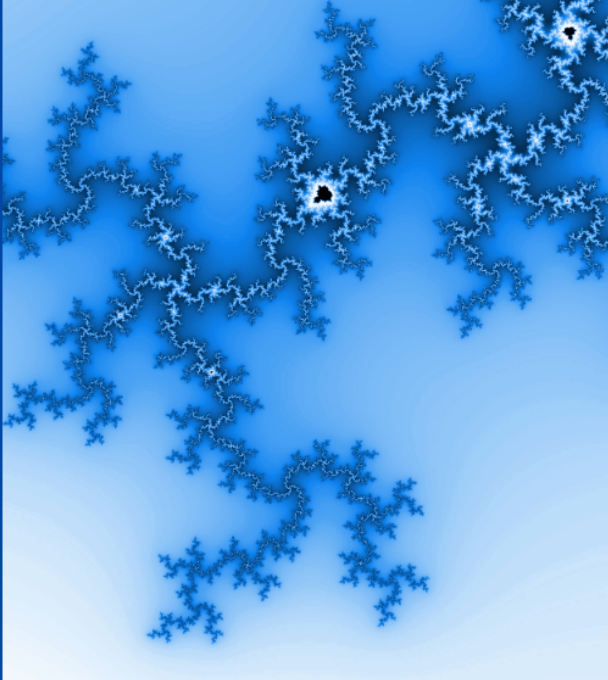
Quelques paradoxes et curiosités mathématiques

Pi Day 2025

Laurent Loosveldt

12 mars 2025

LIÈGE université
Mathématique



De quoi s'agit-il?

De quoi s'agit-il?

Dictionnaire "Le Larousse"

1. Opinion contraire aux vues communément admises.
2. Être, chose ou fait qui paraissent défier la logique parce qu'ils présentent des aspects contradictoires.

En image

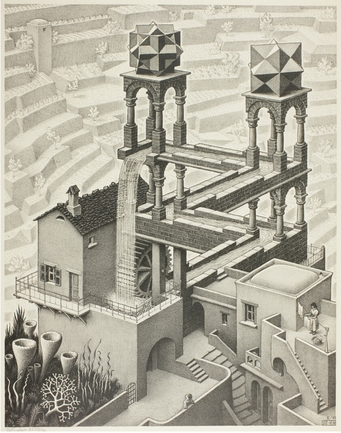
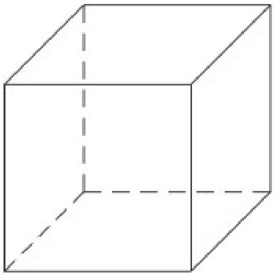


Figure: "Chute d'eau" – Maurits Cornelis Escher

En image



En image

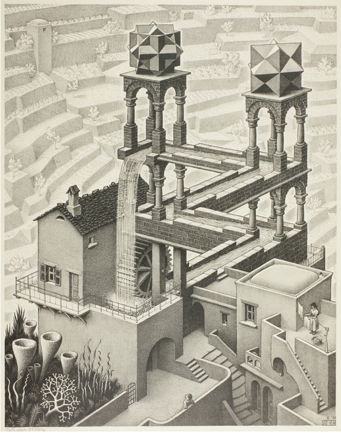


Figure: “Chute d’eau” – Maurits Cornelis Escher

Raisonnement mathématique

Raisonnement mathématique

Raisonnement mathématique

Raisonnement mathématique

Raisonnement mathématique

Depuis toujours...

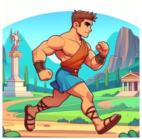
Figure: Zénon d'Élée ($\sim$ 490-430 a.v. J. C.) montrant les portes de la vérité et de la fausseté

Depuis toujours...

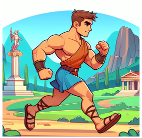
Figure: Zénon d'Élée ($\sim$ 490-430 a.v. J. C.) montrant les portes de la vérité et de la fausseté

Il présente une série de paradoxes pour justifier la doctrine de son mentor Paraménide, selon laquelle, notamment, l'être et le mouvement sont indivisibles.

