

## Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur (4e série)

Joseph Plateau

---

### Citer ce document / Cite this document :

Plateau Joseph. Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur (4e série). In: Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome 31, 1859. pp. 1-59;

doi : <https://doi.org/10.3406/marb.1859.3539>;

[https://www.persee.fr/doc/marb\\_0775-3225\\_1859\\_num\\_31\\_1\\_3539](https://www.persee.fr/doc/marb_0775-3225_1859_num_31_1_3539);

---

Fichier pdf généré le 25/03/2024

RECHERCHES  
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES  
SUR  
**LES FIGURES D'ÉQUILIBRE**  
D'UNE  
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR;  
PAR  
J. PLATEAU.

---

QUATRIÈME SÉRIE<sup>1</sup>.

(PRÉSENTÉ A LA SÉANCE DE L'ACADÉMIE, LE 10 OCTOBRE 1837.)

<sup>1</sup> Voir, pour les trois séries précédentes, les tomes XVI, XXIII et XXX des *Mémoires de l'Académie*.



RECHERCHES  
EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES  
SUR  
**LES FIGURES D'ÉQUILIBRE**  
D'UNE  
MASSE LIQUIDE SANS PESANTEUR.

---

FIGURES D'ÉQUILIBRE DE RÉVOLUTION AUTRES QUE LA SPHÈRE ET LE CYLINDRE.

§ 1. — La série précédente ayant complété l'étude théorique de la veine liquide, revenons aux masses liquides sans pesanteur, et poursuivons l'examen des figures d'équilibre de révolution.

Rappelons d'abord qu'en désignant par  $R$  et  $R'$  les deux rayons de courbure principaux en un même point de la surface libre d'une masse liquide sans pesanteur, et par  $C$  une constante, l'expression de la condition générale à laquelle cette surface doit satisfaire dans l'état d'équilibre est (2<sup>me</sup> série, § 5)

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C,$$

expression dans laquelle  $R$  et  $R'$  sont positifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures convexes, ou, en d'autres termes, lorsqu'ils sont dirigés à l'intérieur de la masse, et négatifs dans le cas contraire; rappelons aussi que cette équation est une simple transformation de celle qui exprime que la pression

exercée par le liquide sur lui-même en vertu de l'attraction mutuelle de ses molécules, ne change pas d'un point à un autre de la surface de la masse (*ibid.*); rappelons enfin que, d'après une propriété connue des surfaces de révolution, si la figure d'équilibre appartient à cette classe, l'un des rayons  $R$  et  $R'$  est le rayon de courbure de la ligne méridienne au point que l'on considère, et l'autre est la portion de la normale comprise entre le point dont il s'agit et l'axe de révolution, ou, comme on le dit plus simplement, la normale en ce point.

Dans ce même cas, c'est-à-dire dans celui des surfaces de révolution, l'expression précédente, mise sous la forme différentielle, est complètement intégrable par les fonctions elliptiques, de sorte qu'on peut en déduire les formes des lignes méridiennes, et c'est ce dont M. Beer vient de s'occuper dans un mémoire <sup>1</sup> où il me fait, pour la seconde fois, l'honneur d'appliquer le calcul aux résultats de mes expériences; en outre, une propriété trouvée par M. Delaunay <sup>2</sup> à l'aide du calcul, et démontrée depuis géométriquement par M. Lamarle <sup>3</sup>, permet d'atteindre le même but sans recourir aux fonctions elliptiques. Nous parlerons en leur lieu de ces ressources de l'analyse et de la géométrie; mais, dans la série actuelle, nous nous proposons d'arriver aux formes des lignes méridiennes, à toutes leurs modifications et à tous leurs détails, en nous appuyant sur l'expérience, et en nous aidant du simple raisonnement appliqué à la relation que l'équation de l'équilibre établit entre le rayon de courbure et la normale. Notre travail, dans lequel l'expérience et la théorie marcheront toujours côte à côte, pourra, de plus, être considéré comme une vérification de cette dernière.

Afin d'éviter toute ambiguïté, nous remplacerons les lettres  $R$  et  $R'$  par les lettres  $M$  et  $N$ , dont la première rappellera qu'elle désigne celui des deux rayons de courbure principaux qui appartient à la ligne méridienne, et dont la seconde rappellera de même qu'elle désigne celui qui constitue la normale;

<sup>1</sup> *Tractatus de theoriâ mathematicâ phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum.* Bonn, 1857.

<sup>2</sup> *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante.* (Journal de M. Liouville, 1844, tome VI, page 509.)

<sup>3</sup> *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure.* (BULLET. DE L'ACAD., 1857, 2<sup>m</sup>e série, tome II, pages 53 et 507.)

ainsi, tant qu'il s'agira des figures de révolution, l'équation générale de l'équilibre sera :

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C.$$

§ 2. — Cette notation convenue, nous allons d'abord démontrer que la sphère est la seule figure d'équilibre de révolution dont la ligne méridienne rencontre l'axe. On peut y ajouter le plan, en le considérant comme la limite des sphères, ou comme la surface engendrée par une droite perpendiculaire à l'axe.

Concevons une figure d'équilibre de révolution autre que la sphère et le plan, et dont la ligne méridienne rencontre l'axe. Je dis, en premier lieu, que cette ligne ne peut atteindre l'axe que normalement. En effet, si elle le coupait obliquement ou si elle lui était tangente, la normale serait nulle au point d'intersection ou de contact, et la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  deviendrait infinie en ce point<sup>1</sup>, tandis qu'elle aurait des valeurs finies dans les points voisins; cette

<sup>1</sup> Il y a toutefois un cas auquel ce raisonnement semblerait n'être pas applicable. On peut concevoir une courbe telle, qu'au point où elle rencontre l'axe, le rayon de courbure soit nul, et qu'aux environs de ce point le rayon de courbure et la normale soient de signes contraires; alors la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  constituerait une différence, dont les deux termes deviendraient à la fois infinis au point situé sur l'axe, et l'on ne voit pas, au premier abord, que cette différence ne puisse demeurer finie. Nous avons donc à démontrer que la chose est impossible, si la courbe ne rencontre pas l'axe normalement.

Pour cela, mais uniquement dans ce cas, nous serons obligé de faire usage des expressions connues du rayon de courbure et de la normale en fonction des coefficients différentiels.

Si nous prenons l'axe de révolution pour axe des abscisses, nous aurons, comme on sait,  $p$  et  $q$  étant respectivement les coefficients différentiels du premier et du second ordre de  $y$  par rapport à  $x$ ,

$$M = \frac{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}{q} \dots \dots \dots [1]$$

$$N = y (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}; \dots \dots \dots [2]$$

d'où nous déduisons, pour le rapport des deux termes du premier membre de l'équation de l'équilibre,

$$\frac{1}{N} = \frac{1 + p^2}{qy} \dots \dots \dots [3]$$

Soit maintenant  $y=f(x)$  l'équation de la ligne méridienne. Prenons pour origine des coor-

quantité ne serait donc pas constante dans tout le parcours de la courbe comme le veut l'équation de l'équilibre.

Imaginons maintenant que la figure liquide remplisse la condition que nous venons d'établir, et considérons, à partir de l'axe, un arc de la ligne

données le point où cette ligne rencontre l'axe, de manière que, pour  $x=0$ , on ait  $y=0$ ; nous pourrions alors supposer la fonction  $f(x)$  développée suivant une série de puissances ascendantes et positives de  $x$ ; et si nous voulons que la courbe rencontre l'axe sous un angle autre qu'un angle droit, ce qui exige que, pour  $x=0$ , le premier coefficient différentiel soit fini ou nul, il faudra que l'exposant de  $x$  dans le premier terme de la série soit l'unité. Remarquons ici que, n'ayant à considérer la courbe qu'au point où elle atteint l'axe et dans les points très-voisins, nous pouvons toujours supposer  $x$  extrêmement petit, en sorte que, relativement à cette portion de la courbe, notre série sera nécessairement convergente. Posons donc :

$$y = ax + bx^m + cx^n + \dots \dots \dots [4]$$

équation dans laquelle les exposants  $m, n, \dots$  sont positifs et supérieurs à l'unité. On aura conséquemment :

$$p = a + mbx^{m-1} + ncx^{n-1} + \dots \dots$$

$$q = m(m-1)bx^{m-2} + n(n-1)cx^{n-2} + \dots \dots$$

La première de ces expressions, quand on y fait  $x=0$ , se réduit à  $p=a$ , en sorte que la courbe atteint l'axe sous un angle fini, mais autre qu'un droit, ou sous un angle nul, suivant qu'on suppose la constante  $a$  finie ou égale à zéro. D'après cela, si l'on veut qu'au point situé sur l'axe le rayon de courbure soit nul, on voit, par la formule [1], qu'en ce même point,  $q$  doit être infini, et, en vertu de la seconde des expressions ci-dessus, cette condition sera satisfaite si le premier au moins des exposants  $m, n, \dots$  est plus petit que 2.

Portons actuellement dans la formule [5] ces mêmes expressions de  $p$  et de  $q$  et celle de  $y$ ; il viendra :

$$\frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{M}} = \frac{1 + (a + mbx^{m-1} + ncx^{n-1})^2}{(m(m-1)bx^{m-2} + n(n-1)cx^{n-2} + \dots) (ax + bx^m + cx^n + \dots)}$$

et l'on voit aisément que, pour  $x=0$ , ce rapport devient infini. Alors, en effet, puisque les quantités  $m, n, \dots$  sont toutes supérieures à l'unité, d'une part le numérateur se réduit à  $1 + a^2$  c'est-à-dire à une quantité finie, et, d'autre part, le dénominateur, dont le terme de plus petit exposant, après la multiplication effectuée, est  $m(m-1)abx^{m-1}$ , s'annule tout entier. Remarquons, en passant, que ce résultat est indépendant de la condition  $m < 2$ , en sorte qu'il est vrai aussi bien pour un rayon de courbure fini ou infini au point situé sur l'axe, que pour un rayon de courbure nul; ce qui devait être, d'ailleurs, d'après ce que nous avons vu plus haut. Maintenant si, en ce même point, le rayon de courbure est nul, les deux quantités  $\frac{1}{N}$  et  $\frac{1}{M}$  prennent, à la vérité, l'une et l'autre une valeur infinie; mais puisque leur rapport devient en même temps infini, leur différence devient également infinie, ce qu'il fallait démontrer.

méridienne. Puisque, par hypothèse, cette ligne n'est ni droite ni circulaire, la courbure de l'arc variera d'un point à un autre; elle commencera conséquemment par aller soit en augmentant, soit en diminuant, et nous pourrons prendre l'arc assez petit pour que la courbure aille toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, à partir du point situé sur l'axe jusqu'à l'autre extrémité. Supposons d'abord que la courbure aille en croissant, et soit  $abd$  (*fig. 1*) l'arc dont il s'agit. Au point  $a$  la normale est couchée sur l'axe, et, à mesure qu'on s'éloigne de ce point, elle fait avec l'axe un angle de plus en plus grand; mais nous limiterons la longueur de l'arc de manière que, de  $a$  en  $d$ , cet angle ne cesse point d'être aigu. Par les deux points  $a$  et  $d$  faisons passer un arc de cercle  $acd$  qui ait son centre sur l'axe, et qui, par conséquent, rencontre aussi ce dernier normalement.

Puisque l'arc  $abd$ , dont la courbure va toujours en augmentant, part du point  $a$  suivant la même direction que l'arc de cercle, et, après s'être séparé de celui-ci, le rejoint en  $d$ , il est évident que sa courbure doit d'abord être inférieure à celle de ce second arc, et lui devenir ensuite supérieure, en sorte qu'au point  $d$  le rayon de courbure de l'arc  $abd$  est plus petit que le rayon de l'arc de cercle. Mais de la direction initiale commune des deux arcs, et de cette marche relative de la courbure de l'arc  $abd$ , il résulte nécessairement que ce dernier est, comme le montre la figure, extérieur à l'autre, et qu'au point  $d$  il doit le couper, et non le toucher; si donc on mène, en ce point  $d$ , la normale  $df$  à l'arc de courbe et le rayon  $dg$  de l'arc de cercle, la première sera moins oblique sur l'axe que le second, et conséquemment elle sera plus courte. Ainsi, au point  $d$ , les deux quantités  $M$  et  $N$  seront toutes deux moindres que le rayon de l'arc de cercle. Prenons actuellement, dans la partie de l'arc  $abd$  où la courbure est moindre que celle de l'arc de cercle, un point quelconque  $m$ , et prenons, sur le second de ces arcs, un point  $n$  tel que la portion  $an$  soit égale en longueur à la portion  $am$ . Dans ces conditions, le point  $m$  sera évidemment plus éloigné de l'axe que le point  $n$ , et, d'autre part, la normale en  $m$  sera plus oblique à l'axe que le rayon mené de  $n$ ; par cette double raison, la normale dont il s'agit sera donc plus grande que le rayon de l'arc de cercle; mais, par suite de l'infériorité de la courbure en  $m$ , le rayon de courbure en ce point sera aussi plus grand que le rayon de l'arc de cercle.

Il résulte de tout cela que les valeurs de  $M$  et de  $N$  correspondantes au point  $m$  sont l'une et l'autre supérieures à celles qui correspondent au point  $d$ ; mais il est clair que  $M$  et  $N$  sont de même signe dans toute la longueur de l'arc  $abd$ , et qu'ainsi, au point  $m$  comme au point  $d$ , la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  constitue une somme; cette même quantité est donc plus petite en  $m$  qu'en  $d$ , et conséquemment l'équilibre de la figure liquide engendrée est impossible.

Si l'on suppose maintenant que la courbure de notre arc méridien aille toujours en diminuant, comme on le voit en  $a'b'd'$  (*fig. 2*), il est visible qu'alors cet arc sera intérieur à l'arc de cercle  $a'c'd'$  ayant son centre sur l'axe, que sa courbure commencera par être supérieure à celle de ce dernier pour lui devenir ensuite inférieure, et qu'au point  $d'$  l'un des arcs viendra encore couper l'autre et non le toucher; d'où l'on conclura, par le mode de raisonnement employé dans le cas précédent, que la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  est plus grande en un point voisin de  $a'$  qu'en  $d'$ , en sorte que l'équilibre de la figure engendrée est également impossible.

Donc, lorsque la ligne méridienne rencontre l'axe, la condition de l'équilibre ne peut être satisfaite que si cette ligne est une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe, ou, en supposant infini le rayon de cette circonférence, une droite perpendiculaire à l'axe; donc, enfin, la figure engendrée est nécessairement une sphère ou un plan.

De là découle, comme conséquence nécessaire, la vérité de la proposition que j'ai avancée (2<sup>me</sup> série, § 28) d'après les résultats de l'expérience, savoir que lorsqu'une portion continue et finie d'une surface d'équilibre s'appuie sur une périphérie circulaire, cette portion doit constituer une calotte sphérique ou un plan. Pour qu'il pût en être autrement, il faudrait que la calotte courbe ne fût pas de révolution, ce qui ne se réalise jamais.

§ 3. — Les lignes méridiennes des autres figures d'équilibre de révolution ne pouvant avoir aucun point de commun avec l'axe, ces lignes devront ou s'étendre à l'infini, ou se fermer en dehors de l'axe. Les premières engendreront des figures qui s'étendent elles-mêmes à l'infini, et le cylindre nous en a déjà offert un exemple. Les secondes donneraient des figures annulaires; nous saurons, à la fin de cette série, si l'existence de semblables figures est possible.

Pour simplifier la recherche des lignes dont il s'agit, nous allons démontrer qu'elles ne contiennent aucun point de rebroussement. Supposons l'existence d'un point de cette nature; nous avons à considérer trois cas : 1° celui où la tangente au point de rebroussement, tangente qui y est commune aux deux branches de la courbe, n'est pas perpendiculaire à l'axe de révolution, quelque autre direction qu'elle ait d'ailleurs; 2° celui où cette tangente commune est perpendiculaire à l'axe et où les deux branches se rapprochent de celui-ci en allant vers le point de rebroussement; 3° enfin celui où, la tangente commune étant encore perpendiculaire à l'axe, les deux branches, en allant vers le point de rebroussement, s'éloignent de cet axe.

