme des longueurs des portions du cylindre correspondantes à ces deux masses est égale à λ, et que, par conséquent, on aura $\lambda=\frac{l}{n+1}$.

Les dénominateurs respectifs de ces deux expressions représentant le nombre de divisions contenu dans la longueur totale du cylindre, il s'ensuit que ce nombre sera toujours soit un nombre entier simplement, soit un nombre entier plus un demi. D'une autre part, puisque le phénomène est régi par des lois déterminées, on comprend que, pour un cylindre d'un diamètre donné, formé d'un liquide donné, et placé dans des circonstances données, il existe une longueur normale que les divisions tendent à prendre, et qu'elles prendraient rigoureusement si la longueur totale du cylindre était infinie. Si donc il arrive que la longueur totale du cylindre, bien que limitée, est égale au produit de la longueur normale des divisions par un nombre entier ou bien par un nombre entier plus un demi, rien n'empêchera les divisions de prendre exactement cette longueur normale. Si, au contraire, ce qui aura lieu en général, la longueur totale du cylindre ne remplit pas l'une ou l'autre des deux conditions précédentes, on doit croire que les divisions prendront la longueur la plus approchée possible de la longueur normale; et alors, toutes choses égales d'ailleurs, la différence sera évidemment d'autant moindre que les divisions seront plus nombreuses, ou, en d'autres termes, que le cylindre sera plus long. On doit croire aussi que la transformation adoptera celui des deux modes le plus propre à atténuer la différence dont il s'agit, et c'est ce que confirme encore l'expérience, comme nous le verrons bientôt.

Ainsi que je l'ai déjà dit, quoique la transformation du cylindre de mercure se dispose presque toujours suivant l'un ou l'autre des deux modes normaux, le résultat est rarement très-régulier; il faut donc admettre que de petites causes perturbatrices accidentelles rendent, en général, les divisions formées dans une même expérience inégales en longueur; mais alors les expressions de λ obtenues plus haut donnent évidemment, dans chaque expérience, la longueur moyenne de ces divisions, ou, en d'autres termes, la longueur commune que les divisions auraient prise si la transformation s'était opérée d'une manière parfaitement régulière en donnant lieu au même nombre de sphères isolées et au même état des masses extrêmes.

Enfin, puisque le troisième mode de transformation s'est présenté, c'est-à-dire puisqu'il est arrivé quelquefois que chacune des bases se soit trouvée occupée par une masse de la petite espèce, si l'on veut faire abstraction de la cause particulière d'irrégularité inhérente à ce mode (§ précéd.), et chercher l'expression correspondante de λ, il suffit de remarquer que chacune des masses extrêmes provient alors d'un demi-étranglement, ou du quart d'une division, ce qui donnera évidemment $\lambda = \frac{l}{n + 0,5}$.

§ 54. Je vais maintenant rapporter les résultats des expériences. Le diamètre des fils de cuivre, et par conséquent du cylindre, était de $1^{mm},05$; j'ai donné d'abord au cylindre une longueur de 90^{mm}, et j'ai répété dix fois l'expérience, en annotant, après chacune d'elles, le nombre des sphères isolées produites et l'état des masses adhérentes aux bases; puis j'ai calculé, pour chaque résultat, la valeur correspondante de la longueur d'une division, au moyen de celle des trois formules du paragraphe précédent qui se rapportait à ce même résultat.

J'ai fait ensuite dix nouvelles expériences, en donnant au cylindre une longueur de 100mm, et j'ai calculé de même les valeurs correspondantes de la longueur d'une division.

Voici le tableau des résultats fournis par ces cylindres, et des valeurs que l'on en tire pour la longueur d'une division. Chacune des deux séries ne m'a donné qu'un seul résultat parfaitement régulier; je l'ai indiqué par le signe * placé à côté du nombre de sphères isolées correspondant.

LONGUEUR DU CYLINDRE, 90mm.			LONGUEUR DU CYLINDRE, 100mm.		
NOMBRE des sphères isolées.	MASSES adhérentes aux bases.	LONGUEUR d'une division.	NOMBRE des sphères isolées.	MASSES adhérentes aux bases.	LONGUEUR d'une division.
10	Deux grandes.	mm 7,85	11	Une grande et une petite.	mm 8,55
*12	Id.	6,02	14	Deux grandes.	6,85
12	Deux petites.	7,20	13	Id.	6,45
13	Deux grandes.	5,43	14	Id.	6,43
14	Id.	5,81	*14	Une grande et une petite.	6,67
11	Id.	7,50	12	Id.	7,14
11	Id.	7,20	11	Deux grandes.	8,00
12	Une grande et une petite.	6,92	14	Une grande et une petite.	6,67
13	Deux grandes.	6,81	13	Deux grandes.	6,90
11	Id.	7,30	10	Id.	8,03

Comme on le voit par ce tableau, en premier lieu, les différentes valeurs que l'on obtient pour la longueur d'une division ne s'écartent pas assez les unes des autres pour que l'on puisse méconnaître une tendance vers une valeur constante dont l'uniformité n'est altérée que par l'influence de petites causes accidentelles.

En second lieu, sur les vingt expériences, il est arrivé seulement une fois, que les masses adhérentes aux bases ont été l'une et l'autre de la petite espèce.

En troisième lieu, les deux résultats parfaitement réguliers ont donné identiquement la même valeur pour la longueur d'une division; cette valeur exprimée d'une manière approchée avec deux décimales, est $6^{mm},67$; mais son expression exacte est $6^{mm}\frac{2}{3}$: car l'opération à effectuer consiste, pour le cas de la première série, dans la division de 90^{mm} par 13,5, et, pour le cas de la seconde série, dans la division de 100^{mm} par 15. Comme les deux longueurs données au cylindre sont considérables relativement au diamètre, et que, par suite, les nombres de division sont assez grands, cette valeur $6^{mm}\frac{2}{3}$ doit constituer à fort peu près, sinon rigoureusement, celle de la longueur normale des divisions. On voit, en outre, que, pour donner aux divisions cette valeur très-approchée ou exacte de la longueur normale, la transformation a choisi, d'une part le premier mode, et de l'autre part le second mode.

§ 55. Poursuivons la recherche des lois du phénomène qui nous occupe; nous en ferons bientôt une application importante, et l'on comprendra alors pourquoi nous donnons à cette partie de notre travail un développement si étendu.

On doit regarder à priori comme évident, que deux cylindres formés d'un même liquide et placés dans les mêmes circonstances, mais différents en diamètre, tendront à se diviser d'une manière semblable : c'est-à-dire que les longueurs normales respectives des divisions seront entre elles dans le rapport des diamètres de ces cylindres.

Afin de vérifier cette loi par l'expérience, je me suis procuré des fils de cuivre d'un diamètre exactement double de celui des premiers, et égal, par conséquent, à $2^{mm},1$, et j'ai exécuté avec ceux-ci une nouvelle série de dix expériences, en donnant au cylindre une longueur de 100^{mm}. Cette série ne m'a fourni également qu'un seul résultat parfaitement régulier, que j'ai indiqué, comme précédemment, par le signe * placé en regard du nombre de sphères isolées correspondant. Voici le tableau relatif à la série dont il s'agit.

NOMBRE des sphères isolées.	MASSES adhérentes aux bases.	LONGUEUR d'une division.
7	Deux petites.	mm 11,76
8	Deux grandes.	13,33
6	Une grande et une petite.	14,28
7	Id. id.	12,50
8	Deux grandes.	13,33
8	Id.	13,33
6	Une grande et une petite.	14,28
8	Id. id.	11,11
7	Deux petites.	11,76
6	Une grande et une petite.	14,28

En s'arrêtant à la seconde décimale, on a ici, comme on voit, pour la longueur d'une division correspondante au résultat parfaitement régulier, la valeur $13^{mm},33$; mais comme l'opération qui la donne consiste dans la division de 100^{mm} par 7,5, la valeur exprimée d'une manière complète est $13^{mm}\frac{1}{3}$. Telle est donc à fort peu près, sinon exactement, la longueur normale des divisions de ce nouveau cylindre; or, cette longueur $13^{mm}\frac{1}{3}$ est précisément double de la longueur $6^{mm}\frac{2}{3}$, qui appartient aux divisions du cylindre du paragraphe précédent; ces deux longueurs sont donc effectivement entre elles dans le rapport des diamètres des deux cylindres.

Le résultat parfaitement régulier du tableau ci-dessus ayant présenté une masse de la grande espèce à chacune des bases, il s'ensuit que, pour permettre aux divisions du cylindre actuel de prendre leur longueur normale ou la longueur la plus approchée possible de cette dernière, la transformation a dû se disposer suivant le premier mode; tandis qu'à l'égard d'un cylindre moitié moindre en diamètre, et ayant la même longueur totale 100^{mm}, la transformation s'était disposée suivant le second mode (§ précéd.)

Ici encore, le cas de deux masses de la petite espèce aux bases solides est le moins fréquent, bien qu'il se soit montré deux fois.

Enfin, les différentes valeurs de la longueur d'une division sont plus concordantes que dans les deux séries relatives au premier diamètre, et manifestent mieux, par conséquent, la tendance vers une valeur constante; on voit même que la longueur normale est celle qui s'est reproduite le plus souvent.

§ 56. D'après la loi que nous venons d'établir, lorsque la nature du liquide et les circonstances extérieures ne changent pas, la longueur normale des divisions est proportionnelle au diamètre du cylindre; ou bien encore, en d'autres termes, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre est constant.

Le cylindre du paragraphe 54 avait, comme nous l'avons vu, un diamètre de $1^{mm},05$, et la longueur normale de ses divisions était à fort peu près de $6^{mm},67$; par conséquent, lorsque le liquide est du mercure et que le cylindre repose sur une plaque de verre, la valeur du rapport constant dont il s'agit est, avec une grande approximation, $\frac{6,67}{1,05} = 6,35$.

Afin de savoir si la nature du liquide et les circonstances extérieures influent sur ce même rapport, nous allons chercher la valeur de celui-ci dans le cas d'un cylindre d'huile formé au sein du mélange alcoolique, ce que nous pouvons faire, au moins d'une manière approchée, à l'aide du résultat de l'expérience du paragraphe 47. Pour simplifier les considérations, nous supposerons que la transformation ne commence que lorsque la vitesse de translation est devenue tout à fait nulle. Alors, nous pourrons regarder, d'une part, le bec de l'entonnoir, et, de l'autre part, la section par laquelle le cylindre liquide imparfait tient à la masse qui se rassemble au fond du vase, comme jouant le rôle des deux bases de la figure. Or, il est évident que, du côté de la seconde de ces bases, la portion extrême de la figure qui se transforme doit être un étranglement: car si elle constituait un renflement, il y aurait discontinuité de courbure à la jonction des surfaces respectives de celui-ci et de la grosse masse, ce qui est inadmissible. Mais la même raison n'existe pas à l'autre base, et l'expérience montre que, de ce côté, c'est un renflement qui se forme, puisque après la terminaison du phénomène, on trouve toujours au bec de l'entonnoir une masse comparable aux sphères isolées. Ainsi, dans cette expérience, la transformation se dispose suivant le second mode. D'après cela, puisque la longueur totale de la figure est d'environ 200^{mm}, et que la transformation donne constamment deux sphères isolées, la longueur moyenne des divisions a (§ 53) pour valeur approchée $\frac{200^{mm}}{3} = 66^{mm},7$; je dis la longueur moyenne, parce que le diamètre de la figure allant un peu en croissant du haut de celle-ci vers le bas, il est probable que les divisions ne sont pas tout à fait égales en longueur. Ajoutons ici, que la transformation s'opérant dans des circonstances toujours identiques, et, par conséquent, en l'absence de causes perturbatrices accidentelles, la quantité ci-dessus doit représenter la longueur normale des divisions ou la longueur la plus voisine possible de cette dernière. Maintenant, j'estime que le diamètre moyen de la figure, considérée avant la transformation, est d'environ 4^{mm}; on aura donc, pour la valeur approchée du rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, $\frac{66,7}{4} = 16,7$. Tel est donc approximativement le rapport constant cherché dans le cas d'un cylindre d'huile formé au sein du mélange alcoolique; or, ce rapport est, comme on voit, de beaucoup supérieur à celui qui appartient au cas d'un cylindre de mercure reposant sur une plaque de verre.

A la vérité, il se pourrait que la longueur $66^{mm},7$, différât assez notablement de la longueur normale : car si, d'une part, la longueur totale de notre figure d'huile est considérable relativement au diamètre, d'une autre part le nombre des divisions qui s'y forment est très-petit. Voyons donc quelle est, par exemple, la plus petite valeur que pourrait avoir la longueur normale des divisions. Pour cela, remarquons d'abord qu'ici, malgré l'absence de causes perturbatrices, le troisième mode de transformation est possible; en effet, l'étranglement inférieur adhérant à une base liquide, rien n'empêcherait l'huile qu'il perd de traverser cette base pour se rendre dans la grosse masse, de sorte que, dans le troisième mode aussi, le sens des mouvements de transport pourrait être le même à l'égard de tous les étranglements (§ 52). Cela posé, comme le dénominateur de l'expression qui donne la longueur d'une division ne peut varier moins que par demi-unités (§ 53), et comme la longueur que nous avons trouvée résultait de la division de 200^{mm} par 3, il s'ensuit que la longueur immédiatement inférieure serait $\frac{200^{mm}}{3,5} = 57^{mm},1$, ce qui correspondrait à trois sphères isolées et à une transformation disposée suivant le troisième mode. Mais puisque les choses n'ont pas lieu de cette manière, puisqu'il ne se forme jamais que deux sphères isolées, et que la transformation adopte toujours le second mode, il faut en conclure que la longueur normale des divisions est plus rapprochée de la longueur trouvée 66^{mm},7 que de la longueur 57^{mm},1; si donc la longueur normale est au-dessous de la première de ces deux quantités, elle doit du moins être supérieure à leur moyenne, c'est-à-dire à 61^{mm},9; et, par conséquent, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre est nécessairement plus grand que $\frac{61,9}{4} = 15,5$; or, ce dernier nombre surpasse encore de beaucoup le nombre 6,55 correspondant au cylindre de mercure.

Ainsi, en réalité, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre varie, soit avec la nature du liquide, soit avec les circonstances extérieures, soit avec ces deux éléments.

§ 57. Mais je dis qu'il y a une limite au-dessous de laquelle ce même rapport ne peut descendre, et que celle-ci est précisément la limite de la stabilité.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur suffisante par rapport au diamètre, compris entre deux bases solides, et effectuant sa transformation avec une régularité parfaite. Supposons, pour fixer les idées, que le phénomène se soit disposé suivant le second mode, ou, en d'autres termes, que les portions extrêmes de la figure soient l'une un étranglement et l'autre un renflement; alors, comme nous l'avons vu (§ 52), la régularité de la transformation s'étendra à ces dernières portions, c'est-à-dire que l'étranglement et le renflement extrêmes seront respectivement identiques avec les portions de même espèce du reste de la figure. Cela posé, prenons la figure à une époque du phénomène où elle ne présente encore que des étranglements et des renflements, et considérons de nouveau les sections dont le diamètre est égal à celui du cylindre (ibid.). Partons de la portion extrême étranglée; la base solide sur laquelle celle-ci s'appuie, et qui constitue la première des sections dont il s'agit, occupera, comme nous l'avons fait voir, l'origine même de l'étranglement; puis nous aurons une seconde section à l'origine du premier renflement; une troisième à l'origine du second étranglement, une quatrième à l'origine du second renflement, et ainsi de suite; de sorte que toutes les sections d'ordre impair occuperont les origines des étranglements, et toutes celles d'ordre pair, les origines des renflements. L'intervalle compris entre deux sections d'ordre impair consécutives renfermera donc un étranglement et un renflement; et puisque la figure commence par un étranglement et se termine par un renflement, il est clair que sa longueur totale se trouvera partagée en un nombre entier de semblables intervalles. En vertu de l'exacte régularité que nous avons supposée dans la transformation, tous les intervalles dont il s'agit seront égaux en longueur; et comme l'instant où nous considérons la figure peut être pris arbitrairement depuis l'origine du phénomène jusqu'au maximum d'approfondissement des étranglements, il s'ensuit que l'égalité de longueur des intervalles subsiste pendant toute cette période, et que, par conséquent, les sections qui terminent ces intervalles conservent pendant cette même période des positions parfaitement fixes. En outre, les parties de la figure respectivement contenues dans chacun des intervalles subissant identiquement et simultanément les mêmes modifications, les volumes de toutes ces parties demeurent égaux entre eux; et comme leur somme est toujours égale au volume total du liquide, il s'ensuit que, depuis l'origine de la transformation jusqu'au maximum d'approfondissement des étranglements, chacun de ces volumes partiels demeure invariable, ou, en d'autres termes, qu'aucune portion de liquide ne passe d'un intervalle dans les intervalles adjacents. Ainsi, à l'instant où nous considérons la figure, d'une part, les deux sections qui terminent un même intervalle auront conservé leurs positions et leurs diamètres primitifs, et, d'une autre part, ces sections n'auront été franchies par aucune portion de liquide. Les choses se seront donc passées dans chaque intervalle absolument de la même manière que si les deux sections qui le terminent eussent été des disques solides. Mais entre deux disques solides la transformation ne peut s'opérer si le rapport entre la distance qui sépare ces disques et le diamètre du cylindre est plus petit que la limite de la stabilité; donc le rapport entre la longueur de nos intervalles et le diamètre du cylindre ne peut être inférieur à cette même limite. Or, la longueur d'un intervalle est évidemment égale à celle d'une division : car la première est, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement, et la seconde est la somme des longueurs d'un renflement et de deux demi-étranglements (§ 55); donc le rapport entre la longueur d'une division et le diamètre du cylindre ne peut être moindre que la limite de la stabilité; et nous remarquerons ici que cette conclusion est également vraie, soit que les divisions puissent ou non prendre exactement leur longueur normale.

§ 58. Essayons maintenant de faire la part de la nature du liquide et celle des circonstances extérieures, et commençons par cette dernière.

Notre cylindre de mercure doit contracter, sur toute la ligne suivant laquelle il touche la plaque de verre, une petite adhérence avec cette plaque, adhérence qui doit entraver plus ou moins la transformation. Pour découvrir si cette résistance influait sur la longueur normale des divisions, et, par suite, sur le rapport entre celle-ci et le diamètre du cylindre, un moyen simple se présentait, c'était d'augmenter cette même résistance. Afin d'arriver à ce résultat, j'ai disposé l'appareil de manière à n'enlever qu'une des bandes de verre, de sorte que la figure liquide demeurait alors en contact à la fois avec la plaque et avec l'autre bande. J'ai répété encore dix fois l'expérience, en employant les fils de cuivre de $1^{mm},05$ de diamètre, et en donnant au cylindre une longueur de 100^{mm}. Les résultats ont été les suivants :

NOMBRE des SPHÈRES ISOLÉES.	MASSES ADHÉRENTES AUX BANDES.	LONGUEUR d'une DIVISION.
10	Une grande et une petite.	$10^{mm},00$
9	Id.	11,11
10	Id.	10,00
9	Id.	11,11
11	Deux petites.	9,09
9	Une grande et une petite.	11,11
9	Id.	11,11
[illegible]	Deux grandes.	10,53
9	Une grande et une petite.	11,11
8	Deux grandes.	12,50

On voit que les différentes valeurs de la longueur d'une division sont toutes, une seule exceptée, notablement supérieures à toutes celles qui se rapportent à un cylindre de même diamètre dont la surface ne touche le verre que par une seule ligne (§ 54). Il faut donc conclure de là que, toutes choses égales d'ailleurs, la longueur des divisions croît avec la résistance extérieure, et que, par conséquent, sous l'action d'une semblable résistance, cette longueur est nécessairement plus grande qu'elle ne le serait si le cylindre avait sa surface convexe entièrement libre.