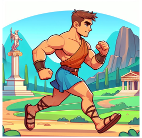
Achille et la tortue



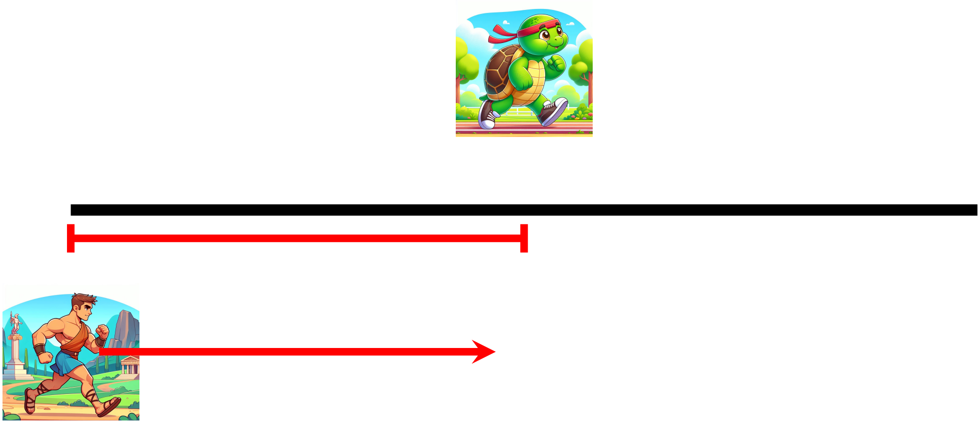
Achille et la tortue



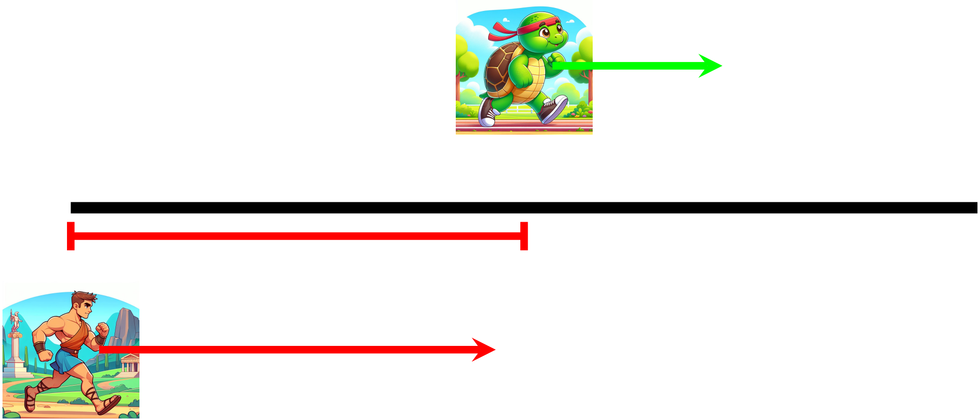
Achille et la tortue



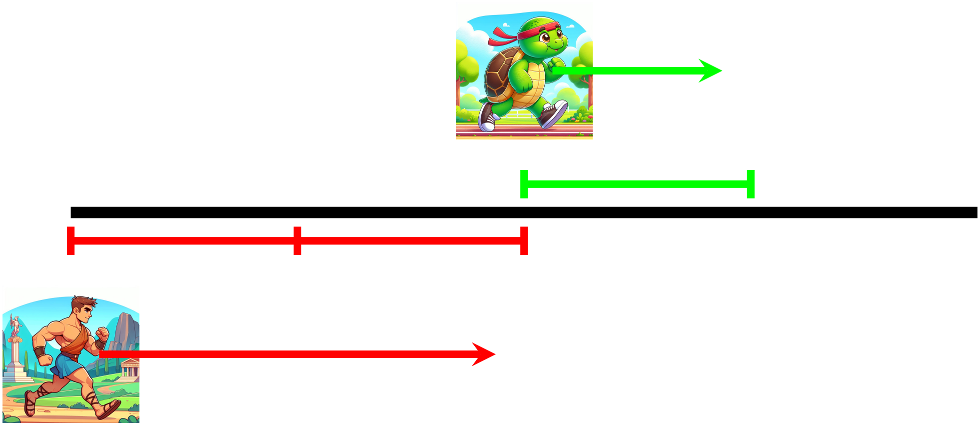
Achille et la tortue



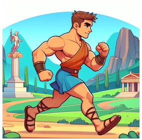
Achille et la tortue



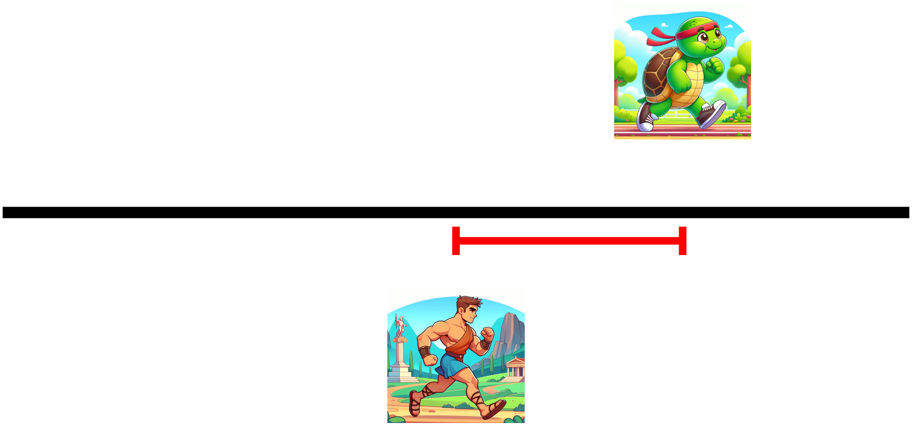
Achille et la tortue



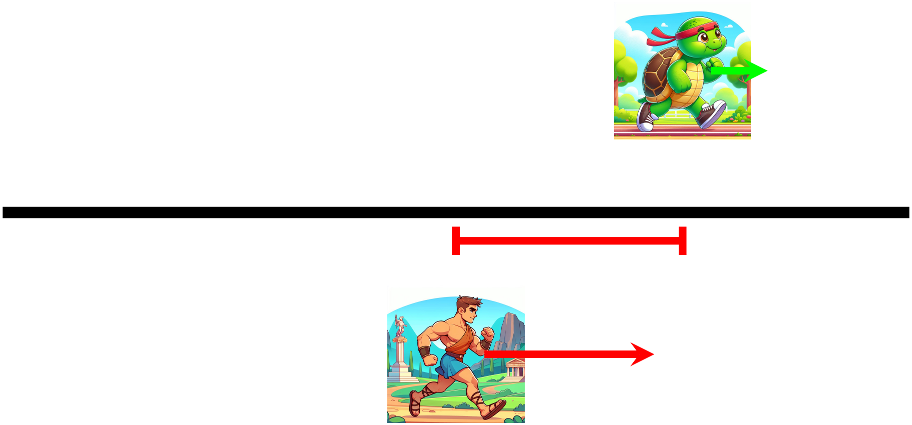
Achille et la tortue



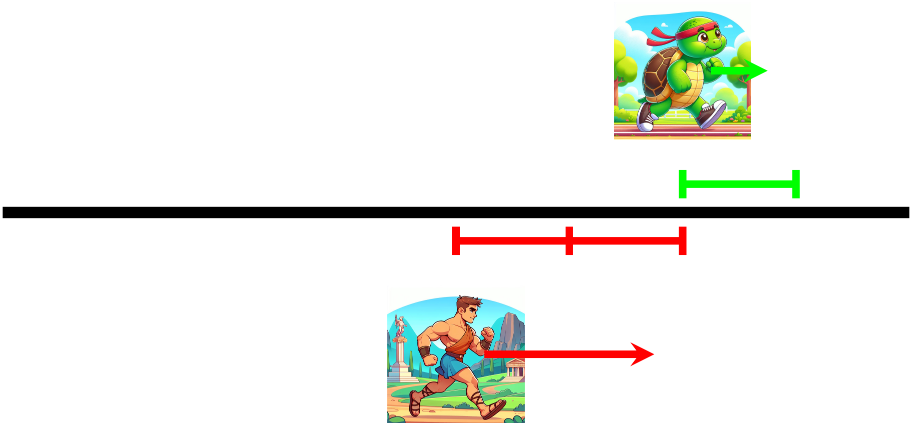
Achille et la tortue



Achille et la tortue

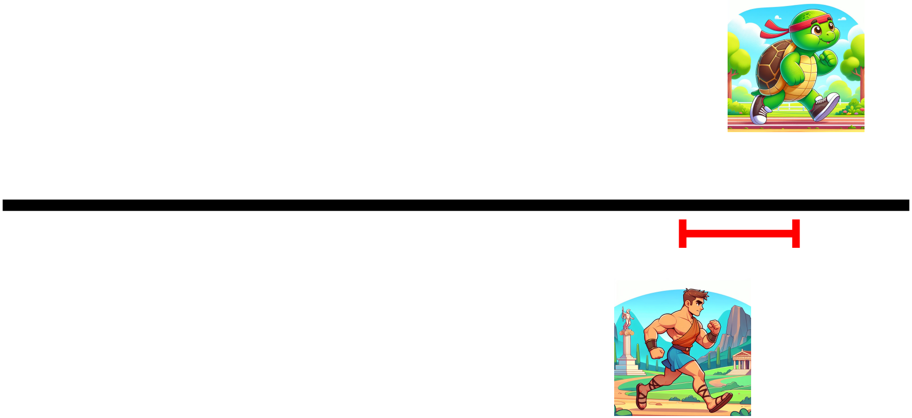


Achille et la tortue

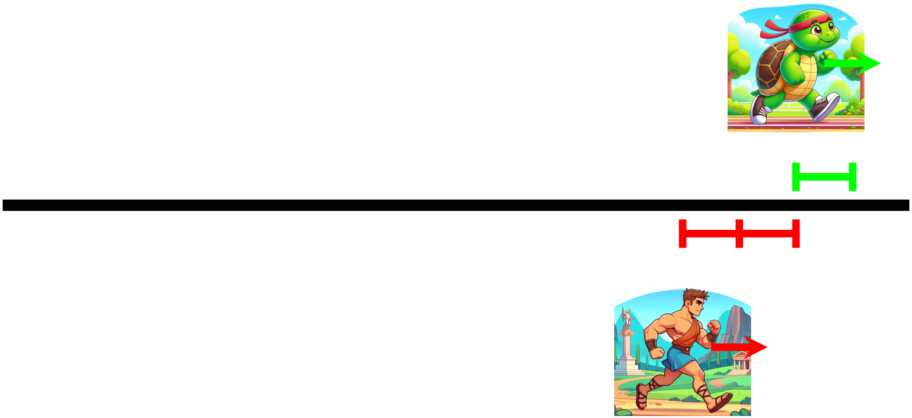


Achille et la tortue

Achille et la tortue



Achille et la tortue



Achille et la tortue

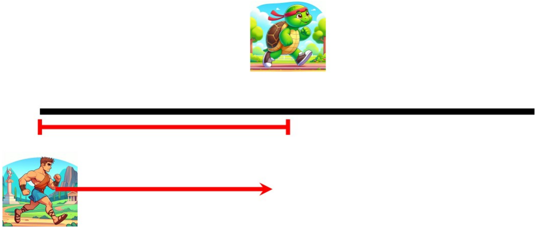
Oui! Mais...

On va supposer qu'Achille court à 10 km/h et qu'il a laissé une avance de 5 km à la tortue.

Oui! Mais...

On va supposer qu'Achille court à 10 km/h et qu'il a laissé une avance de 5 km à la tortue.

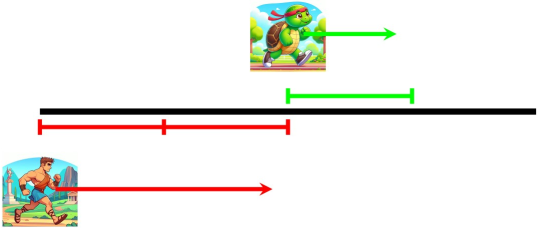
- Achille met 1/2h pour parcourir la distance qui le sépare initialement de la tortue.



Oui! Mais...

On va supposer qu'Achille court à 10 km/h et qu'il a laissé une avance de 5 km à la tortue.

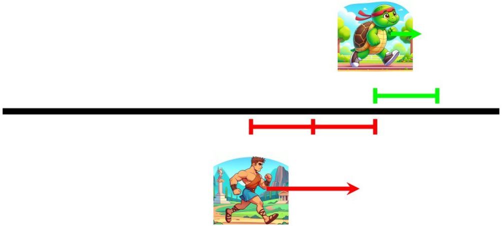
- Achille met $1/2$h pour parcourir la distance qui le sépare initialement de la tortue.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $2,5$km.



Oui! Mais...

On va supposer qu'Achille court à 10 km/h et qu'il a laissé une avance de 5 km à la tortue.

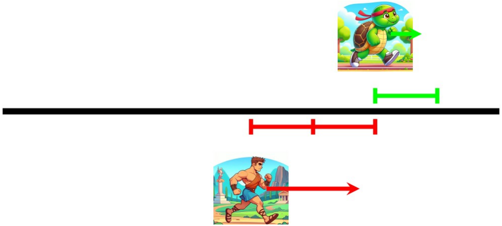
- Achille met $1/2$h pour parcourir la distance qui le sépare initialement de la tortue.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $2,5$km.
- Achille met $1/4$h pour rejoindre le point où se situait la tortue après $1/2$h.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $1,25$km



Oui! Mais...

On va supposer qu'Achille court à 10 km/h et qu'il a laissé une avance de 5 km à la tortue.

- Achille met $1/2$h pour parcourir la distance qui le sépare initialement de la tortue.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $2,5$km.
- Achille met $1/4$h pour rejoindre le point où se situait la tortue après $1/2$h.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $1,25$km



Oui! Mais...

On va supposer qu'Achille court à 10 km/h et qu'il a laissé une avance de 5 km à la tortue.

- Achille met $1/2$h pour parcourir la distance qui le sépare initialement de la tortue.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $2,5$km.
- Achille met $1/4$h pour rejoindre le point où se situait la tortue après $1/2$h.
- Pendant ce temps, la tortue parcourt $1,25$km
- ...

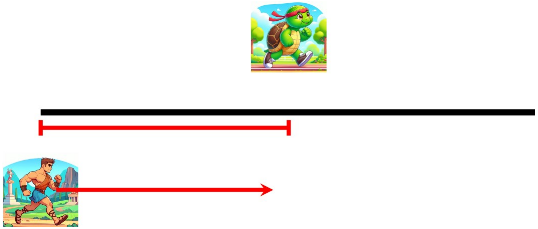
Et donc...

Achille va mettre

Et donc...

Achille va mettre

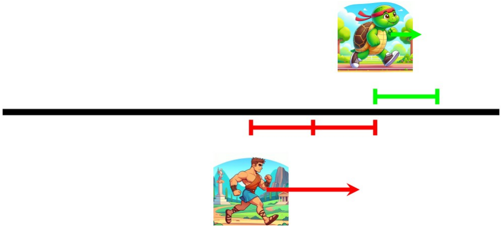
- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.



Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.



Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.
- $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$h pour atteindre l'étape 3.

Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.
- $(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})$h pour atteindre l'étape 3.

Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.
- $(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})$h pour atteindre l'étape 3.
- $\dots$

Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.
- $(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})$h pour atteindre l'étape 3.
- $\ldots$
- $(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^N})$h pour atteindre l'étape N.

Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.
- $(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})$h pour atteindre l'étape 3.
- $\ldots$
- $(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j})$h pour atteindre l'étape N.

Et donc...