*Premier cas.* — En jetant les yeux sur la fig. 3 qui représente, en coupes méridiennes, des portions de la figure liquide pour différentes positions du point de rebroussement par rapport à l'axe de révolution  $ZZ'$ , on reconnaîtra sans peine qu'aux environs de ce point, la normale est toujours, pour l'une des branches, dirigée à l'intérieur du liquide et conséquemment positive, tandis que, pour l'autre, elle est dirigée à l'extérieur et conséquemment négative; or l'équation  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C$  ne saurait comprendre ce changement de signe de la normale  $N$  en passant d'une branche à l'autre: car il exigerait qu'au point de rebroussement cette normale fût nulle ou infinie, et, dans le cas actuel, la normale en question est évidemment finie, puisque la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe, et que le point de rebroussement ne peut être sur celui-ci.

*Deuxième cas (fig. 4).* — Si le point de rebroussement est de seconde espèce, c'est-à-dire si les deux branches qui y aboutissent sont situées du même côté de la tangente commune, on voit que, pour l'une de ces branches, la normale et le rayon de courbure sont tous deux positifs, tandis que, pour l'autre, ils sont tous deux négatifs; la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  changerait donc de signe en passant de l'une à l'autre, et ainsi ne serait plus la même dans toute l'étendue de la figure liquide.

Si le point de rebroussement est de première espèce, c'est-à-dire si les deux branches sont situées des deux côtés opposés de la tangente commune, le rayon de courbure y est, comme on sait, nul ou infini; mais un rayon de courbure nul rendrait infinie la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ , en sorte que nous

n'avons à examiner que l'hypothèse d'un rayon de courbure infini. Alors comme, d'après la direction de la tangente, la normale est également infinie au point que nous considérons, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  se réduirait à zéro au même point; il faudrait donc, pour l'équilibre, que cette quantité fût nulle aussi en tous les autres points de la ligne méridienne; or cela est impossible, puisque, dès qu'on s'écarte du point de rebroussement, le rayon de courbure et la normale prennent, sur chacune des deux branches en particulier, des valeurs finies et de même signe.

*Troisième cas (fig. 4<sup>bis</sup>).* — Si le point de rebroussement est de seconde espèce, le rayon de courbure a des signes opposés sur les deux branches, et conséquemment il doit être nul ou infini au point en question; mais, nous l'avons déjà fait remarquer, nous n'avons pas à nous occuper de l'hypothèse d'un rayon de courbure nul; reste donc celle d'un rayon de courbure infini. Alors, la normale au même point étant de son côté infinie, l'équilibre exige, comme plus haut, que la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  soit nulle pour tous les points de la ligne méridienne. Ici la chose semble possible au premier abord, puisque, aux environs du point de rebroussement, le rayon de courbure et la normale sont, sur chaque branche considérée isolément, de signes contraires; mais nous verrons ci-après que cette possibilité n'est qu'apparente.

Si le point de rebroussement est de première espèce, le rayon de courbure y est nécessairement nul ou infini, ainsi que nous l'avons déjà rappelé; et puisque nous devons rejeter les rayons de courbure nuls, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  est encore égale à zéro au point dont il s'agit, et doit l'être aussi en tous les autres points, ce qui paraît possible comme précédemment, et pour la même raison.

Mais pour qu'en tous les points de la ligne méridienne la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  soit nulle, il faut évidemment qu'en chacun de ces points le rayon de courbure soit égal et opposé à la normale; or il est bien connu des géomètres qu'une seule courbe jouit de cette propriété, et que cette courbe est la *chainette*, laquelle n'a aucun point de rebroussement.

§ 4. — Les principes établis dans les deux paragraphes précédents ayant écarté de la question de nos lignes méridiennes les complications qui seraient venues l'embarrasser, nous pouvons entrer plus directement en matière.

Dans les expériences relatives à la formation du cylindre liquide entre deux anneaux solides (2<sup>me</sup> série, § 38), lorsque l'anneau supérieur a été soulevé de manière à faire perdre à la masse d'huile sa forme sphérique, mais pas assez pour atteindre la forme cylindrique, nous avons déjà obtenu une portion de figure d'équilibre de révolution qui n'appartient ni à la sphère ni au cylindre; nous avons fait remarquer, en outre, que si, après avoir formé le cylindre, on augmentait encore l'écartement des anneaux, il en résulterait une autre portion de figure d'équilibre qui serait également étrangère à la sphère et au cylindre, et l'on comprend que cette nouvelle portion de figure serait aussi de révolution. Pour arriver à déterminer ce que doivent être, dans leur état complet, les figures liquides auxquelles appartiennent les portions dont il s'agit, décrivons d'abord une nouvelle expérience.

Prenons pour système solide un cylindre en fer d'une longueur assez considérable relativement au diamètre, porté sur deux pieds en fils de même métal (*fig. 5*); supposons, par exemple, la longueur de 14 centimètres, et le diamètre de 2. Ce cylindre étant soigneusement frotté d'huile et introduit dans le vase, amenons en contact avec le milieu de sa longueur une sphère d'huile d'un volume convenable. L'adhérence une fois établie, la masse liquide s'étend sur la surface du cylindre de manière à envelopper une portion de la longueur de celui-ci, perd sa forme sphérique, et constitue enfin une figure de révolution dont la ligne méridienne change de courbure en allant vers ses deux extrémités, pour devenir, en ces deux points, tangente à la génératrice du cylindre<sup>1</sup>. La *fig. 6* représente la coupe méridienne de la figure liquide et du cylindre solide.

§ 5.—Ainsi que nous l'avons fait voir par la théorie (2<sup>me</sup> série, §§ 6<sup>bis</sup>, 10, 18 et 20) et que nous l'avons confirmé par de nombreuses expériences, lorsque la masse liquide adhère à un système solide qui lui fait perdre sa forme sphérique, les seules parties de ce système d'où dépend la nouvelle figure d'équilibre sont les lignes très-étroites suivant lesquelles il est rencontré ou touché par la couche superficielle de la masse, en sorte qu'il peut en général se réduire à de simples fils de fer représentant ces mêmes lignes. Or, dans

<sup>1</sup> M. Beer (voir la note 1 du § 4) indique la même expérience comme moyen propre à vérifier l'un des résultats de ses calculs; mais je l'avais effectuée longtemps auparavant.

la figure dont il s'agit ici, la surface libre de la masse liquide touche notre cylindre solide suivant deux circonférences perpendiculaires à l'axe, et passant par les points  $a$  et  $b$ ; rien n'empêche donc de concevoir le cylindre entier remplacé par deux anneaux représentant ces circonférences, c'est-à-dire ayant un diamètre extérieur égal à celui du cylindre, placés verticalement en regard l'un de l'autre, et distants entre eux de l'intervalle  $ab$ . Seulement il faudra que la quantité d'huile soit plus grande, afin de suppléer au volume de la portion du cylindre supprimée à l'intérieur de la masse; il faudra même encore un peu d'huile en sus, pour fournir la matière des deux bases qui s'appuient sur les anneaux, bases dont les surfaces seront, comme nous le verrons bientôt, des calottes sphériques convexes. Du reste, pour éviter ces dernières qui compliqueraient inutilement la figure, on peut supposer des disques au lieu d'anneaux; dans l'un et l'autre cas, la figure sera alors entièrement formée d'huile; elle est représentée dans cet état, en coupe méridienne ou en projection verticale, par la *fig. 7*;  $am$  et  $bn$  sont les coupes ou les projections des disques.

Nous dirons bientôt pour quelles raisons nous avons indiqué l'emploi d'un cylindre plutôt que celui de disques ou d'anneaux.

§ 6. — La figure que nous venons d'obtenir, et dans laquelle la ligne méridienne s'arrête aux points  $a$  et  $b$  où elle touche le cylindre (*fig. 6*) ou rencontre les bords des disques (*fig. 7*), ne constitue évidemment qu'une portion de la figure d'équilibre complète. Essayons donc de poursuivre la ligne méridienne, à partir de ces mêmes points  $a$  et  $b$  où ses éléments sont parallèles à l'axe.

Il est aisé de faire voir que les points  $a$  et  $b$  ne sont pas des points d'inflexion. En de semblables points, le rayon de courbure est nul ou infini; mais puisque, dans nos lignes méridiennes, il ne peut être question d'un rayon de courbure nul, qui rendrait infini le premier membre de l'équation de l'équilibre, il faudrait supposer ce rayon infini aux points que nous considérons, et l'équation s'y réduirait à  $\frac{1}{N} = C$ ; or les points  $c$  et  $d$  (*fig. 6*) sont réellement des points d'inflexion de ce genre, comme le montre l'aspect de la figure, en sorte que l'équation de l'équilibre s'y réduit nécessairement à  $\frac{1}{N} = C$ ; la normale  $N$  devrait donc avoir, aux points  $a$  et  $b$ , la même longueur qu'aux points

$c$  et  $d$ , ce qui évidemment n'est pas : car d'abord les points  $c$  et  $d$  sont plus éloignés de l'axe que les points  $a$  et  $b$ , et, en outre, les normales qui partent des premiers sont obliques à l'axe, tandis que celles qui correspondent aux seconds lui sont perpendiculaires.

Au delà des points  $a$  et  $b$  la courbe commence donc par garder une courbure de même sens qu'en deçà, c'est-à-dire une courbure concave vers l'extérieur (*fig. 8*). Or supposons que sur le prolongement partant de  $a$ , par exemple, cette courbure aille d'abord soit en augmentant, soit en diminuant moins qu'elle ne diminue de l'autre côté de  $a$ ; nous pourrions toujours prendre, sur le prolongement dont il s'agit, une portion  $am$  assez petite pour qu'en chacun de ses points, la courbure soit plus forte qu'aux points correspondants d'une portion  $an$  de même longueur prise sur la première partie de la courbe. En vertu de la supériorité de courbure de tous les points de l'arc  $am$ , le point  $m$  est nécessairement plus éloigné de l'axe que le point  $n$ , et, en outre, la normale  $mr$  qui part du premier est plus oblique à l'axe que la normale  $ns$  qui part du second; la normale en  $m$  est donc, par cette double raison, plus grande que la normale en  $n$ . D'un autre côté, d'après la même hypothèse relative aux courbures, le rayon de courbure en  $m$  est plus petit qu'en  $n$ . Il résulte de là qu'en sautant du point  $n$  au point  $m$ , le premier terme de la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  augmentera et le second diminuera. Or, dans les parties de la courbe que nous considérons, le rayon de courbure et la normale sont opposés l'un à l'autre et ont conséquemment des signes contraires, de sorte que la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  constitue une différence; si donc l'un des termes de cette quantité croît tandis que l'autre décroît, elle ne peut conserver la même valeur, et l'équilibre est impossible.

Si l'on suppose que la courbure de l'arc  $am$  diminue au contraire plus, à partir de  $a$ , que celle de l'arc  $an$ , on conclura, par le même mode de raisonnement, que la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  changerait aussi de valeur en passant de l'une des parties de la courbe à l'autre.

L'hypothèse de courbures plus fortes ou plus faibles dans l'arc  $am$  que dans l'arc  $an$  est donc incompatible avec l'équation de l'équilibre; il faut conséquemment, pour satisfaire à cette équation, que, sur le petit prolongement  $am$ , les courbures soient identiquement les mêmes que sur un arc  $an$  de même

longueur pris en deçà de  $a$ . Or il est clair que cette identité entraîne celle de toute la partie de la courbe située au delà du point  $a$  avec la partie située en deçà. La portion de courbe comprise entre  $a$  et  $b$  (*fig. 6 et 7*) se reproduira donc au delà de  $a$ , puis, par les mêmes raisons, se reproduira encore, et ainsi de suite indéfiniment, et il en sera de même de l'autre côté du point  $b$ , de sorte que la ligne méridienne sera une courbe ondulée s'étendant à l'infini le long de l'axe, dont elle se rapproche et s'éloigne périodiquement de quantités égales.

La figure d'équilibre complète se prolonge donc à l'infini le long de l'axe, et se compose d'une suite régulière de renflements et d'étranglements égaux; la *fig. 9* en représente une coupe méridienne sur une certaine étendue.

Afin d'abrégier le langage dans ce qui va suivre, nous donnerons à cette figure d'équilibre le nom d'*onduloïde*, tiré de la forme de sa ligne méridienne.

§ 7. — Il est aisé de comprendre comment l'équilibre peut exister dans une semblable figure, bien que, sur les parties renflées, la courbure soit convexe dans tous les sens autour d'un même point, tandis que, sur les parties étranglées, la courbure est convexe dans certains sens et concave dans d'autres : c'est que, sur ces dernières parties, les courbures convexes ou positives sont plus fortes que les courbures concaves ou négatives, de manière que la moyenne en chaque point (*2<sup>me</sup> série*, § 6) est positive et égale à celle qui correspond aux différents points des parties renflées.

De ce que, dans l'onduloïde, la courbure moyenne est positive, il résulte nécessairement que toutes les fois que l'on réalisera une portion quelconque d'onduloïde entre deux anneaux, les bases qui s'appuieront sur ceux-ci seront des calottes sphériques convexes.

§ 8. — Si, dans l'expérience du § 4, le volume de l'huile demeurant le même, on emploie un cylindre solide d'un plus grand diamètre, la masse liquide s'étend davantage dans le sens de l'axe, et les courbures méridiennes diminuent, de sorte que, dans la figure complète correspondante, les renflements et les étranglements sont moins prononcés. Les courbures méridiennes s'effacent ainsi d'autant plus dans la figure partielle, et, par suite, dans la figure complète, que le diamètre du cylindre solide est plus grand; d'où l'on voit que, dans ces variations, la figure complète tend vers la forme

cylindrique, qui peut être considérée comme la limite de ces mêmes variations.

Si, le volume de l'huile demeurant toujours le même, on emploie, au contraire, un cylindre solide d'un diamètre plus petit, la masse liquide se raccourcit dans le sens de l'axe, les courbures méridiennes augmentent, et la figure se rapproche de plus en plus d'une sphère; lorsque, par exemple, pour une masse d'huile constituant primitivement une sphère de 6 centimètres de diamètre, on prend, comme cylindre solide, un fil de fer de 2 millimètres d'épaisseur, la masse a déjà presque exactement la forme sphérique, et, si l'on se sert d'un fil très-fin, la différence d'avec la forme sphérique devient tout à fait insensible. Maintenant, la figure complète variant de cette même manière dans toutes ses parties, les renflements et les étranglements y seront de plus en plus prononcés, et, à la dernière limite, on comprend qu'elle consistera en une suite de sphères égales tangentes les unes aux autres sur l'axe.

L'onduloïde complet peut donc varier de forme entre deux limites très-éloignées, qui sont, d'une part, le cylindre, et, de l'autre, une suite de sphères égales qui se touchent sur l'axe. La *fig. 10* représente deux onduloïdes dont l'un diffère peu du cylindre, et dont l'autre se rapproche de la série de sphères.

Dans ces divers aspects, la figure d'équilibre dont nous nous occupons a, comme on le voit, de l'analogie avec les phases successives de la transformation d'un cylindre liquide indéfini (*fig. 30* de la 2<sup>me</sup> série).

§ 9. — Mais l'onduloïde est susceptible d'un autre genre de variation, qui donne une troisième limite. Supposons un vase semblable au nôtre et de dimensions beaucoup plus grandes; plaçons-y horizontalement, au sein du liquide alcoolique, un cylindre solide de 2 centimètres de diamètre, par exemple, d'une longueur considérable, et porté sur des pieds suffisamment élevés. Faisons adhérer à ce cylindre une masse d'huile qui produise une portion d'onduloïde pareille à celle de la *fig. 6*, puis ajoutons une nouvelle quantité d'huile; la figure augmentera alors en longueur en même temps qu'en épaisseur; mais poussons-la légèrement d'un côté, de manière que l'une de ses extrémités soit ramenée au même endroit qu'auparavant, et que l'autre

seule se trouve reculée. Si nous ajoutons ainsi successivement de nouvelles quantités d'huile, en ramenant toujours la première extrémité de la figure à la même place, cette figure prendra de plus en plus d'épaisseur, et sa seconde extrémité reculera de plus en plus; et comme nous pouvons imaginer le vase aussi grand et le cylindre aussi allongé que nous le voulons, rien ne met un terme à la possibilité théorique de l'accroissement de la figure en épaisseur ainsi qu'en longueur. Si donc nous supposons cet accroissement porté jusqu'à l'infini, le sommet de l'arc méridien convexe et la seconde extrémité de la figure n'existeront plus, en sorte que la ligne méridienne ira en s'éloignant indéfiniment de l'axe à partir de la première extrémité; et puisque celle-ci constitue le cercle de gorge d'un étranglement, et que des deux côtés d'un étranglement tout est parfaitement symétrique (§ 6), on voit que la ligne méridienne complète se réduira à une simple courbe à deux branches infinies, comme la parabole, ayant son axe de symétrie perpendiculaire à l'axe de révolution; par conséquent la figure complète engendrée se réduira elle-même à un étranglement unique s'étendant indéfiniment de part et d'autre de son cercle de gorge. Nous connaissons bientôt d'une manière précise la nature de cette troisième limite de l'onduloïde.