Dans la série ci-dessus, aucun résultat ne s'est montré fort régulier; mais on comprend que la moyenne des valeurs de la troisième colonne approchera de la longueur normale des divisions. C'est, d'ailleurs, ce que confirment les tableaux des paragraphes 54 et 55 : si l'on prend dans le premier les moyennes respectives des valeurs des deux séries, on trouvera pour l'une $6^{mm},77$, et pour l'autre $7^{mm},17$, quantités dont la première est presque égale à la longueur $6^{mm},67$, qui peut être considérée comme la longueur normale, et dont la seconde n'en diffère pas considérablement; et si l'on prend de même la moyenne relative au tableau suivant, on trouvera $13^{mm},15$, quantité très-voisine de la longueur $13^{mm},33$, qui peut aussi, dans le cas du second tableau, être regardée comme la longueur normale. Or, la moyenne correspondante au tableau ci-dessus est $10^{mm},81$; par conséquent, dans le cas de deux lignes de contact, nous aurons pour la valeur approchée du rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, $\frac{10,81}{1,05} = 10,29$, tandis que, dans le cas d'une seule ligne de contact, nous avons trouvé seulement 6,35.

Ainsi, en définitive, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre augmente par l'effet d'une résistance extérieure.

§ 59. Passons à ce qui concerne la nature du liquide. Tous les liquides sont plus ou moins visqueux : c'est-à-dire que leurs molécules ne jouissent pas d'une mobilité parfaite les unes à l'égard des autres. Or, de là naît une résistance intérieure qui doit également rendre la transformation moins facile; et puisque les résistances extérieures augmentent la longueur des divisions, on comprend que la viscosité agira de la même manière, et que, par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs, le rapport dont nous nous occupons croîtra avec cette même viscosité.

Mais, d'un autre côté, à égalité de courbures, les intensités des forces qui produisent la transformation varient avec la nature du liquide : car ces intensités dépendent, pour chaque liquide, de celle de l'attraction mutuelle des molécules. Or, il est clair que la viscosité exercera d'autant plus d'influence sur la longueur des divisions que les intensités des forces dont il s'agit seront moindres.

Ainsi, abstraction faite des résistances extérieures, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre sera d'autant plus grand que le liquide sera plus visqueux et que les forces figuratrices y seront plus faibles.

On peut comparer numériquement, pour les mêmes courbures, les intensités des forces figuratrices correspondantes à différents liquides. En effet, rappelons-nous d'abord que la pression correspondante à un élément de la couche superficielle et rapportée à l'unité de surface, a pour expression (§ 4)

$$P + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

or, la partie P de cette pression ayant la même valeur pour tous les éléments de la couche superficielle, et les pressions se transmettant dans toute la masse, cette partie P se trouvera toujours détruite, qu'il y ait équilibre ou non dans la figure liquide; de sorte que la partie active de la pression, celle qui constitue la force figuratrice, aura simplement pour mesure $\frac{A}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$. On voit donc qu'à égalité de courbures, l'intensité de la force figuratrice due à un élément de la couche superficielle est proportionnelle au coefficient A. Or, ce coefficient est le même qui entre dans l'expression connue de l'élévation ou de l'abaissement d'un liquide dans un tube capillaire, et, par conséquent, les mesures relatives à cette élévation ou à cet abaissement peuvent nous donner, pour chaque liquide, la valeur du coefficient dont il s'agit.

D'après cela, nous pourrons dire aussi que le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre sera d'autant plus grand que le liquide sera plus visqueux et que la valeur de A qui correspond à ce dernier sera moindre.

Par exemple, l'huile est beaucoup plus visqueuse que le mercure; d'un autre côté, il serait aisé de faire voir que la valeur de A est beaucoup plus petite pour le premier de ces deux liquides que pour le second; enfin, cette valeur doit encore être fort amoindrie à l'égard de notre figure d'huile par la présence du mélange alcoolique ambiant, l'attraction mutuelle des molécules des deux liquides en contact diminuant les intensités des pressions (§ 8). Voilà pourquoi le rapport appartenant à un cylindre d'huile formé au sein du mélange alcoolique surpasse considérablement celui qui appartient à un cylindre de mercure reposant sur une plaque de verre, malgré la petite résistance extérieure à laquelle ce dernier est soumis.

§ 60. Il résulte de cette discussion concernant les résistances, que la plus petite valeur que l'on puisse supposer au rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, correspond au cas où il y aurait à la fois absence complète de résistance extérieure et de viscosité; et, d'après la démonstration donnée dans le paragraphe 57, cette plus petite valeur serait au moins égale à la limite de la stabilité. Or, comme tous les liquides sont plus ou moins visqueux, il s'ensuit que, même dans l'hypothèse de l'annulation de toute résistance extérieure, le rapport dont il s'agit surpassera toujours la limite de la stabilité; et puisque celle-ci est supérieure à 3, ce même rapport sera à plus forte raison toujours supérieur à 3.

Il est à croire que la plus petite valeur ci-dessus considérée, c'est-à-dire celle qu'aurait le rapport dans le cas d'une absence complète de résistance tant intérieure qu'extérieure, serait égale à la limite même de la stabilité, ou la surpasserait excessivement peu. En effet, d'une part, le rapport s'approche de cette limite à mesure que les résistances diminuent, et, d'une autre part, pour peu qu'il la dépasse la transformation devient possible (§ 57); on ne voit donc pas de raison pour qu'il en différât sensiblement si les résistances étaient absolument nulles. C'est d'ailleurs ce que les résultats de nos expériences tendent à confirmer. D'abord, en effet, puisque le rapport appartenant à notre cylindre de mercure descend de 10,29 à 6,35 en passant du cas où le cylindre touche le verre par deux lignes à celui où il ne le touche que par une seule (§ 58), il est clair que si ce dernier contact pouvait être lui-même supprimé, ce qui ne laisserait plus subsister que la seule influence de la viscosité, le rapport deviendrait de beaucoup inférieur à 6,35; et comme, d'un autre côté, il doit surpasser 3, nous pouvons bien admettre qu'il se trouverait du moins compris entre ce dernier nombre et 4, de sorte qu'il se rapprocherait beaucoup de la limite de la stabilité. Si donc il était possible d'annuler aussi la viscosité, le nouveau décroissement que subirait alors le rapport amènerait bien probablement celui-ci jusqu'à la limite même dont il s'agit, ou du moins jusqu'à une valeur qui en différerait excessivement peu.

Ainsi, d'une part, la plus petite valeur du rapport, celle qui correspondrait à une complète nullité de résistances, ne différerait pas ou ne différerait guère de la limite de la stabilité; et, d'une autre part, sous l'influence de la viscosité seule le rapport appartenant au mercure s'éloignerait peu de cette plus petite valeur. On voit donc que l'influence de la viscosité du mercure est faible, ce qui s'explique d'ailleurs naturellement par la petitesse connue de cette même viscosité.

D'après cela, dans le cas des autres liquides très-peu visqueux, tels que l'eau, l'alcool, etc., la viscosité ne pouvant non plus constituer qu'une résistance minime, on comprend que malgré les différences dans les intensités des forces figuratrices, cette viscosité n'exercera de même qu'une faible influence sur le rapport que nous considérons. De là résulte qu'en l'absence de toute résistance extérieure, les valeurs de ce rapport respectivement correspondantes aux différents liquides très-peu visqueux ne pourront s'éloigner beaucoup de la limite de la stabilité; et comme le plus petit nombre entier supérieur à celle-ci est 4, nous pouvons à l'égard de ces mêmes liquides adopter ce nombre comme représentant, en moyenne, la valeur approximative probable du rapport dont il s'agit.

En partant de cette valeur, le calcul donne pour le rapport entre le diamètre des sphères isolées qui résultent de la transformation et le diamètre du cylindre, le nombre 1,82, et pour le rapport entre la distance de deux sphères voisines et ce même diamètre, le nombre 2,18.

§ 61. Une autre conséquence découle encore de notre discussion. Soit, pour simplifier, le diamètre du cylindre pris comme unité. Alors le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre exprimera cette longueur normale elle-même, et le rapport qui constitue la limite de la stabilité exprimera la longueur même correspondante à cette limite. Ceci convenu, reprenons la conclusion à laquelle nous sommes arrivés au commencement du paragraphe précédent, conclusion que nous énoncerons, par conséquent, ici en disant que pour tous les liquides la longueur normale des divisions surpasse toujours la limite de la stabilité; rappelons-nous, en second lieu, que la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement est égale à celle d'une division (§ 57), et, en troisième lieu, qu'au premier instant de la transformation, la longueur d'un étranglement est égale à celle d'un renflement (§ 46). Or, de l'ensemble de ces propositions il résulte que, lorsque la transformation d'un cylindre commence à s'effectuer, la longueur d'une seule portion, soit étranglée, soit renflée, est nécessairement supérieure à la moitié de la limite de la stabilité; et que, par conséquent, la somme des longueurs de trois portions contiguës, par exemple de deux renflements et de l'étranglement intermédiaire, est supérieure à une fois et demie cette même limite. Donc enfin, si la distance des bases solides est comprise entre une fois et une fois et demie la limite de la stabilité, il est impossible que la transformation donne lieu à trois portions, et elle ne pourra, par conséquent, produire alors qu'un seul renflement juxtaposé à un seul étranglement. C'est, en effet, comme nous l'avons vu, toujours de cette manière que la chose s'est passée à l'égard du cylindre du paragraphe 46, cylindre qui se trouvait évidemment dans la condition ci-dessus, et l'on s'explique maintenant la non-symétrie de sa transformation.

§ 62. Ainsi que nous l'avons annoncé en terminant le paragraphe 48, nous avons encore à décrire un fait remarquable qui accompagne toujours la fin du phénomène de la transformation d'un cylindre liquide en masses isolées.

Dans la transformation des gros cylindres d'huile, soit imparfaits, soit exacts (§§ 44 à 46), lorsque la partie étranglée s'est considérablement amincie, et que la séparation semble sur le point d'avoir lieu, on voit, en effet, les deux masses refluer rapidement vers les anneaux ou les disques; mais elles laissent entre elles un filet cylindrique qui établit encore, pendant un temps très-court, la continuité de l'une à l'autre (*fig.* 28); puis ce filet se résout lui-même en masses partielles. Généralement il se divise en trois parties, dont les deux extrêmes vont se confondre avec les deux grosses masses, et dont l'intermédiaire forme une sphérule de quelques millimètres de diamètre, qui demeure isolée au milieu de l'intervalle qui sépare les grosses masses; en outre, dans chacun des intervalles entre cette sphérule et les deux grosses masses, on voit une autre sphérule beaucoup plus petite : ce qui indique que la séparation des parties du filet ci-dessus s'est effectuée de même par des effilements; la *fig.* 29 montre cet état définitif du système liquide. Les mêmes effets se produisent dans la résolution en sphères du cylindre d'huile mince et allongé du paragraphe 47; seulement, il y a souvent, dans l'un ou l'autre des intervalles entre les sphères, un nombre plus grand de sphérules, et, en outre, la formation du filet principal est moins facile à observer, à cause de la marche plus rapide des phénomènes. Enfin, dans le cas de nos cylindres de mercure, la résolution en sphères s'accomplit aussi en trop peu d'instants pour que l'on puisse apercevoir la formation des filets; mais on trouve toujours, dans plusieurs des intervalles entre les sphères, une ou deux sphérules très-petites, d'où l'on peut conclure que la séparation s'est effectuée par le même mode [1].

[1] On ne peut s'empêcher de reconnaître une analogie entre le phénomène de la formation des filets liquides, et celui de la formation des lames. En effet, dans l'expérience du paragraphe 23, par exemple, la lame plane commence à naître lorsque les deux surfaces concaves opposées sont près de se toucher par leurs sommets; et, dans la résolution d'un cylindre en sphères, les filets commencent à se former lorsque toutes les sections méridiennes de la figure sont peu éloignées de se toucher par les sommets de leurs parties concaves.

Lorsqu'il s'est agi des lames, nous avons envisagé leur formation comme indiquant une sorte de tendance vers un état particulier d'équilibre, qui résulterait de ce que, pour la partie mince du système liquide, la loi ordinaire des pressions serait modifiée. Pour que l'analogie entre les deux ordres de phénomènes fût complète, il faudrait donc que des filets liquides excessivement

Maintenant que nous connaissons toute la marche que doit suivre la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées, nous pouvons la représenter graphiquement; la *fig.* 30 montre plusieurs des formes successives par lesquelles passe graduellement la figure liquide, à partir du cylindre jusqu'au système de sphères isolées et de sphérules. Cette figure se rapporte au cas d'un liquide très-peu visqueux, tel que l'eau, l'alcool, etc., et d'une liberté complète de la surface convexe du cylindre; par conséquent, d'après la conclusion probable qui termine le paragraphe 60, le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre a été pris égal à 4.

Le phénomène de la formation des filets et de leur résolution en sphérules n'est pas borné au cas de la rupture de l'équilibre des cylindres liquides; il se manifeste toutes les fois qu'une de nos masses liquides, quelle que soit sa figure, se divise en masses partielles; c'est de cette manière, par exemple, que naissent, dans l'expérience du paragraphe 19 du mémoire précédent, les petites masses que nous avons comparées alors

déliés réunissant des masses épaisses, pussent aussi constituer avec ces masses un système en équilibre, malgré l'incompatibilité de cet équilibre avec la loi ordinaire des pressions. Or, nous allons faire voir que cet équilibre est en réalité possible, du moins théoriquement. Prenons toujours pour exemple la résolution d'un cylindre instable en masses partielles. Lorsque les filets cylindriques se forment, leur diamètre est déjà très-petit relativement aux dimensions des masses épaisses, et, par suite, leur courbure dans le sens perpendiculaire à l'axe est très-forte comparée aux courbures de ces masses. La pression correspondante aux filets est donc originairement de beaucoup supérieure à celles qui correspondent aux masses épaisses, d'où il suit que le liquide doit être chassé de l'intérieur des filets vers ces mêmes masses, et que les filets doivent aller, comme les lames, en s'amincissant. De plus, leurs courbures, et, par suite, leur pression, augmentant à mesure qu'ils deviennent plus déliés, leur tendance à s'amincir ira en croissant, et, par conséquent, si l'on fait abstraction de l'instabilité de la forme cylindrique, on voit qu'ils devront devenir d'une finesse excessive. Mais je dis que l'augmentation de la pression aura une limite, au delà de laquelle cette pression ira, au contraire, en diminuant, de sorte qu'elle pourra devenir égale à celle qui correspond aux parties épaisses du système liquide.

En effet, sans recourir à des développements théoriques, il est facile de voir que si le diamètre du filet devient inférieur à celui de la sphère d'activité sensible de l'attraction moléculaire, la loi de la pression doit s'y modifier, et que, le diamètre continuant à décroître, la pression doit finir par aller aussi en s'affaiblissant, malgré l'augmentation des courbures, à cause de la diminution dans le nombre des molécules attirantes. La pression pourra ainsi décroître indéfiniment : car il est clair qu'elle s'évanouirait entièrement si le diamètre du filet se réduisait à l'épaisseur d'une simple molécule. Les géomètres qui s'occupent de la théorie de l'action capillaire savent, du reste, à des satellites [1]. Le phénomène dont nous nous occupons se produit de même avec les liquides soumis à l'action libre de la pesanteur, bien qu'il soit alors moins facile à constater. Par exemple, si l'on trempe dans l'éther l'extrémité arrondie d'une baguette de verre, et qu'on retire celle-ci verticalement et avec précaution, l'on voit, à l'instant où la petite quantité de liquide qui reste adhérente à la baguette se sépare de la masse, une sphérule extrêmement petite rouler sur la surface de celle-ci. Enfin, le phénomène dont il s'agit est de la même nature que celui qui a lieu lorsqu'on étire en fils des corps très-visqueux, tels que le verre ramolli par la chaleur. Seulement, dans ce cas, la grande viscosité de la matière, et, en outre, l'action du froid, qui solidifie le filet à mesure qu'il se forme, maintiennent la figure cylindrique de celui-ci et permettent de lui donner une longueur indéfinie.

§ 63. Pour compléter l'étude de la transformation des cylindres liquides en sphères isolées, il nous reste encore à essayer de découvrir la

que les formules de cette théorie cessent d'être applicables lorsqu'il s'agit de courbures extrêmement fortes, ou dont les rayons sont comparables à celui de l'attraction moléculaire.

Maintenant, il résulte de ce qui précède, que l'on pourra toujours supposer au filet une minceur telle, que la pression correspondante à celui-ci soit égale à celle qui a lieu dans les masses épaisses parvenues à leur forme d'équilibre. Alors, en admettant que les filets soient mathématiquement réguliers, de manière que la pression y soit partout rigoureusement la même, et que, par conséquent, ils n'aient aucune tendance à se résoudre eux-mêmes en petites masses partielles, l'équilibre existera nécessairement dans le système. Dans ce cas, la forme des masses épaisses ne sera pas mathématiquement sphérique : car leur surface devra se relever un peu aux jonctions avec les filets, en présentant des courbures concaves dans le sens méridien. Cette forme sera la même que celle d'une masse isolée, traversée diamétralement par un fil solide excessivement mince (§ 10). Ce système, comme ceux où entrent des lames, se compose de surfaces de nature différente; mais cette hétérogénéité de forme devient possible ici, de même que dans le cas des lames, à cause du changement que subit la loi des pressions en passant d'une espèce de surface à l'autre.

On comprend, du reste, que l'équilibre dont il s'agit, bien que possible théoriquement, comme nous venons de le faire voir, ne peut jamais se réaliser, à cause de l'instabilité de la forme cylindrique des filets. Il n'en est pas de même dans le cas des lames planes : car, ainsi que nous le démontrerons dans la série suivante, les surfaces planes sont toujours des surfaces d'équilibre stable, quelle que soit leur étendue.

[1] Il est clair que ce mode de formation sort entièrement de l'hypothèse cosmogonique de La Place; aussi, nous n'avons pas eu la pensée de tirer de cette petite expérience, qui se rapporte uniquement aux effets de l'attraction moléculaire et non à ceux de la gravitation, quelque argument en faveur de l'hypothèse dont il s'agit, hypothèse que, d'ailleurs, nous n'adoptons point.

loi suivant laquelle la durée du phénomène varie avec le diamètre du cylindre, et à tâcher d'obtenir au moins quelques indices relativement à la valeur absolue de cette durée pour un cylindre d'un diamètre donné, formé d'un liquide donné, et placé dans des circonstances données.

On comprend d'abord à priori que, pour un même liquide et les mêmes circonstances extérieures, et en supposant que la longueur du cylindre soit toujours telle que les divisions prennent exactement leur longueur normale (§ 53), la durée du phénomène doit croître avec le diamètre : car plus celui-ci est grand, plus est grande la masse de chacune des divisions, et, d'un autre côté, plus les courbures, d'où dépendent les intensités des forces figuratrices, sont faibles. Il est vrai que la surface de chacune des divisions augmente aussi avec le diamètre du cylindre, et que, par suite, il en est de même du nombre des forces figuratrices élémentaires; mais cette augmentation a lieu dans un moindre rapport que celle de la masse; c'est ce que nous allons faire voir plus nettement.

Dans les conditions ci-dessus, deux cylindres différents en diamètre se diviseront d'une manière semblable : c'est-à-dire que le rapport entre la longueur d'une division et le diamètre sera le même des deux parts (§ 55). Or, on peut regarder comme évident, que la similitude de figure se maintiendra dans toutes les phases de la transformation; c'est, d'ailleurs, ce que l'expérience confirme, comme nous le verrons bientôt. Il suit de là que, dans tous les instants homologues des transformations des deux cylindres, les surfaces respectives des divisions seront toujours entre elles comme les carrés des diamètres de ces cylindres, tandis que les masses, qui demeurent évidemment invariables pendant toute la durée des phénomènes, seront toujours entre elles comme les cubes de ces mêmes diamètres. Ainsi, à tous les instants homologues des transformations respectives, l'étendue de la couche superficielle d'une division, et, par suite, le nombre des forces figuratrices, qui émanent de chacun des éléments de cette couche, ne changent d'une figure à l'autre que dans le rapport des carrés des diamètres primitifs de ces figures; tandis que la masse d'une division, masse dont toutes les parties reçoivent sous l'action des forces dont il s'agit les mouvements qui constituent la transformation, change dans le rapport des cubes de ces diamètres. Quant aux intensités des forces figuratrices, rappelons d'abord que celle qui correspond à un élément de la couche superficielle a pour mesure (§ 59) l'expression $\frac{A}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$. Cela posé, si, à un instant homologue dans les transformations des deux figures, nous prenons sur l'une des divisions de chacune de celles-ci un point semblablement placé, il est clair, d'après la similitude de ces mêmes figures, que les rayons de courbure principaux correspondants au point pris sur la seconde, seront à ceux qui correspondent au point pris sur la première, dans le rapport des diamètres des cylindres originaires; de sorte que si ce rapport est n, et que les rayons relatifs au point de la première figure soient R et R', ceux qui appartiennent au point de la seconde seront nR et nR'; d'où il suit que les deux forces figuratrices correspondantes à ces points, auront respectivement pour mesure $\frac{A}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$, et $\frac{A}{2}\left(\frac{1}{nR}+\frac{1}{nR'}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{A}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$. Ainsi, en passant de la première figure à la seconde, les intensités des forces figuratrices élémentaires seront entre elles, dans toutes les phases de la transformation, dans le rapport inverse des diamètres des cylindres.