Achille va mettre

- $\frac{1}{2}$h pour atteindre l'étape 1.
- $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$h pour atteindre l'étape 2.
- $(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})$h pour atteindre l'étape 3.
- $\dots$
- $(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j})$h pour atteindre l'étape N.

Pour savoir quand Achille rejoindra la tortue, on doit répéter une infinité de fois ce raisonnement : on étudie alors

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j} := \lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j}$$

Finalement...

Puisque

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)},$$

Finalement...

Puisque

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}\,\frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)},$$

on conclut qu'Achille rattrape la tortue après

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)}\right) = 1$$

heure.

Finalement...

Puisque

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}\,\frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)},$$

on conclut qu'Achille rattrape la tortue après

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)}\right) = 1$$

heure.

Paradoxe par raisonnement fallacieux

Le paradoxe du Duc de Toscane

A la cour de Florence, on s'amusait régulièrement avec des jeux de dés. Dans l'un de ceux-ci, les joueurs devaient parier sur la somme des 3 dès à 6 faces. Après avoir observé de nombreuses parties, le Duc de Toscane s'adressa à Galilée (1564-1642) pour comprendre pourquoi le résultat 10 apparaissait plus régulièrement que 9.

Où se situe le paradoxe?

Le Duc fit remarquer qu'il y avait autant de possibilités pour décomposer 10 et 9 comme somme de 3 nombres choisis parmi $\{1,2,3,4,5,6\}$:

$$10 = \begin{cases} 6+3+1 \\ 6+2+2 \\ 5+4+1 \\ 5+3+2 \\ 4+4+2 \\ 4+3+3 \end{cases} \qquad 9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$

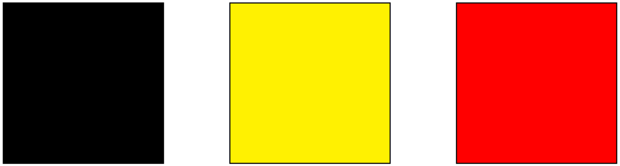
Où se situe le paradoxe?

Le Duc fit remarquer qu'il y avait autant de possibilités pour décomposer 10 et 9 comme somme de 3 nombres choisis parmi $\{1,2,3,4,5,6\}$:

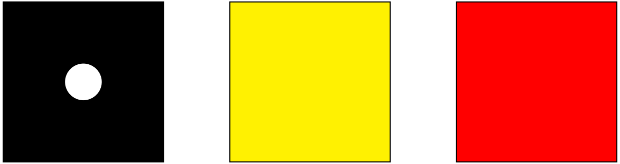
$$10 = \begin{cases} 6+3+1 \\ 6+2+2 \\ 5+4+1 \\ 5+3+2 \\ 4+4+2 \\ 4+3+3 \end{cases} \qquad 9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$

Pourquoi alors est-ce que le 10 apparaissait plus souvent?

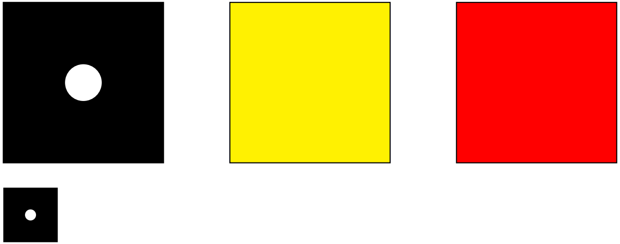
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



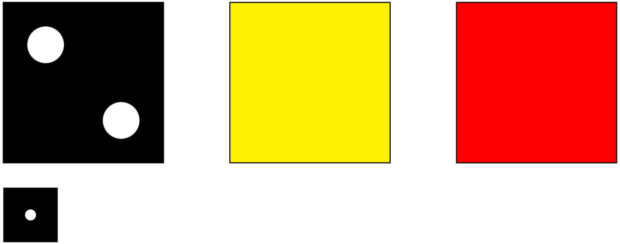
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



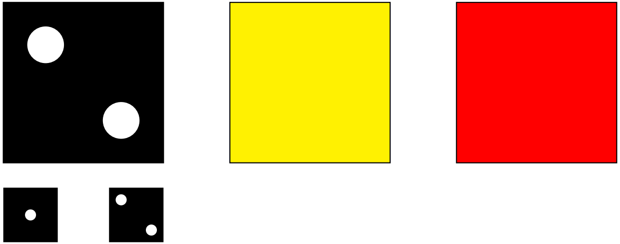
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



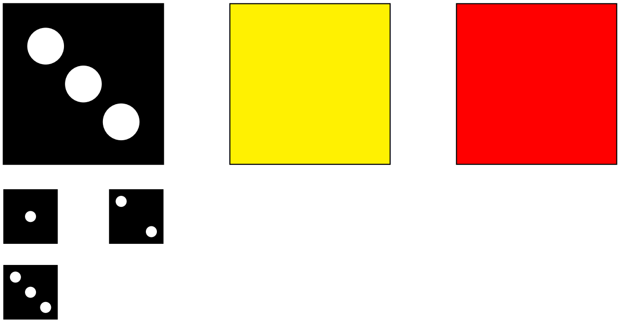
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



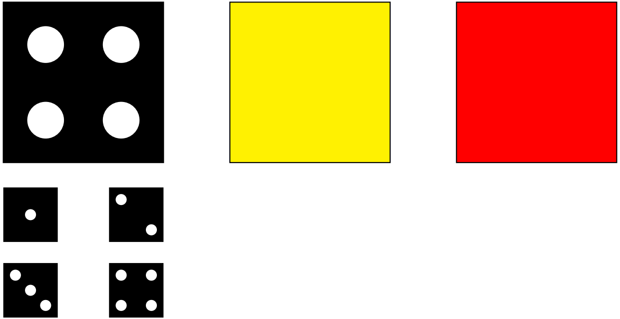
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



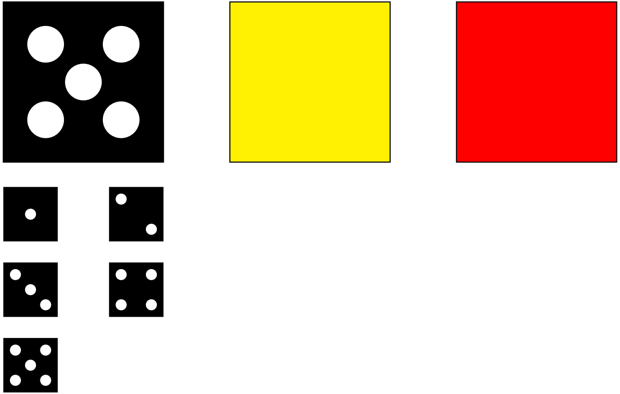
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



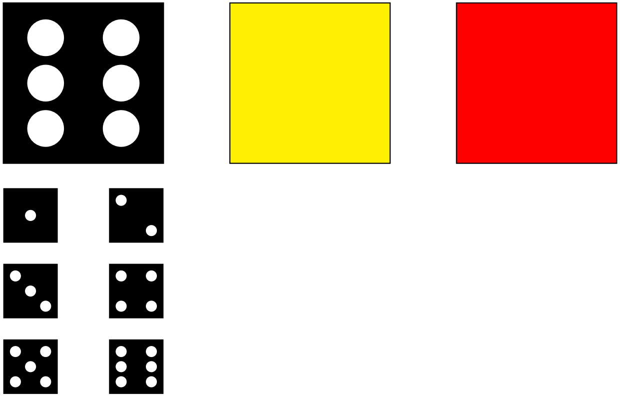
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



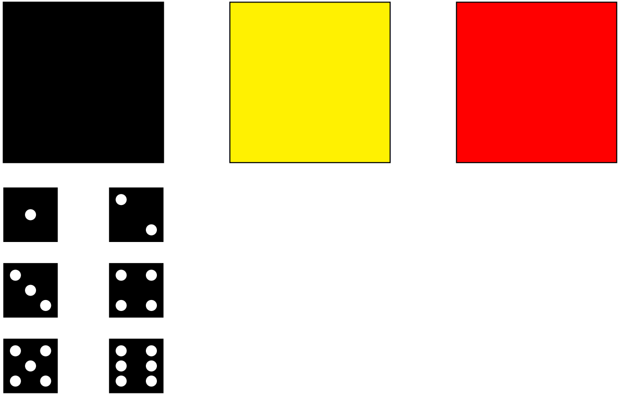
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



Combien de lancers de 3 dés possibles ?

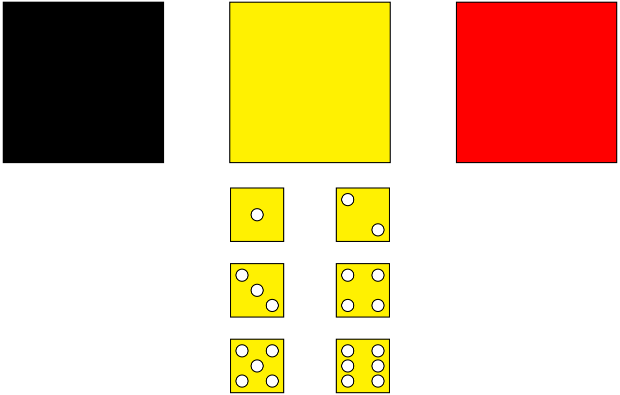


Combien de lancers de 3 dés possibles ?