§ 10. — Revenons maintenant à l'emploi de deux disques pour la réalisation de la portion d'onduloïde comprise entre les milieux de deux étranglements voisins (§ 5). Quand on essaie cette réalisation, en attachant aux deux disques une masse d'huile plus grande que celle qui doit constituer la figure, puis absorbant graduellement l'excès au moyen de la petite seringue, l'opération marche sans difficulté tant que les éléments de la ligne méridienne qui aboutissent aux bords des disques s'écartent notablement du parallélisme avec l'axe; mais lorsqu'ils sont près d'atteindre ce parallélisme, ou, en d'autres termes, lorsqu'on approche de la portion d'onduloïde que l'on veut obtenir, il faut agir avec plus de précaution, sans quoi la figure pourrait s'altérer spontanément et se désunir. En conduisant l'opération avec ménagement, et en n'enlevant, vers la fin, l'huile que par quantités fort petites, on parvient, autant que l'œil peut en juger, à la portion d'onduloïde cherchée (*fig. 7*), portion qui varie de forme en se rapprochant ou en s'éloignant du cylindre, suivant que le diamètre des disques est plus grand ou plus petit

par rapport à leur distance; mais alors la cause la plus légère, telle qu'un petit mouvement imprimé à la masse par le bec de la seringue, suffit pour déterminer l'altération graduelle, puis la destruction de la figure : on voit celle-ci s'amincir près de l'un des disques, cet amincissement se prononce de plus en plus, l'huile se porte en plus grande quantité du côté de l'autre disque (*fig. 11*), et la masse finit par se séparer en deux parties.

De ce que, dans la figure ainsi obtenue, une altération occasionnée par une cause minime progresse ensuite spontanément, on doit inférer que la portion de l'onduloïde comprise entre le milieu d'un étranglement et celui de l'étranglement suivant est à la limite de la stabilité.

On comprend, d'après ce que nous venons d'exposer, pourquoi, dans le § 4, nous avons prescrit l'adoption d'un cylindre comme système solide : avec des disques, il faut des tâtonnements et des soins particuliers pour arriver sans accidents jusqu'au point où les derniers éléments de la ligne méridienne sont ou paraissent parallèles à l'axe, tandis qu'avec le cylindre, la figure est parfaitement stable, et le parallélisme voulu s'établit de lui-même. Mais il reste à expliquer comment la stabilité de la figure peut dépendre des deux circonférences suivant lesquelles la couche superficielle de la masse touche le cylindre (§ 5). La chose est très-simple : dans le cas des disques, lorsqu'il arrive, comme nous l'avons dit, que la figure s'amincit spontanément d'un côté, les éléments de la couche superficielle qui aboutissent au bord du disque près duquel cet effet a lieu s'inclinent vers l'axe (*fig. 11*); or, dans le cas du cylindre, les derniers éléments de la couche superficielle ne sauraient s'incliner ainsi, puisqu'ils sont appliqués sur la surface du solide.

Cette explication suggère naturellement l'idée de substituer aux disques minces des disques épais, ou plutôt des portions de cylindre : car en donnant d'abord à la masse un volume suffisant pour que l'huile atteigne les bords des faces de ces derniers disques opposées à celles qui se regardent, puis en enlevant du liquide jusqu'à ce que les circonférences de contact se trouvent sur l'épaisseur de ces mêmes disques, la cause de stabilité ci-dessus indiquée existera évidemment tout aussi bien qu'avec un cylindre continu. Or c'est ce que l'expérience confirme pleinement : les disques dont je me suis servi avaient chacun 15 millimètres de diamètre, et 8 d'épaisseur, et ils étaient maintenus

à 90 millimètres l'un de l'autre; tout le système est représenté *fig. 12*. En faisant adhérer à leur ensemble une masse d'huile d'abord trop grande, enlevant ensuite l'excès, et poussant légèrement la masse à droite ou à gauche avec le bec de la seringue, de manière que les points d'où la ligne méridienne paraissait partir fussent à peu près à égale distance des deux bases de chaque disque, la figure produite s'est montrée parfaitement stable; on a pu, en continuant à absorber de petites quantités d'huile, amener les extrémités de la ligne méridienne très-près des bords des bases solides en regard, sans que la figure perdît de sa stabilité, et ce n'est que lorsqu'elles ont paru atteindre ces bords même, que l'instabilité s'est manifestée.

§ 11. — Puisque la portion d'onduloïde dont nous nous occupons se trouve déjà à la limite de la stabilité lorsqu'elle est formée entre deux disques minces, et qu'ainsi elle est libre dans toute son étendue à l'exception de ses seules bases, il serait inutile de chercher à réaliser une portion d'onduloïde également libre qui dépasserait de part et d'autre les milieux de deux étranglements, et l'on en conclura que l'onduloïde indéfini est, comme le cylindre indéfini, une figure d'équilibre instable.

Disons cependant qu'une expérience de notre deuxième série donne fortuitement naissance à un onduloïde se prolongeant au delà des milieux de deux étranglements, mais très-rapproché du cylindre; nous y reviendrons ci-après.

§ 12. — Il est aisé de voir maintenant que les figures bombées dont nous avons parlé dans le § 38 de notre deuxième série en décrivant la formation du cylindre liquide, figures qui s'obtiennent lorsque après avoir attaché une sphère d'huile à deux anneaux solides horizontaux, égaux en diamètre et placés l'un au-dessus de l'autre, on soulève l'anneau supérieur d'une quantité moindre que celle qui donne à la masse la forme cylindrique, ne sont autre chose que des portions de renflements d'onduloïde; seulement, quand on produit ces figures bombées par le procédé que nous venons de rappeler, elles sont placées de manière que leur axe soit vertical<sup>1</sup>.

En effet, concevons un onduloïde réalisé au moyen de deux disques épais (§ 10), et conséquemment à l'état d'équilibre stable, et imaginons que l'on

<sup>1</sup> L'une de ces mêmes figures bombées est représentée *fig. 21* de la 2<sup>m</sup>e série.

place, à des distances égales à droite et à gauche du milieu de cette figure, entre ce milieu et les disques épais, deux anneaux solides verticaux ayant leurs centres sur l'axe et leurs contours extérieurs précisément à la surface de la masse; il est clair que ces anneaux ne détruiront pas l'équilibre de la figure; or, si l'on suppose que les parties de la figure situées au delà des anneaux soient remplacées par des calottes sphériques convexes s'appuyant sur ces derniers, et dont la courbure soit telle qu'elle détermine une pression égale à celle qui appartient au reste de la figure, l'équilibre existera évidemment encore, et il sera encore parfaitement stable, puisque la distance des anneaux est moindre que celle qui correspond à la limite de la stabilité. Mais alors, si les anneaux ne sont pas assez écartés pour que la portion de la ligne méridienne qui s'étend de l'un à l'autre contienne les points d'inflexion, il est visible que l'ensemble constituera l'une des figures bombées dont il s'agit: car, d'après les différentes formes de l'onduloïde, la ligne méridienne de la portion comprise entre les anneaux peut varier depuis un arc de cercle ayant son centre sur l'axe, jusqu'à une ligne droite, comme dans ces mêmes figures bombées. Pour que celles-ci ne fussent point des portions d'onduloïde, il faudrait qu'entre les mêmes anneaux placés à une même distance l'un de l'autre, et avec une même masse d'huile, il y eût deux figures d'équilibre possibles, toutes deux à l'état stable; or c'est ce que dément l'expérience: si, après avoir transformé une sphère d'huile en l'une des figures bombées en question, soit par l'augmentation de l'écartement des anneaux, soit par la soustraction d'une certaine quantité de liquide, on agite le mélange alcoolique de manière à imprimer à la masse d'huile des mouvements considérables, mais pas assez cependant pour la désunir, et qu'ensuite on la laisse revenir au repos, elle reprend toujours identiquement la même forme.

Dans les expériences des §§ 44 et 45 de la deuxième série, lorsque les anneaux ou les disques étaient maintenus à une distance quadruple de leur diamètre et que la masse liquide comprise entre eux était suffisante pour que la figure fût stable, cette figure constituait encore évidemment une portion d'onduloïde; mais comme, en enlevant ensuite de l'huile, on arrivait, par une diminution fort petite de la masse, à la destruction spontanée, il s'ensuit que la portion d'onduloïde en question était peu éloignée de sa limite de stabilité, et

qu'ainsi sa ligne méridienne contenait très-probablement les points d'inflexion.

En décrivant les expériences du § 65 de la même série, expériences qui commencent par la réalisation momentanée d'un cylindre dépassant un peu la limite de la stabilité, j'ai dit que l'altération spontanée de ce cylindre se manifestait quelquefois par la formation de deux étranglements comprenant entre eux un renflement; que cet état de la figure, après avoir atteint un certain degré assez peu prononcé, paraissait demeurer stationnaire pendant quelque temps; puis que l'un des étranglements s'effaçait lentement tandis que l'autre s'approfondissait, et que la transformation continuait ensuite à la manière ordinaire. Or, de ce que cette figure à deux étranglements persiste pendant un temps notable, il faut conclure qu'elle constitue une figure d'équilibre, et conséquemment un onduloïde peu différent du cylindre et dépassant la limite de la stabilité, c'est-à-dire s'étendant au delà des milieux de deux étranglements. En effet, puisqu'un semblable onduloïde, bien qu'instable, est une figure d'équilibre de même que le cylindre instable, il peut également se former, pour quelques instants, entre les disques, et l'on conçoit qu'une petite cause accidentelle doit suffire pour faire passer la masse de l'une de ces figures à l'autre.

Enfin on voit que, dans les expériences du § 10 de la série actuelle, la masse liquide constitue toujours aussi une portion d'onduloïde, qui se modifie, sans cesser d'appartenir à ce genre de figure, à mesure qu'on absorbe l'excès d'huile.

§ 13. — L'onduloïde passager dont nous avons parlé ci-dessus, vérifie les conclusions du § 6 relatives à la poursuite de la ligne méridienne au delà des points des parties concaves où les éléments deviennent parallèles à l'axe. Malheureusement cet onduloïde ne se produit pas à volonté, ses courbures méridiennes sont faibles, et d'ailleurs il est instable; mais une autre expérience, à laquelle nous avons déjà fait allusion sans en décrire les résultats, fournit une vérification nette des mêmes conclusions.

Si, après avoir formé entre deux anneaux un cylindre vertical dont la hauteur soit beaucoup moindre que celle qui correspondrait à la limite de la stabilité, on soulève un peu l'anneau supérieur, on voit le cylindre se creuser légèrement dans le sens méridien, de manière que la figure présente un

étranglement; si l'on soulève encore l'anneau, l'étranglement s'approfondit davantage, et la figure est toujours parfaitement symétrique de part et d'autre du cercle de gorge, lequel est conséquemment situé au milieu de l'intervalle des anneaux. Si, dans le cylindre d'où l'on est parti, le rapport entre la hauteur et le diamètre était convenable, on peut, en continuant ainsi, rendre l'étranglement très-prononcé; et alors la ligne méridienne change le sens de sa courbure en allant vers les anneaux, en sorte qu'elle présente deux points d'inflexion situés à égale distance des deux côtés du cercle de gorge; alors aussi les bases de la figure conservent leur forme convexe, et même leur courbure augmente plus ou moins. Dans cette expérience, il y a toujours, on le conçoit, une limite d'écartement des anneaux, au-delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible; si on la dépasse, l'étranglement s'amincit spontanément jusqu'à se rompre, et la figure se sépare en deux portions; mais, pour tout écartement moindre que la limite dont il s'agit, l'équilibre est stable. Le cylindre qui m'a paru donner de la manière la plus prononcée les résultats ci-dessus, est celui dont la hauteur est au diamètre à peu près dans le rapport de 5 à 7: en employant, par exemple, des anneaux de 70 millimètres de diamètre, il faut former un cylindre d'environ 50 millimètres de hauteur; l'anneau supérieur peut alors être soulevé jusqu'à ce qu'il soit distant de l'autre de près de 110 millimètres, et l'on obtient ainsi une figure dans laquelle le cercle de gorge n'a qu'environ 30 millimètres de diamètre.

L'expérience faite par ce procédé exige de grandes précautions: l'égalité des densités des deux liquides et l'homogénéité de l'huile doivent être parfaites, et, lorsqu'on approche de la limite d'écartement des anneaux, il faut agir avec beaucoup de ménagement. Mais on réussit sans difficulté, en disposant les choses de manière que l'axe de révolution soit horizontal: les anneaux de 70 millimètres, qui sont alors verticaux, doivent être placés d'avance à la distance de 110 millimètres l'un de l'autre; chacun d'eux est fixé, par sa partie inférieure, à un fil de fer vertical, et ces fils sont fixés eux-mêmes, par leurs extrémités inférieures, à une planchette en fer qui supporte tout le système; enfin ces mêmes fils sont entourés de coton, pour que l'huile ne s'y attache pas (2<sup>me</sup> série, § 9). On forme d'abord un cylindre (*fig.* 13) entre les deux anneaux, puis on diminue graduellement le volume de la masse à

l'aide de la petite seringue. Si, lorsque le cercle de gorge n'est plus que d'environ 30 millimètres, on a soin de n'enlever l'huile que par très-petites portions à la fois, on parvient à réduire ce diamètre à 27 millimètres, et l'on obtient ainsi le résultat représenté *fig. 14*.

Or il est évident que toutes ces figures étranglées et à bases convexes, figures qui peuvent, comme celles que nous avons étudiées dans les paragraphes précédents, s'écarter aussi peu du cylindre qu'on le veut, sont encore des portions d'onduloïde, mais prises autrement dans l'onduloïde indéfini : tandis que le milieu des unes est occupé par l'équateur d'un renflement, le milieu des autres est occupé par le cercle de gorge d'un étranglement ; les plus étendues des premières, sauf l'onduloïde passager dont il a été question plus haut, se composent d'un renflement entier entre deux demi-étranglements (*fig. 6 et 7*), et celle que représente la *fig. 14* se compose d'un étranglement entier entre deux portions de renflements.

§ 14. — Maintenant reprenons nos anneaux horizontaux, afin de pouvoir placer à volonté l'anneau supérieur plus près ou plus loin de l'autre ; formons encore un cylindre entre eux, puis, sans changer leur distance, enlevons graduellement de l'huile à la masse. Si le rapport de la distance des anneaux à leur diamètre est beaucoup moindre que dans la dernière expérience du paragraphe précédent, la courbure des bases, au lieu d'aller en augmentant à mesure que l'étranglement s'approfondit, va, au contraire, en diminuant ; et si ce rapport ne dépasse pas  $\frac{2}{5}$  environ, on arrive à rendre les bases absolument planes. Pour un rapport moindre encore, on peut même aller plus loin : en continuant à absorber du liquide, on voit les bases devenir concaves : formons, par exemple, entre nos anneaux de 70 millimètres de diamètre, un cylindre de 35 millimètres de hauteur (*fig. 17*) ; par l'absorption graduelle de l'huile, nous verrons les bases s'affaisser de plus en plus en même temps que l'étranglement se creuse, et perdre enfin toute leur courbure, et nous aurons ainsi le résultat représenté *fig. 18*. Si nous continuions à faire agir la petite seringue, les bases prendraient une courbure concave ; mais, pour le moment, arrêtons-nous lorsqu'elles sont planes.