Je me suis assuré, à l'aide des cylindres de mercure de $1^{mm},05$ et de $2^{mm},1$ de diamètre (§§ 54 et 55), que la durée du phénomène croît, en effet, avec le diamètre : bien que la transformation de ces cylindres s'effectue très-rapidement, on reconnaît cependant sans peine que la durée relative au plus grand diamètre est supérieure à celle qui se rapporte au plus petit.

§ 64. Quant à la loi qui régit cette augmentation de la durée, il serait sans doute à peu près impossible de parvenir à sa détermination expérimentale d'une manière directe : c'est-à-dire en mesurant les temps qu'exigerait l'accomplissement du phénomène à l'égard de deux cylindres assez longs pour qu'ils se convertissent respectivement en plusieurs sphères isolées complètes, et satisfaisant aux conditions indiquées au commencement du paragraphe précédent. En effet, je ne vois guère de moyen de réaliser de semblables cylindres, sans leur donner des diamètres fort petits, comme ceux de nos cylindres de mercure, et alors les durées sont trop courtes pour qu'on puisse en obtenir le rapport avec une exactitude suffisante.

Mais on pourra arriver au même résultat, toutefois avec certaines restrictions dont nous parlerons bientôt, par le moyen de deux cylindres d'huile courts formés entre des disques (§ 46), cylindres auxquels rien n'empêche de donner des diamètres assez grands pour rendre facile la mesure précise des durées. La transformation d'un cylindre de cette espèce ne produit qu'un seul étranglement et un seul renflement; mais comme, dans la transformation des cylindres assez longs pour fournir plusieurs sphères isolées complètes, les phases par lesquelles passent les étranglements et les renflements sont les mêmes pour tous, il suffit de considérer un seul étranglement et un seul renflement. On comprend que les deux systèmes solides devront avoir des dimensions relatives telles, que le rapport entre la distance des disques et le diamètre de ceux-ci soit le même des deux parts, afin que la similitude existe entre les deux figures liquides à leur origine et dans tous les instants homologues de leurs transformations.

Avant de rendre compte de l'emploi de ces figures d'huile pour la recherche de la loi des durées, nous devons présenter ici plusieurs remarques importantes. Nous n'aurons à faire usage de la loi dont il s'agit, que dans le cas, d'ailleurs le plus simple, où les cylindres seraient formés dans le vide ou dans l'air, et seraient exempts de toute résistance extérieure, ou, en d'autres termes, libres sur toute leur surface convexe. Or, nos cylindres d'huile courts sont formés au sein du liquide alcoolique, et l'on peut se demander si cette circonstance n'influe pas sur le rapport des durées correspondant à un rapport donné entre les diamètres de ces cylindres. D'abord, en effet, une portion plus ou moins grande du liquide alcoolique doit être déplacée par les modifications des figures, de sorte que la masse totale à mouvoir dans une transformation, se compose de la masse d'huile et de cette portion du liquide alcoolique; mais il est clair qu'en vertu de la similitude des deux figures d'huile et de celle de leurs mouvements, les quantités du liquide ambiant respectivement déplacées, seront entre elles exactement, ou du moins sensiblement, comme les deux masses d'huile; de manière que le rapport des deux masses totales ne sera pas altéré par cette circonstance. Il est bien probable, d'après cela, que cette même circonstance n'influera pas non plus sur le rapport des durées; seulement les valeurs absolues de ces durées seront plus considérables.

D'un autre côté, l'attraction mutuelle des deux liquides en contact diminue les intensités des pressions (§ 8), et, par suite, des forces figuratrices; mais il est aisé de voir que cette diminution n'altère pas le rapport de ces intensités dans les deux figures. En effet, imaginons qu'à un instant homologue des deux transformations, le liquide alcoolique se trouve tout à coup remplacé par de l'huile, et concevons par la pensée, dans celle-ci, les surfaces des deux figures, telles qu'elles étaient à cet instant. Alors les forces figuratrices seront complétement détruites par l'attraction de l'huile extérieure à ces surfaces, ou, en d'autres termes, l'attraction extérieure sera, en chaque point, égale et opposée à la force figuratrice intérieure. Si maintenant nous rétablissons le liquide alcoolique, les intensités des attractions extérieures changeront, mais elles conserveront évidemment entre elles les mêmes rapports; d'où il suit que celles qui correspondent à deux points homologues pris sur les deux figures, seront encore entre elles comme les forces figuratrices intérieures partant de ces deux points; de sorte qu'en définitive, les résultantes respectives des actions extérieure et intérieure en ces deux mêmes points, seront entre elles dans le même rapport que les deux forces intérieures seules. Ainsi les attractions exercées sur l'huile par le liquide alcoolique ambiant diminueront bien les intensités absolues des forces figuratrices, mais elles ne changeront pas les rapports de ces intensités, et il est à croire, par conséquent, qu'elles n'auront aucune influence sur le rapport des durées. Mais il est clair que cette cause augmentera encore de beaucoup les valeurs absolues de celles-ci.

Par les deux raisons que nous venons d'exposer, la présence du liquide alcoolique augmentera donc considérablement les valeurs absolues des deux durées; mais on peut admettre qu'elle n'altérera pas le rapport de ces valeurs, de sorte que ce rapport sera le même que si les phénomènes s'opéraient dans le vide ou dans l'air. Nous considérerons, par conséquent, la loi que nous déduirons de nos expériences sur les cylindres d'huile courts, comme indépendante de la présence du liquide alcoolique ambiant, et c'est ce qui se trouvera appuyé par la nature même de cette loi.

Mais la formation exacte de nos cylindres d'huile courts exige (§ 46) que, dans ces cylindres, le rapport entre la longueur et le diamètre, ou, ce qui revient au même, entre la somme des longueurs de l'étranglement et du renflement et le diamètre, surpasse peu la limite de la stabilité. Or, dans la transformation des cylindres assez longs pour fournir plusieurs sphères, qui seraient formés dans le vide ou dans l'air et libres sur toute leur surface convexe, et dont les divisions auraient leur longueur normale, le rapport de la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement au diamètre, rapport qui est le même que celui de la longueur d'une division au diamètre, varierait avec la nature du liquide (§ 59), et nous ignorons si la loi des durées est indépendante de la valeur de ce rapport. La loi que nous obtiendrons à l'égard des cylindres d'huile courts ne pourra donc être légitimement appliquée à des cylindres assez longs pour fournir plusieurs sphères et supposés dans les conditions ci-dessus, que dans le cas où ces derniers cylindres seraient formés d'un liquide tel, qu'ils donneraient pour le rapport dont il s'agit une valeur peu supérieure à la limite de la stabilité.

Or, ce cas est celui du mercure (§ 60), et c'est aussi très-probablement celui de tous les autres liquides fort peu visqueux (*ibid.*). Ainsi, la loi que nous donneront les cylindres d'huile courts, sera exactement ou sensiblement celle qui conviendrait aux cylindres de mercure assez longs pour fournir plusieurs sphères, en supposant ces derniers réalisés dans le vide ou dans l'air, libres sur toute leur surface convexe, et ayant des longueurs telles, que les divisions prissent dans chacun d'eux leur longueur normale. En outre, la même loi serait applicable sans doute aux cylindres formés de tout autre liquide très-peu visqueux, et supposés dans les mêmes conditions que les précédents.

Il serait possible que la loi fût tout à fait générale, c'est-à-dire qu'elle s'appliquât aux cylindres formés, toujours dans les mêmes conditions, d'un liquide quelconque; mais nos expériences ne nous fournissent point les éléments nécessaires pour décider cette question.

Enfin, la transformation de nos cylindres courts présente une particularité qui entraîne une autre restriction. Les deux masses finales dans lesquelles se résout un semblable cylindre étant inégales, la plus petite atteint sa forme d'équilibre notablement avant l'autre, de sorte que la durée du phénomène n'est pas unique. Il résulte de là que nous ne pourrons compter la durée, que jusqu'à l'instant de la rupture du filet; et, par conséquent, le rapport que nous obtiendrons ainsi pour deux cylindres, ne sera que celui des durées de deux portions homologues des transformations totales. Du reste, le rapport de ces durées partielles est précisément celui dont nous aurons à faire usage plus loin.

§ 65. J'ai exécuté les expériences dont il s'agit, en employant deux systèmes de disques, dont les dimensions respectives étaient entre elles comme 1 à 2; dans le premier, les disques avaient un diamètre de 15^{mm} et étaient séparés par une distance de 54^{mm}, et, dans le second, le diamètre était de 30^{mm} et la distance de 108^{mm}. Les cylindres formés respectivement dans ces deux systèmes, étaient donc semblables entre eux, et, ainsi que je l'ai avancé (§ 63), la similitude entre les deux figures se maintenait exactement, pour autant que l'œil pouvait en juger, dans toutes les phases de leurs transformations.

Il arrivait quelquefois que le cylindre, en apparence bien formé, ne montrait aucune persistance, et commençait immédiatement à s'altérer; cette circonstance devant être attribuée à un petit reste d'irrégularité de la figure, je rétablissais aussitôt la forme cylindrique [1], et l'on ne comptait le temps que lorsque la figure paraissait se maintenir sous cette forme pendant quelques instants. Mais alors encore se présentait parfois une autre anomalie, qui consistait dans la formation simultanée de deux étranglements comprenant entre eux un renflement; cette modification

[1] Voir la 2e note du paragraphe 46.

s'arrêtait après avoir atteint un degré assez peu prononcé d'ailleurs, et la figure semblait demeurer dans le même état pendant un temps notable [1]; puis l'un des étranglements se prononçait peu à peu davantage, tandis que l'autre s'effaçait, et la transformation continuait ensuite à la manière ordinaire. Comme cette particularité constituait une exception à la marche régulière du phénomène, on cessait de compter dès qu'elle se montrait, et je rétablissais encore la forme cylindrique. On ne continuait définitivement à compter le temps, que dans les cas où, après quelque persistance de la forme cylindrique, il ne se produisait qu'un seul étranglement.

Pour chacun des deux cylindres, j'ai répété vingt fois l'expérience, afin d'obtenir un résultat moyen. Lorsqu'une transformation était opérée, je réunissais en une seule les deux masses auxquelles elle avait donné lieu, et je reformais le cylindre [2], pour passer à une nouvelle mesure du temps.

Voici les nombres de secondes obtenus ; chacun d'eux exprime le temps écoulé depuis l'instant de la formation du cylindre jusqu'à celui de la rupture du filet. Ces temps étaient comptés à l'aide d'une montre battant les cinquièmes de seconde.

[1] Nous verrons, dans la série suivante, à quoi tient cette singulière modification de la figure.

[2] J'étirais, à cet effet, la grosse masse vers la petite, au moyen de l'anneau dont j'ai parlé dans la première note du paragraphe 46. Mais il fallait empêcher que l'anneau, en quittant la figure liquide, n'entraînât avec lui une quantité sensible d'huile; pour cela, au lieu de faire adhérer à la grosse masse la totalité de l'anneau, je laissais libre une petite portion de celui-ci, et comme alors son action était insuffisante pour étendre la grosse masse jusqu'à l'autre, j'y aidais en poussant légèrement l'huile avec l'extrémité du bec de la seringue. Lorsqu'après la réunion des deux masses je retirais l'anneau, il n'abandonnait dans le liquide alcoolique qu'une sphérule fort petite, que d'ailleurs, dans l'expérience suivante, je réunissais au reste de l'huile à l'aide de l'anneau lui-même, ainsi que la plus grosse des sphérules dues à la transformation du filet.

Cylindre de [illegible] de diamètre.	Cylindre de [illegible] de diamètre.
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
Moyenne . . . . [illegible]	Moyenne . . . . [illegible]

On voit que les nombres relatifs à un même diamètre ne s'écartent pas assez les uns des autres pour que l'on ne puisse regarder le rapport des deux moyennes comme s'approchant beaucoup du rapport véritable des durées. Or, le rapport de ces deux moyennes est 2,04, c'est-à-dire presque exactement égal à celui des deux diamètres. D'ailleurs, il est évident que, pour chacun de ces derniers, le plus grand des nombres obtenus doit correspondre au cas où le cylindre était formé de la manière la plus parfaite, et, par conséquent, il est probable que le rapport de ces deux plus grands nombres s'approche aussi beaucoup du rapport véritable des durées. Or, ces deux nombres sont, d'une part 36,4, et, de l'autre, 73,6, et leur rapport est 2,02, nombre qui diffère encore moins de 2, ou du rapport des diamètres.

Nous pouvons donc admettre que les durées relatives à ces deux cylindres sont entre elles comme les diamètres de ces mêmes cylindres; d'où nous déduirons cette loi, que la durée partielle de la transformation d'un semblable cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci.

J'ai dit (§ précéd.) que la loi ainsi obtenue fournirait par elle-même un nouveau motif de croire qu'elle ne changerait pas si nos cylindres d'huile courts étaient réalisés dans le vide ou dans l'air. En effet, la proportionnalité au diamètre est la loi la plus simple possible, et, d'une autre part, les circonstances dans lesquelles le phénomène s'opère sont moins simples dans le cas de la présence du liquide alcoolique qu'elles ne le seraient dans celui de son absence; par conséquent, si la loi changeait du premier au second, il s'ensuivrait qu'une simplification dans les circonstances amènerait, au contraire, une complication dans la loi, ce qui est bien peu vraisemblable.

Nous pouvons donc, je pense, légitimement généraliser la loi ci-dessus d'après l'ensemble des remarques du paragraphe précédent, et en tirer les conclusions qui suivent.

1° Si l'on suppose un cylindre de mercure formé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle, que les divisions prennent exactement leur longueur normale, le temps qui s'écoulera depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre de ce cylindre.

2° Il en est très-probablement de même à l'égard d'un cylindre formé de tout autre liquide fort peu visqueux tel que l'eau, l'alcool, etc., et supposé dans les mêmes conditions.

3° Il est possible que cette loi soit entièrement générale, c'est-à-dire applicable à un cylindre formé, toujours dans les mêmes conditions, d'un liquide quelconque; mais nos expériences nous laissent dans l'incertitude à cet égard.

§ 66. Occupons-nous maintenant de la valeur absolue du temps dont il s'agit, pour un diamètre donné, le cylindre étant toujours supposé réalisé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle que ses divisions prennent leur longueur normale.

Il est clair que cette valeur absolue doit varier avec la nature du liquide : car elle dépend évidemment de la densité de celui-ci, de l'intensité de ses forces figuratrices, et enfin de sa viscosité.

Les expériences que nous venons de rapporter ne donnent à l'égard de l'huile qu'une limite supérieure fort éloignée : c'est ce qui résulte d'abord des deux causes que nous avons signalées dans le paragraphe 64 et qui sont dues à la présence du liquide alcoolique; mais à ces deux causes s'en joint une troisième que nous devons faire connaître. Si l'on imagine un cylindre d'huile formé dans les conditions ci-dessus, la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement sera nécessairement beaucoup plus considérable à l'égard de ce cylindre qu'à l'égard d'un de nos cylindres d'huile courts ayant le même diamètre : car, dans le premier, cette somme équivaut à la longueur d'une division; et, à cause de la grande viscosité de l'huile, cette dernière quantité doit surpasser de beaucoup la longueur qui correspond à la limite de la stabilité. Or, on peut poser en principe, que, toutes choses égales d'ailleurs, une augmentation dans la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement tend à rendre la transformation plus rapide, et, par conséquent, à raccourcir les durées totale et partielle du phénomène. En effet, pour un diamètre donné, plus la somme dont il s'agit s'éloigne de la longueur qui correspondrait à la limite de la stabilité, plus les forces qui produisent la transformation doivent agir avec énergie; d'ailleurs, immédiatement au-dessous de la limite de la stabilité la transformation ne s'effectuant plus, on peut alors considérer la durée du phénomène comme infinie, d'où il suit que lorsqu'on passe au delà de cette limite, la durée passe d'une valeur infinie à une valeur finie, et que, par conséquent, elle doit décroître rapidement à partir de cette même limite; enfin, c'est aussi ce que confirment les résultats de l'observation, comme nous le montrerons ci-après. Ainsi, lors même qu'il serait possible de former dans le vide ou dans l'air l'un de nos cylindres d'huile courts, et d'éliminer, par conséquent, les deux causes de retard dues à la présence du liquide alcoolique, la durée relative à ce cylindre surpasserait encore celle qui se rapporterait à un cylindre d'huile de même diamètre formé dans les conditions que nous avons supposées.

J'ai dit que l'expérience vérifiait le principe ci-dessus établi, savoir que, pour un même diamètre, un même liquide, et les mêmes actions extérieures s'il en existe, lorsque, par une cause quelconque, la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement augmente, les durées totale et partielle de la transformation deviennent moindres. Nous allons actuellement le faire voir.

Dans les expériences du paragraphe précédent, la durée partielle relative au cylindre de 15^{mm} de diamètre, par exemple, était d'environ $30''$, terme moyen, comme l'indique le tableau. Par conséquent, si l'on formait dans le liquide alcoolique un cylindre d'huile semblable dont le diamètre fût de 4^{mm}, la durée partielle relative à celui-ci serait, en vertu de la loi que nous avons trouvée, à peu près égale à $\frac{30'' \times 4}{15} = 8''$. Maintenant, la figure d'huile à peu près cylindrique du paragraphe 47, figure également formée dans le liquide alcoolique, avait (§ 56) un diamètre moyen d'environ 4^{mm}. Dans cette figure et dans la précédente, le diamètre, le liquide, et les actions extérieures sont donc les mêmes; mais, dans la première, la somme des longueurs de l'étranglement et du renflement ne serait égale qu'à $4^{mm} \times 3{,}6 = 14^{mm}{,}4$, tandis que, dans la seconde, cette même somme, qui équivaut à la longueur d'une division, était (§ 56) approximativement de $66^{mm}{,}7$; or, en observant cette dernière figure, on reconnaît aisément que la durée de sa transformation est bien inférieure à $8''$. A la vérité, par la nature de l'expérience, il est impossible de saisir à l'égard de cette même figure le commencement de la formation d'un étranglement ou d'un renflement donné, de sorte que la durée complète doit surpasser notablement celle que l'on déduirait de la simple inspection du phénomène; mais celle-ci n'est pas d'une seconde, et ce serait sans aucun doute aller trop loin que de porter à deux secondes la durée complète et, à plus forte raison, la portion qui se termine à la rupture des filets. Ainsi, dans le cas que nous venons de considérer, la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement devenant environ quatre fois et demie plus grande, la durée partielle devient au moins quatre fois plus petite.

§ 67. Mais si, en comptant la durée absolue dans le cas de l'un de nos cylindres d'huile courts, nous n'obtenons à l'égard de ce liquide qu'une limite supérieure beaucoup trop élevée, le cylindre de mercure du paragraphe 55, cylindre qui est formé dans l'air, et dont la longueur est suffisante par rapport au diamètre pour que les divisions aient exactement ou à fort peu près leur longueur normale, nous fournira, au contraire, à l'égard de ce dernier liquide, une limite probablement plus rapprochée, et qui nous sera très-utile.

D'abord, dans le cas de ce cylindre, dont le diamètre était, comme nous l'avons dit, de $2^{mm},1$, la transformation ne s'effectue pas en un temps tellement court, que l'on ne puisse estimer avec quelque exactitude la durée totale du phénomène; je dis la durée totale, parce que dans une transformation aussi rapide, il serait bien difficile de saisir l'instant de la rupture des filets. Pour approcher autant que possible de la valeur de cette durée totale, j'ai eu recours au procédé suivant.