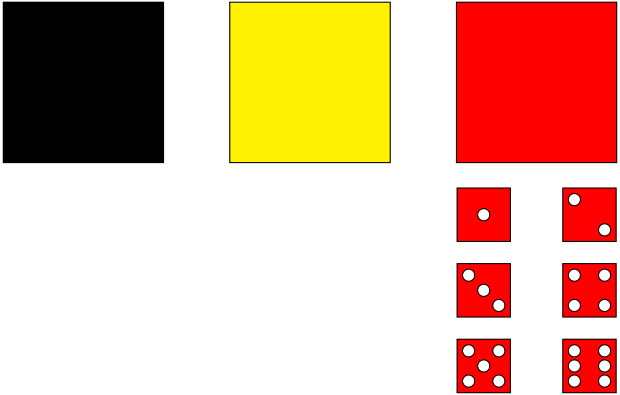
Six lancers possibles pour le dé noir.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



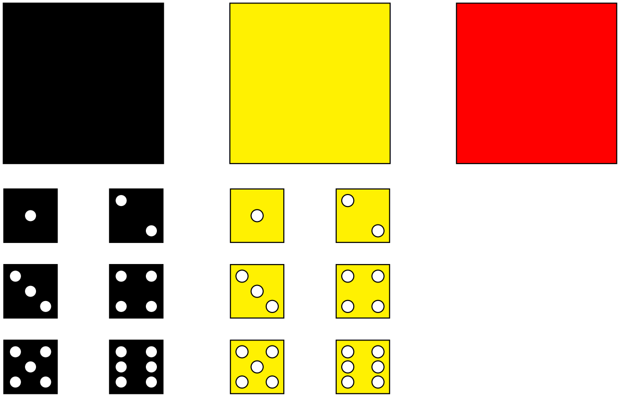
Six lancers possibles pour le dé jaune.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



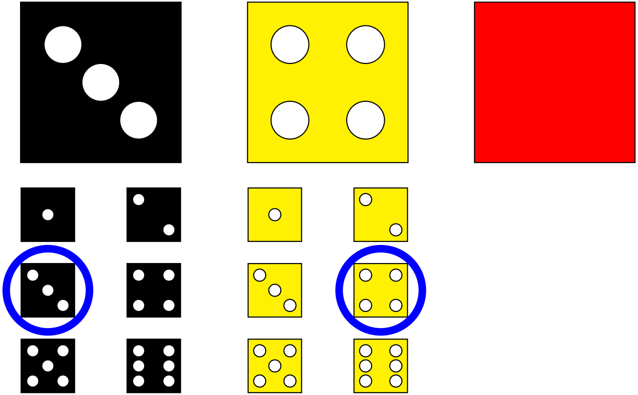
Six lancers possibles pour le dé rouge.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



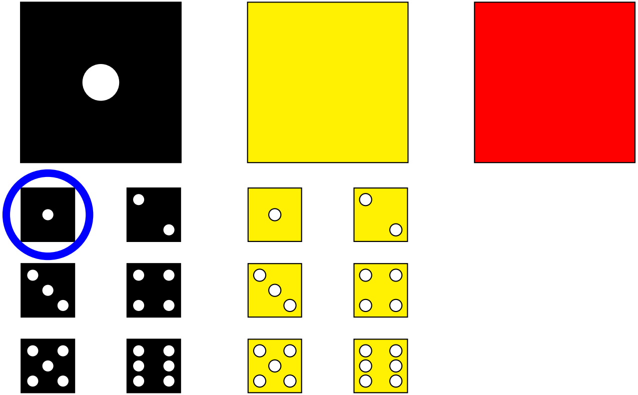
Lorsqu'on lance deux dés (le noir et le jaune), on a en fait un lancer du dé noir et un lancer du dé jaune.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



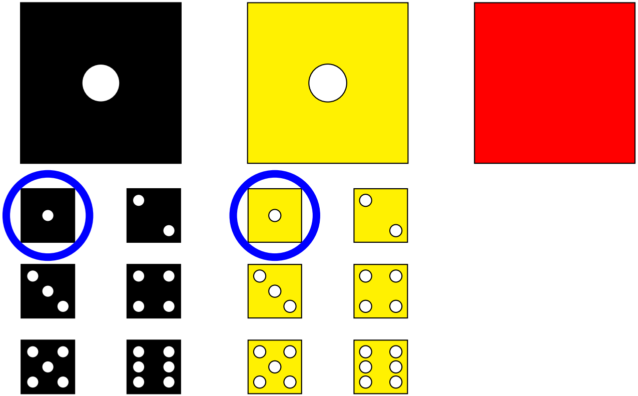
Lorsqu'on lance deux dés (le noir et le jaune), on a en fait un lancer du dé noir et un lancer du dé jaune.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



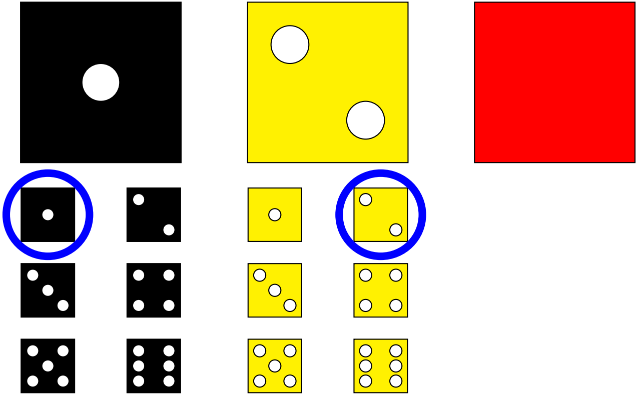
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



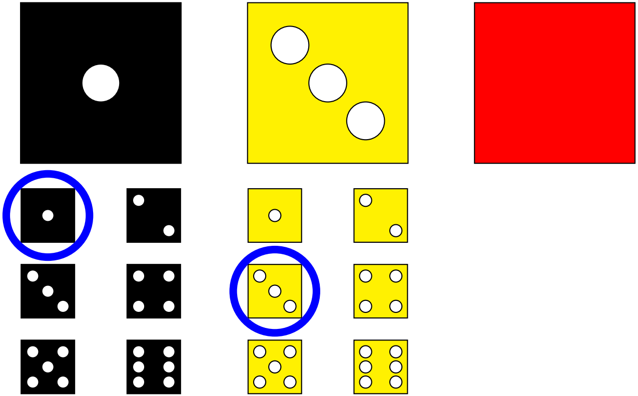
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



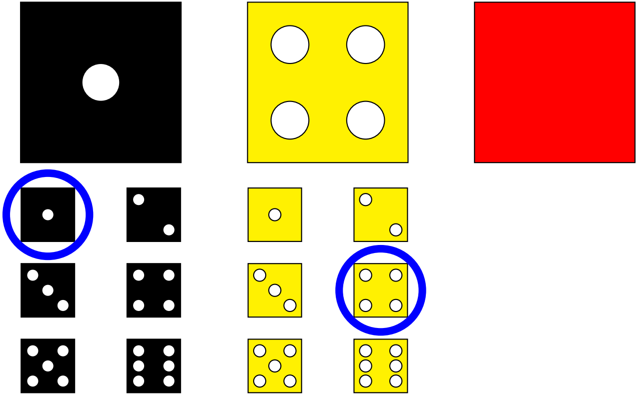
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



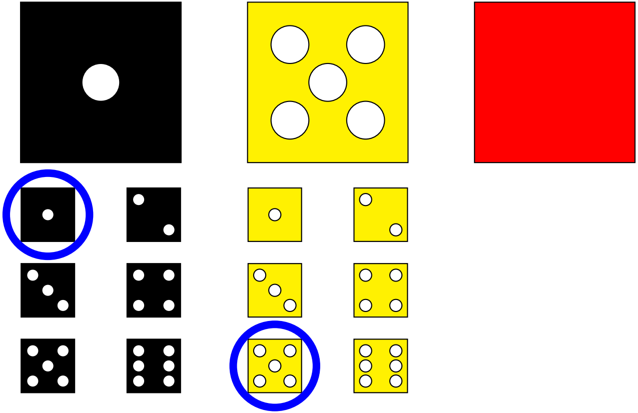
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



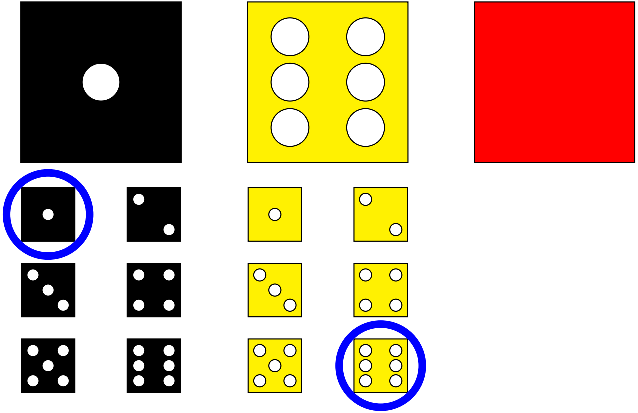
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



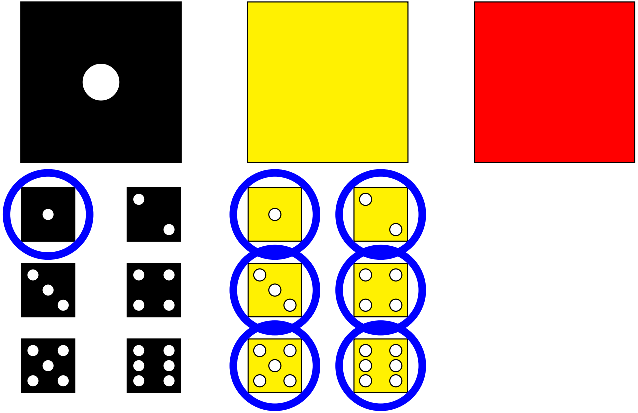
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



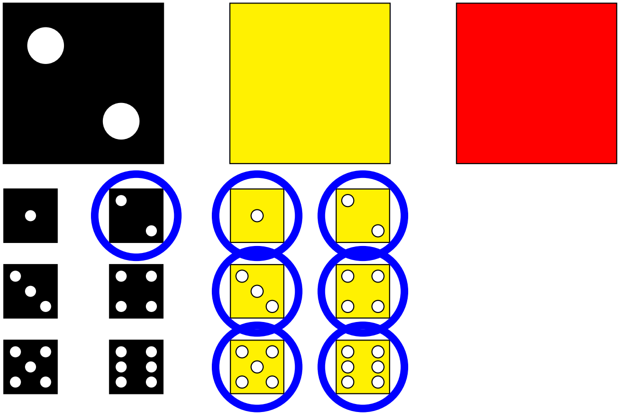
Comptons le nombre de lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