Avec de telles bases, l'étranglement compris entre les anneaux ne peut plus (§ 7) appartenir à l'onduloïde, et nous parvenons conséquemment à une nou-

velle figure de révolution. Cherchons donc ce qu'est cette nouvelle figure dans son état complet.

Rappelons-nous que la pression correspondante à un élément de la couche superficielle a pour valeur (2<sup>me</sup> série, § 4)  $P + \frac{A}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ , expression dans laquelle A est une constante dépendant de la nature du liquide et ne pouvant être nulle, et P la pression correspondante à une surface plane. Or, dans le cas dont nous nous occupons, la pression en un point quelconque de la figure complète doit être égale à celle d'une surface plane, puisque les bases de notre figure partielle sont des plans; l'expression ci-dessus doit donc, dans ce même cas, se réduire à P, ce qui exige que l'on ait :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0.$$

Ainsi la figure dont il s'agit est telle qu'en chaque point de sa surface la courbure moyenne (2<sup>me</sup> série, §§ 5 et 6) est nulle; c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'en chacun de ces points, il y a, comme dans la portion formée entre nos anneaux, des courbures concaves dont l'effet détruit exactement celui des courbures convexes, de sorte que la pression demeure la même que s'il n'y avait aucune courbure.

Maintenant, l'équation  $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$  devenant ici, d'après la notation que nous avons adoptée pour les figures de révolution,  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 0$ , on en déduit :

$$M = - N;$$

d'où l'on voit qu'en chaque point de la ligne méridienne, le rayon de courbure est égal et opposé à la normale. Or les géomètres ont démontré que la seule courbe qui jouisse de cette propriété est la *chainette*<sup>1</sup>. Celle-ci est alors placée de telle manière relativement à l'axe auquel on rapporte les normales, que la droite qui la partage symétriquement en deux parties égales soit perpendiculaire à cet axe, et que le sommet de la courbe soit distant du point d'intersection de ces deux droites d'une quantité égale au rayon de courbure de ce même sommet.

<sup>1</sup> La chainette est, comme on sait, la courbe que forme, dans l'état d'équilibre, une chaîne pesante et parfaitement flexible suspendue à deux points fixes.

Notre figure est donc, dans son état complet, celle qui serait engendrée par la révolution d'une chaînette ainsi placée par rapport à l'axe. Nous lui donnerons, d'après cela, le nom de *caténoïde*; la *fig. 19* en représente une coupe méridienne assez étendue, dans laquelle l'axe de révolution est *ZZ'*.

La chaînette étant une courbe à branches infinies, le caténoïde s'étend donc encore à l'infini, comme le cylindre et l'onduloïde, mais non plus seulement dans le sens de l'axe.

§ 15. — Rappelons ici un principe que nous avons exposé, en passant, dans le § 8 de la 2<sup>me</sup> série, et dont nous avons fait usage de nouveau dans le § 34 de la même série : lorsqu'une surface satisfait à la condition générale de l'équilibre de nos figures liquides, cette condition est également remplie soit que l'on suppose le liquide d'un côté, soit qu'on le suppose de l'autre côté de la surface en question. En effet, l'inversion de la position du liquide par rapport à la surface ne fait que changer les signes des deux rayons de courbure principaux correspondants à chacun des points de celle-ci, mais n'altère évidemment en rien les valeurs absolues de ces rayons, de sorte que si la quantité  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$  est constante dans l'un des cas, elle le sera aussi dans l'autre. Il y a donc toujours, pour une même surface satisfaisant à la condition de l'équilibre, deux figures liquides, dont la seconde présente en creux ce que la première présente en relief, et vice versa, figures qui sont, l'une comme l'autre, des figures d'équilibre. C'est, par exemple, ce qu'on voit se réaliser, dans nos expériences, à l'égard de la sphère : une masse d'huile abandonnée librement à elle-même au sein du mélange alcoolique donne une sphère en relief, et, d'autre part, lorsque du mélange alcoolique s'est introduit dans une de nos masses d'huile, les surfaces dans lesquelles se moulent les bulles de ce mélange constituent des sphères d'huile en creux (2<sup>me</sup> série, § 10).

En vertu de ce principe, nous aurons conséquemment deux caténoïdes, savoir celui de la *fig. 19*, dans lequel le liquide remplit l'espace que la chaînette en tournant laisse entre elle et l'axe, et un autre dans lequel le liquide occupe l'espace embrassé par la courbe. La *fig. 20* représente une coupe méridienne de ce dernier.

§ 16. — Dans l'expérience du § 14, on n'arrive, comme nous l'avons

dit, à rendre planes les bases de la figure, que lorsque l'écartement des anneaux n'excède pas les  $\frac{2}{5}$  environ de leur diamètre. Nous reviendrons plus loin sur les détails de cette expérience, qui présente des particularités curieuses; mais nous insisterons dès à présent sur une conséquence importante qui s'en déduit immédiatement : on doit en conclure, en effet, que, pour des anneaux d'un diamètre donné, il y a un maximum d'écartement au delà duquel aucune portion de caténoïde n'est plus possible entre eux. Nous allons montrer que ce résultat est d'accord avec la théorie, et nous serons conduit en même temps à un résultat nouveau.

On a vu que la chaînette génératrice doit satisfaire à cette condition, que le rayon de courbure de son sommet soit égal et opposé à la droite qui mesure la distance de ce sommet à l'axe de révolution. Cela étant, concevons, dans un plan méridien, une droite perpendiculaire à l'axe de révolution, et représentant l'axe de symétrie des chaînettes, puis une seconde droite parallèle à l'axe de révolution et distante de celui-ci d'une quantité égale au rayon des anneaux. Dans les divers écartements de ces derniers, leurs centres demeureront sur l'axe de révolution, et leurs contours s'appuieront toujours sur la seconde droite ci-dessus, que, pour abrégé, nous appellerons la droite des anneaux. Imaginons enfin, dans le même plan, une chaînette génératrice ayant son sommet au point où la droite des anneaux est coupée par l'axe de symétrie dont nous avons parlé. Cette chaînette sera tangente en ce point à la droite en question, et ne pourra conséquemment s'appuyer sur les anneaux que lorsque les contours de ceux-ci passeront par le point de tangence, ou, en d'autres termes, lorsque la distance mutuelle des deux anneaux sera nulle<sup>1</sup>; la chaînette dont il s'agit correspond donc au cas d'un écartement nul des anneaux. Maintenant supposons que la courbe quitte cette position et marche graduellement vers l'axe de révolution, en se modifiant de manière à satisfaire toujours à la condition d'égalité entre le rayon de courbure de son sommet et la distance de ce sommet à l'axe; dans chacune de ses nouvelles positions, elle coupera la droite des anneaux en deux points, que nous désignerons par A et B. La distance de ces deux points représentera donc, dans chacune de

<sup>1</sup> Nous regardons ici, pour simplifier, les anneaux comme formés d'un fil sans épaisseur.

ces mêmes positions, l'écartement des anneaux, et la chaînette correspondante représentera la ligne méridienne d'un caténoïde dont les anneaux comprendraient une portion entre eux. Cela posé, examinons quelle est la marche des points A et B. Dans la position initiale de la chaînette, c'est-à-dire lorsque son sommet est tangent à la droite des anneaux, les points A et B sont confondus au point de tangence; puis, lorsque le sommet de la courbe commence à marcher vers l'axe de révolution, ces deux points se séparent et s'éloignent progressivement l'un de l'autre. Or je dis que leur distance mutuelle atteindra un maximum, après lequel elle ira, au contraire, en décroissant. En effet, d'après la condition à laquelle la chaînette est astreinte, quand son sommet sera arrivé très-près de l'axe de révolution, le rayon de courbure de ce sommet sera devenu très-petit, d'où il suit que les deux branches de la courbe seront très-rapprochées, et que, par conséquent, les deux points A et B seront aussi très-voisins l'un de l'autre; enfin quand le sommet sera sur l'axe, ces mêmes points seront de nouveau réunis en un seul, puisque alors le rayon de courbure du sommet sera nul, et qu'ainsi les deux branches de la courbe ne feront plus qu'une seule ligne droite confondue avec l'axe de symétrie. Les points A et B qui, partant de la coïncidence<sup>1</sup>, vont d'abord en s'écartant, se rapprochent donc ensuite, jusqu'à coïncider enfin une seconde fois; d'où il suit nécessairement que la distance mutuelle de ces deux points atteint un maximum; en outre, on voit aisément, d'après la nature de la courbe, que ce maximum doit être fini, et même ne peut être considérable relativement au diamètre des anneaux<sup>1</sup>.

Il est évident que, dans son trajet jusqu'à l'axe de révolution, la courbe a passé par tous les cas qui, avec les anneaux donnés, peuvent convenir à l'équilibre; le maximum ci-dessus constitue donc une limite d'écartement des anneaux, au delà de laquelle il n'y a plus de caténoïde possible entre eux.

Mais ce qui précède nous fournit une autre conséquence également remarquable. Puisque, pendant le trajet du sommet de la chaînette, les points A et B s'éloignent d'abord l'un de l'autre pour se rapprocher ensuite, ils repas-

<sup>1</sup> Nous pourrions en déterminer la valeur précise au moyen de l'équation des chaînettes génératrices; mais nous réservons ce calcul pour la série dans laquelle nous réunirons toutes les applications de l'analyse mathématique au sujet de nos recherches.

sent nécessairement par les mêmes distances, de sorte que, pour chaque distance inférieure à la limite, ils appartiennent à la fois à deux chaînettes; or il résulte de là qu'à tout écartement des anneaux moindre que l'écartement maximum, correspondent toujours deux caténoïdes distincts s'appuyant sur ces anneaux, mais pénétrant inégalement entre eux. On voit sans peine que les sommets des deux chaînettes génératrices, sommets qui, pour un écartement nul, sont l'un au contour commun des anneaux en contact, l'autre sur l'axe de révolution, se rapprochent de plus en plus à mesure que l'écartement augmente, et coïncident enfin ainsi que les deux courbes tout entières quand cet écartement atteint son maximum. Ainsi les deux caténoïdes différeront d'autant moins que l'écartement des anneaux sera plus grand, et n'en feront plus qu'un à la limite.

§ 17. — Toutes les chaînettes sont, comme on sait, semblables entre elles; or si l'on conçoit une suite de caténoïdes complets engendrés par des chaînettes de différentes dimensions, toutes ces chaînettes seront aussi, d'après la condition à laquelle elles doivent satisfaire (§ 14), semblablement placées par rapport à l'axe de révolution, et conséquemment tous les caténoïdes seront des figures semblables.

Le caténoïde complet n'est donc pas susceptible de variations de forme comme l'onduloïde, mais constitue une figure unique, comme la sphère et le cylindre.

Ainsi les deux caténoïdes complets qui, théoriquement, s'appuient sur les mêmes anneaux, quand l'écartement de ceux-ci est au-dessous de la limite, ne diffèrent l'un de l'autre que par leurs dimensions homologues absolues.

§ 18. — Des deux caténoïdes partiels appartenant à ces deux caténoïdes complets et également possibles, d'après la théorie, entre les anneaux, notre procédé donne nécessairement le moins rentré; et si l'on essaie ensuite d'arriver au plus rentré en enlevant de nouvelles quantités d'huile à la masse, c'est toujours, comme nous le verrons bientôt, une autre figure d'équilibre qui se produit; or, de l'impossibilité de réaliser ce caténoïde partiel le plus rentré, on peut légitimement conclure qu'il constituerait une figure d'équilibre instable.

Quant au moins rentré, il forme évidemment une portion d'autant plus

étendue du caténoïde complet que l'écartement des anneaux est plus près du maximum; car à mesure que les anneaux sont plus écartés, l'arc de la chaînette qu'ils interceptent entre eux est (§ 16) une portion plus considérable de la courbe. Pour avoir un caténoïde partiel plus étendu par rapport au caténoïde complet, il faudrait que la chaînette pénétrât plus avant entre les anneaux; mais dès lors, de quelque petite quantité que le sommet de la courbe avançât, l'écartement des anneaux diminuerait (*ibid.*), il y aurait une autre chaînette possible, moins rentrée, et s'appuyant sur les mêmes anneaux, et le caténoïde partiel engendré par la première étant le plus rentré, il serait instable. Le caténoïde de plus grande hauteur constitue donc la portion la plus étendue du caténoïde complet que l'on puisse réaliser entre deux anneaux égaux.

Signalons ici une autre conséquence à laquelle ce qui précède semble conduire et qui serait en opposition avec les faits : pour tout écartement inférieur au maximum, le caténoïde le moins rentré se montre toujours parfaitement stable, et, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, le plus rentré doit être regardé comme étant toujours instable; or le caténoïde de plus grande hauteur forme, on vient aussi de le voir, le passage entre les caténoïdes de la première catégorie et ceux de la seconde, et, par suite, entre les caténoïdes stables et les caténoïdes instables; on pourrait donc se croire en droit d'admettre que le caténoïde de plus grande hauteur est à la limite de la stabilité de ce genre de figure; et cependant, quand on le réalise avec une masse d'huile, il manifeste une stabilité très-décidée. Nous saurons bientôt à quoi tient cette apparente contradiction.

§ 19. — Il est aisé de voir que la troisième limite des variations de l'onduloïde, limite dont nous avons parlé au § 9, n'est autre chose que le caténoïde. En effet, en faisant varier l'onduloïde partiel de la manière indiquée dans ce même paragraphe, il est clair qu'à mesure que l'on augmente le volume de la masse, la normale et le rayon de courbure relatifs au sommet de l'arc méridien convexe vont en croissant, et deviennent infinis en même temps que ce volume; d'où il suit qu'à cette limite la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  est nulle, ce que nous savons être le caractère du caténoïde.

La quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ , ou, ce qui est la même chose,  $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ , convergeant ainsi

vers zéro à mesure que l'onduloïde approche du caténoïde, l'expression générale (§ 14) de la pression exercée par un élément de la couche superficielle montre que cette pression converge en même temps vers celle d'une surface plane; si donc l'on conçoit, entre deux anneaux, un étranglement appartenant à un onduloïde, et si l'on imagine que cet onduloïde marche par degrés vers le caténoïde, les bases de la figure, bases dont la pression doit toujours être égale à celle de l'étranglement, deviendront nécessairement de moins en moins convexes, et seront enfin tout à fait planes. Or c'est ce que réalise évidemment l'expérience du § 14 : lorsque après avoir formé, entre deux anneaux, un cylindre dont la hauteur ne dépasse pas les  $\frac{2}{3}$  du diamètre, on lui enlève graduellement du liquide et que les bases s'affaissent peu à peu jusqu'à perdre toute leur courbure, l'étranglement qui se produit et s'approfondit au fur et à mesure, appartient, on le comprend, à un onduloïde qui tend vers sa troisième limite, et l'expérience en question nous fait ainsi assister au passage progressif de l'onduloïde au caténoïde.

Si nous réunissons ce qui précède au contenu du § 13, nous pourrions légitimement en déduire cette conclusion : tout étranglement s'appuyant sur deux anneaux et présentant des bases convexes est un étranglement d'onduloïde, que la courbure des bases soit supérieure, égale ou inférieure à celle des bases du cylindre qui serait compris entre les mêmes anneaux.

§ 20. — Rapportons enfin les circonstances que nous a présentées la recherche expérimentale du caténoïde partiel de plus grande hauteur.

Le diamètre extérieur des anneaux employés était de 74 millimètres. Dans toutes les expériences qui suivent, on a commencé par former un cylindre entre ces anneaux, puis on a enlevé de l'huile à la masse, par seringues pleines d'abord, et ensuite par petites portions; on interrompait de temps à autre l'opération pour observer la figure.

*1<sup>re</sup> Expérience.* — Distance des anneaux, 53<sup>mm</sup>. La flèche des calottes sphériques qui constituent les bases se réduit graduellement à une fraction de millimètre; alors, pendant une interruption de l'épuisement, un phénomène singulier se produit : la figure éprouve une petite modification spontanée; la convexité des bases augmente rapidement, jusqu'à ce que la flèche reprenne une valeur d'environ 2<sup>mm</sup>,5, et par conséquent l'étranglement formé

entre les anneaux s'amincit quelque peu, puis tout demeure parfaitement stationnaire. En absorbant encore de l'huile avec ménagement, la flèche s'accroît jusqu'à  $3^{\text{mm}}$  à peu près; enfin, à la suite d'une nouvelle absorption, la figure se désunit à la manière ordinaire par le milieu de l'étranglement.