J'ai réglé, par des épreuves successives, les battements d'un métronome de telle manière qu'en soulevant avec rapidité, à l'instant précis d'un battement, le système des bandes de verre appartenant à l'appareil qui sert à former le cylindre (§§ 50 et 51), le battement suivant me parût coïncider avec la terminaison de la transformation; puis, après m'être assuré encore plusieurs fois que cette coïncidence paraissait bien exacte, j'ai déterminé la durée de l'intervalle entre deux battements, en comptant les oscillations exécutées par l'instrument pendant deux minutes, et divisant ce temps par le nombre des oscillations. J'ai trouvé ainsi, pour l'intervalle dont il s'agit, la valeur $0'',39$. La durée totale de la transformation de notre cylindre de mercure peut donc être évaluée approximativement à $0'',39$, ou, plus simplement, à $0'',4$.

Mais ce cylindre n'est pas libre sur toute sa surface convexe, et son contact avec la plaque de verre doit influer sur la durée, tant directement que par l'accroissement qu'il détermine dans la longueur des divisions. Examinons donc sous ce double point de vue l'influence dont il s'agit.

L'action directe du contact avec la plaque est sans doute bien faible : car dès que la transformation commence, le liquide doit se détacher du verre dans tous les intervalles entre les parties renflées, de manière à ne plus toucher le plan solide que par une série de très-petites surfaces appartenant à ces parties renflées; par conséquent, si l'action directe du contact de la plaque était seule éliminée, c'est-à-dire si l'on pouvait faire en sorte que le cylindre fût libre sur toute sa surface convexe, mais que cependant les divisions qui s'y forment prissent la même longueur qu'auparavant, la durée totale se trouverait à peine diminuée.

Reste donc l'effet de l'allongement des divisions. La longueur des divisions de notre cylindre est égale à 6,35 fois le diamètre (§ 56), tandis que, dans l'hypothèse d'une liberté complète de la surface convexe, cette longueur serait très-probablement moindre que 4 fois le diamètre (§ 60); or, en vertu du principe établi dans le paragraphe précédent, cette augmentation dans la longueur des divisions entraîne nécessairement une diminution dans la durée, diminution d'autant plus considérable, qu'elle a lieu dans le voisinage de la limite de la stabilité; par conséquent, si l'on pouvait faire en sorte que l'allongement dont il s'agit n'existât pas, la durée totale se trouverait très-notablement accrue.

Ainsi, la suppression de l'action directe du contact de la plaque ne produirait dans la durée totale qu'une diminution très-légère; et l'annulation de l'allongement des divisions déterminerait, au contraire, un accroissement très-notable dans cette même durée; si donc ces deux influences étaient éliminées à la fois, ou, en d'autres termes, si notre cylindre était libre sur toute sa surface convexe, la durée totale de sa transformation serait très-notablement supérieure au résultat direct de l'observation.

Maintenant, la quantité que nous avons à considérer, c'est la durée partielle, et non la durée totale; mais, dans les mêmes circonstances, la première doit être peu inférieure à la seconde : car lorsque les filets vont se rompre, les masses entre lesquelles ils s'étendent approchent déjà de la forme sphérique; par conséquent, en vertu de la conclusion ci-dessus obtenue, nous devons admettre que la durée partielle dont nous nous occupons, c'est-à-dire celle qui se rapporterait au cas d'une liberté complète de la surface convexe du cylindre, excéderait encore notablement la durée totale observée, savoir 0″,4.

En partant de cette valeur 0″,4 comme constituant la limite inférieure correspondante à un diamètre de $2^{mm},1$, la loi de la proportionnalité de la durée partielle au diamètre donnera immédiatement la limite inférieure correspondante à un autre diamètre quelconque : on trouvera, par exemple, que, pour dix millimètres, cette limite serait de $\frac{0'',4 \times 10}{2,1} = 1'',9$, ou plus simplement, de 2″.

Si donc on suppose un cylindre de mercure de un centimètre de diamètre, formé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle que ses divisions prennent leur longueur normale, le temps qui s'écoulera depuis l'origine de la transformation de ce cylindre jusqu'à l'instant de la rupture des filets surpassera notablement deux secondes.

§ 68. Il n'est pas inutile de présenter ici, en résumé, l'ensemble des faits et des lois que les expériences décrites dans ce qui précède nous ont conduits à établir à l'égard des cylindres liquides instables.

1° Lorsque un cylindre liquide est formé entre deux bases solides, si le rapport de sa longueur à son diamètre surpasse une certaine limite dont la valeur exacte est comprise entre 3 et 3,6, le cylindre constitue une figure d'équilibre instable.

La valeur exacte dont il s'agit est ce que nous nommons *la limite de la stabilité des cylindres.*

2° Si le cylindre a une longueur considérable par rapport à son diamètre, il se convertit spontanément, par la rupture de l'équilibre, en une série de sphères isolées, égales en diamètre, également espacées, ayant leurs centres sur la droite qui formait l'axe du cylindre, et dans les intervalles desquelles sont rangées, suivant ce même axe, des sphérules de différents diamètres. Seulement chacune des bases solides retient adhérente à sa surface une portion de sphère.

3° La marche du phénomène est la suivante : le cylindre commence par se renfler graduellement sur des portions de sa longueur situées à égale distance les unes des autres, tandis qu'il s'amincit dans les portions intermédiaires, et la longueur des renflements ainsi formés est égale ou à fort peu près à celle des étranglements; ces modifications continuent à se prononcer de plus en plus, en s'effectuant avec une vitesse accélérée, jusqu'à ce que les milieux des étranglements soient devenus très-minces; alors, à partir de chacun de ces milieux, le liquide se retire rapidement dans les deux sens, mais en laissant encore les masses réunies deux à deux par un filet sensiblement cylindrique; puis celui-ci éprouve les mêmes modifications que le cylindre; seulement il ne s'y forme en général que deux étranglements, qui comprennent, par conséquent, entre eux un renflement; chacun de ces petits étranglements se convertit à son tour en un filet plus délié, qui se brise en deux points et donne naissance à une sphérule isolée très-petite, tandis que le renflement ci-dessus se transforme en une sphérule plus grande; enfin, après la rupture de ces derniers filets, les grosses masses prennent complétement la forme sphérique. Tous ces phénomènes s'accomplissent d'une manière symétrique par rapport à l'axe, de sorte que, pendant leur durée, la figure ne cesse pas d'être de révolution.

4° Nous nommons *divisions* d'un cylindre liquide, les portions de ce cylindre dont chacune doit fournir une sphère, soit que nous considérions par la pensée ces portions dans le cylindre même, avant qu'elles aient commencé à se dessiner, soit que nous les prenions pendant la transformation, c'est-à-dire pendant que chacune d'elles se modifie pour arriver à la forme sphérique. La longueur d'une division mesure, par conséquent, la distance constante qui, pendant la transformation, se trouve comprise entre les cercles de gorge de deux étranglements voisins.

Nous nommons, en outre, *longueur normale des divisions*, celle que prendraient les divisions si le cylindre auquel elles appartiennent avait une longueur infinie.

Dans le cas d'un cylindre limité par des bases solides, les divisions prennent aussi la longueur normale lorsque la longueur du cylindre est égale au produit de cette même longueur normale par un nombre entier ou bien par un nombre entier plus un demi.

Alors, si le second facteur est un nombre entier, la transformation se dispose de telle manière, que, pendant son accomplissement, la figure se termine d'un côté par un étranglement et de l'autre par un renflement; si le second facteur est composé d'un nombre entier plus un demi, la figure se termine de chaque côté par un renflement.

Quand la longueur du cylindre ne remplit ni l'une ni l'autre de ces conditions, les divisions prennent la longueur la plus approchée possible de la longueur normale, et la transformation adopte celle des deux dispositions ci-dessus la plus convenable pour atteindre ce but.

5° Pour un cylindre d'un diamètre donné, la longueur normale des divisions varie avec la nature du liquide, et avec certaines circonstances extérieures, telles que la présence d'un liquide ambiant ou le contact de la surface convexe du cylindre avec un plan solide. Dans tous les énoncés qui suivent, nous prendrons le cas le plus simple, savoir celui de l'absence de ces circonstances extérieures; en d'autres termes, nous supposerons toujours les cylindres réalisés dans le vide ou dans l'air, et libres sur toute leur surface convexe.

6° Deux cylindres différents en diamètre, mais formés du même liquide, et ayant des longueurs telles que les divisions prennent dans chacun d'eux leur longueur normale, se divisent d'une manière semblable, c'est-à-dire que les longueurs normales respectives des divisions sont entre elles comme les diamètres de ces cylindres.

En d'autres termes, la nature du liquide ne changeant pas, la longueur normale des divisions d'un cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci.

Il en est de même, par conséquent, du diamètre des sphères isolées dans lesquelles se convertissent les divisions normales, et de la longueur des intervalles qui séparent ces sphères.

7° Le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre surpasse toujours la limite de la stabilité.

8° Ce rapport est d'autant plus grand que le liquide est plus visqueux et que les forces figuratrices y sont plus faibles.

9° Pour un cylindre de mercure, ce même rapport est de beaucoup inférieur à 6, et l'on peut admettre qu'il se trouve au-dessous de 4.

Pour un cylindre formé de tout autre liquide fort peu visqueux, tel que l'eau, l'alcool, etc., il est très-probable que le rapport dont il s'agit s'éloigne peu de 4. D'après cela, dans le cas de ces derniers liquides, on a pour la valeur approximative probable du rapport entre le diamètre des sphères isolées qui résultent de la transformation et le diamètre du cylindre, le nombre 1,82; et pour celle du rapport entre la distance de deux sphères voisines et ce même diamètre, le nombre 2,18.

10° Si le liquide est du mercure, et que les divisions aient leur longueur normale, le temps qui s'écoule depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets, est exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre.

Cette loi s'applique aussi, très-probablement, à chacun des autres liquides fort peu visqueux.

Il est possible que cette même loi soit générale, c'est-à-dire qu'elle s'applique à tous les liquides; mais nos expériences laissent la chose incertaine.

11° Pour un même diamètre, et les divisions ayant toujours leur longueur normale, la valeur absolue du temps dont il s'agit varie avec la nature du liquide.

12° Dans le cas du mercure, et pour un diamètre de un centimètre, cette valeur absolue est notablement supérieure à deux secondes.

13° Lorsque un cylindre est formé entre deux bases solides suffisamment rapprochées pour que le rapport de la longueur du cylindre au diamètre soit compris entre une fois et une fois et demie la limite de la stabilité, la transformation ne produit qu'un seul étranglement et un seul renflement; on n'obtient alors pour résultat final, que deux portions de sphère inégales en volume et en courbure, respectivement adhérentes aux bases solides, plus des sphérules interposées.

APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DES CYLINDRES LIQUIDES : THÉORIE DE LA CONSTITUTION DES VEINES LIQUIDES LANCÉES PAR DES ORIFICES CIRCULAIRES.

§ 69. Passons actuellement à l'application que nous avons annoncée de la plupart des faits et des lois ci-dessus.

Considérons une veine liquide s'écoulant librement sous l'action de la pesanteur par un orifice circulaire percé en mince paroi dans le fond horizontal d'un vase. Les molécules du liquide intérieur au vase, qui affluent de tous les côtés vers l'orifice, conservent encore, comme on sait, immédiatement après leur sortie, des directions obliques au plan de cet orifice, d'où résulte un rétrécissement rapide de la veine à partir de l'orifice jusqu'à une section horizontale que l'on désigne improprement sous le nom de section contractée. Arrivées à cette section, qui est peu éloignée de l'orifice, les molécules tendent à prendre toutes une direction verticale commune, avec la vitesse correspondante à la hauteur du liquide dans le vase, et elles sont, en outre, sollicitées dans cette même direction verticale par leur pesanteur individuelle. Il résulte de là que, l'orifice étant supposé circulaire, la veine tend à constituer, à partir de la section contractée, un cylindre sensiblement parfait et d'une longueur quelconque; mais cette forme est modifiée, comme on le sait encore, par l'accélération que la pesanteur imprime à la vitesse du liquide, et le diamètre de la veine, au lieu d'être partout le même, va en décroissant plus ou moins à mesure que l'on s'éloigne de la section contractée.

Si les causes que nous venons de rappeler agissaient seules, la veine se montrerait donc simplement de plus en plus effilée à mesure qu'on la considérerait plus loin de la section contractée, sans perdre ni sa limpidité ni sa continuité. Mais il résulte de nos expériences, qu'une semblable figure liquide, dont la forme approche de celle d'un cylindre très-allongé, doit se transformer en une série de sphères isolées ayant leurs centres rangés sur l'axe de la figure. A la vérité, il s'agit ici d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur ; mais il est évident que, pendant la chute libre d'un liquide, la pesanteur ne met plus aucun obstacle au jeu des attractions moléculaires, et que celles-ci doivent alors exercer sur la masse les mêmes actions figuratrices que si cette masse était sans pesanteur et à l'état de repos ; c'est ainsi, par exemple, que les gouttes de pluie prennent, dans leur chute, la forme sphérique. Seulement, pour que la conclusion précédente fût tout à fait rigoureuse, il faudrait que toutes les parties de la masse fussent animées de la même vitesse, ce qui n'a pas lieu pour la veine; mais on comprend que, si cette différence peut apporter quelques modifications au phénomène, elle ne saurait empêcher la production de celui-ci.

Le liquide de la veine devra donc nécessairement arriver par degrés, pendant son mouvement, à constituer une série de sphères isolées.

Mais ce liquide se renouvelant continuellement, le phénomène de la transformation doit aller aussi en se renouvelant toujours. En second lieu, chaque portion du liquide commençant à être soumise aux forces figuratrices dès qu'elle fait partie du cylindre imparfait que tend à constituer la veine, c'est-à-dire dès l'instant où elle franchit la section contractée, et demeurant ensuite, pendant son trajet, sous l'action continue de ces forces, on voit que chacune des *divisions* de la veine doit commencer à se dessiner à partir de la section contractée, et descendre, emportée par le mouvement de translation du liquide, en se modifiant par degrés pour arriver à l'état de sphère isolée. Or, il suit de là qu'à un instant donné, les divisions de la veine doivent se trouver dans une phase d'autant plus avancée de la transformation qu'on les considère à une distance plus grande de la section contractée, du moins jusqu'à celle où la transformation en sphères est complétement effectuée. De l'orifice à la distance où a lieu la séparation des masses, la veine doit évidemment être continue; mais à une distance plus grande, les portions de liquide qui passent, doivent être isolées les unes des autres.

Si donc les mouvements du liquide, tant celui de translation que celui de transformation, étaient assez lents pour qu'on pût les suivre des yeux, on verrait la veine formée de deux parties distinctes, l'une supérieure continue, l'autre inférieure discontinue. La surface de la première présenterait une suite de renflements et d'étranglements qui descendraient avec le liquide, en se renouvelant continuellement à partir de la section contractée, et qui, très-faiblement indiqués à leur origine près de cette section, se prononceraient de plus en plus pendant leur mouvement de translation, les renflements devenant plus saillants et les étranglements plus profonds; enfin, ces divisions de la veine arrivant l'une après l'autre, dans leur plus grand développement, à l'extrémité inférieure de la partie continue, on les verrait s'en détacher, et achever aussitôt de prendre la forme sphérique. En outre, la séparation de chacune de ces masses serait nécessairement précédée de la formation d'un filet qui se résoudrait en sphérules de différents diamètres; de sorte que chaque sphère isolée serait suivie de semblables sphérules. La partie discontinue de la veine se montrerait donc composée de sphères isolées de même volume et de sphérules inégales rangées dans les intervalles des premières, les unes et les autres étant emportées par le mouvement de translation, et se renouvelant sans cesse à l'extrémité de la partie continue.

Or, on sait, depuis les belles observations de Savart[1], que telle est, en effet, précisément la constitution réelle de la veine. Seulement, dans les circonstances ordinaires, une cause étrangère reconnue aussi par Savart, modifie plus ou moins la forme des divisions de la partie continue, et altère la sphéricité des masses isolées qui composent la partie discontinue; mais Savart a donné les moyens de se garantir de cette influence dont nous reparlerons plus loin.

§ 70. Maintenant, le mouvement de translation étant trop rapide pour que les phénomènes qui se produisent dans la veine soient saisissables par l'observation directe, il doit résulter de là certaines apparences particulières. Rappelons ici que lorsque un cylindre liquide se résout en sphères, la vitesse avec laquelle la transformation s'effectue est accélérée, et commence, par conséquent, par être extrêmement petite. A cause donc de cette petitesse originaire, et de la rapidité du mouvement de translation dans la veine, les effets de la transformation graduelle ne pourront commencer à devenir notables qu'à une distance plus ou moins grande de la

[1] *Annales de chimie et de physique*, août 1833.

section contractée. Jusqu'à cette distance, le passage rapide des renflements et des étranglements devant l'œil ne pourra donner lieu à aucun effet sensible à la simple vue; de sorte que cette portion de la veine se montrera sous la forme qu'elle affecterait si elle n'avait aucune tendance à se diviser. A partir de cette même distance, les renflements commençant à prendre un développement notable, la veine paraîtra aller en s'élargissant, jusqu'à une autre distance au delà de laquelle le diamètre se montrera constant.

Telle est, en effet, comme l'ont encore montré les observations de Savart, la forme que présente à l'observation directe une veine soustraite à l'influence de toute cause perturbatrice.

Enfin, on sait qu'à partir de l'orifice jusqu'au point où elle commence à paraître s'élargir, la veine se montre limpide, tandis qu'au delà elle paraît plus ou moins trouble; et Savart a parfaitement expliqué ces deux aspects différents, ainsi que d'autres apparences curieuses que présente la partie trouble, en attribuant la limpidité de la portion supérieure au peu de développement des renflements et des étranglements qui s'y propagent, et le trouble ainsi que les autres apparences du reste de la veine, au passage rapide devant l'œil, d'abord des renflements et des étranglements devenus plus prononcés, puis plus bas, des sphères isolées et des sphérules interposées. Nous renvoyons, pour ces détails, au mémoire cité.

§ 71. Mais nous pouvons aller plus loin. Deux conséquences découlent immédiatement de notre explication de la constitution de la veine. En premier lieu, les divisions se transformant pendant leur descente, il est clair que l'espace parcouru par une division pendant le temps qu'elle met à effectuer une partie donnée de sa transformation, sera d'autant plus grand qu'elle descendra plus vite, ou, en d'autres termes, que la charge, c'est-à-dire la hauteur du liquide dans le vase, sera plus considérable; d'où il suit évidemment que, pour un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine doit croître avec la charge. Or, c'est ce que confirment les observations de Savart.

En second lieu, puisque la transformation d'un cylindre est d'autant plus lente que le cylindre a un plus grand diamètre, le temps qu'emploiera une division de la veine pour effectuer une même partie de sa transformation, sera d'autant plus long que la veine aura plus d'épaisseur; d'où il suit que, si la vitesse d'écoulement ne change pas, l'espace que parcourra la division pendant ce temps, sera d'autant plus considérable que le diamètre de l'orifice sera plus grand; par conséquent, pour une même charge, la longueur de la partie continue doit croître avec le diamètre de l'orifice, et c'est encore ce que vérifient les observations rapportées dans le mémoire cité.

Quant aux lois qui régissent ces variations de la longueur de la partie continue, Savart déduit de ses observations, qui ont été faites en employant des veines d'eau, que, pour un même orifice, cette longueur est à peu près proportionnelle à la racine carrée de la charge, et que, pour une même charge, elle est à peu près proportionnelle au diamètre de l'orifice.

Nous allons examiner si ces deux lois elles-mêmes ressortent aussi de notre explication.

§ 72. Imaginons, pour un instant, que la pesanteur cesse d'agir sur le liquide dès que celui-ci franchit la section contractée. Alors, à partir de cette section, la vitesse de translation sera simplement celle qui est due à la charge, et qui a, comme on sait, pour valeur $\sqrt{2gh}$, g désignant la pesanteur, et h la charge. Cette vitesse sera uniforme, et, par conséquent, si la veine n'avait pas de tendance à se diviser, elle demeurerait exactement cylindrique sur une étendue quelconque (§ 69). Maintenant, toutes les parties du liquide étant animées de la même vitesse de translation, ce mouvement commun ne pourra influer sur l'effet des actions figuratrices; de sorte que, par exemple, les modifications graduelles que subira chacun des étranglements, et le temps qu'il mettra à les accomplir, seront indépendants de la vitesse de translation.