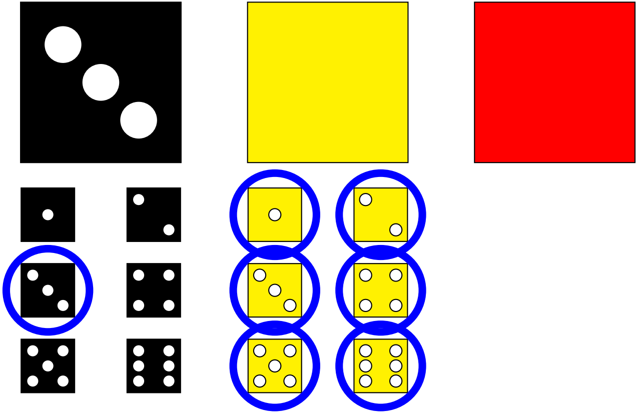
Il y en a 6 lancers de 2 dés pour lesquels la valeur du premier dé est 1.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



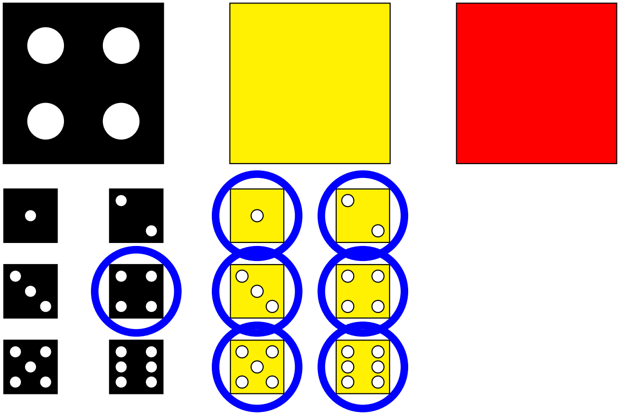
On applique le même raisonnement pour les 6 valeurs possibles pour le dé noir.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



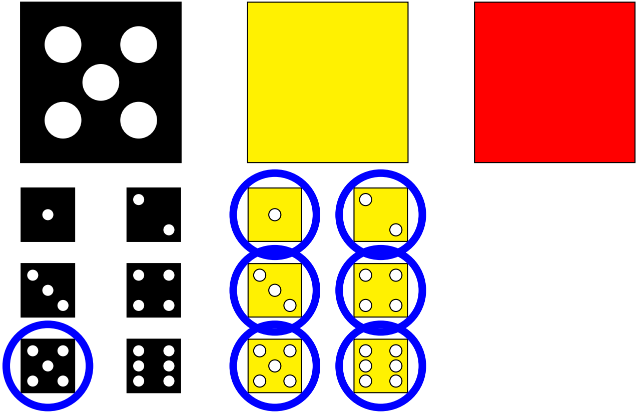
On applique le même raisonnement pour les 6 valeurs possibles pour le dé noir.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



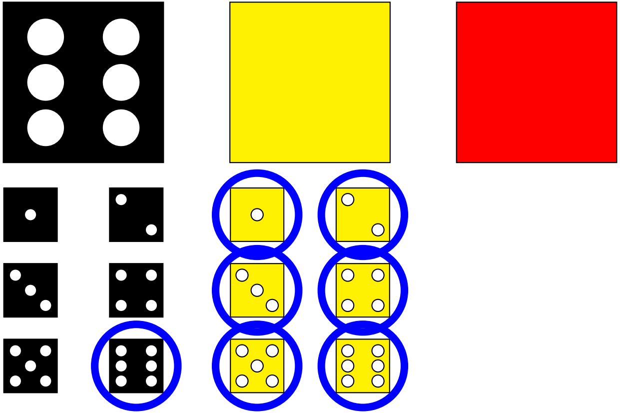
On applique le même raisonnement pour les 6 valeurs possibles pour le dé noir.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



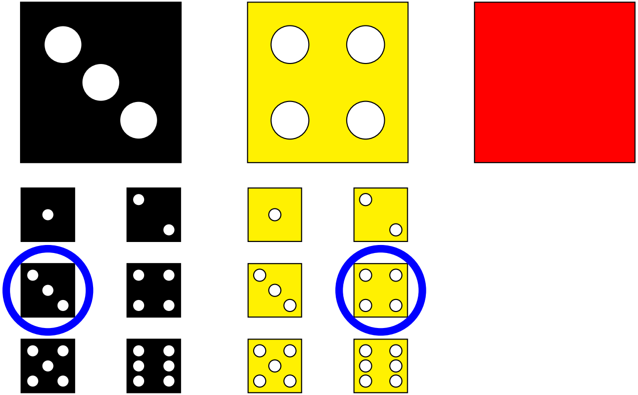
On applique le même raisonnement pour les 6 valeurs possibles pour le dé noir.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



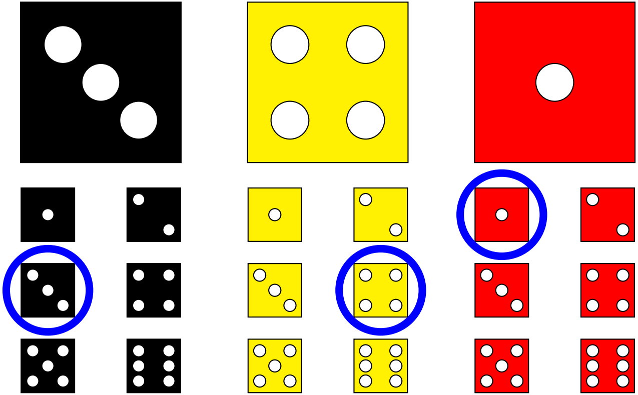
On applique le même raisonnement pour les 6 valeurs possibles pour le dé noir.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



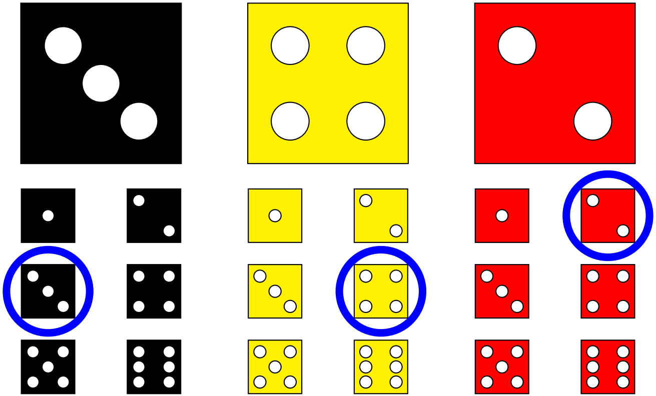
On conclut qu'il y a $6 \times 6 = 36$ lancers possibles avec deux dés.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



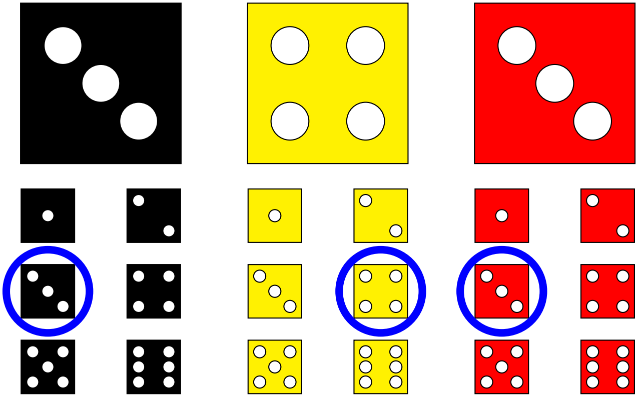
Un lancer de trois dés s'obtient à partir d'un lancer de deux premiers dés et une valeur pour le troisième dé.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



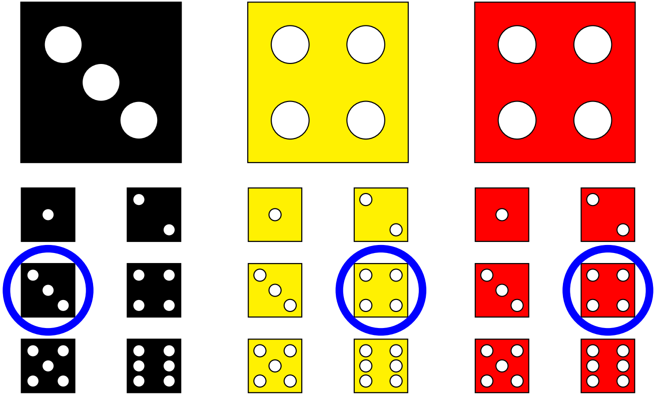
Un lancer de trois dés s'obtient à partir d'un lancer de deux premiers dés et une valeur pour le troisième dé.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



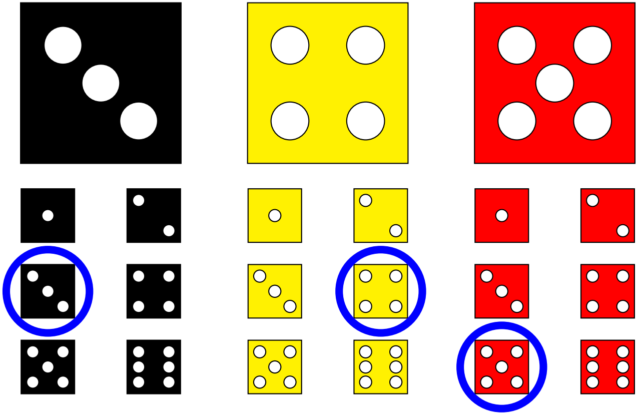
Un lancer de trois dés s'obtient à partir d'un lancer de deux premiers dés et une valeur pour le troisième dé.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