*2<sup>me</sup> Expérience.* — Distance des anneaux,  $49^{\text{mm}}$ . Les bases finissent par perdre sensiblement toute courbure, puis il y a, comme précédemment, transformation spontanée : les bases redeviennent légèrement convexes, avec une flèche d'environ  $1^{\text{mm}}$ . Une nouvelle absorption amène la désunion.

*5<sup>me</sup> Expérience.* — Distance des anneaux,  $47^{\text{mm}}$ . Les bases paraissent encore s'aplanir tout à fait, et la figure persiste dans cet état. Des absorptions ultérieures semblent d'abord n'avoir d'autre effet que d'approfondir l'étranglement, sans que les bases cessent de se montrer planes; puis une petite convexité se reforme, mais non plus spontanément : elle naît et augmente au fur et à mesure que l'on épuise ; lorsque la flèche est à peu près de  $1^{\text{mm}},5$ , la désunion s'effectue.

*4<sup>me</sup> Expérience.* — Distance des anneaux,  $45^{\text{mm}}$ . Les bases deviennent d'abord planes, puis légèrement concaves. La flèche de cette concavité croît jusqu'à  $2^{\text{mm}}$  approximativement; puis on observe de nouveau une transformation spontanée : la concavité se change en une convexité dont la flèche est de près d'un millimètre. L'action de la seringue détermine ensuite la désunion.

*5<sup>me</sup> Expérience.* — Distance des anneaux,  $43^{\text{mm}}$ . Les bases sont rendues planes, puis concaves, et la flèche de la concavité atteint graduellement  $4^{\text{mm}}$  ou  $5^{\text{mm}}$ ; enfin la figure se désunit.

§ 21. — Voyons ce que nous apprennent ces expériences. Il n'est pas facile, remarquons-le d'abord, de juger du point précis où les bases de la figure sont rendues planes, car une courbure extrêmement faible échappe à la vue. De là naît quelque incertitude dans la détermination de la hauteur limite du caténoïde; heureusement les particularités que nous avons signalées nous fourniront un moyen d'appréciation plus exact.

Dans la quatrième expérience, on passe nécessairement par des bases planes, puisque la courbure, de convexe qu'elle était, devient graduellement concave par le progrès de l'absorption du liquide; mais en est-il de même

dans la deuxième et dans la troisième, où l'on a paru arriver aussi à des plans? Essayons d'éclairer cette question. La première, la deuxième et la quatrième expérience ont cela de commun qu'il s'y est produit une petite modification ou transformation spontanée de la figure, tandis que dans la troisième ce phénomène n'a pas eu lieu; et cette modification a été en décroissant de la première à la deuxième, pour disparaître dans la troisième et reparaître dans la quatrième. On doit croire, d'après cela, que la troisième expérience forme une sorte de passage en deçà et au delà duquel se manifestent les petites transformations spontanées; mais l'effet s'est montré, dans la première expérience, lorsque les bases avaient encore une courbure visible, et, dans la quatrième, lorsqu'elles en avaient repris une en sens inverse; il est donc bien probable que, dans la deuxième, au moment où l'on a vu naître la transformation spontanée, les bases conservaient encore une courbure réelle, quoique trop faible pour être distinguée, et que c'est seulement dans la troisième, où la distance des anneaux était de 47 millimètres, que l'on a atteint des bases tout à fait planes. Si, dans cette troisième expérience, les bases jugées planes ont paru ne commencer à perdre cet état qu'après l'absorption d'une quantité très-notable de liquide, cela tient évidemment à la difficulté mentionnée plus haut de distinguer nettement le point où la courbure est annulée.

Ainsi, avec nos anneaux de 71 millimètres de diamètre, on peut admettre que la distance de 47 millimètres diffère très-peu de celle pour laquelle on commence à obtenir des bases rigoureusement planes; et comme 47 est sensiblement les  $\frac{2}{3}$  de 71, nous en concluons que la hauteur maxima du caténoïde partiel est, soit exactement, soit à fort peu près, les  $\frac{2}{3}$  du diamètre des bases. Ce caténoïde est représenté *fig.* 21.

Appelons actuellement l'attention sur les petites transformations spontanées, considérées en elles-mêmes. Jusqu'à présent, quand nous voyions une de nos figures liquides se transformer, et passer ainsi d'un équilibre instable à un équilibre stable, l'altération était profonde, la masse se séparait en deux ou plusieurs parties, et le résultat final du phénomène se composait toujours de sphères ou de portions de sphères; ici rien de semblable: l'altération est petite, la masse ne se désunit pas, et le résultat final est une figure qui s'éloi-

gne peu de la première, du moins dans la portion réalisée, et qui peut être de la même nature. Dans la première expérience, par exemple, un onduloïde partiel instable se transforme en un autre onduloïde peu différent, et il en est sans doute de même dans la deuxième.

En outre, ce qui est plus remarquable encore, la comparaison des deux premières expériences semble indiquer que l'onduloïde instable et l'onduloïde stable dans lequel il se convertit se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre à mesure que la distance des anneaux est plus voisine de la hauteur maxima du caténoïde.

Enfin les expériences que nous discutons nous donnent la clef de la difficulté soulevée à la fin du § 18 à l'égard de la stabilité du caténoïde partiel de plus grande hauteur. Lorsque, les anneaux étant à la distance qui correspond à ce caténoïde et un cylindre étant formé entre eux, on fait agir la petite seringue, la figure devient, nous le savons, un onduloïde qui, en variant par suite de l'absorption, tend progressivement vers le caténoïde; mais la troisième expérience nous montre, de plus, que si, après avoir atteint cette limite, on continue l'opération, la figure redevient insensiblement un onduloïde qui, au fur et à mesure de l'épuisement, s'éloigne de ce même caténoïde. Si donc le caténoïde partiel de plus grande hauteur constitue le passage entre les caténoïdes partiels stables et les caténoïdes partiels instables, il constitue, d'autre part, le passage entre une suite continue d'onduloïdes stables et une autre suite continue d'onduloïdes également stables. Telle est évidemment la raison de la stabilité prononcée du caténoïde partiel de plus grande hauteur; aussi lorsque, par un moyen que nous ferons connaître dans une série subséquente, on rend impossible la formation de toute autre figure que le caténoïde, celui-ci perd sa stabilité dès qu'on lui donne la hauteur maxima.

Nous terminons ici l'étude de l'onduloïde et du caténoïde, et nous allons passer à celle d'une troisième figure.

§ 22. — Cette troisième figure, nous en connaissons déjà une portion : c'est l'étranglement à bases concaves obtenu dans les deux dernières expériences du § 20, étranglement qui, par la nature de ces bases, est étranger à l'onduloïde et au caténoïde. Pour le réaliser, il faut, comme nous l'avons

vu, que la distance des anneaux soit inférieure aux  $\frac{2}{3}$  du diamètre; la *fig. 22* représente, en coupe méridienne, un semblable étranglement, pour une distance des anneaux égale au tiers environ du diamètre, et lorsque les bases se sont déjà fortement creusées; les lignes ponctuées sont les coupes des plans des anneaux. Essayons maintenant, ainsi que nous l'avons fait à l'égard des deux figures précédentes, de déterminer la forme complète de la ligne méridienne.

Mentionnons d'abord une transformation remarquable que subit la figure partielle lorsque le rapport entre la distance et le diamètre des anneaux est suffisamment au-dessous de  $\frac{2}{3}$  pour permettre d'extraire une grande quantité de liquide sans occasionner la désunion, et qu'on pousse cette extraction aussi loin que possible. L'étranglement et les bases se creusant à la fois, on comprend qu'il doit arriver un instant après lequel leurs surfaces ne pourraient plus coexister sans se couper mutuellement; or il se produit alors un phénomène de même nature qu'avec les polyèdres liquides (2<sup>me</sup> série, §§ 34 à 35), c'est-à-dire que la figure passe graduellement à l'état laminaire: on voit se former deux lames coniques partant respectivement de chacun des anneaux, et, au centre du système, une lame plane, comme le montre, en coupe méridienne, la *fig. 23*. Ces lames prenant de plus en plus de développement à mesure que l'on continue l'absorption de l'huile, l'ensemble tend à se réduire finalement à une sorte de double cône tronqué laminaire; mais toujours l'une des lames se brise avant que l'on puisse atteindre ce point.

Il résulte de là que si l'on veut observer l'étranglement dans toutes ses phases avec la forme qui lui convient comme appartenant à la nouvelle figure d'équilibre, il faut mettre obstacle à la génération des lames; or c'est à quoi l'on parvient sans peine en substituant des disques aux anneaux, et empêchant ainsi le creusement des bases; on peut alors enlever de l'huile jusqu'à ce que la figure se désunisse spontanément au milieu de sa hauteur.

§ 23. — Avant de poursuivre la ligne méridienne au delà des limites de la figure partielle, nous devons présenter ici deux remarques importantes.

En premier lieu, l'étranglement, qu'il soit réalisé entre des anneaux ou entre des disques, se montre toujours parfaitement symétrique de part et d'autre de son cercle de gorge. C'est d'ailleurs ce que veut la théorie, car le

mode de raisonnement du § 6 est indépendant de la nature de la ligne méridienne, et s'applique ainsi à l'étranglement dont nous nous occupons aussi bien qu'à un étranglement d'onduloïde. Si donc, dans un plan méridien, on conçoit une droite perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre du cercle de gorge, tout ce que la ligne méridienne complète offrira d'un côté de cette droite, elle l'offrira aussi, d'une manière exactement symétrique, de l'autre côté, en sorte que cette même droite constituera un axe de symétrie.

En second lieu, puisque, en employant des anneaux, les bases de la figure partielle sont concaves, il s'ensuit que, dans toute l'étendue de la figure complète, la pression est moindre que celle d'une surface plane; or, d'après la formule de cette pression (§ 14), cela exige que la quantité  $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$  ou, suivant la notation adoptée dans cette série,  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ , soit finie et négative.

Dans notre nouvelle figure, la courbure moyenne (2<sup>me</sup> série, §§ 3 et 6) est donc négative, c'est-à-dire qu'en chaque point de cette figure les courbures concaves dominent.

§ 24. — Je dis maintenant que les points *a* et *b* (*fig.* 22), où s'arrête la ligne méridienne partielle, ne peuvent, dans la ligne méridienne complète, être des points d'inflexion.

On voit, en effet, d'après la direction de la tangente en ces points, que si la ligne méridienne prenait à partir de là une courbure de sens contraire (*fig.* 24), le rayon de courbure serait, dans cette partie de la figure, dirigé à l'intérieur du liquide comme la normale, et qu'ainsi la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  deviendrait positive, ce qui ne peut être, en vertu de ce qui précède.

Au delà des points *a* et *b* la ligne méridienne commence donc par garder une courbure concave; et le même sens de courbure se maintient évidemment, pour la même raison, tant que la courbe va en s'éloignant à la fois de l'axe de révolution et de l'axe de symétrie. Mais la courbe ne peut continuer indéfiniment à s'éloigner de ces deux axes: en effet, si telle était sa marche, il est clair que la courbure devrait diminuer de manière à s'annuler, dans chacune des deux branches, au point situé à l'infini, en sorte qu'en ce point le rayon de courbure aurait une valeur infinie; et comme il en serait évidemment de même de la normale, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  deviendrait nulle à cette limite.

Il faut donc de toute nécessité qu'à une distance finie de son sommet la courbe ait deux points dans lesquels ses éléments soient parallèles à l'axe de symétrie, et c'est ce que l'expérience confirme, ainsi que nous allons le voir.

§ 25. — Si l'on emploie des disques, qu'on les place à une distance égale au tiers environ de leur diamètre, et que l'on pousse suffisamment loin l'absorption du liquide, l'angle compris entre les derniers éléments de la surface de la masse et le plan de chacun des disques diminue jusqu'à s'annuler complètement, de manière que cette surface est alors tangente aux plans des disques (*fig. 25*), et qu'ainsi les derniers éléments de la ligne méridienne sont parallèles à l'axe de symétrie. Il est fort difficile de juger du point précis où ce résultat est atteint; mais on s'assure qu'il se produit réellement, en continuant à enlever du liquide: on ne tarde pas, en effet, à voir les circonférences qui terminent la surface de la masse abandonner les bords des disques, se retirer, en diminuant de diamètre, à une certaine distance en dedans de ces bords, et laisser libre une petite zone de chacun des plans solides; or, comme ces zones demeurent nécessairement mouillées d'huile, bien qu'en couche excessivement mince, il est clair que la surface de la masse doit y aboutir tangentiellement.

Si l'écartement des disques est moindre encore, on obtient un résultat de même nature; seulement on peut, avant qu'il y ait désunion spontanée au milieu de la figure, rétrécir davantage les circonférences de contact, ou, en d'autres termes, augmenter la largeur des zones libres (*fig. 26*).

§ 26. — La raison donnée dans le § 24 pour établir l'absence d'une inversion de courbure tant que la courbe s'éloigne à la fois de l'axe de révolution et de l'axe de symétrie, subsiste évidemment encore aux points que nous venons de considérer, c'est-à-dire à ceux où les éléments sont parallèles à ce dernier axe; d'où il suit que la courbe se rapproche ensuite de celui-ci, en conservant le même sens de courbure, comme le montre la *fig. 27*, où la courbe est dessinée sur une plus grande échelle que la portion comprise dans la *fig. 25*, et où l'axe de symétrie est représenté par la droite *XX'*.

Et tant que ces prolongements de la courbe continuent à s'éloigner de l'axe de révolution, le sens de la courbure doit encore demeurer le même. Supposons, en effet, qu'il change, en *f* et en *g* par exemple (*fig. 28*); alors, du

point  $f$  à un point tel que  $m$  situé un peu au delà, le rayon de courbure et la normale auraient, on le voit, des directions opposées, en sorte que la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  serait une différence; or, de  $f$  en  $m$ , la normale irait évidemment en croissant, puisque, d'une part, la distance à l'axe de révolution augmente, et que, d'autre part, cette normale aurait une obliquité de plus en plus grande; il faudrait donc, pour que la différence ci-dessus demeurât constante, que le rayon de courbure allât aussi en croissant de  $f$  en  $m$ ; mais c'est précisément le contraire qui aurait lieu; car, à cause de l'inflexion, le rayon de courbure serait infini en  $f$ , et conséquemment ne pourrait que diminuer à partir de là. Il est inutile de faire remarquer que ce que nous venons de dire s'applique également au point  $g$ .

Voyons maintenant si, avant d'atteindre l'axe de symétrie, la courbe peut présenter deux points tels que  $h$  et  $k$  (*fig. 29*) où ses éléments soient perpendiculaires à cet axe. Pour cela, examinons à quelles conditions doit satisfaire la courbure depuis le sommet  $s$  jusqu'aux points  $h$  et  $k$ , et il suffira de considérer l'arc  $snh$ . Soit  $n$  le point où l'élément de la courbe est parallèle à l'axe de symétrie. De  $s$  en  $n$  le rayon de courbure et la normale ont évidemment des directions contraires, et la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  constitue une différence; donc, d'un point à un autre de cet arc, les quantités  $M$  et  $N$  doivent varier dans le même sens; et comme la normale va en augmentant du point  $s$  au point  $n$ , le rayon de courbure doit aller de même en augmentant; d'où il suit que de  $s$  en  $n$  la courbure va en décroissant. Plus loin, c'est-à-dire de  $n$  en  $h$ , on voit que le rayon de courbure et la normale sont dirigés du même côté, de manière que les deux termes de la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  sont de même signe, et qu'ainsi, d'un point à un autre, les quantités  $M$  et  $N$  doivent varier en sens opposé; or, dès qu'on s'écarte de  $n$  sur l'arc  $nh$ , la normale commence par diminuer, puisque, au point  $n$ , elle est infinie; donc le rayon de courbure commence par augmenter, ou, en d'autres termes, la courbure va d'abord en diminuant, et, quelle que soit sa marche ultérieure, elle sera toujours, en tous les points de l'arc  $nh$ , plus faible qu'en  $n$ , puisque en tous ces points la normale est finie, et, par suite, moindre qu'en  $n$ . Mais nous savons que la courbure va en croissant de  $n$  en  $s$ ; donc, dans toute l'étendue de l'arc  $nh$ , la courbure est moindre qu'en aucun point de l'arc  $ns$ .