Cela posé, considérons la tranche liquide infiniment mince qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, à partir de l'instant où elle quitte la section contractée. Cette tranche descendra avec une vitesse constante, et, en même temps, son diamètre ira en diminuant, jusqu'à ce que l'étranglement auquel elle appartient se transforme en filet, et alors la tranche dont il s'agit occupera le milieu de ce filet; puis le filet se désunira pour se convertir en sphérules. Comme nous l'avons fait voir ci-dessus, le temps employé à l'accomplissement de ces phénomènes, et pendant lequel la tranche liquide que nous avons considérée a parcouru la distance comprise entre la section contractée et le lieu qu'occupe le milieu du filet à l'instant précis de la rupture, est indépendant de la vitesse de translation, et, par conséquent, si le diamètre de l'orifice ne change pas, ce temps sera constant quelle que soit la charge. Or, dans un mouvement uniforme, l'espace parcouru pendant un temps déterminé étant proportionnel à la vitesse, la distance ci-dessus sera proportionnelle à $\sqrt{2gh}$, et, par suite, à $\sqrt{h}$. Comme nous aurons souvent à faire usage de cette même distance, nous la représenterons, pour abréger, par D.

Maintenant, il est aisé de comprendre que, dans notre veine, la longueur de la partie continue ne diffère pas sensiblement de la distance D. En effet, la partie continue se termine à l'endroit précis où vient se produire, dans chaque filet, le plus élevé des points de rupture de celui-ci : car, à l'instant où la rupture s'effectue, tout ce qu'il y a au-dessus du point dont il s'agit se trouve dans des phases moins avancées de la transformation (§ 69), et possède, par conséquent, encore la continuité, tandis que tout ce qu'il y a au-dessous de ce même point est nécessairement déjà discontinu. Ainsi, d'une part, la partie continue de la veine commence à l'orifice et se termine à l'endroit où vient se produire le point de rupture le plus élevé de chaque filet; et, d'une autre part, la distance D commence à la section contractée et se termine au point correspondant au milieu de la longueur de chacun des filets à l'instant de leur rupture. La partie continue prend donc son origine un peu plus haut, mais aussi se termine un peu moins bas, que la distance D; la différence des origines de ces deux grandeurs et celle de leurs terminaisons doivent, par conséquent, se compenser en partie; et, comme ces différences sont toutes deux fort petites, l'excès de l'une sur l'autre sera, à plus forte raison, très-minime, de sorte que les deux grandeurs auxquelles elles se rapportent pourront, ainsi que je l'ai dit, être regardées sans erreur sensible comme égales entre elles [1].

[1] Nous reviendrons sur ce point, et nous l'établirons alors plus nettement.

En vertu de cette égalité, la longueur de la partie continue de la veine que nous considérons suivra donc sensiblement la même loi que la distance D, c'est-à-dire sera à fort peu près proportionnelle à $\sqrt{h}$.

Ainsi, dans le cas imaginaire d'une vitesse de translation uniforme, nous retrouvons la première des lois données par Savart. Or, il est clair que, dans une veine réelle, la vitesse s'écartera d'autant moins de l'uniformité que la charge sera plus considérable; d'où l'on peut inférer que, pour des charges suffisamment grandes, la longueur de la partie continue de la veine réelle devra encore suivre sensiblement cette loi. C'est, d'ailleurs, ce que nous allons démontrer d'une manière rigoureuse.

§ 75. Plaçons-nous donc dans le cas réel, c'est-à-dire considérons une veine soumise à l'action de la pesanteur, et dans laquelle, par conséquent, le mouvement de translation est accéléré. Alors, la vitesse que possède, après un temps t quelconque, une tranche horizontale du liquide emportée par le mouvement de translation, aura pour valeur $\sqrt{2gh} + gt$, le premier terme représentant la portion de la vitesse due à la charge, le second la portion due à l'action de la pesanteur sur la veine, et t étant compté à partir du moment où la tranche liquide franchit la section contractée. Rappelons ici qu'en vertu de l'accélération de la vitesse, la veine, si elle ne se divisait point, irait en s'amincissant indéfiniment de haut en bas (§ 69).

Cela posé, concevons que, sous la même charge et par un autre orifice de même diamètre, s'écoule, en même temps que la veine réelle dont il s'agit, une autre veine de même liquide placée dans la condition imaginaire du paragraphe précédent. Soit θ le temps employé dans cette seconde veine à parcourir la distance que nous avons désignée par D : c'est-à-dire celui qui se trouve compris entre l'instant où la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée, et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement s'est transformé. Faisons, dans l'expression de la vitesse relative à la première veine, $t = \theta$, ce qui donne, pour cette vitesse après le temps θ, la valeur $\sqrt{2gh} + g\theta$; en d'autres termes, considérons la vitesse d'une tranche liquide appartenant à la veine réelle, après le temps nécessaire pour qu'une tranche appartenant à la veine imaginaire ait parcouru la distance D. D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, si l'orifice demeure le même, ce temps est constant, quelle que soit la charge, en sorte que, dans l'expression ci-dessus, le terme $g\theta$ reste invariable quand on fait varier h. Nous pourrons donc, quelle que soit la valeur de θ, supposer la charge h assez considérable pour que le terme $\sqrt{2gh}$ soit très-grand relativement au terme $g\theta$, et que ce dernier puisse, par conséquent, être négligé sans erreur sensible. Pour une valeur de h qui réalisera cette condition, et, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus grandes encore, la vitesse d'une tranche de la veine réelle pendant le temps θ pourra être regardée comme constante et égale à celle d'une tranche de la veine imaginaire; de sorte que, dans tout l'espace parcouru par la première pendant ce même temps à partir de la section contractée, la veine réelle, si elle ne se divisait pas, conserverait sensiblement le même diamètre, et pourrait être regardée comme identique avec la veine imaginaire supposée également sans divisions.

Maintenant, il suit nécessairement de cette identité approchée, que, pendant le temps θ, tout se passera sensiblement de la même manière dans les deux veines; par conséquent, le temps θ sera aussi à fort peu près celui qu'emploiera, dans la veine réelle, la tranche liquide correspondante au cercle de gorge d'un étranglement, pour accomplir les modifications que nous avons considérées, et l'espace qu'elle parcourra pendant ces modifications, pourra être regardé comme égal à la distance D relative à la veine imaginaire.

Or, puisque la partie continue de la veine réelle se termine un peu moins bas que cet espace, et se trouve, par suite, comprise dans la même portion de la veine, il suit encore de l'identité approchée ci-dessus, que cette partie continue sera sensiblement égale en longueur à celle de la veine imaginaire, et que, par conséquent, à partir de la moindre des charges considérées plus haut, les longueurs des parties continues des deux veines devront être régies à fort peu près par la même loi.

Nous arrivons donc enfin à cette conclusion, que, pour un même orifice, et à partir d'une charge inférieure suffisamment grande, la longueur de la partie continue de la veine réelle doit être proportionnelle à la racine carrée de la charge.

D'après la démonstration précédente, la charge inférieure dont il s'agit est celle sous laquelle le mouvement de translation du liquide commence à demeurer sensiblement uniforme dans toute la portion de la veine réelle comprise entre la section contractée et le point qu'occupe le milieu de chaque filet à l'instant de la rupture; mais comme l'extrémité de la partie continue est très-peu distante de ce point (§ précéd.), nous pouvons négliger la petite différence, et dire simplement que la charge inférieure en question est celle qui commence à rendre le mouvement de translation du liquide sensiblement uniforme jusqu'à l'extrémité de la partie continue de la veine.

Ainsi, sous la condition d'une charge inférieure suffisante pour produire cette uniformité approchée, condition toujours réalisable, la loi indiquée par Savart comme établissant la relation entre la longueur de la partie continue et la charge, découle d'une manière nécessaire des propriétés des cylindres liquides.

Pour découvrir si cette loi doit encore être vraie lorsqu'on emploie des charges plus faibles, il faut partir d'autres considérations; mais nous voyons dès à présent que si, dans ce dernier cas, la loi est différente, elle doit, du moins, nécessairement converger vers la proportionnalité dont il s'agit, à mesure qu'on augmente la charge.

Remarquons ici, que, pour un liquide donné, la charge sous laquelle la veine commence à se trouver dans la condition que nous avons déterminée, doit être d'autant moins considérable que le diamètre de l'orifice est plus petit. En effet, puisque, toutes choses égales d'ailleurs, la transformation d'un cylindre liquide s'effectue d'autant plus rapidement que le diamètre du cylindre est moindre, il en résulte que la valeur de θ diminuera avec le diamètre de l'orifice, et que, par conséquent, plus celui-ci sera petit, moins la valeur de h devra être considérable pour que, dans l'expression $\sqrt{2gh} + g\theta$ posée au commencement de ce paragraphe, le terme $g\theta$ soit négligeable à côté du terme $\sqrt{2gh}$, et, par suite, pour que la veine se trouve dans la condition dont il s'agit.

En outre, comme le temps θ varie avec la nature du liquide, il en sera nécessairement de même de la charge que nous considérons.

§ 74. Occupons-nous actuellement de la seconde loi, c'est-à-dire de celle qui établit la proportionnalité approchée entre la longueur de la partie continue de la veine et le diamètre de l'orifice lorsque la charge demeure la même.

Reprenons, pour un instant, le cas imaginaire d'un mouvement de translation absolument uniforme. Alors la veine constituera, abstraction faite de ses divisions, un cylindre exact à partir de la section contractée (§ 72), cylindre qui sera formé dans l'air, et libre sur toute sa surface convexe; en outre, le mouvement de translation du liquide étant sans influence sur l'effet des actions figuratrices (*ibid.*), et aucune cause étrangère ne tendant à modifier la longueur des divisions, celles-ci prendront nécessairement leur longueur normale. On voit donc que, sauf la non-simultanéité de la formation de ses divisions (§ 69), notre veine imaginaire se trouvera précisément dans les mêmes conditions que les cylindres auxquels se rapportent les lois récapitulées dans le paragraphe 68; par conséquent, si nous considérons en particulier l'un des étranglements de cette veine, il devra passer par les mêmes formes, et accomplir ses modifications dans le même temps, que l'un quelconque des étranglements qui résulteraient de la transformation d'un cylindre de même diamètre que la veine, formé du même liquide, et placé dans les conditions dont il s'agit.

Maintenant, dans le cas d'un cylindre de mercure, le temps compris entre l'origine de la transformation et l'instant de la rupture des filets, est, d'après l'une de nos lois, exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre; et il est clair que cette loi s'applique tout aussi bien à l'un des étranglements en particulier, ou même simplement à son cercle de gorge, qu'à l'ensemble de la figure. Si donc nous supposons que notre veine imaginaire soit formée de mercure, le temps qu'emploiera le cercle de gorge de chacun de ses étranglements pour arriver à l'instant de la rupture du filet, sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre qu'aurait la veine s'il ne s'y produisait pas de divisions, c'est-à-dire à celui de la section contractée. Or, la forme cylindrique de la veine supposée sans divisions ne commençant qu'à la section contractée, ce n'est aussi qu'à partir de là que commencent les actions figuratrices provenant de l'instabilité de cette même forme cylindrique. Il faut donc admettre que la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, ne commence à éprouver les modifications qui résultent de la transformation, qu'à partir de l'instant où elle franchit la section contractée; ainsi, le temps que nous considérons prend naissance à ce même instant.

Mais ce temps compris entre l'instant où passe à la section contractée la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, est celui que nous avons désigné par θ, et pendant lequel la tranche liquide parcourt la distance D; dans notre veine imaginaire de mercure, le temps θ sera donc proportionnel au diamètre de la section contractée. D'un autre côté, le mouvement de translation étant supposé uniforme, la distance D sera proportionnelle au temps θ employé à la parcourir. Donc, en vertu de ces deux lois, la distance D sera proportionnelle au diamètre de la section contractée. Enfin, puisque la distance D ne diffère pas sensiblement de la longueur de la partie continue de la veine, cette longueur sera également proportionnelle au diamètre de la section contractée.

Maintenant, on sait que, dans une veine liquide, le diamètre de la section contractée peut être considéré comme proportionnel à celui de l'orifice quand ce dernier surpasse dix millimètres, et qu'au-dessous de cette limite, la proportionnalité ne s'altère d'une manière bien notable, que lorsque le diamètre de l'orifice devient inférieur à un millimètre[1]. D'ailleurs, comme cette altération est attribuée à l'influence qu'exerce l'épaisseur, quoique très-petite, des bords de l'orifice, il est probable qu'on la rendra moindre encore, en employant, ainsi que l'a fait Savart, des orifices

[1] En effet, on déduit des résultats obtenus par Hachette (*Ann. de chim. et de phys.*, t. III, p. 78), que pour un diamètre d'orifice égal ou supérieur à 10^{mm}, le rapport entre le diamètre de la section contractée et celui de l'orifice est, en moyenne, 0,78; qu'en passant de 10^{mm} à 1^{mm}, le rapport n'augmente que jusqu'à 0,83; et enfin, que pour un diamètre égal à $0^{mm},55$, le rapport devient 0,88.

évasés extérieurement, orifices qui peuvent être taillés de manière à avoir leurs bords fort tranchants. Ainsi, avec des orifices convenablement travaillés, on pourra sans doute, à partir d'un diamètre égal au plus à un millimètre, admettre, sans erreur notable, que le diamètre de la section contractée est proportionnel à celui de l'orifice.

D'après cela, puisque la longueur de la partie continue de notre veine imaginaire est proportionnelle au diamètre de la section contractée, elle sera également proportionnelle au diamètre de l'orifice, du moins à partir d'une valeur inférieure de ce dernier, qui ne soit pas de beaucoup au-dessous d'un millimètre.

Nous n'avons considéré que le cas du mercure; mais le principe d'où nous sommes partis, savoir la proportionnalité entre la durée partielle de la transformation d'un cylindre et le diamètre de celui-ci, s'applique très-probablement de même, comme nous le savons, à tous les autres liquides fort peu visqueux; par conséquent, dans le cas de l'un quelconque de ces derniers liquides, il est très-probable que la longueur de la partie continue de la veine imaginaire serait également proportionnelle au diamètre de l'orifice. Il se peut, du reste, que la loi soit vraie à l'égard de tous les liquides; mais il se peut aussi qu'elle n'ait pas cette généralité.

Si actuellement de la veine imaginaire nous passons à la veine réelle, nous n'avons qu'à supposer à la charge constante une valeur assez considérable pour que, dans toute l'étendue que nous assignerons aux variations du diamètre de l'orifice, la condition posée dans le paragraphe précédent soit satisfaite; de manière que, pour chacune des valeurs données à ce diamètre, la partie continue de la veine réelle ait sensiblement la même longueur que celle de la veine imaginaire correspondante : alors la loi qui régit cette longueur pourra être regardée comme la même dans les deux espèces de veines. D'après la première des deux remarques qui terminent le paragraphe précédent, on voit que si la charge commune remplit la condition dont il s'agit à l'égard de la plus grande des valeurs que l'on assigne au diamètre de l'orifice, elle la remplira, à plus forte raison, à l'égard de toutes les autres.

Nous sommes donc conduits à la conclusion définitive qui suit.

Dans le cas du mercure, et très-probablement aussi dans celui de tout autre liquide fort peu visqueux tel que l'eau, si, pour une même charge, on donne au diamètre de l'orifice des valeurs croissantes, depuis une valeur peu inférieure à un millimètre jusqu'à une autre valeur déterminée quelconque, et si la charge commune est suffisamment grande, la longueur de la partie continue de la veine sera proportionnelle au diamètre de l'orifice.

Cette conclusion est peut-être vraie dans le cas d'un liquide quelconque; mais nous manquons d'éléments pour décider la question.

Ainsi, avec les restrictions contenues dans l'énoncé ci-dessus, la seconde des lois données par Savart découle encore, d'une manière nécessaire, des propriétés des cylindres liquides; et l'on voit, de même, que si, dans le cas d'une charge commune peu considérable, la loi se modifie, elle doit converger vers celle de Savart à mesure que l'on donnera à cette charge une valeur plus grande.

§ 75. Nous avons dit (note du § 72) que nous reviendrions sur le principe de l'égalité très-approchée entre la longueur de la partie continue d'une veine imaginaire et la distance D correspondante, afin d'établir ce principe d'une manière plus nette; c'est ce que nous allons faire.

Soit L la longueur de la partie continue, et C la portion commune à cette longueur et à la distance D; soit aussi s l'intervalle des origines des longueurs L et D, c'est-à-dire la petite distance comprise entre l'orifice et la section contractée; et soit enfin i l'intervalle des terminaisons de ces mêmes longueurs, c'est-à-dire la distance comprise entre le point de rupture le plus élevé du filet et le milieu de ce filet : on aura

$$\mathrm{L} = \mathrm{C} + s.$$
$$\mathrm{D} = \mathrm{C} + i,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{L} - \mathrm{D} = s - i,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} = 1 + \frac{s - i}{\mathrm{D}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cela posé, évaluons d'abord approximativement la quantité i pour un liquide particulier, et prenons encore le mercure. D'après ce que nous avons vu au commencement du paragraphe précédent, la longueur des divisions d'une veine imaginaire est égale à la longueur normale de celles d'un cylindre de même diamètre et de même liquide, qui serait formé dans l'air et libre sur toute sa surface convexe; or, dans le cas du mercure, nous savons que le rapport entre cette longueur normale et le diamètre du cylindre devrait se trouver au-dessous de quatre; par conséquent, dans notre veine imaginaire de mercure, le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre de la section contractée sera de même moindre que quatre; mais dans l'ignorance où nous sommes de la valeur exacte de ce rapport, nous la supposerons d'abord égale au nombre ci-dessus. Alors, si nous désignons le diamètre de la section contractée par k, le diamètre des sphères isolées qui composent la partie discontinue de la veine sera (§ 60) égal à $1{,}82.k$, et la longueur de l'intervalle entre deux sphères qui se suivent, à $2{,}18.k$. Mais le filet dans lequel se convertit un étranglement est nécessairement moins long que cet intervalle : car tant que la rupture n'a pas eu lieu, les deux masses que le filet rattache doivent être encore un peu allongées, et, en outre, chacune d'elles doit présenter un petit prolongement du côté du filet, pour se raccorder à celui-ci par des courbures concaves. D'après la comparaison des aspects que présente, immédiatement avant la rupture du filet et après l'achèvement total des phénomènes, la figure résultant de la transformation de l'un de nos cylindres d'huile courts (voir les *fig.* 28 et 29), j'estime que pour chacune des deux masses réunies par un filet, l'allongement vers celui-ci plus le petit prolongement concave forment environ les deux dixièmes du diamètre que prennent ces masses après leur passage à l'état de sphères. Pour avoir la longueur approximative du filet appartenant à notre veine, il faudra donc retrancher de l'intervalle $2{,}18.k$ les quatre dixièmes du diamètre $1{,}82.k$, ce qui donnera $1{,}45.k$. D'un autre côté, si l'on désigne par K le diamètre de l'orifice, on a (note du paragraphe précédent) à fort peu près $k = 0{,}8.K$, d'où il suit que la valeur approchée de la longueur de notre filet est égale à $1{,}45 \times 0{,}8.K = 1{,}16.K$. Enfin, le point de rupture le plus élevé du filet doit être très-rapproché de l'extrémité supérieure de ce dernier; si nous le supposons à cette extrémité même, la quantité i sera la moitié de la longueur du filet, et l'on aura, par conséquent,

$$i = 0{,}58.K.$$

Passons à la quantité s. On sait que la distance de l'orifice à la section contractée, bien que n'étant pas tout à fait indépendante de la charge, diffère toujours peu du demi-diamètre de l'orifice, de sorte qu'on aura à fort peu près $s = 0{,}50.K$, et, par suite,

$$s - i = 0{,}50.K - 0{,}58.K = - 0{,}08.K,$$

différence bien petite, comme on le voit.

Nous avons pris 4 pour la valeur du rapport entre la longueur des divisions de notre veine et le diamètre k; cette valeur est sans doute trop grande; mais comme la valeur exacte doit nécessairement surpasser la limite de la stabilité, qui elle-même surpasse 3, on peut admettre que cette valeur exacte est notablement supérieure à ce dernier nombre. Supposons-la cependant égale à ce même nombre 3; alors, le calcul nous donnera pour le diamètre des sphères isolées, la quantité $1{,}65.k$, et pour l'intervalle entre deux sphères consécutives, la quantité $1{,}35.k$. Achevant, avec ces données, les opérations de la même manière que ci-dessus, nous obtiendrons pour résultat final

$$s - i = 0{,}23.K,$$

différence aussi fort petite.