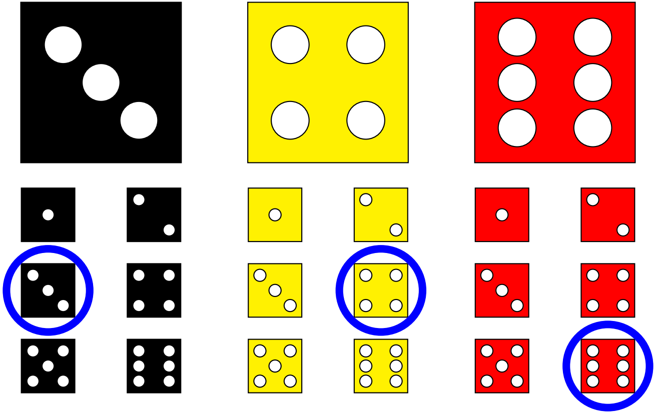
Un lancer de trois dés s'obtient à partir d'un lancer de deux premiers dés et une valeur pour le troisième dé.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



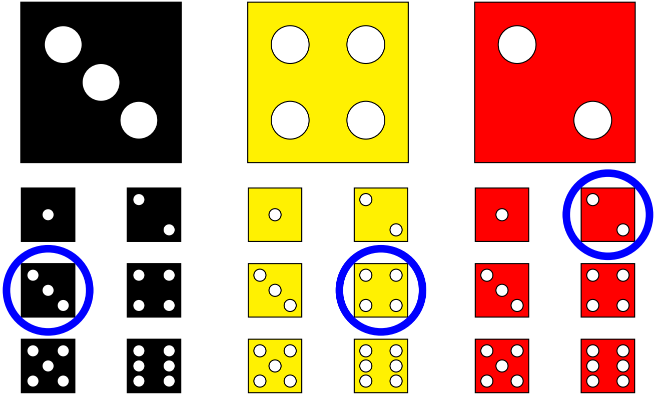
Un lancer de trois dés s'obtient à partir d'un lancer de deux premiers dés et une valeur pour le troisième dé.

Combien de lancers de 3 dés possibles ?



Un lancer de trois dés s'obtient à partir d'un lancer de deux premiers dés et une valeur pour le troisième dé.

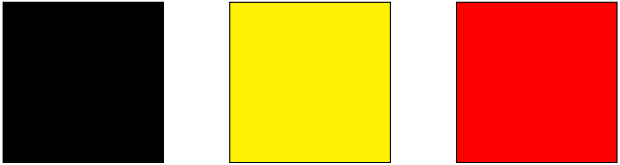
Combien de lancers de 3 dés possibles ?



Conclusion : il y a $36 \times 6 = 216 = 6^3$ lancers possibles avec 3 dés.

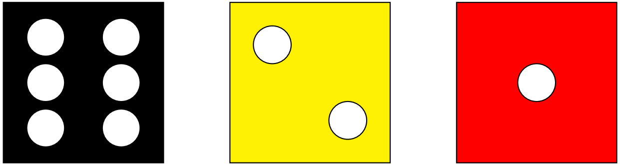
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



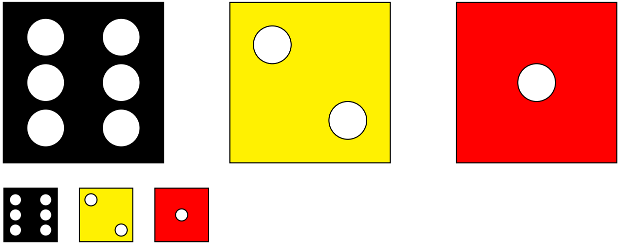
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} {\color{blue}6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



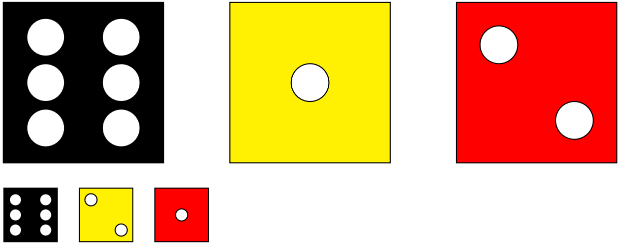
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



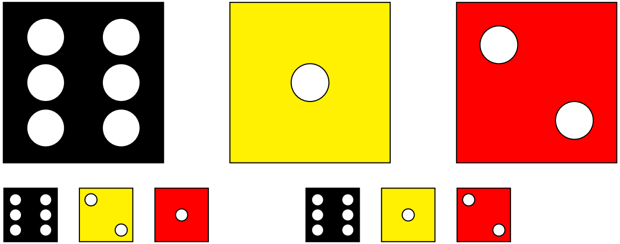
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



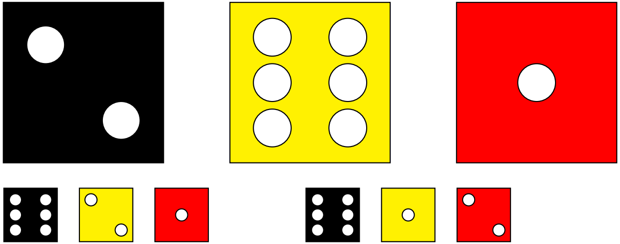
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} \color{blue}{6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



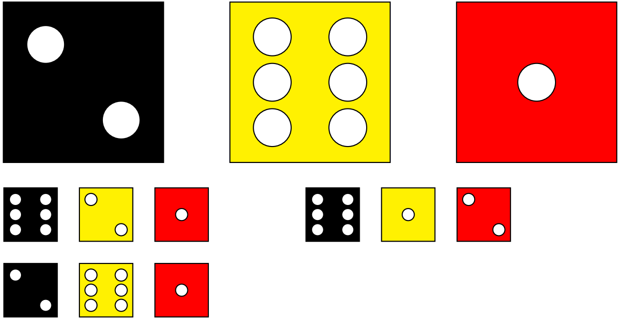
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



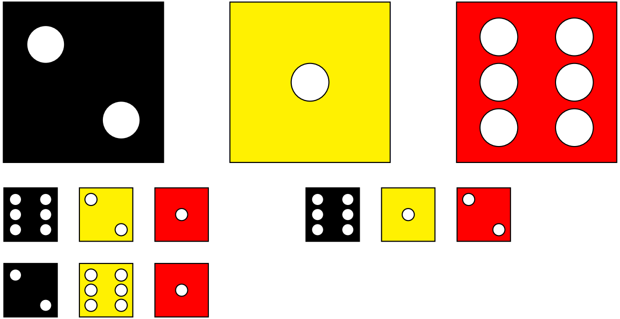
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



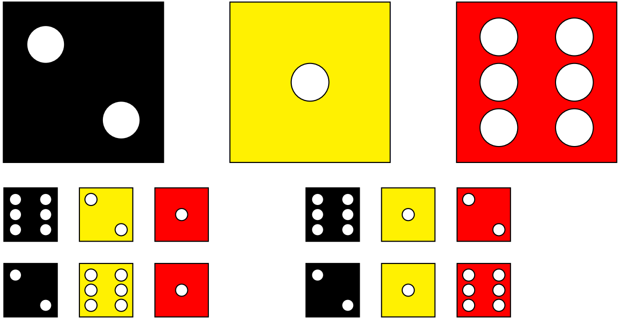
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} {\color{blue}6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



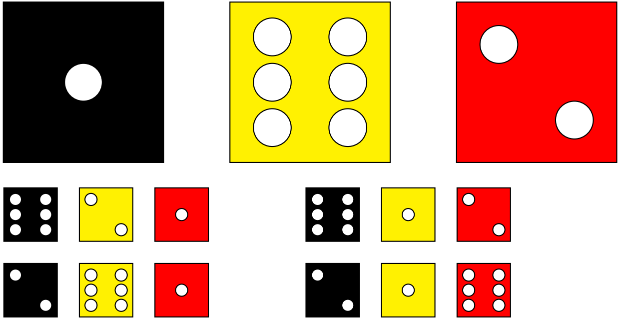
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} \color{blue}{6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



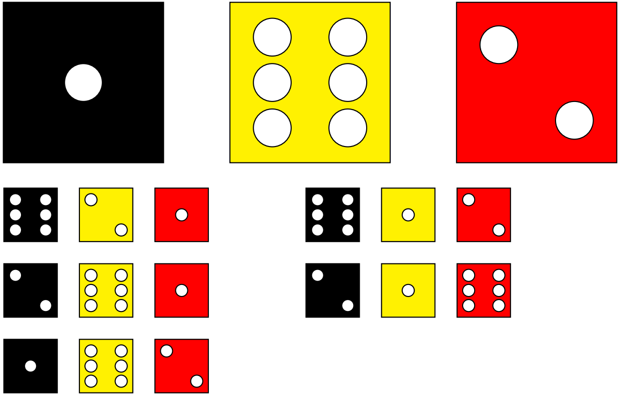
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} {\color{blue}6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



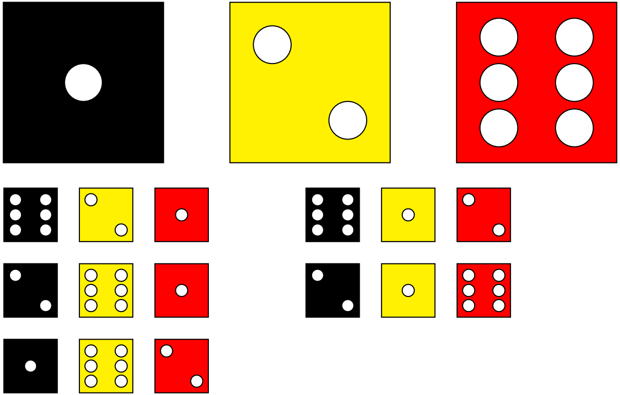
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} \color{blue}{6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