Cela posé, menons la droite  $hr$  parallèle à l'axe de symétrie, puis construisons, à partir du point  $n$ , un arc  $nt$  exactement symétrique à l'arc  $nr$ . Dans toute la longueur de l'arc  $nh$  la courbure sera, en vertu de ce qui précède, moindre qu'en aucun des points de l'arc  $nt$ ; d'où il suit que ce dernier arc sera entièrement intérieur au premier; or l'arc  $nt$  aboutit en  $t$  à la droite  $hr$  par un élément qui fait nécessairement, avec la partie  $tr$  de cette droite, un angle aigu; donc, pour que l'arc  $nh$ , qui part de  $n$  dans la même direction que l'arc  $nt$ , aboutit normalement, en  $h$ , à la droite  $hr$ , il faudrait qu'après s'être éloigné de l'arc  $nt$ , il allât ensuite en s'en rapprochant, ce qui est évidemment impossible par suite de l'infériorité de la courbure en tous ses points; on voit même qu'il doit couper la droite  $hr$  sous un angle plus aigu que ne le fait l'arc  $nt$ .

Ainsi la courbe, en s'abaissant, à partir de  $n$ , vers l'axe de symétrie, ne peut cesser de s'éloigner de l'axe de révolution; et puisqu'elle ne peut d'ailleurs changer le sens de sa courbure, il faut nécessairement qu'elle aille couper l'axe de symétrie; enfin on comprend que, par suite encore de la condition qui régit ses courbures, elle doit couper cet axe obliquement, en sorte que nous arrivons à cette conclusion, qu'elle forme un nœud (*fig. 30*).

Nous allons vérifier l'existence de ce nœud à l'aide de l'expérience; si nous n'avons point commencé par là, c'est qu'il fallait d'abord démontrer qu'en partant d'un étranglement pour lequel la pression est moindre que pour une surface plane, il n'y a pas d'autre forme possible de la ligne méridienne.

§ 27. — Les étranglements réalisés dans les expériences du § 25 étant engendrés par une portion du nœud de la ligne méridienne complète, il est visible que la figure engendrée par le nœud tout entier, depuis le sommet de celui-ci jusqu'à sa pointe, serait en creux dans l'intérieur de l'huile; mais, comme nous le savons (§ 13), il est indifférent, pour l'équilibre, que le liquide soit situé d'un côté ou de l'autre de la surface; on peut donc également bien supposer pleine et en relief la figure engendrée par le nœud, et c'est dans ce dernier état que notre expérience va la réaliser. Seulement lorsque le liquide est transporté de ce côté de la courbe, les quantités  $M$  et  $N$  changent à la fois de signe, et conséquemment la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ , de négative qu'elle était, devient positive.

On forme, dans un anneau en fil de fer, une lentille liquide bi-convexe (2<sup>me</sup> série, § 18), dont l'épaisseur soit à peu près égale au sixième du diamètre : par exemple, avec un anneau de 70 millimètres de diamètre, l'épaisseur de la lentille doit être d'environ 12 millimètres. Si l'on perce normalement cette lentille en son milieu par un moyen que nous indiquerons plus bas, on obtient une figure annulaire régulière, limitée extérieurement par l'anneau solide, et qui persiste pendant deux ou trois secondes, après quoi l'on voit l'ouverture centrale marcher vers un point de l'anneau solide, puis la masse se désunir en ce point, et tout le liquide refluer vers la partie opposée de l'anneau, pour y former une grosse masse sensiblement sphérique. Or la figure annulaire momentanée qui se forme dans ces circonstances est, bien qu'instable, une figure d'équilibre, puisqu'elle se maintient pendant quelques instants, et sa durée est assez grande pour que l'on puisse constater que sa coupe méridienne a la forme représentée par la *fig.* 31, dans laquelle la ligne ponctuée est la coupe du plan de l'anneau. Cette coupe méridienne montre évidemment que la surface de la figure produite est engendrée par un nœud ayant son sommet tourné vers l'axe de révolution et sa pointe à l'anneau solide.

Arrêtons-nous quelque peu sur les détails de l'expérience que nous venons de décrire, et sur certaines modifications de cette même expérience. Pour percer la lentille, il faut employer un petit cylindre de bois terminé en pointe à l'une de ses extrémités, et fixé, par son autre extrémité, à un fil de fer que l'on recourbe obliquement de manière qu'en le tenant à la main, on puisse introduire le petit cylindre dans le vase, et percer normalement la lentille. Si le diamètre de l'anneau solide est, comme nous l'avons supposé plus haut, de 70 millimètres, celui du petit cylindre doit être d'environ 16 millimètres; le cylindre et sa pointe doivent être recouverts d'étoffe de coton, afin d'empêcher toute adhérence de l'huile.

Si l'on donne à la lentille une épaisseur qui surpasse notablement le sixième du diamètre de l'anneau solide, le liquide revient sur lui-même aussitôt qu'on retire le petit cylindre, et la masse reprend sa forme lenticulaire; mais on peut rendre l'épaisseur moindre que la limite ci-dessus; alors l'ouverture centrale prend des dimensions plus grandes, et, par conséquent, le nœud de la ligne méridienne est plus petit.

Lorsque l'épaisseur de la lentille est suffisamment inférieure à la limite en question, le mode de destruction spontanée de la figure instable n'est plus le même : l'ouverture centrale ne marche plus alors vers un point de l'anneau solide, mais la masse liquide annulaire s'étrangle et se désunit en plusieurs endroits à la fois, de sorte qu'elle se convertit en une série de petites masses isolées qui demeurent adhérentes à différentes parties de l'anneau métallique. L'anneau liquide instable dont nous avons parlé dans le § 19 de la deuxième série, appartient au genre de figure que nous étudions, et l'on se rappelle qu'il provient d'une lentille dont l'épaisseur a été rendue aussi petite que possible.

§ 28. — L'anneau liquide pouvant ainsi prendre, dans un même anneau solide, des dimensions très-différentes suivant l'épaisseur de la lentille, ou, en d'autres termes, suivant le volume du liquide dont il est formé, il en résulte que, pour une même distance de la pointe du nœud de la ligne méridienne à l'axe de révolution, la longueur du nœud peut varier entre des limites étendues : dans les expériences ci-dessus décrites, ces variations se montrent comprises entre une fraction très-petite de la distance dont il s'agit et les  $\frac{3}{4}$  à peu près de cette même distance. La figure complète dont nous nous occupons n'est donc pas toujours semblable à elle-même comme la sphère, le cylindre ou le caténoïde; elle est, comme l'onduloïde, susceptible de variations de forme. La comparaison des figures liquides représentées *fig. 25* et *26*, conduit à la même conclusion.

§ 29. — Avant d'aller plus loin, signalons une particularité remarquable. Si l'on suppose le nœud en relief, le liquide qui l'occupe se trouve dans la concavité de la courbe, et puisque cette ligne ne change pas le sens de sa courbure en dépassant le point *u* (*fig. 30*), le liquide doit encore se trouver dans la concavité de chacun des prolongements *uw* et *uw*; il remplit donc les espaces compris entre ces prolongements et le nœud, en sorte que ce nœud est engagé, soit complètement, soit partiellement, dans l'intérieur de la masse. Si l'on suppose le nœud en creux, on voit sans peine que ce sont alors les prolongements *uw* et *uw* qui sont engagés dans le liquide.

De là résulte cette conséquence singulière, que, bien que la condition générale de l'équilibre soit satisfaite, on ne peut se représenter la figure complète

qu'à l'état de simple surface, et non à celui de masse liquide. Dans ce dernier état, il n'est possible de concevoir que des portions isolées de la figure, telles, par exemple, que la portion engendrée par le nœud seul.

Cette particularité d'une surface rentrant dans la masse est l'une de celles auxquelles nous avons fait allusion dans le § 4 de la deuxième série, et qui rendraient impossible la réalisation de certaines figures d'équilibre dans leur entier, quand même ces figures ne s'étendraient pas à l'infini.

§ 30. — Tâchons actuellement de découvrir la marche de la courbe au-delà des points  $v$  et  $w$  (*fig. 30*). Nous savons déjà, par les raisons exposées dans le § 26, et auxquelles se rapporte la *fig. 28*, que tant que les branches de la courbe continuent à s'éloigner de l'axe de révolution, la courbure ne peut changer de sens, et conséquemment demeure concave vers cet axe.

Cela étant, il n'y a évidemment que trois hypothèses possibles: ou bien les branches en question s'éloignent de l'axe de révolution de manière que leur distance à ce dernier converge vers l'infini; ou bien elles tendent vers une asymptote parallèle à cet axe; ou bien chacune d'elles présente, à une distance finie de la pointe  $u$  du nœud (*fig. 30*), un point où l'élément est parallèle à ce même axe.

Nous devons exclure immédiatement la première de ces hypothèses: elle exigerait, comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 24), qu'aux points situés à l'infini sur les deux branches, le rayon de courbure et la normale fussent l'un et l'autre infinis, et qu'ainsi la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  fût égale à zéro.

Examinons donc la seconde hypothèse, savoir celle d'une asymptote parallèle à l'axe de révolution. Au point  $u$  (*fig. 30*), la normale est infinie et le rayon de courbure fini (§ 26); au point où la branche  $uvw$  prolongée atteindrait l'asymptote, au contraire, le rayon de courbure serait infini, et la normale, qui mesurerait la distance de ce point à l'axe, serait finie. Donc, en allant du point  $u$  à ce point extrême, la normale, d'abord supérieure en longueur au rayon de courbure, lui deviendrait ensuite inférieure; d'où il suit qu'il y aurait sur la courbe un point où la normale et le rayon de courbure seraient égaux, et pour lequel, par conséquent, le centre de courbure serait sur l'axe de révolution. Soient  $\alpha$  ce point (*fig. 32*),  $o$  le centre de courbure correspondant, et  $\alpha\beta$  un petit arc de cercle décrit du point  $o$  comme centre.

Notre branche de courbe quitterait le point  $\alpha$  suivant la même direction et avec la même courbure que l'arc  $\alpha\beta$ , puis se séparerait immédiatement de celui-ci. Or supposons qu'à partir de  $\alpha$  la courbure aille d'abord en décroissant; la courbe commencera nécessairement par être extérieure à l'arc de cercle. Soit  $\alpha\gamma$  un petit arc de cette courbe, dans toute l'étendue duquel la courbure décroisse, et soit la longueur de l'arc  $\alpha\beta$  prise égale à celle de l'arc  $\alpha\gamma$ . Le point  $\gamma$  sera plus éloigné de l'axe que le point  $\beta$ , et, en outre, à cause de l'infériorité des courbures, la tangente en  $\gamma$  fera avec ce même axe un angle plus grand que la tangente en  $\beta$ ; la normale au point  $\gamma$  sera donc, par cette double raison, plus longue que la normale au point  $\beta$ . D'un autre côté, par suite encore de l'infériorité des courbures, le rayon de courbure au point  $\gamma$  sera également plus long que le rayon de courbure au point  $\beta$ ; mais, en ce dernier point, ces deux quantités ont la même valeur qu'au point  $\alpha$ ; donc en passant de  $\alpha$  en  $\gamma$ , le rayon de courbure et la normale augmenteront l'un et l'autre. Or cela est incompatible avec l'équation de l'équilibre; en effet la courbe, dans toute la partie que nous étudions, tournant sa concavité vers l'axe, le rayon de courbure et la normale sont partout de même signe, et conséquemment lorsque l'un augmente, l'autre doit diminuer, et vice versa. Si l'on suppose qu'à partir de  $\alpha$  la courbure aille en croissant, l'arc de courbe sera intérieur à l'arc de cercle, et le même mode de raisonnement ferait voir que, d'une extrémité à l'autre du premier, le rayon de courbure et la normale diminueront tous deux. L'hypothèse d'une asymptote parallèle à l'axe de révolution conduisant ainsi à un résultat impossible, on voit qu'elle doit être rejetée comme la première.

C'est donc la troisième hypothèse qui est vraie; c'est-à-dire que la courbe présente deux points  $p$  et  $p'$  (*fig. 33*), où la tangente est parallèle à l'axe de révolution.

§ 34. — L'expérience confirme pleinement cette déduction de la théorie, et elle fournit en outre une donnée qui nous dévoilera la marche ultérieure de la courbe.

Les deux disques étant placés à une distance quelconque l'un de l'autre, à une distance égale à leur diamètre, par exemple, on forme entre eux un cylindre, et l'on abaisse ensuite graduellement le disque supérieur : la figure,

nous le savons, passe alors à l'onduloïde, et elle se bombe de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle constitue une portion de sphère (*fig. 34*). Mais si l'on continue à abaisser le disque supérieur, la convexité méridienne augmente encore, et dépasse conséquemment le point ci-dessus; on obtient ainsi, par exemple, pour un certain rapprochement des disques, le résultat représenté *fig. 35*, et la figure liquide est toujours parfaitement stable. Or, en cet état, elle ne peut plus faire partie de l'onduloïde, puisque l'on a dépassé la sphère, qui est (§ 8) l'une des limites des variations de ce dernier. Enfin on peut descendre le disque supérieur jusqu'à ce qu'aux points où la ligne méridienne aboutit aux bords des disques, les tangentes soient près d'être perpendiculaires à l'axe de révolution, comme on le voit dans la *fig. 36*, et, pour une masse d'huile moindre, dans la *fig. 37*. Il est possible même que l'on atteigne la perpendicularité; mais il serait très-difficile de s'en assurer, parce que, d'une part, l'œil ne saurait juger avec une précision suffisante de la direction de ces tangentes extrêmes, et que, d'autre part, vers ce degré de rapprochement des disques, la figure liquide perd sa stabilité: si l'on abaisse un peu trop le disque supérieur, on voit l'huile se porter en plus grande masse d'un côté de l'axe du système, en sorte que la figure cesse d'être de révolution, puis, de ce même côté, l'huile franchit les bords des disques, et s'étend en partie sur les faces extérieures de ceux-ci.

Maintenant, en vertu de ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, tant que la courbe, à partir de  $n$  (*fig. 33*), va en s'éloignant de l'axe de révolution, le rayon de courbure ne peut devenir égal à la normale; et, puisqu'il lui est inférieur en  $n$ , il doit lui demeurer inférieur tant que l'on n'atteint pas le point  $p$ ; donc, dans toute l'étendue de l'arc  $np$ , sauf au point  $n$  même et peut-être au point  $p$ , auquel la démonstration ne s'étend pas, le centre de courbure est toujours situé entre la courbe et l'axe, et conséquemment la courbure est toujours plus forte que celle d'une circonférence de cercle qui aurait son centre sur l'axe. Or, comme nous venons de le voir, dans les figures liquides partielles représentées *fig. 35*, *36* et *37*, les courbures méridiennes sont plus fortes que lorsque la figure est une portion de sphère, ou, en d'autres termes, elles sont plus fortes que celle d'une circonférence de cercle passant par les bords des disques et ayant son centre sur l'axe. Il est clair, d'après

cela, que ces mêmes figures partielles réalisent des portions de la figure complète engendrées par un arc de la ligne méridienne s'étendant de part et d'autre du point  $p$  (*fig. 33*); seulement elles se rapportent évidemment à des cas différents de cette figure complète, que nous savons être susceptible de variations comme l'onduloïde.