Maintenant, la valeur véritable de la différence $s - i$ devant être comprise entre les deux limites que nous venons de trouver, savoir $- 0{,}08.K$ et $+ 0{,}23.K$, et ne pouvant les atteindre ni l'une ni l'autre, nous aurons une approximation suffisante de cette valeur véritable, en prenant la moyenne des deux limites ci-dessus, ce qui donnera enfin

$$s - i = 0{,}07.K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Reste la distance D. Celle-ci étant parcourue d'un mouvement uniforme pendant le temps θ et avec la vitesse $\sqrt{2gh}$, nous aurons d'abord

$$D = \theta \sqrt{2gh}.$$

Or, puisque le temps θ est égal (§ précéd.) à la durée partielle de la transformation d'un cylindre de même diamètre et de même liquide que la veine, et qui serait formé dans les conditions des résultats résumés dans le paragraphe 68, il suit de l'un de ces derniers que, si la section contractée de notre veine imaginaire de mercure avait un diamètre de un centimètre, le temps θ serait notablement supérieur à deux secondes; cependant, afin de nous placer à dessein dans des conditions défavorables, nous supposerons que, dans le cas ci-dessus, le temps dont il s'agit serait seulement égal à deux secondes. Mais le temps θ est proportionnel au diamètre de la section contractée (§ précéd.); si donc nous prenons la seconde comme unité de temps et le centimètre comme unité de longueur, nous aurons, pour une valeur quelconque k de ce diamètre,

$$\theta = 2\,k;$$

et si nous remplaçons k par sa valeur approchée $0{,}8 . K$, il viendra

$$\theta = 1{,}6.K,$$

et, par conséquent,

$$D = 1{,}6.K \sqrt{2gh}.$$

Puisque nous avons pris la seconde et le centimètre comme unités de temps et de longueur, g sera égal à 980,9, et cette valeur étant substituée dans l'expression ci-dessus, il viendra enfin

$$D = 70{,}87.K \sqrt{h}.$$

De cette expression et de celle de $s-i$ donnée par la formule [2], nous tirerons

$$\frac{s-i}{D} = \frac{0{,}07}{70{,}87.\sqrt{h}} = 0{,}001 \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Or, d'après l'équation [1], cette quantité représente l'erreur que l'on commet en supposant $\frac{L}{D} = 1$, ou $L = D$; on voit donc que cette erreur est indépendante du diamètre de l'orifice, mais qu'elle varie avec la charge, et qu'elle est d'autant moindre que la charge est plus forte; on voit, en outre, que pour qu'elle ne fût pas très-petite, il faudrait donner à la charge une valeur extrêmement minime; mais c'est ce que l'on ne peut faire : car lorsque la charge est par trop faible, ou bien l'écoulement n'a plus lieu, ou bien il s'effectue goutte à goutte, et, dans ces deux cas, les phénomènes changent de nature et ne peuvent plus être rapportés à la transformation d'un cylindre. Nous supposerons donc à la charge une valeur de quatre centimètres, par exemple, valeur déjà bien faible, et qui est un peu au-dessous de la plus petite de celles que Savart a employées dans ses expériences. Alors, nous obtiendrons

$$\frac{s - i}{D} = 0{,}0005;$$

et transportant cette valeur dans l'équation [1], nous trouverons

$$\frac{L}{D} = 1 + 0{,}0005,$$

ou bien

$$L - D = 0{,}0005.D.$$

Ainsi, d'après ce résultat, quel que soit le diamètre de l'orifice, sous la faible charge de quatre centimètres la longueur de la partie continue d'une veine imaginaire de mercure ne surpasse déjà plus la distance D que d'une quantité égale aux cinq dix-millièmes de celle-ci; de sorte que, par exemple, si le diamètre de l'orifice était tel, que la distance D fût de un mètre, la longueur de la partie continue n'en différerait que d'un demi-millimètre; et, à cause de la valeur trop petite que nous avons attribuée à s, cette différence excède encore probablement la véritable.

Enfin, si l'on passe du mercure à un autre liquide, la différence entre L et D, ou plutôt le rapport de cette différence à D, variera nécessairement de grandeur et de sens avec la nature du liquide; mais ce même rapport est, comme nous venons de le voir, si minime à l'égard du mercure, que l'on peut bien admettre qu'il sera toujours fort petit à l'égard d'un autre liquide quelconque.

§ 76. Plaçons-nous maintenant en deçà de la limite à partir de laquelle la veine réelle peut être assimilée, dans sa partie continue, à la veine imaginaire correspondante (§§ 73 et 74); en d'autres termes, supposons la charge assez peu considérable ou le diamètre de l'orifice assez grand, pour que, dans l'étendue de la partie continue de la veine réelle, le mouvement de translation ne soit plus sensiblement uniforme. Alors aussi la veine tendra à s'amincir du haut en bas, et cet amincissement deviendra visible sur la portion limpide. La question des lois qui doivent, dans ces circonstances, régir la longueur de la partie continue, est très-compliquée; nous allons cependant tâcher de l'éclaircir jusqu'à un certain point.

Considérons une division de la veine à l'instant où son extrémité supérieure passe à la section contractée. Les deux tranches liquides entre lesquelles la division dont il s'agit se trouve comprise, partent de cette position avec des vitesses différentes : car, dans le petit trajet qu'a parcouru la tranche inférieure, sa vitesse s'est déjà un peu accrue par l'action de la pesanteur. Or, il suit de cet excès de vitesse et de l'accélération du mouvement, que les deux tranches iront en s'éloignant de plus en plus l'une de l'autre à mesure qu'elles descendront, ou, en d'autres termes, que la portion de liquide comprise entre elles s'allongera graduellement pendant son mouvement de translation. Par conséquent, si aucune autre cause n'intervenait, chacune des divisions, emportée avec la vitesse accélérée du liquide, augmenterait graduellement en longueur jusqu'à l'instant de la rupture du filet, et conserverait pendant sa descente un volume constant.

Mais il y a une cause qui agit d'une manière opposée sur les divisions. Si l'on imagine que les divisions de la partie continue s'effacent tout à coup, la petite portion de la veine ainsi modifiée qui remplacera, en cet instant, une division donnée, sera d'autant plus mince que la division dont il s'agit était plus éloignée de la section contractée. Par conséquent, nous pourrons considérer chacune des divisions qui, à un instant déterminé, se trouvent rangées sur toute la longueur de la partie continue, comme provenant respectivement de la transformation d'un cylindre différent; et comme la petite portion de la veine qui remplacerait, dans l'hypothèse ci-dessus, une division donnée irait en s'amincissant un peu de haut en bas, on aura sensiblement le diamètre du cylindre correspondant, en prenant le diamètre moyen de cette même portion. Or, nous savons que, pour un même liquide, la longueur normale des divisions d'un cylindre supposé formé dans l'air et libre sur toute sa surface convexe, est proportionnelle au diamètre de ce cylindre; par conséquent, si rien ne contrariait l'action des forces figuratrices sur la veine, le rapport entre la longueur d'une division et le diamètre moyen ci-dessus qui lui correspondrait, serait le même pour toutes les divisions; et puisque ce diamètre moyen décroît de division en division du haut en bas de la partie continue, il s'ensuit que la longueur des divisions irait en décroissant dans le même rapport. Si donc la cause dont nous nous occupons agissait seule, chaque division diminuerait graduellement de longueur et de volume à mesure qu'elle descendrait dans la partie continue. Mais alors les divisions partant de la section contractée avec la vitesse du liquide, devraient nécessairement suivre, dans leur mouvement de translation, une loi différente. Nous allons faire voir que ce mouvement serait retardé, de sorte que le liquide, qui descend au contraire avec une vitesse accélérée, devrait passer d'une division à l'autre, et que celles-ci constitueraient simplement, sur la surface de la veine, une sorte d'ondulation qui se propagerait suivant une loi particulière.

Plaçons-nous dans l'hypothèse de l'action entièrement libre des forces figuratrices, et partons de l'instant où la section de la surface de la veine qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée. Après un petit intervalle de temps, une autre section superficielle, correspondante au cercle de gorge suivant, passera à son tour, et ces deux sections comprendront entre elles une division. Après un nouvel intervalle de temps égal au premier, une autre division aura passé à la section contractée; mais la première se sera déjà raccourcie, de sorte que son cercle de gorge inférieur aura parcouru, dans ce second intervalle de temps, un espace moindre que dans le premier. Par la même raison, l'espace parcouru dans un troisième intervalle de temps égal aux deux autres, sera plus petit encore, et ainsi de suite. Le mouvement de translation des cercles de gorge, et, par conséquent, celui des divisions qu'ils comprennent deux à deux, sera donc, comme je l'ai dit, un mouvement retardé.

Maintenant, les deux causes que nous avons signalées, et qui agissent concurremment sur les divisions, combineront nécessairement leurs effets. Par conséquent, la vitesse de translation des divisions sera intermédiaire entre la vitesse accélérée du liquide et la vitesse retardée qui résulterait de la seconde cause seule; en deuxième lieu, les divisions diminueront graduellement de volume pendant leur descente le long de la partie continue, mais suivant une loi moins rapide qu'elles ne le feraient sous l'action isolée de cette même seconde cause; enfin, la longueur des divisions suivra une loi intermédiaire entre l'accroissement graduel que déterminerait la première cause et le décroissement que produirait la seconde.

§ 77. Nous allons chercher de quelle manière ces modifications du volume, de la longueur et de la vitesse des divisions peuvent influer sur les lois qui régissent la longueur de la partie continue de la veine.

Faisons d'abord attention que dans nos veines imaginaires, où le mouvement de translation du liquide est supposé uniforme sous toutes les charges, les causes qui produisent les modifications ci-dessus n'existent pas, et que, par conséquent, les divisions doivent toujours descendre avec la vitesse même du liquide, sans varier ni en volume ni en longueur dans le trajet de la partie continue. En outre, rappelons-nous que, d'après ce qui a été exposé dans les paragraphes 72, 74 et 75, les lois de Savart sont déjà satisfaites à l'égard de ces mêmes veines à partir de charges très-faibles, la première loi dans le cas d'un liquide quelconque, et la seconde dans le cas du mercure, très-probablement aussi dans celui de tout autre liquide fort peu visqueux, et peut-être également dans celui d'un liquide quelconque.

Maintenant, revenons à la veine réelle du paragraphe précédent, et commençons par examiner l'influence de la diminution du volume de ses divisions.

Puisque un cylindre supposé dans les conditions de nos lois et formé d'un liquide donné se transforme avec d'autant plus de rapidité que son diamètre est moindre, et, par suite, que le volume de ses divisions est plus petit, il en résulte nécessairement que la diminution graduelle du volume des divisions de la veine tend à rendre la vitesse de leur transformation plus accélérée qu'elle ne le serait dans la veine imaginaire de même liquide, qui s'écoulerait sous la même charge et par un orifice de même diamètre. Sous l'influence isolée de cette modification du volume, le temps qu'exige la portion du phénomène correspondante au trajet de la partie continue, serait donc plus court, et, par suite, la longueur de cette même partie continue serait moindre, que dans la veine imaginaire. Or, si la charge que nous considérons se trouvait remplacée par une charge suffisante pour annuler à fort peu près l'accélération du mouvement de translation du liquide dans la partie continue, cette partie de la veine serait alors sensiblement égale en longueur à celle de la veine imaginaire correspondante (§ 75); donc, en passant de la première charge à la seconde, la partie continue de la veine réelle augmenterait plus que celle de la veine imaginaire, c'est-à-dire, par conséquent, augmenterait dans un rapport plus grand que celui des racines carrées des deux charges. Ainsi, la diminution graduelle du volume des divisions tend à rendre la loi qui régit la longueur de la partie continue de la veine quand on fait varier la charge, plus rapide que celle de Savart.

Passons à ce qui concerne la longueur des divisions. Puisque l'accélération de la vitesse de translation du liquide met obstacle au libre raccourcissement des divisions, celles-ci doivent être graduellement étirées dans le sens de leur longueur, à mesure qu'elles descendent sur la partie continue. Or, de là naît une influence de même sens que la précédente : car, à cause de leur moindre épaisseur, les parties étranglées céderont à cette traction plus facilement que les parties renflées, ce qui augmentera nécessairement la rapidité avec laquelle les premières s'amincissent, et tendra, par conséquent, à déterminer, pour chacune d'elles, la formation et la rupture du filet plus tôt que dans la veine imaginaire correspondante.

Mais la différence des lois que suivent dans leurs mouvements de translation respectifs les divisions et le liquide, engendre une influence qui agit en sens contraire des deux précédentes. En vertu de l'excès que prend sa vitesse sur celle des divisions, le liquide passe, comme nous l'avons vu, d'une division à l'autre, de sorte qu'une même portion parcourt successivement, tantôt le canal plus étroit d'un étranglement, tantôt l'espace plus large d'un renflement. Mais le liquide se mouvant ainsi dans un conduit de dimensions alternativement plus petites et plus grandes, sa vitesse doit être plus considérable, dans les parties étranglées, et moindre, dans les parties renflées, que si les divisions n'existaient pas; d'où résulte cette singulière conséquence, que la vitesse de translation du liquide, au lieu d'être uniformément accélérée, est soumise, dans le trajet de la partie continue, à une suite de variations particulières qui la rendent alternativement supérieure et inférieure à celle qu'aurait un corps solide tombant d'un point situé à la hauteur du niveau du liquide dans le vase. En outre, les molécules liquides, au lieu de se mouvoir suivant des lignes présentant une courbure très-faible et toujours de même sens, comme elles le feraient en l'absence des divisions, décriront nécessairement, dans leurs passages de division en division, des lignes sinueuses. Or, les forces figuratrices qui émanent de la couche superficielle de la veine, et qui produisent les divisions, ne peuvent obliger les molécules du liquide à subir ces changements alternatifs de direction et de vitesse, qu'en y dépensant une partie de leur propre action; de sorte que les choses se passeront comme si ces forces éprouvaient une perte d'intensité. Si donc l'influence dont il s'agit s'exerçait isolément, la transformation s'effectuerait avec plus de lenteur, et, par conséquent, la partie continue serait plus longue, que dans la veine imaginaire correspondante; d'où il suit qu'en passant de la charge que nous considérons à une charge qui établirait l'uniformité approchée du mouvement de translation du liquide dans la partie continue, la longueur de cette partie de la veine augmenterait dans un rapport moindre que celui des racines carrées des deux charges.

Quant à la vitesse de translation des divisions considérée en elle-même, nous savons bien qu'elle doit être intermédiaire entre la vitesse retardée qui résulterait du libre raccourcissement de ces divisions, et la vitesse accélérée du liquide; mais il serait difficile de décider à priori si cette vitesse intermédiaire conserve quelque ralentissement ou si elle présente quelque accélération. Du reste, en admettant qu'il existe un ralentissement, celui-ci tendant évidemment à diminuer la longueur de la partie continue, produirait une influence de même sens que les deux premières ci-dessus; et en supposant, au contraire, qu'une accélération ait lieu, celle-ci déterminerait une influence de même sens que la troisième.

§ 78. En résumé donc, pour des charges moins considérables que celles qui rendraient le mouvement de translation du liquide sensiblement uniforme dans la partie continue de la veine, deux genres opposés d'influences agissent sur la loi suivant laquelle la longueur de cette partie continue varie avec la charge, le premier tendant à faire croître cette même longueur plus rapidement que la racine carrée de la charge, et le second tendant, au contraire, à la faire croître moins rapidement. Or, en vertu de leur opposition, ces deux genres d'influences se neutraliseront mutuellement en plus ou moins grande proportion; mais d'après la diversité des causes immédiates qui produisent respectivement chacune de ces influences, on doit regarder comme très-peu vraisemblable que la neutralisation soit complète; ce qui nous conduit à cette première conclusion, que, sous des charges suffisamment faibles, la loi dont nous nous occupons s'écartera très-probablement de celle de Savart; seulement il serait impossible de décider à priori dans quel sens.

En deuxième lieu, toutes les influences que nous avons signalées ayant leur cause première dans l'accélération du mouvement du liquide, il est clair que l'action résultante de celles qui agissent dans un même sens, considérée isolément, décroît à mesure que l'on augmente la charge, et devient négligeable à partir de la première des charges sous lesquelles le mouvement du liquide devient sensiblement uniforme dans la partie continue. Or, ce qui reste de la neutralisation mutuelle des deux actions résultantes opposées est nécessairement moindre, et probablement de beaucoup, que chacune d'elles en particulier, d'où il est à croire que cet excès deviendra négligeable à partir d'une charge beaucoup moins grande. Nous arrivons donc à cette seconde conclusion, que la première loi de Savart commencera sans doute à être vraie à partir d'une charge qui laissera encore au mouvement de translation du liquide dans la partie continue une accélération très-notable.

Enfin, ce résultat combiné avec un principe que nous avons établi en terminant le § 75, nous fournit une troisième conclusion, savoir que la charge à partir de laquelle la veine commence en réalité à satisfaire à la première loi de Savart, sera d'autant plus faible que l'orifice sera plus petit : car il est évident qu'en passant d'un orifice à un autre, cette charge doit varier dans le même sens que celle à partir de laquelle l'accélération du mouvement du liquide devient négligeable. Mais je dis de plus, que la variation dont il s'agit aura très-probablement lieu dans un rapport beaucoup plus grand que celui des diamètres des orifices. En effet, soit h' la charge sous laquelle commence, pour un orifice et un liquide donnés, l'uniformité approchée du mouvement de translation, et θ' la valeur correspondante de θ. La charge h' devra être telle, comme nous l'avons vu, que $\sqrt{2gh'}$ soit très-considérable relativement à $g\theta'$, ou, en d'autres termes, que le rapport $\frac{\sqrt{2gh'}}{g\theta'}$ soit très-grand. Prenons maintenant un orifice d'un diamètre moindre, et désignons par h'' la charge qui remplit à l'égard de ce second orifice la même condition que h' à l'égard du premier; soit aussi θ'' ce que devient θ pour le nouvel orifice. Si nous voulons que, dans la partie continue de la veine qui s'écoule par celui-ci, le mouvement du liquide ait le même degré d'uniformité que dans la partie continue de la précédente, nous devrons évidemment poser

$$\frac{\sqrt{2gh'}}{g\theta'} = \frac{\sqrt{2gh''}}{g\theta''},$$

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{h'}}{\sqrt{h''}} = \frac{\theta'}{\theta''},$$

et, par conséquent,

$$\frac{h'}{h''}=\frac{\theta'^2}{\theta''^2}.$$

Mais, tout au moins dans le cas du mercure, le temps θ est proportionnel au diamètre de la section contractée, et, par suite, à celui de l'orifice (§ 74); donc, au rapport $\frac{\theta'^2}{\theta''^2}$ on peut, dans le cas de ce même liquide, substituer celui des carrés des diamètres des deux orifices; d'où il résulte qu'en passant d'un orifice déterminé à un orifice moindre, la charge que nous considérons décroîtra comme le carré du diamètre de l'orifice. Or, on doit regarder comme bien probable, que la charge plus faible à partir de laquelle la loi de Savart commence à se réaliser, décroîtra d'une manière analogue, c'est-à-dire dans un rapport de beaucoup supérieur à celui des diamètres. Maintenant, ainsi que nous l'avons plusieurs fois rappelé, nous ignorons si les considérations relatives au mercure sont applicables ou non à tous les autres liquides; mais nous savons du moins qu'elles le sont très-probablement à tous ceux dont la viscosité est fort petite; par conséquent, la conclusion ci-dessus est très-probablement vraie aussi à l'égard de l'un quelconque de ces derniers liquides, à l'égard de l'eau, par exemple.

§ 79. Admettons provisoirement comme tout à fait démontrées les conclusions qui précèdent, et passons à l'autre loi, c'est-à-dire à celle qui régit la longueur de la partie continue quand on fait varier le diamètre de l'orifice. Je dis, en premier lieu, que, dans le cas du mercure, cette loi coïncidera avec la seconde de celles de Savart, lorsqu'on donnera à la charge commune la valeur à partir de laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices employés commencerait en réalité à satisfaire à la première de ces lois.