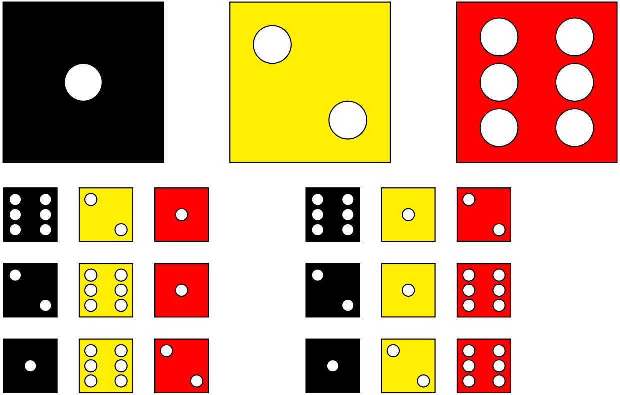
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



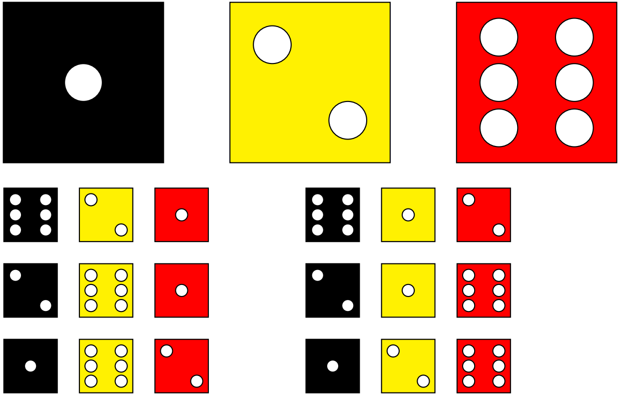
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} \color{blue}{6+2+1} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



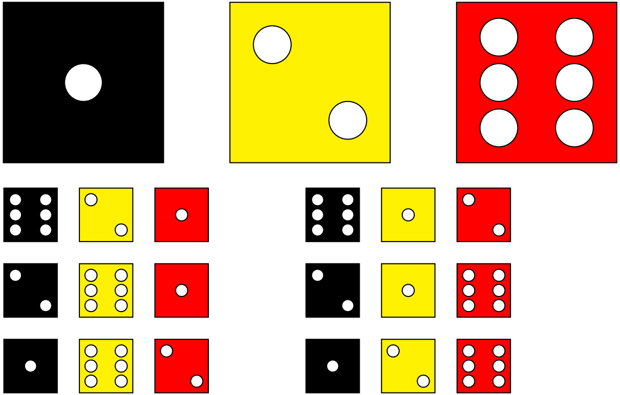
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \to 6 = 3\times 2\times 1 \text{ lancers} \\ 5+3+1 \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \\ 3+3+3. \end{cases}$$



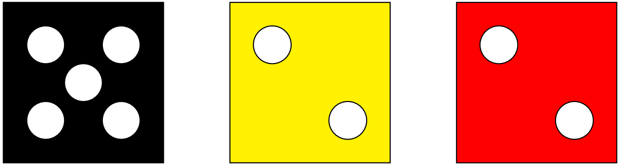
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



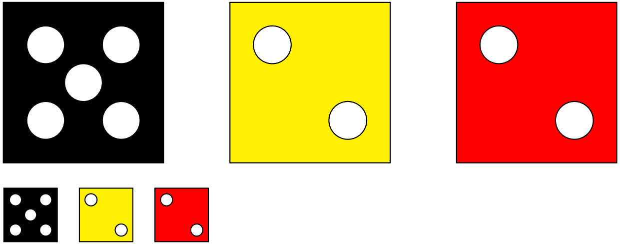
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



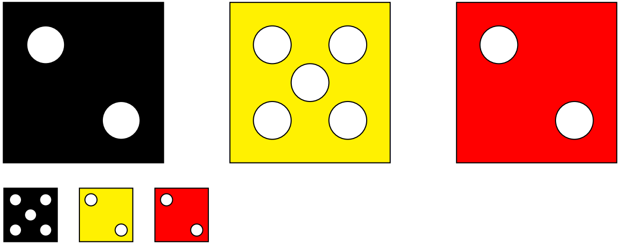
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



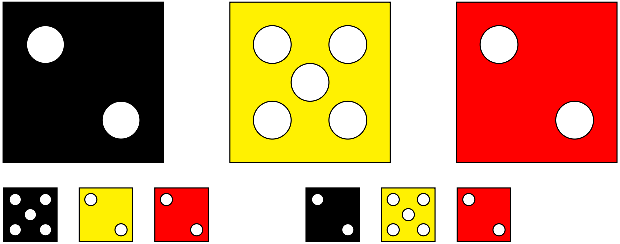
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



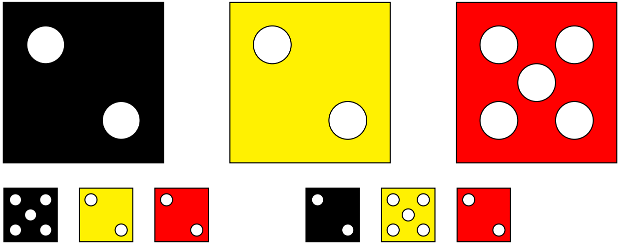
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



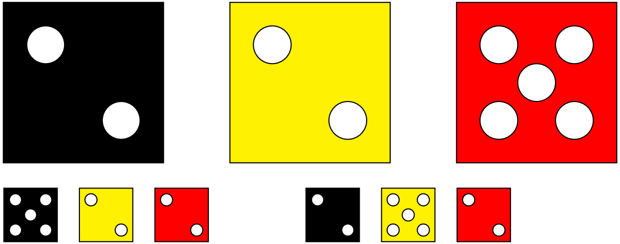
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



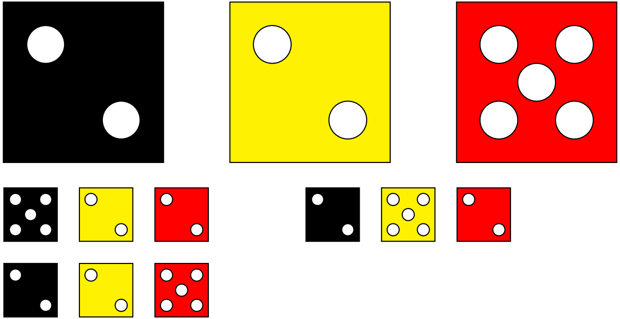
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \longrightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



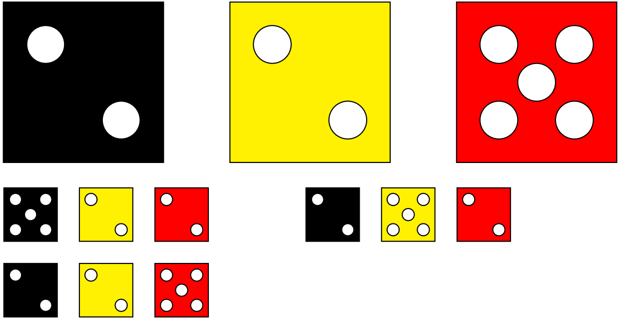
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



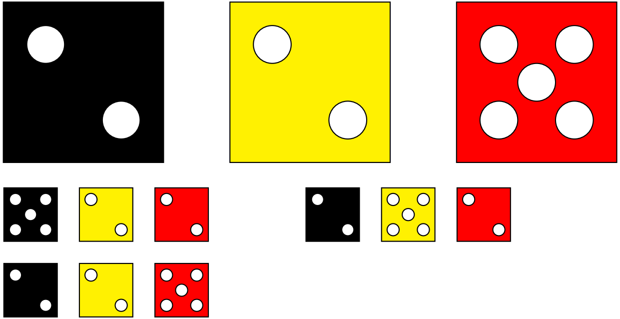
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \to \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \to \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \to \text{3 lancers} \\ 4+4+1 \\ 4+3+2 \to \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



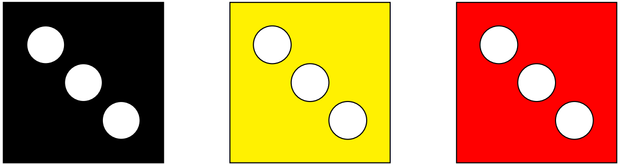
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+4+1 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



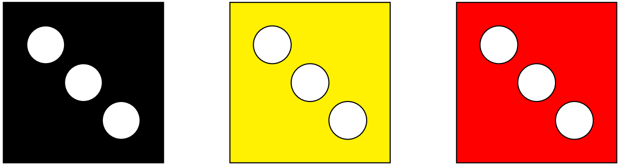
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+4+1 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3. \end{cases}$$



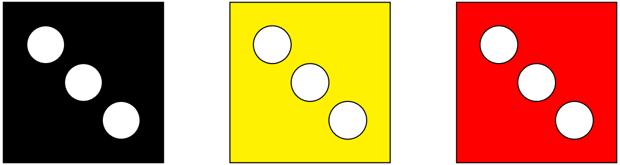
Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+2+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+4+1 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 3+3+3 \rightarrow \text{1 lancer}. \end{cases}$$



Comment obtenir une somme égale à 9?

$$9 = \begin{cases} 6+2+1 \rightarrow 6 \text{ lancers} \\ 5+3+1 \rightarrow 6 \text{ lancers} \\ 5+2+2 \rightarrow 3 \text{ lancers} \\ 4+4+1 \rightarrow 3 \text{ lancers} \\ 4+3+2 \rightarrow 6 \text{ lancers} \\ 3+3+3 \rightarrow 1 \text{ lancer}. \end{cases}$$



Total : 25 lancers

Et pour 10?

$$10 = \begin{cases} 6+3+1 \\ 6+2+2 \\ 5+4+1 \\ 5+3+2 \\ 4+4+2 \\ 4+3+3. \end{cases}$$

Et pour 10?

$$10 = \begin{cases} 6+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 6+2+2 \\ 5+4+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 4+4+2 \\ 4+3+3. \end{cases}$$

Et pour 10?

$$10 = \begin{cases} 6+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 6+2+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 5+4+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 4+4+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+3+3. \rightarrow \text{3 lancers} \end{cases}$$

Et pour 10?