§ 32. — Faisons un dernier pas dans la poursuite de notre ligne méridienne. Dans les expériences ci-dessus, lorsque les densités des deux liquides sont rendues bien égales, la figure d'huile se montre toujours parfaitement symétrique par rapport à son cercle équatorial. A la vérité, c'est l'œil qui en juge ainsi, et l'on pourrait penser que cette symétrie n'est peut-être qu'approchée; mais nous allons faire voir qu'elle est rigoureuse. En l'absence de toute cause accidentelle d'irrégularité, il n'y aurait évidemment aucune raison pour qu'un excès de courbures existât plutôt d'un côté déterminé de l'équateur que de l'autre, puisque les deux disques sont égaux et parallèles; d'où résulte qu'il y a nécessairement une forme d'équilibre où la symétrie est exacte. Seulement si, dans nos figures partielles réalisées, figures qui sont stables, la symétrie n'était qu'approchée, il faudrait admettre que la forme d'équilibre exactement symétrique dont nous venons de parler, serait instable. Si donc toutes les figures liquides que l'on peut obtenir dans les expériences décrites plus haut, c'est-à-dire celles que donnent tous les degrés d'abaissement du disque depuis le cas de la *fig. 34* jusqu'à celui de la *fig. 36* et toutes les masses plus grandes et plus petites avec les mêmes disques, si, dis-je, toutes ces figures n'étaient symétriques qu'en apparence, à chacune d'elles correspondrait une autre figure d'équilibre extrêmement peu différente, et qui serait instable. Or l'existence de deux figures d'équilibre partielles extrêmement voisines, l'une stable et l'autre instable, peut bien se rencontrer dans un cas particulier des variations des deux figures complètes, ou, au moins, de l'une d'elles, et nous en avons vu un exemple (§§ 20 et 21) à l'égard d'un étranglement d'onduloïde, lorsque cet étranglement est très-rapproché du caténoïde partiel de plus grande hauteur; mais, on le comprend, il est impossible que la même chose se reproduise dans toute l'étendue des variations de la figure partielle réalisée. Concluons de là que, dans les figures liquides du paragraphe précédent, la symétrie est réelle, et qu'ainsi, dans notre ligne méridienne

complète, il y a, outre l'axe de symétrie du nœud, un autre axe de symétrie également perpendiculaire à l'axe de révolution, et passant par le point  $p$  (*fig. 33*).

Mais dès lors tout ce que la courbe présente d'un côté de ce point, elle doit le présenter symétriquement de l'autre côté; le nœud qui se trouve au-dessus de  $p$  doit donc avoir son correspondant au-dessous; et puisque ces deux nœuds ont eux-mêmes respectivement leur axe de symétrie, il en résulte nécessairement, en premier lieu, qu'ils sont parfaitement identiques, et, en second lieu, que tout ce qu'il y a d'un côté de l'un d'eux doit se reproduire identiquement de l'autre côté; d'où il suit enfin qu'au-dessus du nœud supérieur il y en a un autre pareil, puis au-dessus de celui-ci un autre encore, et ainsi de suite indéfiniment le long de l'axe de révolution, que la même chose a lieu au-dessous du nœud inférieur, et que tous ces nœuds sont reliés par des arcs également identiques entre eux. La *fig. 38*, dans laquelle l'axe de révolution AB est placé horizontalement, représente une portion étendue de la courbe.

La figure engendrée par cette courbe se prolonge donc indéfiniment dans le sens de l'axe, comme le cylindre et l'onduloïde; nous lui donnerons aussi un nom, nous l'appellerons le *nodoïde*. Remarquons seulement que cette figure étant, de même que l'onduloïde, susceptible de variations entre certaines limites, la *fig. 38* ne doit être regardée que comme offrant un cas de sa ligne méridienne.

Rappelons ici l'observation que nous avons présentée dans le § 29, et que l'on comprendra mieux encore maintenant d'après l'aspect de la courbe, savoir que l'on ne peut se représenter la figure complète qu'à l'état de simple surface, parce qu'en la supposant pleine, elle aurait des parties engagées dans la masse.

§ 33. — Avant d'étudier le nodoïde dans ses variations, nous devons résoudre une question que suggèrent les résultats des expériences du § 31. Maintenant que nous connaissons la forme de la ligne méridienne, nous voyons que ces expériences réalisent la portion du nodoïde engendrée par une partie plus ou moins grande de l'un des arcs convexes vers l'extérieur, tels que  $npn'$  (*fig. 38*); mais on peut se demander si cela n'exige pas qu'avec des disques

d'un diamètre donné, le volume de l'huile demeure compris entre certaines limites, de sorte que, pour des volumes plus grands ou plus petits, la figure réalisée n'appartiendrait plus au nodoïde. Pour décider la chose, partons de l'une de ces figures réalisées, poursuivons l'arc méridien au delà du point où il aboutit au bord de l'un des disques, du disque supérieur, par exemple, et voyons s'il est possible d'arriver à une courbe autre que la ligne méridienne d'un nodoïde.

Supposons d'abord que, dans la partie de son trajet où elle continue à se rapprocher de l'axe de révolution et à s'éloigner de l'axe de symétrie, la courbe présente un point d'inflexion, de manière qu'elle tourne ensuite sa convexité vers ces deux axes. Si, pendant qu'elle se rapproche encore du premier, elle changeait une deuxième fois le sens de sa courbure, la normale correspondante à ce second point d'inflexion serait nécessairement plus courte que la normale correspondante au premier, puisqu'elle aurait moins d'obliquité et partirait d'un point plus voisin de l'axe; or cela est incompatible avec l'équation de l'équilibre: car cette équation se réduisant, en tous les points d'inflexion, à  $\frac{1}{N} = C$ , les deux normales ci-dessus devraient être égales.

L'existence de ce deuxième point d'inflexion étant donc impossible, on voit qu'au delà du premier, la courbe, qui ne peut (§ 2) atteindre l'axe de révolution, devrait nécessairement ou bien tendre vers une asymptote parallèle à cet axe, ou bien présenter, à une distance finie, un point où la tangente fût parallèle à ce même axe.

On comprend immédiatement que le premier de ces deux cas doit être rejeté: car, au point extrême où la courbe toucherait l'asymptote, le rayon de courbure serait infini, ce qui réduirait encore, en ce point, l'équation de l'équilibre à  $\frac{1}{N} = C$ , et la normale  $y$  serait aussi évidemment plus courte qu'au point d'inflexion.

Dans le second cas, le point où la tangente serait devenue parallèle à l'axe de révolution ne pourrait lui-même, toujours à cause de l'inégalité évidente des normales, être un deuxième point d'inflexion; il devrait donc constituer un minimum de distance à l'axe, et dès lors un petit arc s'étendant de part et d'autre de ce minimum engendrerait un étranglement, qui pourrait être réalisé entre deux anneaux ou deux disques égaux. Or nous avons discuté

toutes les figures partielles possibles de cette nature : nous avons vu que tout étranglement appartient soit à l'onduloïde, soit au caténoïde, soit à la partie du nodoïde qui environne le sommet d'un nœud ; mais nous savons que la figure partielle bombée d'où nous sommes parti, n'est point une portion d'onduloïde, puisque sa convexité dépasse la sphère ; il est visible, en second lieu, qu'elle n'est point une portion de caténoïde, et enfin l'on voit, d'après ce qui précède, que l'étranglement ci-dessus ne serait point une portion de nœud.

Ainsi notre hypothèse originaire, celle d'un point d'inflexion dans la partie de la courbe qui va en s'éloignant de l'axe de symétrie et en se rapprochant de l'axe de révolution, conduit inévitablement à des impossibilités, et conséquemment la courbe garde le même sens de courbure jusqu'à ce qu'elle sorte de ces conditions.

Mais, pour en sortir, il faut évidemment qu'elle cesse d'abord de s'éloigner de l'axe de symétrie, ou, en d'autres termes, qu'elle présente un point où la tangente soit parallèle à ce dernier axe. Et ce point n'est pas non plus un point d'inflexion, car la normale et le rayon de courbure y seraient tous deux infinis, ce qui annulerait la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ . Done, au delà de ce même point, la courbe redescend vers l'axe de symétrie, en conservant le sens de sa courbure. De plus, le même sens se maintient encore, comme nous allons le montrer, tant que la courbe continue à descendre ; en effet, le liquide de la figure partielle réalisée qui nous a servi de point de départ étant placé dans la concavité de la courbe, on voit d'abord sans peine qu'en tous les points de notre branche descendante, la normale est négative ; or si cette branche contenait un point d'inflexion, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  se réduirait, en ce point, au terme  $\frac{1}{N}$ , et, par suite, à cause du signe de la normale, serait également négative, tandis que, sur l'arc méridien de la figure partielle réalisée, le rayon de courbure et la normale étant tous deux positifs, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  est elle-même positive.

Mais la branche dont il s'agit ne peut descendre indéfiniment en se rapprochant toujours de l'axe de révolution, ou, en d'autres termes, ne peut tendre vers une asymptote parallèle à cet axe : car, au point situé à l'infini sur l'asymptote, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  se réduirait encore au terme  $\frac{1}{N}$ , et, par conséquent, serait encore négative ; il faut dès lors que notre branche passe par

du cylindre jusqu'à la portion de sphère, la figure réalisée appartient toujours à l'onduloïde.

La *fig. 39* représente la ligne méridienne d'un nodoïde peu éloigné de la limite que nous venons de trouver.

§ 35. — Les variations du nodoïde ont une seconde limite fort remarquable. Supposons que l'on réalise, par le procédé exposé dans le § 27, la portion d'un nodoïde engendrée par un nœud isolé; supposons, en outre, que l'on répète successivement l'expérience en employant des anneaux solides de plus en plus grands et en modifiant le volume de l'huile de telle manière que la longueur du nœud méridien, c'est-à-dire la distance du sommet de celui-ci à sa pointe, demeure la même. Quand le diamètre de l'anneau solide sera très-considérable, les normales correspondantes aux différents points du nœud seront toutes très-grandes, de sorte qu'en tous ces points le terme  $\frac{1}{R}$  de l'équation de l'équilibre sera très-petit, et l'on voit que ce terme convergera vers zéro à mesure que le diamètre de l'anneau solide convergera vers l'infini; mais il ne peut en être de même du terme  $\frac{1}{M}$ , car si ce dernier tendait aussi à s'annuler, la figure liquide aurait pour limite de ses variations le caténoïde, ce qui est évidemment impossible dans les conditions où nous sommes placés, c'est-à-dire avec un nœud de longueur constante; on pourra donc toujours concevoir l'anneau solide assez grand pour qu'en tous les points du nœud méridien le terme  $\frac{1}{R}$  soit fort petit relativement au terme  $\frac{1}{M}$ . Alors celui-ci, qui exprime la courbure méridienne, devra, en vertu de l'équation de l'équilibre, varier très-peu sur tout le contour du nœud, et conséquemment ce dernier approchera beaucoup d'une circonférence de cercle. Il est clair que, dans ce cas, la courbure des arcs qui relient entre eux les nœuds consécutifs de la ligne méridienne complète sera aussi à peu près constante et du même ordre que celle de ces nœuds, car le terme  $\frac{1}{R}$  sera également très-petit sur les arcs en question. On comprend, d'après cela, que les nœuds consécutifs de la ligne méridienne empiéteront les uns sur les autres, et qu'ainsi, pour un certain grand diamètre de l'anneau solide, cette ligne a la forme représentée partiellement *fig. 40*. Dans ce dessin, on n'a point indiqué l'axe de révolution, parce qu'il est placé à une trop grande distance.

Si l'on imagine que le diamètre de l'anneau solide reçoive un nouvel ac-

un minimum de distance à l'axe de révolution, et forme ainsi l'arc générateur d'un étranglement; et comme cet étranglement ne saurait appartenir ni à l'onduloïde, ni au caténoïde, il constitue nécessairement le sommet d'un nœud de nodoïde.

Nous sommes donc invinciblement ramenés à la ligne méridienne du nodoïde, et nous devons en conclure que toutes les figures que l'on obtient dans les expériences du § 31 sont des nodoïdes partiels, quel que soit le degré de rapprochement des disques, pourvu qu'on dépasse la courbure sphérique, et quel que soit le volume de l'huile par rapport au diamètre des disques.

§ 34. — Nous pouvons maintenant examiner quelle est la nature et quelles sont les limites des variations du nodoïde. Puisque, dans les expériences du § 31, on passe par une portion de sphère après laquelle, comme nous venons de le voir, naît immédiatement le nodoïde partiel, et puisque celui-ci varie ensuite d'une manière continue jusqu'à la phase où commence l'instabilité, il est clair que la portion de sphère constitue l'une des limites de ces variations, et qu'ainsi la limite des variations correspondantes du nodoïde complet est une suite indéfinie de sphères égales ayant leurs centres sur l'axe. Mais, pour peu que l'on y réfléchisse, on reconnaîtra que le seul mode possible de variation continue tendant vers cette limite est le suivant : à mesure que le nodoïde complet approche de la suite de sphères, les dimensions des nœuds ainsi que la distance de leurs sommets à l'axe diminuent de plus en plus, tandis que la courbure des arcs qui relient ces nœuds converge vers celle d'une circonférence de cercle ayant son centre sur ce même axe; enfin, à la limite, les nœuds s'évanouissent entièrement, et les arcs ci-dessus deviennent autant de demi-circonférences tangentes les unes aux autres. Les sphères engendrées par ces demi-circonférences sont donc aussi tangentes, et il en résulte que l'une des limites des variations du nodoïde est une suite indéfinie de sphères égales qui se touchent sur l'axe.

Nous savons déjà (§ 8) qu'une semblable suite de sphères constitue l'une des limites des variations de l'onduloïde; cette limite est donc commune aux deux figures et forme conséquemment la transition de l'une à l'autre; c'est d'ailleurs ce que montrent encore les expériences du § 31, puisque, à partir

croissement, la courbure méridienne approchera plus encore de l'uniformité, les nœuds seront plus près d'être circulaires, et ils empiéteront davantage les uns sur les autres; enfin, à la limite de ces accroissements, c'est-à-dire lorsque le diamètre sera infini, le terme  $\frac{1}{x}$  s'évanouira complètement pour tous les points de la ligne méridienne, ce qui réduira, pour cette ligne entière, l'équation de l'équilibre à  $\frac{1}{m} = C$ ; le rayon de courbure sera donc alors rigoureusement constant, et nous arrivons à ce singulier résultat, que la totalité de la ligne méridienne se sera condensée en une seule circonférence de cercle; et comme celle-ci se trouvera située à une distance infinie de l'axe de révolution, on voit que la figure engendrée sera simplement un cylindre.

Ainsi la seconde limite des variations du nodoïde est un cylindre; mais ce cylindre est placé transversalement par rapport à l'axe du nodoïde dont il dérive, et cet axe en est infiniment éloigné, tandis que le cylindre qui forme la seconde limite des variations de l'onduloïde (§ 8) a pour axe celui de cette dernière figure.

§ 36. — Pour la réalisation partielle d'un nodoïde dont la ligne méridienne complète soit du genre de la *fig. 40*, il n'est pas nécessaire que l'anneau solide ait un diamètre absolu bien considérable; il suffit que ce diamètre soit grand relativement à la longueur du nœud méridien. En effet, si l'on se rappelle que, dans celui-ci, la courbure va (§ 26) en diminuant depuis le sommet jusqu'aux points où les tangentes sont parallèles à l'axe de symétrie, et que, de là jusqu'à la pointe, elle est moindre qu'en ces derniers points, on comprendra que si la longueur de ce même nœud est petite par rapport au rayon de l'anneau solide, sa largeur sera plus petite encore, et qu'à son sommet le rayon de courbure sera minime en comparaison de la distance de ce sommet au centre de l'anneau, distance qui constitue la normale; au sommet donc le terme  $\frac{1}{x}$  sera peu de chose à côté du terme  $\frac{1}{m}$ , et la valeur de la quantité  $\frac{1}{m} + \frac{1}{x}$  dépendra surtout de celle de ce dernier; mais c'est au sommet que la normale est la moins grande; donc, sur le reste du nœud et sur les arcs qui unissent ce nœud aux nœuds voisins de la ligne méridienne complète, le terme  $\frac{1}{x}$  influera moins encore, et conséquemment, dans toute l'étendue de cette ligne, la courbure ne variera que faiblement.

L'anneau liquide obtenu momentanément dans un anneau solide de 70 mil-

limètres de diamètre par le percement d'une lentille réduite presque à une lame (2<sup>me</sup> série, § 19), constitue un nodoïde partiel de l'espèce que nous considérons; cet anneau liquide, en effet, a peu de largeur relativement au rayon de l'anneau solide.

C'est évidemment aussi un nodoïde de cette espèce dont on réalise une portion en creux dans les expériences du § 25, lorsque les disques sont très-rapprochés et que l'on arrête l'extraction de l'huile au point où les éléments extrêmes de l'arc méridien sont couchés sur les faces des disques aux bords de celles-ci.