En effet, remarquons d'abord que sous la charge dont il s'agit, charge que nous désignerons par h_1, les veines sortant par tous les orifices moindres se trouveront, à plus forte raison, dans les conditions effectives de la première loi : c'est ce qui résulte de la troisième conclusion du paragraphe précédent. Par conséquent, si nous substituons, pour un instant, à cette charge h_1 une charge assez considérable pour rendre la vitesse du liquide sensiblement uniforme dans toutes les parties continues, et si nous repassons de cette seconde charge à la précédente, les longueurs respectives des parties continues décroîtront toutes dans un même rapport, savoir dans celui des racines carrées des deux charges. Or, sous la plus grande de celles-ci, les longueurs dont il s'agit étaient entre elles comme les diamètres des orifices correspondants (§ 74); donc il en sera encore de même sous la charge h_1, et par conséquent, sous cette charge, la seconde loi de Savart sera satisfaite.

En deuxième lieu, je dis que sous une charge inférieure à h_1, il n'en sera plus ainsi. Pour le faire voir, soit h_2 cette nouvelle charge, et désignons par h_3 la charge qui remplit à l'égard de la veine sortant par le plus petit orifice, le même rôle que remplit h_1 à l'égard de celle qui sort par le plus grand. Rappelons-nous que h_3 est inférieure à h_1, et supposons h_2 comprise entre ces deux dernières. Alors, par conséquent, sous les charges h_1 et h_2, la veine sortant par le plus petit orifice se trouvera encore dans les conditions effectives de la première loi de Savart, tandis que, pour la veine qui sort par le plus grand orifice, ces conditions ne commencent qu'à partir de h_1; si donc nous passons de h_1 à h_2, la partie continue de la première veine décroîtra dans le rapport des racines carrées de ces deux charges; mais celle de la dernière veine décroîtra dans un rapport différent. Or, sous la charge h_1, ces deux longueurs étaient entre elles comme les diamètres des orifices correspondants; donc, sous la charge h_2, elles se trouveront dans un autre rapport, et, par conséquent, la seconde loi de Savart ne sera plus satisfaite, du moins quant à ces deux veines extrêmes de la série comparées entre elles.

De tout cela résultent ces nouvelles conclusions : sous une charge commune suffisamment faible, la proportionnalité entre la longueur de la partie continue de la veine de mercure et le diamètre de l'orifice n'a plus lieu dans l'étendue totale que l'on assigne aux variations de ce diamètre; mais elle commence à se manifester lorsqu'on donne à la charge commune la valeur pour laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices commence à se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart.

Répétons, à l'égard de ces conclusions, ce que nous avons dit à l'égard de celle qui termine le paragraphe précédent, savoir qu'elles doivent très-probablement s'appliquer au moins à tous les liquides fort peu visqueux, et par conséquent à l'eau.

Or, nous allons voir que ces mêmes conclusions ainsi que celles du paragraphe précédent, sont d'accord avec les résultats des expériences de Savart, résultats qui se rapportent à l'eau.

§ 80. Savart a fait, sur des veines d'eau soustraites à toute action étrangère, deux séries d'observations, l'une avec un orifice de six millimètres de diamètre, et l'autre avec un orifice de trois millimètres; les charges successives étaient les mêmes dans les deux séries. Les deux tableaux ci-dessous reproduisent les résultats obtenus, c'est-à-dire les longueurs de la partie continue correspondantes aux charges successives; ces longueurs ainsi que les charges sont exprimées en centimètres. J'ai placé, dans chaque tableau, une troisième colonne renfermant, en regard de chacune des longueurs de la partie continue, le rapport de celle-ci à la racine carrée de la charge correspondante.

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 6mm.		
CHARGES.	LONGUEUR de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	107	50,4
12	104	30,1
27	143	27,5
47	158	23,0

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3mm.		
CHARGES.	LONGUEUR de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	24	11,2
12	39	11,2
27	58	11,2
47	78	11,4

Avant de discuter ces tableaux, remarquons ici que toutes les longueurs de la partie continue sont exprimées en nombres entiers; ce qui montre que Savart a pris pour chacune d'elles le nombre entier de centimètres le plus approchant, sans tenir compte de la fraction; il résulte donc de là que les longueurs données dans ces mêmes tableaux ne peuvent être en général tout à fait exactes.

Cela posé, commençons par examiner le tableau relatif à l'orifice de 6^{mm}. On voit que le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge décroît considérablement de la première charge à la dernière; d'où il suit que, dans le cas d'une veine d'eau sortant par un orifice de 6^{mm} de diamètre, si l'on ne fait croître la charge que jusqu'à 47 centimètres, la première loi de Savart est loin d'être satisfaite. Ainsi, la première conclusion du paragraphe 78 est conforme à l'expérience. De plus, le décroissement du rapport établit le sens dans lequel la loi réelle s'écarte de la loi de Savart, en deçà de la limite où celle-ci commence à être suffisamment approchée : on voit qu'alors la longueur de la partie continue augmente moins rapidement que la racine carrée de la charge.

En second lieu, d'après la marche du rapport dont il s'agit, on reconnaît que celui-ci converge vers une certaine limite, qui doit être peu au-dessous de 23, c'est-à-dire de la valeur correspondante à la charge de 47 centimètres. En effet, tandis que la charge reçoit des accroissements successifs de 7,5, de 15, et de 20 centimètres, le rapport diminue successivement de 14, de 8,9, et de 4,5 unités, et cette dernière différence est déjà assez peu considérable relativement à la valeur du dernier rapport; d'où l'on doit présumer que si l'on augmentait encore la charge, le décroissement ultérieur du rapport serait fort petit, et que l'on atteindrait bientôt une limite sensiblement constante, limite à partir de laquelle la première loi de Savart serait satisfaite.

D'après cela, cherchons quel est, pour la veine qui s'écoule sous la charge de 47 centimètres, le rapport entre les vitesses de translation du liquide à l'extrémité de la partie continue et à la section contractée. Nous ferons ici abstraction des petites variations alternatives dont il a été question dans le paragraphe 77, et, par conséquent, nous considérerons la vitesse de translation d'une tranche horizontale du liquide de la veine, comme étant toujours celle qu'aurait cette tranche si elle était tombée librement et isolément de la hauteur du niveau du liquide dans le vase. Alors, en négligeant le petit intervalle compris entre l'orifice et la section contractée, nous aurons pour la vitesse dont il s'agit à une distance quelconque l de cette section, la valeur $\sqrt{2g(h+l)}$; si donc l désigne la longueur de la partie continue, le rapport des vitesses à l'extrémité de cette longueur et à la section contractée sera exprimé d'une manière générale par $\frac{\sqrt{2g(h+l)}}{\sqrt{2gh}}$, ou plus simplement par $\sqrt{\frac{h+l}{h}}$. Maintenant, en substituant dans cette expression pour h et l les valeurs relatives à la veine dont nous nous occupons, savoir 47 et 158, nous trouvons pour le rapport entre les vitesses extrêmes, la valeur 2,1. Ainsi, bien que, sous une charge de 47 centimètres, la veine sortant par un orifice de 6mm soit probablement près de se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart, la vitesse à l'extrémité de sa partie continue est encore plus que double de la vitesse à la section contractée, de sorte que le mouvement de translation du liquide est encore très-notablement accéléré. La seconde conclusion du paragraphe 78 paraît donc jusqu'ici s'accorder, comme la première, avec les résultats de l'expérience.

Passons au tableau relatif à l'orifice de 3mm. Ici, comme on voit, le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge est, à fort peu près, le même pour toutes les charges; d'où il suit qu'avec cet orifice, la veine commence déjà à se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart, sous une charge de 4,5 centimètres. Mais, d'après ce qui précède, avec l'orifice de 6mm, la veine n'entre dans ces mêmes conditions que sous une charge au moins égale à 47 centimètres; donc la charge à partir de laquelle la première loi de Savart commence à se réaliser, augmente et diminue avec le diamètre de l'orifice, et beaucoup plus rapidement que ce diamètre; or, c'est en cela que consiste la troisième conclusion du paragraphe 78.

Enfin, si, dans l'expression générale du rapport des vitesses extrêmes trouvée plus haut, nous remplaçons h et l par les valeurs 4,5 et 24 relatives à la première veine du tableau dont nous nous occupons, nous trouverons, pour ce rapport, la valeur 2,5; ce qui montre qu'avec la charge 4,5, sous laquelle la veine est déjà dans les conditions effectives de la loi de Savart, la vitesse de translation du liquide est encore très-notablement accélérée. D'après cela, il ne peut plus demeurer aucun doute sur la légitimité de la seconde conclusion du paragraphe 78.

Calculons maintenant, pour chacune des quatre charges, le rapport entre les longueurs des parties continues respectivement correspondantes aux deux orifices; nous formerons ainsi le tableau suivant :

CHARGES.	RAPPORTS.
3,3	4,40
13	3,53
27	2,46
47	2,03

Ce tableau montre que, pour des charges inférieures à 47 centimètres, le rapport entre les longueurs respectives des parties continues de deux veines d'eau sortant, l'une par un orifice de 6 millimètres de diamètre, et l'autre par un orifice d'un diamètre moitié moindre, est loin d'être le même que celui des diamètres; d'où il suit que, sous ces charges, la seconde loi de Savart n'est pas satisfaite. Mais on voit, en même temps, que ce rapport converge vers celui des diamètres à mesure qu'on augmente la charge, et que, sous la charge de 47 centimètres, il est près de l'atteindre; or, d'après ce que nous avons vu plus haut, sous cette même charge de 47 centimètres, la veine sortant par le plus grand des deux orifices est très-probablement près d'atteindre les conditions effectives de la première loi de Savart. Les conclusions du paragraphe précédent paraissent donc s'accorder, comme celles du paragraphe 78, avec les résultats de l'observation. Nous allons voir, du reste, cet accord confirmé par les résultats obtenus avec des veines d'eau non soustraites aux actions étrangères.

§ 81. Ces actions étrangères, qui consistent dans certains mouvements vibratoires plus ou moins réguliers transmis aux veines, paraissent ne pas altérer les lois dont nous nous occupons considérées dans leur généralité; mais elles déterminent un raccourcissement des parties continues, et produisent en cela le même effet qu'une diminution des diamètres des orifices, de sorte que, sous leur influence, les lois de Savart commencent à se réaliser à partir de charges plus faibles.

Je viens de dire que les lois complètes qui régissent la partie continue, paraissent ne pas être changées par les actions étrangères dont il s'agit; c'est ce que l'on reconnaîtra aisément, si, pour chacune des séries faites par Savart sous l'influence de ces mêmes actions, séries dans lesquelles les orifices, les charges et le liquide sont les mêmes que précédemment, on forme le tableau des rapports entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge. A travers les petits écarts provenant, d'une part, des irrégularités inhérentes aux actions étrangères, et, d'une autre part, de ce que Savart a toujours donné les longueurs en nombres entiers, on verra : 1° qu'avec l'orifice de 6^{mm}, le rapport commence encore par décroître, et converge vers une certaine limite; seulement ici le décroissement est moindre par la raison que j'ai donnée plus haut, et la limite paraît être atteinte sous une charge inférieure à 47 centimètres; 2° qu'avec l'orifice de 3^{mm}, le rapport est sensiblement constant.

D'après cela, les séries dont il s'agit peuvent donc servir aussi à la discussion des lois qui régissent la longueur de la partie continue. Je me bornerai à reproduire ici deux de ces mêmes séries : ce sont celles que Savart a prises pour type, et d'où il a déduit ses lois; voici les tableaux qui s'y rapportent :

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 6^{mm}.		
CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	40	18,9
12	59	17,0
27	82	15,8
47	112	16,3

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3^{mm}.		
CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	16	7,5
12	25	7,2
27	41	7,9
47	55	8,0

et l'on voit, par le premier, qu'avec l'orifice de 6^{mm}, le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge paraît avoir déjà atteint sa limite sous la charge de 27 centimètres; le petit accroissement qui se manifeste pour la charge suivante, est dû sans doute aux causes d'irrégularité que j'ai signalées.

Calculons encore, pour ces deux séries, les rapports entre les longueurs respectivement correspondantes aux deux orifices, ce qui nous donne le tableau suivant :

CHARGES.	RAPPORTS.
4.5	2.30
12	2.30
27	2.00
47	2.04

C'est donc aussi sous la charge de 27 centimètres, que le rapport entre les longueurs des parties continues se trouve avoir atteint celui des diamètres des orifices, ce qui achève d'établir la conformité des conclusions du paragraphe 79 avec les résultats de l'observation.

Enfin, Savart a fait, avec l'orifice de 5^{mm}, une série d'observations correspondantes à quatre charges plus considérables que les précédentes, et le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge s'est encore montré sensiblement constant; la première de ces nouvelles charges était de 51 et la dernière de 459 centimètres.

§ 82. Ainsi qu'on le sait d'après le travail de Savart, la veine fait entendre un son soutenu, résultant principalement du choc périodique des masses isolées dont se compose la partie discontinue contre le corps sur lequel elles tombent, et l'on peut faire acquérir à ce son une grande intensité, en recevant la partie discontinue sur une membrane tendue. En comparant les sons ainsi produits par des veines d'eau sous différentes charges et avec des orifices de différents diamètres, Savart a trouvé que, pour un même orifice, le nombre de vibrations exécuté dans un temps donné est proportionnel à la racine carrée de la charge; et que, pour une même charge, ce nombre est en raison inverse du diamètre de l'orifice. Or, nous allons voir ces deux lois découler encore de nos principes.

Recourons de nouveau à la considération des veines imaginaires. Dans une semblable veine, la longueur des divisions est égale, comme nous l'avons vu (§ 74), à la longueur normale de celles d'un cylindre de même liquide, formé dans les conditions de nos lois, et ayant pour diamètre celui de la section contractée de la veine; ainsi, cette longueur ne dépend que du diamètre de l'orifice et de la nature du liquide, et ne varie pas avec la vitesse d'écoulement. Or, de là résulte que, pour un même liquide et un même orifice, le nombre des divisions qui passent, dans un temps donné, à la section contractée, est proportionnel à cette vitesse, c'est-à-dire à $\sqrt{2gh}$, et par suite, à $\sqrt{h}$. Mais chacune de ces divisions fournit plus bas une masse isolée, et chacune de celles-ci vient ensuite choquer la membrane; donc le nombre des chocs produits dans un temps donné est égal à celui des divisions qui passent, dans ce même temps, à la section contractée, et, par conséquent, est proportionnel à la racine carrée de la charge. Maintenant, il est aisé de voir que chacun des chocs fait naître deux vibrations : car le petit enfoncement qu'il détermine dans la membrane est suivi d'un petit relèvement, ce qui donne deux ondes; donc le nombre de vibrations correspondant au son produit est double de celui des chocs, et, par conséquent, est également proportionnel à la racine carrée de la charge.

En second lieu, puisque la longueur normale des divisions d'un cylindre supposé dans les conditions de nos lois et formé d'un liquide donné est proportionnelle au diamètre de ce cylindre, il s'ensuit que, pour un même liquide, la longueur des divisions de la veine imaginaire est proportionnelle au diamètre de la section contractée, et, par suite, sensiblement proportionnelle à celui de l'orifice. Or, pour une vitesse d'écoulement déterminée, le nombre des divisions qui passent, dans un temps donné, à la section contractée, est évidemment en raison inverse de la longueur de ces divisions; donc, si le liquide demeure le même, ce nombre est sensiblement en raison inverse du diamètre de l'orifice. Mais, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, le nombre de vibrations correspondant au son produit est double du précédent; donc, lorsque la charge et la nature du liquide ne changent pas, ce nombre de vibrations est, de même, sensiblement en raison inverse du diamètre de l'orifice.

Ainsi, les deux lois qui, d'après Savart, régissent les sons rendus par les veines, seraient nécessairement satisfaites à l'égard de nos veines imaginaires. Maintenant, je dis que le son produit par une veine réelle ne différera pas de celui que produirait la veine imaginaire correspondante, si la charge est suffisante relativement au diamètre de l'orifice pour que la vitesse de translation du liquide augmente fort peu depuis la section contractée jusqu'à une distance égale à la longueur des divisions de la veine imaginaire. Alors, en effet, dans cette étendue, les deux causes qui tendent à modifier la longueur des divisions (§ 76), savoir l'accélération de la vitesse du liquide et la diminution qui en résulte dans le diamètre de la veine, seront l'une et l'autre fort petites; et comme elles agissent en sens opposé, leur action résultante sera insensible, de sorte que les divisions prendront librement, à leur origine, la longueur qui convient à celles de la veine imaginaire correspondante; or, il est clair que, dans ce cas, le nombre des divisions qui passeront, pendant un temps donné, à la section contractée, sera le même dans la veine réelle et dans la veine imaginaire, et que, par suite, les sons rendus par ces deux veines seront aussi les mêmes.

Mais, en nous bornant aux liquides fort peu visqueux, tels que l'eau, nous savons que le rapport entre la longueur normale des divisions d'un cylindre supposé dans les conditions de nos lois et le diamètre de ce cylindre, doit très-probablement différer peu de 4; et, par conséquent, il en est de même du rapport entre la longueur des divisions d'une veine imaginaire formée de l'un de ces liquides et le diamètre de la section contractée de cette veine. Si donc, dans une veine réelle formée de l'un de ces mêmes liquides, l'accroissement de la vitesse de translation est fort petit à une distance de la section contractée égale à quatre fois le diamètre de cette section, la condition posée plus haut sera très-probablement satisfaite; du reste, pour ne pas craindre de nous tromper, nous prendrons, par exemple, six fois ce même diamètre.

Il est clair, en outre, que si la condition ainsi précisée est remplie à l'égard d'une charge et d'un orifice donnés, elle le sera, à plus forte raison, pour le même orifice et des charges plus grandes, et pour la même charge et des orifices plus petits.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes.

1° Lorsque une série de veines formées d'un liquide très-peu visqueux s'écoulent successivement par un même orifice et sous des charges différentes, si la moindre de celles-ci est suffisante pour que la vitesse de translation du liquide augmente fort peu jusqu'à une distance de la section contractée égale à environ six fois le diamètre de cette section, les nombres de vibrations correspondants respectivement aux sons produits par chacune des veines de la série satisferont nécessairement à la première des deux lois trouvées par Savart.

2° Lorsque une série de veines formées d'un liquide très-peu visqueux s'écoulent sous une charge commune et par des orifices de différents diamètres, si la charge commune est suffisante pour que la même condition soit remplie à l'égard de la veine qui sort par le plus grand orifice, les nombres de vibrations correspondants respectivement aux sons produits par chacune des veines de la série satisferont nécessairement à la seconde loi.

Il nous reste à faire voir maintenant, que la condition ci-dessus se trouvait réalisée dans les expériences d'où Savart a déduit les deux lois dont nous nous occupons.

Dans la série qui se rapporte à la première de ces lois, l'orifice commun avait un diamètre de 3 millimètres, et la moindre charge était de 51 centimètres; et, dans la série qui concerne la seconde loi, la charge commune avait cette même valeur de 51 centimètres, et le diamètre du plus grand orifice était de 6 millimètres. Pour que notre condition fût remplie à l'égard des deux séries, il suffisait donc évidemment qu'elle le fût dans la veine qui s'écoulait sous la charge de 51 centimètres et par l'orifice de 6 millimètres de diamètre. Or, en multipliant ce diamètre par 0,8, nous trouvons, pour la valeur approchée de celui de la section contractée de la veine dont il s'agit, $4^{mm},8$, et six fois cette dernière quantité nous donnent $28^{mm},8$, ou à peu près 3 centimètres. Maintenant, si, dans l'expression $\sqrt{\frac{h+l}{h}}$, qui donne la valeur générale du rapport entre les vitesses de translation à une distance l de la section contractée et à cette même section (§ 80), nous faisons $h=51$ et $l=3$, nous obtenons, pour ce rapport, la valeur 1,03; d'où l'on voit que, depuis la section contractée jusqu'à une distance égale à environ six fois le diamètre de cette section, la vitesse de translation du liquide de la veine que nous considérons n'augmentait que des trois centièmes de sa valeur originaire.