Il en est encore de même dans les expériences du § 31, lorsque la distance des disques est très-petite et que les éléments extrêmes de l'arc méridien sont aussi près que possible d'être couchés sur les prolongements des faces solides; seulement ici l'arc méridien n'appartient plus à un seul nœud: il est formé, comme on le reconnaîtra en jetant les yeux sur la *fig.* 40, de l'arc qui unit deux nœuds consécutifs et de deux portions de ces derniers.

§ 37. — Enfin les variations du nodoïde ont, comme celles de l'onduloïde, une troisième limite; elle nous est révélée par les expériences mêmes qui nous ont conduits à la connaissance du nodoïde. Dans ces expériences (§§ 20 et 22), lorsque, après avoir formé un cylindre entre deux anneaux placés à une distance moindre que les  $\frac{2}{3}$  de leur diamètre, on enlève progressivement du liquide, la figure partielle, nous le savons, devient d'abord un onduloïde, puis atteint par degrés le caténoïde, après quoi elle passe immédiatement au nodoïde; d'où il suit évidemment que le caténoïde est l'une des limites des variations du nodoïde, et, en outre, qu'il constitue une nouvelle transition de celui-ci à l'onduloïde; nous en avons déjà vu (§ 34) une autre, consistant dans la suite indéfinie de sphères.

La troisième limite des variations du nodoïde est donc le caténoïde, et il est aisé de faire comprendre comment la figure y parvient. Si nous nous rappelons que les expériences dont nous venons de parler réalisent la portion du nodoïde engendrée par un arc appartenant à un nœud et tournant sa concavité extérieurement, nous en concluons que la portion du nodoïde qui passe au caténoïde est celle qui est engendrée par l'un des nœuds, dont le sommet devient celui de la chaînette méridienne. Cela posé, concevons que

chacun des nœuds de la ligne méridienne complète se modifie graduellement pour arriver à la chaînette, et imaginons, pour fixer les idées, que, pendant toutes ces modifications, la distance des sommets à l'axe de révolution demeure constante. A mesure que les nœuds approcheront de la chaînette, la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  convergera vers zéro; or, sur tous les arcs qui unissent les nœuds entre eux, les quantités  $M$  et  $N$  sont de même signe, et conséquemment la quantité  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$  relative à ces arcs ne peut converger vers zéro que si  $M$  et  $N$  convergent à la fois vers l'infini; tous les points de ces mêmes arcs s'éloigneront donc indéfiniment de l'axe de révolution, en même temps que leur courbure deviendra indéfiniment plus faible; d'où il suit que les pointes des nœuds s'éloigneront de plus en plus de l'axe, tandis que, par le développement croissant des arcs intermédiaires, lesquels, d'après la nature de la courbe, ne peuvent évidemment diminuer de courbure sans s'étendre davantage, les nœuds s'écartent de plus en plus les uns des autres, jusqu'à ce que, à la limite, ils soient tous infiniment distants et infiniment allongés. Si donc nous en considérons un en particulier, toute la courbe se réduira à lui seul, et, d'autre part, sa pointe aura disparu, et il se trouvera transformé en la ligne méridienne d'un caténoïde, c'est-à-dire en une chaînette.

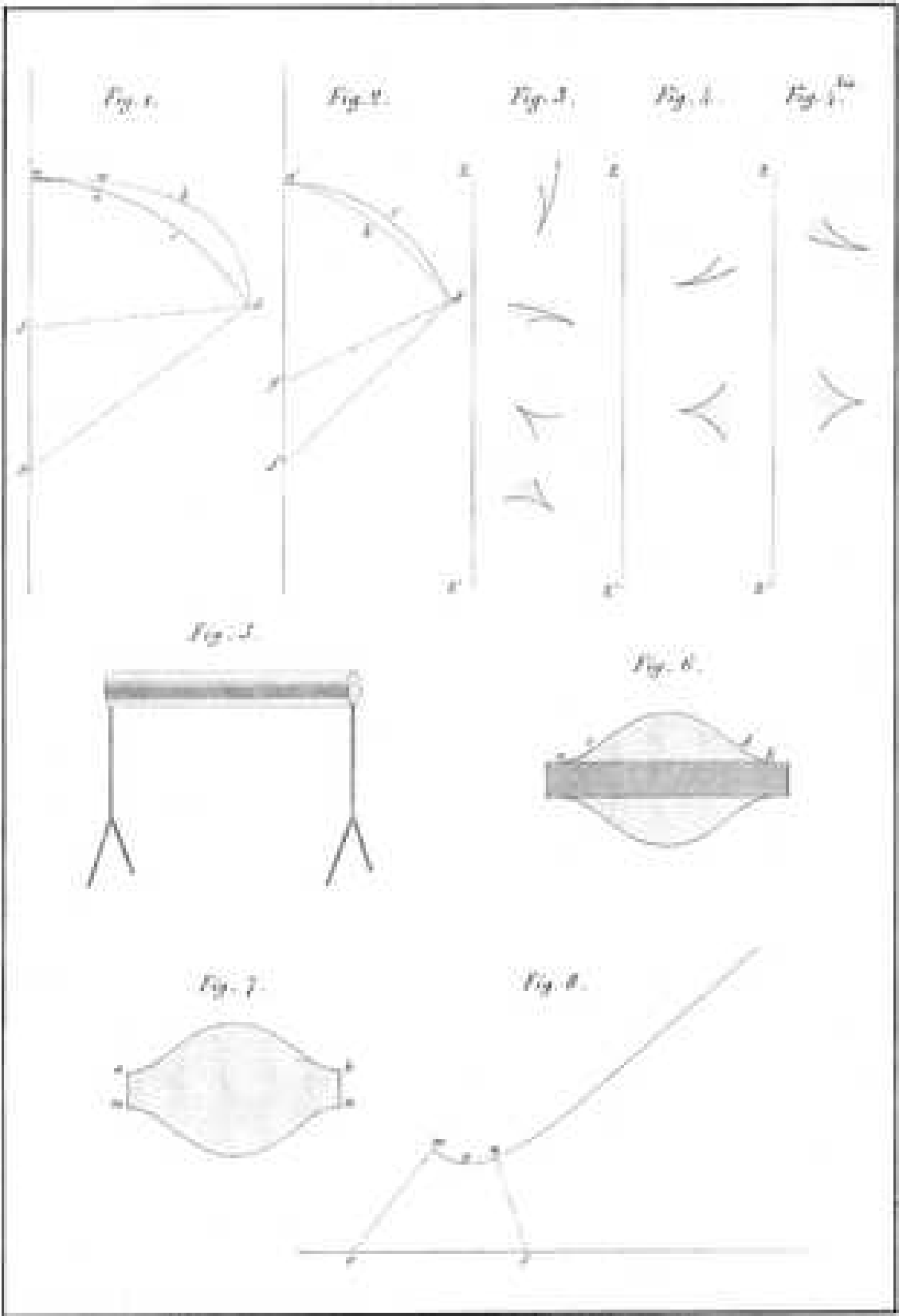
§ 38. — Maintenant se présente une dernière question : y a-t-il d'autres figures d'équilibre de révolution que celles dont nous avons jusqu'ici reconnu l'existence? Toutes ces dernières sont telles que l'on peut toujours en comprendre des portions entre deux disques égaux et parallèles; or nos expériences ont épuisé toutes les combinaisons de ce genre; d'où l'on doit conclure que s'il y avait encore d'autres figures, elles seraient de nature à ne pouvoir remplir cette condition, et il faudrait évidemment, pour cela, que leurs lignes méridiennes ne présentassent aucun point dont la distance à l'axe de révolution fût un maximum ou un minimum. Comme ces lignes ne pourraient d'ailleurs atteindre l'axe (§ 2), elles devraient aller en s'en éloignant toujours, depuis un premier point situé à l'infini sur une asymptote parallèle à cet axe, jusqu'à un autre point situé également à l'infini. Cela posé, au premier de ces deux points extrêmes, le rayon de courbure serait nécessairement infini, tandis que la normale serait finie, et l'équation de l'équilibre s'y réduirait à  $\frac{1}{N} = C$ ; or il résulte de là que la courbure ne pour-

rait nulle part changer de sens : car s'il y avait un point d'inflexion, l'équation de l'équilibre s'y réduirait également à  $\frac{1}{N} = C$ , et conséquemment les normales au premier point extrême ci-dessus et à ce point d'inflexion devraient être égales, ce qui est évidemment impossible. Dès lors la courbe étant exempte de toute ondulation, la courbure convergerait nécessairement vers zéro, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure convergerait vers l'infini, en approchant du second point extrême, en sorte qu'en ce point le terme  $\frac{1}{M}$  s'évanouirait comme au premier, ce qui exigerait, de même que précédemment, l'égalité impossible des deux normales.

Les seules figures d'équilibre de révolution d'une masse liquide sans pesanteur sont donc celles auxquelles nous sommes arrivé dans la deuxième série et dans la série actuelle, savoir : la sphère, le plan, le cylindre, l'onduloïde, le caténoïde et le nodoïde.

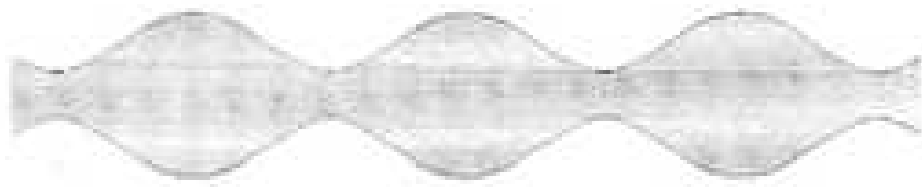
Toutes ces figures, à l'exception de la sphère, ayant des dimensions infinies dans certains sens, il en résulte que, parmi les figures d'équilibre de révolution, il n'y a que la sphère qui puisse être réalisée à l'état complet avec une masse finie de liquide; aussi, comme nous le savons, c'est toujours la forme sphérique que prend une masse d'huile abandonnée librement au sein de notre mélange alcoolique.

*Nota.* — Les figures 15 et 16 se rapportent à une première rédaction du mémoire; elles ont été conservées par erreur, et doivent être regardées comme non existantes.

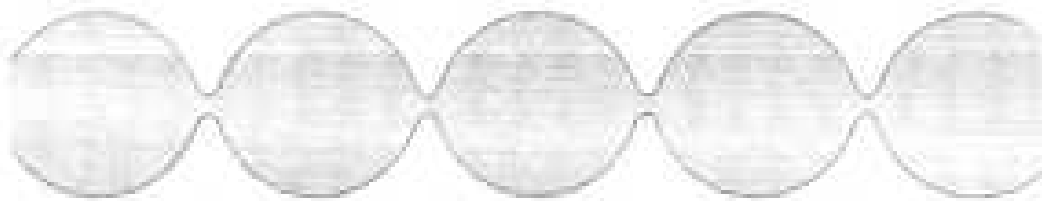
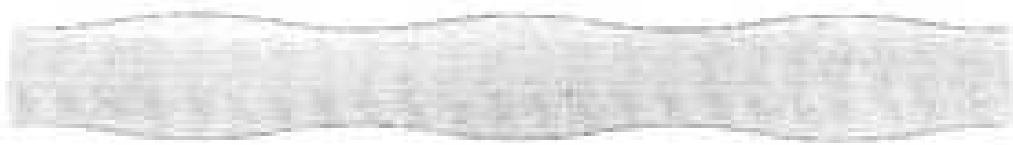




*Fig. 9.*



*Fig. 10.*



*Fig. 11.*



*Fig. 12.*



*Fig. 13.*



*Fig. 14.*



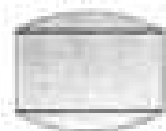
*Fig. 15.*



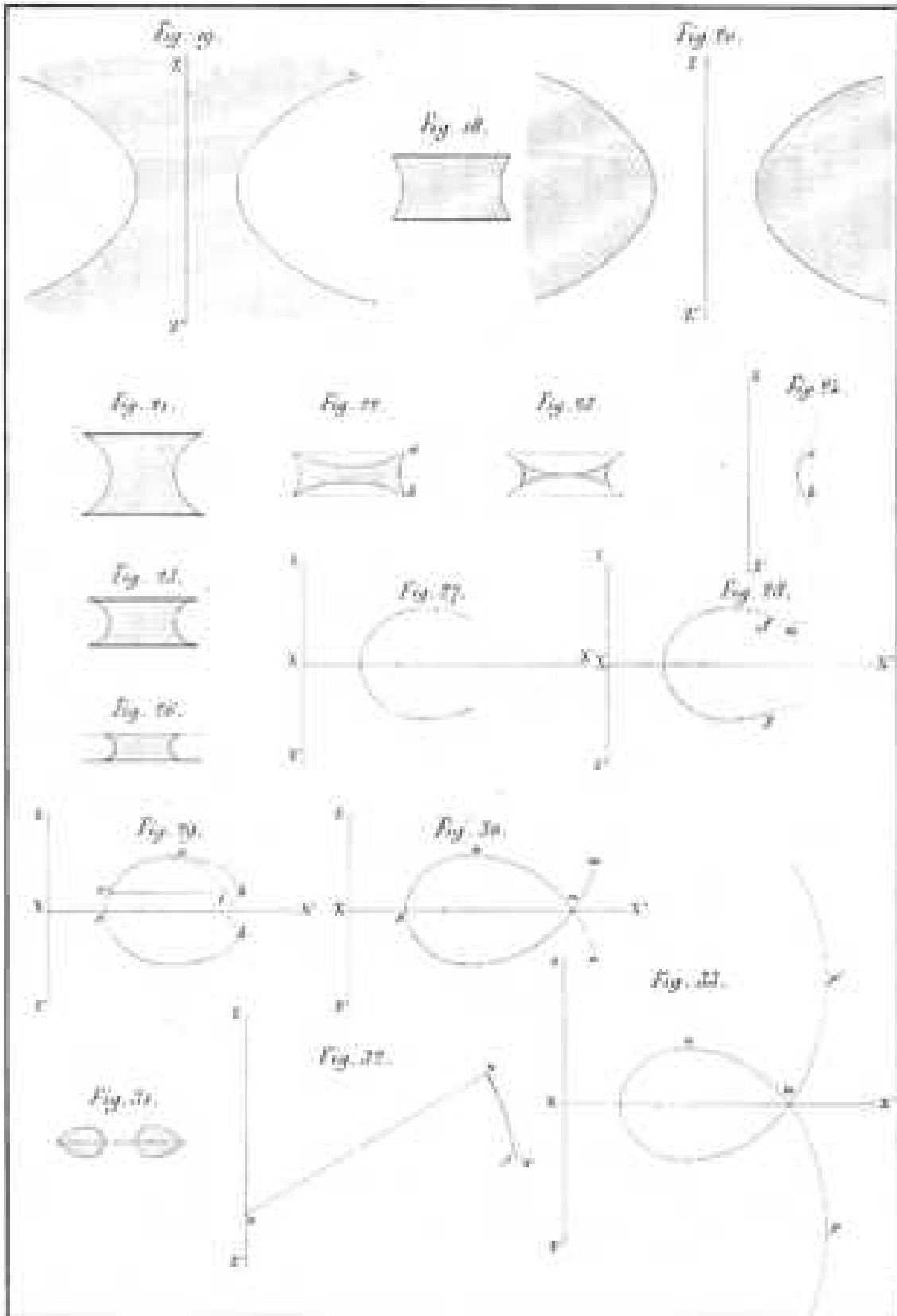
*Fig. 16.*



*Fig. 17.*



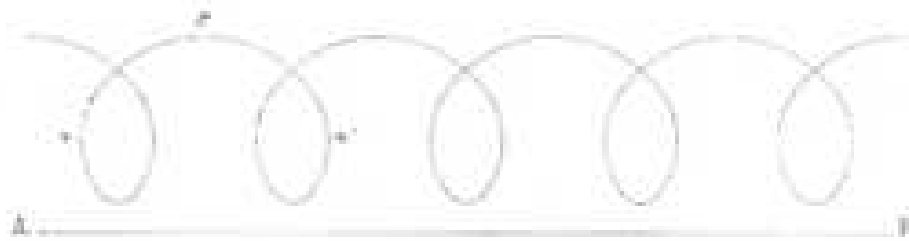








*Fig. 28.*



*Fig. 29.*



*Fig. 30.*