§ 83. Supposons une veine d'eau, et nommons division naissante une division considérée immédiatement après son passage à la section contractée, c'est-à-dire à l'instant où son extrémité supérieure franchit cette section. Il suit de ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, qu'à partir d'une charge suffisante, le rapport entre la longueur des divisions naissantes de la veine dont il s'agit et le diamètre de la section contractée, prendra une valeur constante, c'est-à-dire indépendante de la charge, et que cette valeur sera très-probablement peu différente de 4.

Or, les résultats obtenus par Savart dans les expériences relatives aux lois que nous venons de discuter, permettent, comme nous allons le voir, de vérifier ces conséquences de nos principes.

Les deux causes opposées qui tendent à modifier la longueur des divisions, sont aussi celles qui influent sur leur vitesse de translation, ou, plus précisément, sur la vitesse de translation des cercles de gorge qui les terminent (§ 76). Maintenant, dans le cas dont nous nous occupons, ces mêmes causes demeurant toutes deux fort petites dans l'étendue qui correspond à une division naissante, leur action résultante sur la vitesse de translation des cercles de gorge sera insensible dans cette étendue, et, par conséquent, la vitesse avec laquelle descend un cercle de gorge, pourra être regardée comme exactement uniforme et égale à la vitesse d'écoulement $\sqrt{2gh}$, depuis la section contractée jusqu'à une distance égale à la longueur d'une division naissante.

Si donc, pour un orifice d'un diamètre donné, λ désigne la longueur d'une division naissante, et t le temps employé par un cercle de gorge à la parcourir, on aura

$$\lambda = t\sqrt{2gh}.$$

Soit, en outre, n le nombre de divisions qui passent en une seconde à la section contractée; le temps t mesurant évidemment la durée du passage de l'une d'elles, on aura, en prenant la seconde pour unité de temps, $t = \frac{1}{n}$, et, par suite,

$$\lambda = \frac{1}{n}\sqrt{2gh}.$$

Soit enfin k le diamètre de la section contractée correspondante au même orifice; on aura, pour représenter le rapport entre la longueur des divisions naissantes et ce diamètre, la formule

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{kn}\sqrt{2gh}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [a].$$

Maintenant, pour obtenir, à l'aide de cette formule, la valeur numérique du rapport $\frac{\lambda}{k}$ relative à une charge et à un orifice déterminés, il suffit de chercher par l'expérience le nombre de vibrations par seconde correspondant à cette charge et à cet orifice : car alors, la valeur de h sera donnée, celle de k se déduira du diamètre de l'orifice employé, on aura celle de n en prenant (§ précédent) la moitié du nombre de vibrations trouvé, et enfin celle de g est connue. Il est inutile de remarquer que les valeurs de h, k, et g devront être rapportées à une même unité de longueur. Or, les observations de Savart relatives à la première loi nous donnent, pour un orifice de 3^{mm}, les nombres de vibrations par seconde correspondants respectivement à quatre charges différentes; nous pourrons donc calculer, pour chacune de ces observations, la valeur du rapport $\frac{\lambda}{k}$.

Voici d'abord ces nombres avec les charges auxquelles ils se rapportent; celles-ci sont exprimées en centimètres.

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3mm.	
CHARGES.	NOMBRES DE VIBRATIONS.
31	[illegible]
[illegible]	857
[illegible]	1054
450	[illegible]

On peut conclure des résultats rapportés dans la note du paragraphe 74, que lorsque le diamètre de l'orifice est de trois millimètres, celui de la section contractée en est à bien peu près exactement les huit dixièmes; par conséquent, si nous conservons le centimètre comme unité de longueur, ce qui donnera 0,3 pour la valeur du diamètre de l'orifice dont il s'agit, nous aurons $k=0,3\times 0,8=0,24$.

Enfin, les nombres de vibrations, et, par suite, les valeurs de n, supposant la seconde prise pour unité de temps, et les valeurs de h et k étant rapportées au centimètre comme unité de longueur, il faudra faire $g = 980,9$.

Substituant dans la formule [a] ces valeurs de k et g, ainsi que celles de h tirées du tableau ci-dessus et celles de n obtenues en prenant les moitiés respectives des nombres de vibrations contenus dans le même tableau, nous trouverons, pour le rapport $\frac{\lambda}{k}$, les quatre nombres suivants :

4,39
4,37
4,46
4,29

et l'on voit qu'en effet, ces nombres sont très-rapprochés les uns des autres, et s'éloignent peu de 4.

La moyenne de ces mêmes nombres, savoir 4,38, nous donne donc, avec une grande approximation, la valeur constante que prend, à partir d'une charge convenable, le rapport entre la longueur des divisions naissantes d'une veine d'eau et le diamètre de la section contractée de cette veine.

Telle est aussi évidemment la valeur du rapport entre la longueur de toutes les divisions de la partie continue d'une veine d'eau et le diamètre de la section contractée, lorsque les charges sont assez considérables pour que le mouvement de translation du liquide soit sensiblement uniforme dans toute l'étendue de cette partie continue.

En déterminant par l'expérience, pour un autre liquide quelconque, le nombre de vibrations correspondant à une charge et à un orifice donnés, on obtiendra de même, à l'aide de la formule [a], la valeur de $\frac{\lambda}{k}$ relative à ce liquide. Si l'on se borne aux liquides dont la viscosité est fort petite, on devra très-probablement trouver des valeurs peu différentes de la précédente; et il est à croire, par conséquent, qu'avec une même charge et un même orifice, les sons rendus par les veines respectivement formées de ces divers liquides ont à peu près la même hauteur; mais il en serait sans doute autrement, du moins en général, si l'on passait à des liquides d'une viscosité considérable.

Savart dit que la nature du liquide paraît être sans influence sur le nombre de vibrations correspondant à une charge et à un orifice donnés; mais il n'indique pas quels sont les liquides qu'il a comparés sous ce point de vue, et, d'après ce que nous venons de remarquer, on doit présumer que ces liquides étaient du nombre de ceux dont la viscosité est fort petite.

§ 84. La durée partielle de la transformation d'un cylindre pouvant évidemment, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, être comptée en ne considérant que l'un des étranglements de la figure, ou même simplement le cercle de gorge de celui-ci, et, d'une autre part, cette durée variant, pour un même diamètre, avec la nature du liquide, il s'ensuit que, dans la veine, le temps compris entre l'instant où la section superficielle qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, variera aussi, toutes choses égales d'ailleurs, avec la nature du liquide. Or, de là résulte nécessairement que, pour une même charge et un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine changera d'un liquide à un autre; et cette conclusion est encore conforme aux résultats de l'expérience. En effet, Savart a mesuré, comme on le sait, la partie continue de quatre veines s'écoulant dans des circonstances identiques, et formées respectivement d'éther sulfurique, d'alcool, d'eau, et d'une solution d'ammoniaque caustique, et il a trouvé les longueurs suivantes :

Éther	90,
Alcool	85,
Eau.	70,
Ammoniaque	46.

§ 85. Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des veines lancées verticalement de haut en bas. Considérons maintenant les veines lancées dans des directions différentes de la verticale; celles-ci sont incurvées par l'action de la pesanteur, et, par conséquent, ne peuvent plus être comparées à des cylindres; mais nous ferons remarquer que le phénomène de la conversion en sphères isolées n'est pas le résultat d'une propriété appartenant exclusivement à la forme cylindrique; ce phénomène paraît devoir se produire à l'égard de toute figure liquide dont une dimension est considérable relativement aux deux autres; nous avons vu, en effet, l'anneau liquide qui se forme dans l'expérience du paragraphe 19, se convertir en une série de petites masses isolées, masses qui constitueraient autant de sphères, si leur forme n'était légèrement modifiée par l'action du fil métallique qui les traverse. On comprend donc que, dans les veines courbes, il doit aussi se produire des divisions passant graduellement à l'état de sphères isolées, et que, par conséquent, la constitution des veines lancées soit horizontalement soit obliquement, doit être analogue à celle des veines lancées verticalement de haut en bas, conclusion qui s'accorde, en effet, avec les observations de Savart.

On doit croire que cette analogie de constitution s'étend à la partie ascendante des veines lancées verticalement de bas en haut; seulement, dans le cas de ces dernières veines, les phénomènes sont probablement troublés par le liquide qui retombe.

§ 86. Les propriétés des figures liquides dont une dimension est considérable relativement aux deux autres, et spécialement des cylindres, fournissent donc l'explication complète de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires, et rendent raison de tous les détails et de toutes les lois du phénomène, du moins tant qu'il ne s'agit pas des modifications apportées à celui-ci par les causes étrangères, c'est-à-dire par les mouvements vibratoires transmis au liquide. Quant au mode d'action de ces mouvements vibratoires, il est évident que les propriétés des cylindres liquides ne peuvent nous le faire connaître. Ces mêmes mouvements constituent une cause totalement différente des forces figuratrices, et, par conséquent, étrangère à l'objet général de notre travail; cependant, afin de ne pas laisser de lacune dans la théorie, nous examinerons également, en nous appuyant sur d'autres considérations, de quelle manière les mouvements vibratoires agissent sur la veine, et nous arriverons aussi à l'explication complète des modifications qui en résultent dans la constitution de celle-ci; mais nous réservons ce sujet pour la série suivante.

L'influence exercée par les mouvements vibratoires communiqués au liquide, a conduit Savart à regarder la constitution de la veine comme étant elle-même le résultat de certains mouvements vibratoires inhérents au phénomène de l'écoulement. Partant de là, Savart a essayé de faire comprendre comment le genre d'ébranlement occasionné dans la masse du liquide par l'émission de celui-ci, pourrait effectivement donner naissance à des vibrations, et il a montré que l'existence de ces dernières entraînerait la formation alternative de renflements et d'étranglements dans la veine. On a vu, d'après l'exposé de notre théorie, que la constitution de la veine s'explique d'une manière nécessaire par des faits, et indépendamment de toute hypothèse; nous pouvons donc, je crois, nous dispenser d'une discussion détaillée à l'égard des idées ingénieuses que nous venons de rappeler, idées pour l'intelligence complète desquelles nous renvoyons au mémoire même de Savart. Nous ferons seulement remarquer, qu'il est difficile d'admettre le genre d'ébranlement supposé par Savart, sinon dans les premiers instants qui suivent l'ouverture de l'orifice; que, d'ailleurs, on ne voit pas bien comment les vibrations dont il s'agit, après avoir dessiné sur la surface de la veine une division naissante, détermineraient le développement ultérieur de celle-ci, de manière à la faire passer graduellement, pendant sa descente, à l'état de masse isolée; qu'enfin, si l'on voulait faire abstraction de ces difficultés, il faudrait encore recourir à des hypothèses additionnelles, pour arriver aux lois qui régissent la longueur de la partie continue et à celles que suivent les nombres de vibrations correspondants aux sons produits par le choc de la partie trouble.

Du reste, c'est en empruntant à Savart l'une de ses idées, qui devient applicable lorsque, par une cause extérieure, des vibrations sont en réalité excitées dans le liquide, que nous trouverons les éléments nécessaires pour aborder la dernière partie de la théorie.

§ 87. Dans la série suivante, après avoir terminé ce qui concerne la veine, nous reviendrons aux masses liquides sans pesanteur, et nous étudierons les figures de révolution autres que la sphère et le cylindre, ainsi que les figures étrangères à cette classe pour lesquelles l'équation de l'équilibre peut être interprétée d'une manière rigoureuse.

ERRATUM DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Dans le paragraphe 25 du mémoire précédent, après avoir parlé de l'espèce d'adhérence que la masse d'huile contracte parfois avec la surface supérieure du liquide alcoolique, j'ai mentionné deux moyens de détruire cette adhérence; mais l'indication du second de ces moyens appartient à une rédaction antérieure du mémoire, dans laquelle je supposais les expériences exécutées dans un flacon de forme ordinaire, et ce passage est demeuré par inadvertance dans la nouvelle rédaction ; le moyen dont il s'agit est évidemment impraticable quand on se sert du vase à parois planes.

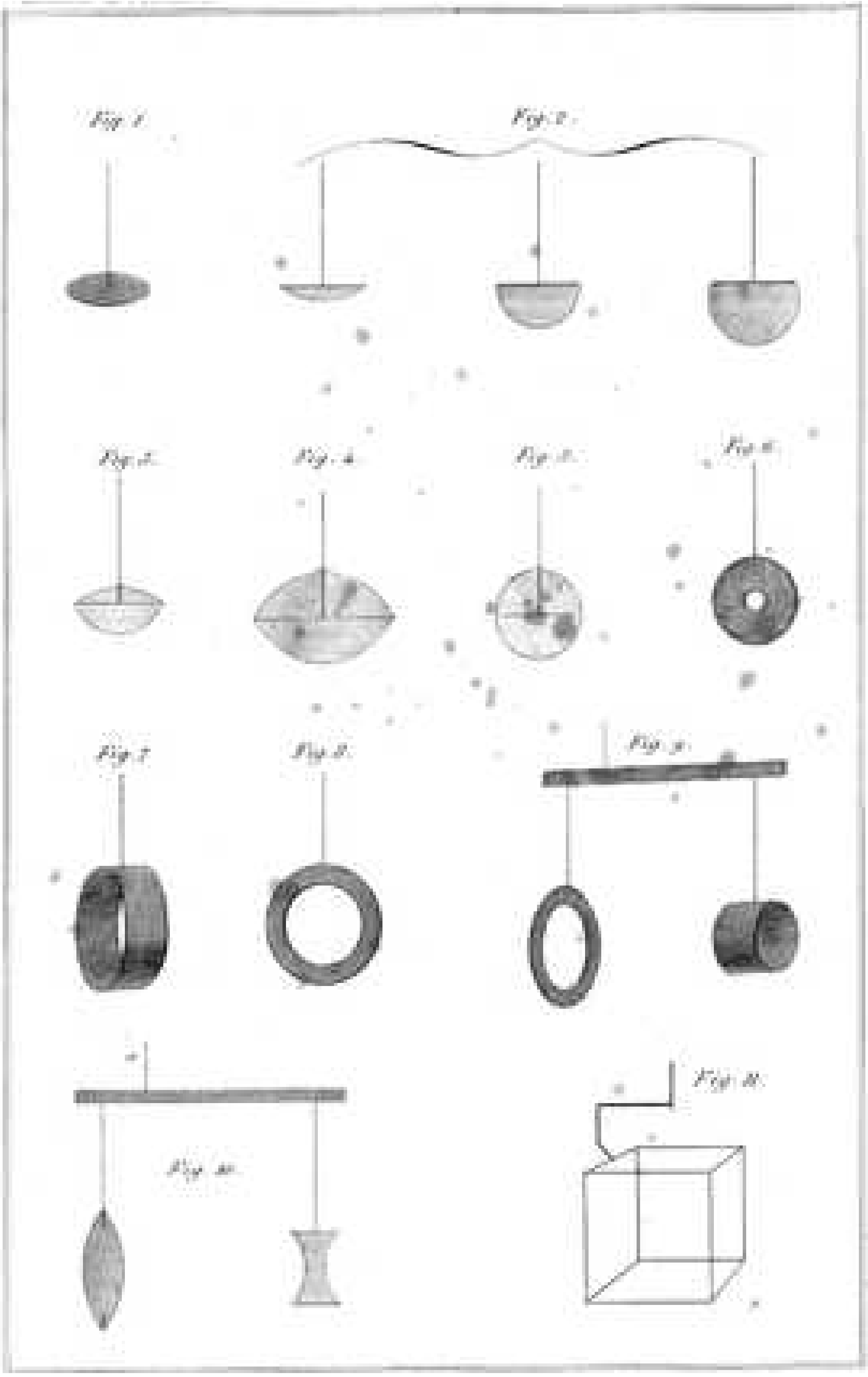
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

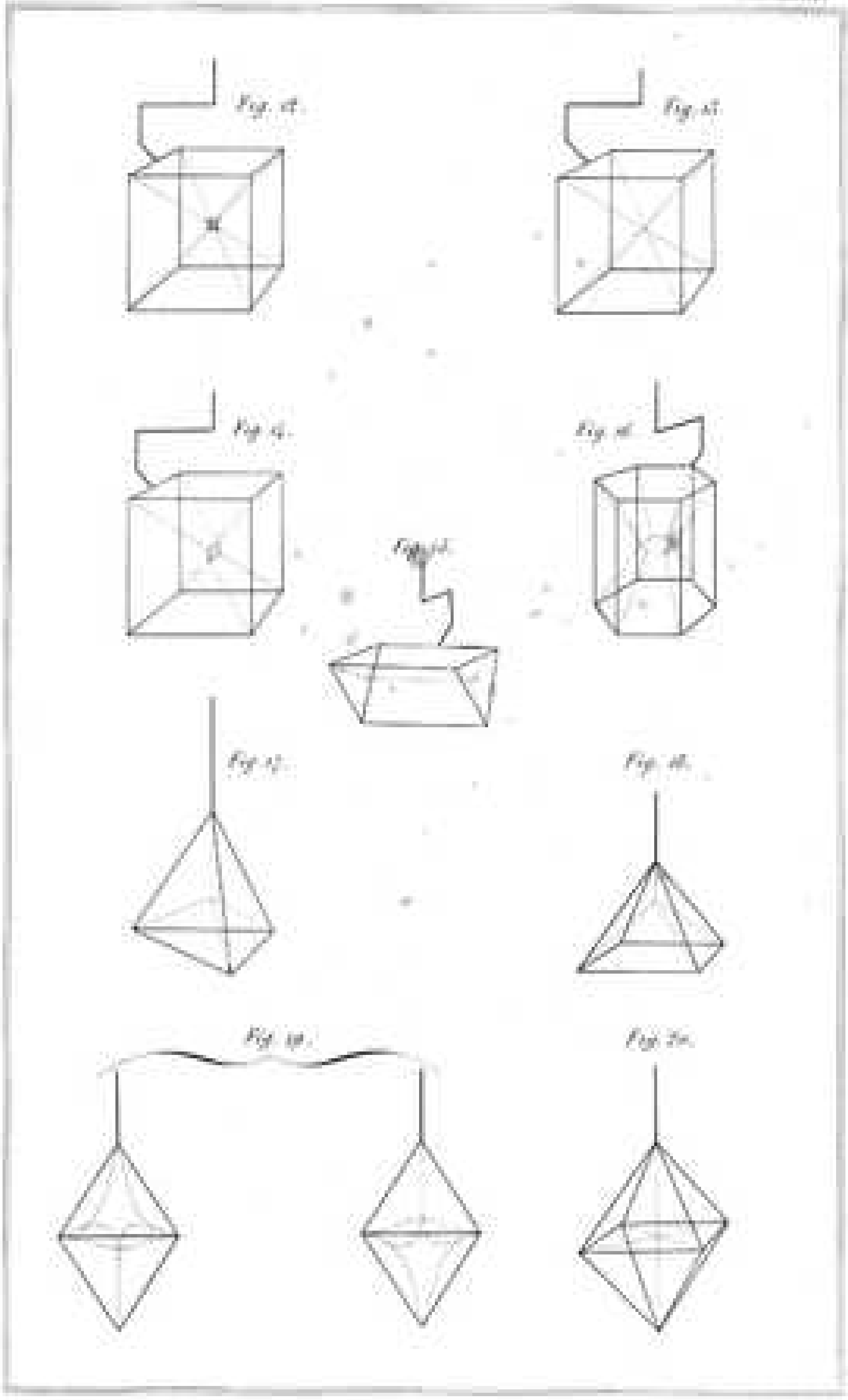
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

Fig. 20 bis.

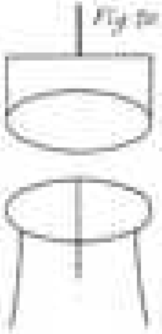

Fig. 21.

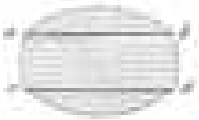

Fig. 22.

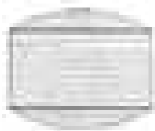

Fig. 23.

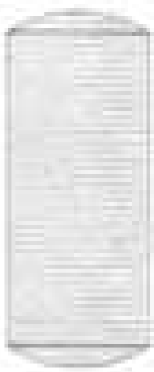

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

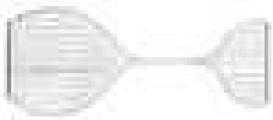

Fig. 29.

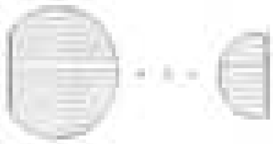

Fig. 30.