$$10 = \begin{cases} 6+3+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 6+2+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 5+4+1 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 5+3+2 \rightarrow \text{6 lancers} \\ 4+4+2 \rightarrow \text{3 lancers} \\ 4+3+3. \rightarrow \text{3 lancers} \end{cases}$$

Total : 27 lancers

Conclusion

On mesure la chance[1] que la somme des trois dés soit 9 en calculant

$$\frac{\text{nombre de lancers dont la somme fait } 9}{\text{nombre total de lancers}}$$

[1] En mathématique, on parle de “probabilité”

Conclusion

On mesure la chance[1] que la somme des trois dés soit 9 en calculant

$$\frac{\text{nombre de lancers dont la somme fait } 9}{\text{nombre total de lancers}} = \frac{25}{216} \approx 0,1157$$

[1]En mathématique, on parle de “probabilité”

Conclusion

On mesure la chance[1] que la somme des trois dés soit 9 en calculant

$$\frac{\text{nombre de lancers dont la somme fait } 9}{\text{nombre total de lancers}} = \frac{25}{216} \approx 0,1157$$

tandis que la chance que somme des trois dés soit 10 est

$$\frac{\text{nombre de lancers dont la somme fait } 10}{\text{nombre total de lancers}} = \frac{27}{216} \approx 0,125$$

[1] En mathématique, on parle de "probabilité"

Conclusion

On mesure la chance[1] que la somme des trois dés soit 9 en calculant

$$\frac{\text{nombre de lancers dont la somme fait } 9}{\text{nombre total de lancers}} = \frac{25}{216} \approx 0,1157$$

tandis que la chance que somme des trois dés soit 10 est

$$\frac{\text{nombre de lancers dont la somme fait } 10}{\text{nombre total de lancers}} = \frac{27}{216} \approx 0,125$$

Puisque $\frac{25}{216} < \frac{27}{126}$, il y a effectivement plus de chance d'observer une somme égale à 10 qu'une somme égale à 9. Le Duc de Toscane avait bien observé le jeu de dés.

[1] En mathématique, on parle de "probabilité"

Simple ! Mais pourtant...

Simple ! Mais pourtant...

- C'est autour de ce problème que Galilée écrit son mémoire sur les jeux *Sopra le Scoperte de i Dadi*, qui est une des premières "mathématisations" de questions liées au hasard.

Simple ! Mais pourtant...

- C'est autour de ce problème que Galilée écrit son mémoire sur les jeux *Sopra le Scoperte de i Dadi*, qui est une des premières “mathématisations” de questions liées au hasard.
- Des mathématiciens renommés se sont mordu les dents sur des problèmes similaires :

Simple ! Mais pourtant...

- C'est autour de ce problème que Galilée écrit son mémoire sur les jeux *Sopra le Scoperte de i Dadi*, qui est une des premières “mathématisations” de questions liées au hasard.
- Des mathématiciens renommés se sont mordu les dents sur des problèmes similaires :
  - Leibniz (1646-1716), un des pères fondateurs du calcul différentiel et du calcul intégral

Simple ! Mais pourtant...

- C'est autour de ce problème que Galilée écrit son mémoire sur les jeux *Sopra le Scoperte de i Dadi*, qui est une des premières "mathématisations" de questions liées au hasard.
- Des mathématiciens renommés se sont mordu les dents sur des problèmes similaires :
  - Leibniz (1646-1716), un des pères fondateurs du calcul différentiel et du calcul intégral
  - D'Alembert (1717-1783), à qui on doit notamment la plupart des articles sur les mathématiques de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers.*

Somme des entiers

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j = 1+2+3+4+5+6+\cdots$$

Somme des entiers

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j+1}j = 1-2+3-4+5-6+\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j = 1+2+3+4+5+6+\cdots$$

Somme des entiers

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots.$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots.$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S_1.$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

$$S_1 = \frac{1}{2}.$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= 1 - 2 \quad + 3 - 4 \quad + 5 - 6 + \cdots \\ &\quad - 1 + 1 \quad - 1 + 1 \quad - 1 + 1 + \cdots \\ &= \quad -1 \quad + 2 - 3 \quad + 4 - 5 + \cdots \\ &= -S_2 \end{aligned}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots.$$

$$S_2 = \frac{1}{4}.$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

$$\begin{aligned} S_3 - S_2 &= 1 + 2 \quad + 3 + 4 \quad + 5 + 6 + \cdots \\ & - 1 + 2 \quad - 3 + 4 \quad - 5 + 6 + \cdots \\ &= 0 + 4 \quad + 0 + 8 \quad + 0 + 12 + \cdots \\ &= 4 S_3 \end{aligned}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots .$$

$$S_3 = \frac{-1}{12}$$

Somme des entiers

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j = 1+2+3+4+5+6+\cdots = \frac{-1}{12}$$

Somme des entiers

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j = 1+2+3+4+5+6+\cdots = \frac{-1}{12}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} \qquad S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} j \qquad S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \quad S_2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} j \quad S_3 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$
$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$
$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \quad S_2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} j \quad S_3 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

Avec des fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \quad S_2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} j \quad S_3 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

Avec des fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1 - f(-x)) = 1 - \lim_{x\to 0} f(-x) = 1 - \lim_{x\to 0} f(x)$$

Somme des entiers

$$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \quad S_2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} j \quad S_3 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

Avec des fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \,!!!$$

Somme des entiers

$$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \qquad S_2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} j \qquad S_3 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

$$\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

Somme des entiers

$$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \qquad S_2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} j \qquad S_3 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} j$$

$$S_1 = 1 - S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 - S_1 = -S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 - S_2 = 4S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{-1}{12}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \text{et donc } \sum_{j=1}^{+\infty} j = \lim_{N\to+\infty} \frac{N(N+1)}{2} = +\infty.$$

Et pourtant...

L'égalité

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

apparait notamment dans les travaux de Grandi (1671-1742) Euler (1707-1783), Leibniz, Jacques(1654-1705), Jean (1667-1748) et Daniel (1700-1782) Bernoulli.





Oui! Mais...

Riemann (1826-1866) fait partie des premiers “grands” mathématiciens à considérer rigoureusement la convergence des séries.

Oui! Mais...

Riemann (1826-1866) fait partie des premiers “grands” mathématiciens à considérer rigoureusement la convergence des séries.
Il étudie notamment la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}$$

définie pour tout $s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1$

Oui! Mais...

Riemann (1826-1866) fait partie des premiers “grands” mathématiciens à considérer rigoureusement la convergence des séries.
Il étudie notamment la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}$$

définie pour tout $s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1$
Il montre l'*équation fonctionnelle*

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \oint \frac{u^{s-1}}{e^{-u}-1}\, du$$

qui permet d'étendre le domaine de définition de ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Oui! Mais...

Riemann (1826-1866) fait partie des premiers “grands” mathématiciens à considérer rigoureusement la convergence des séries.
Il étudie notamment la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}$$

définie pour tout $s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1$
Il montre l’*équation fonctionnelle*

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \oint \frac{u^{s-1}}{e^{-u}-1}\, du$$

qui permet d’étendre le domaine de définition de ζ à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

$$\zeta(-1) = \frac{-1}{12}.$$

Rigueur mathématique

À la fin du 19ème siècle, les mathématiciens s'intéressant à des problèmes de plus en plus complexes, de plus en plus de paradoxes apparaissent.

Rigueur mathématique

À la fin du 19ème siècle, les mathématiciens s'intéressant à des problèmes de plus en plus complexes, de plus en plus de paradoxes apparaissent.
On tente alors de formaliser le raisonnement mathématique.

Rigueur mathématique

À la fin du 19ème siècle, les mathématiciens s'intéressant à des problèmes de plus en plus complexes, de plus en plus de paradoxes apparaissent.
On tente alors de formaliser le raisonnement mathématique.

On se donne quelques axiomes (aussi peu que possible) et toute la théorie doit découler de ces axiomes.

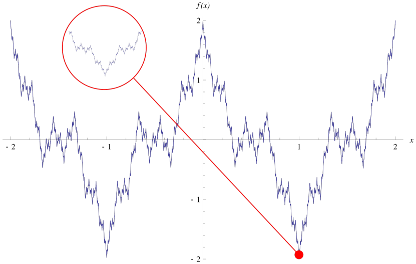
Rigueur mathématique

À la fin du 19ème siècle, les mathématiciens s'intéressant à des problèmes de plus en plus complexes, de plus en plus de paradoxes apparaissent.
On tente alors de formaliser le raisonnement mathématique.

On se donne quelques axiomes (aussi peu que possible) et toute la théorie doit découler de ces axiomes. C'est le début de la logique mathématique.

Des résultats novateurs

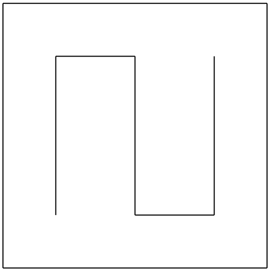
Weierstrass (1815-1897) montre l'existence de fonctions continues mais dérivables nulle part.



$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} \cos(3^j \pi x).$$

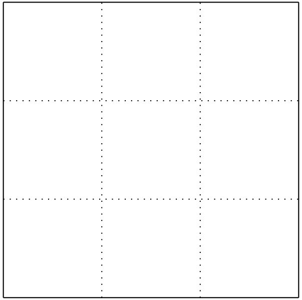
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



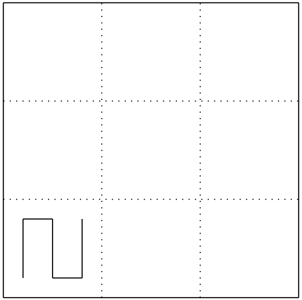
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



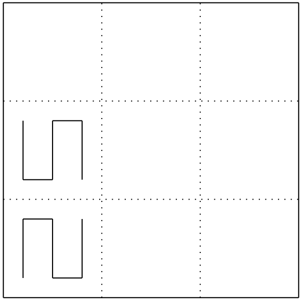
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



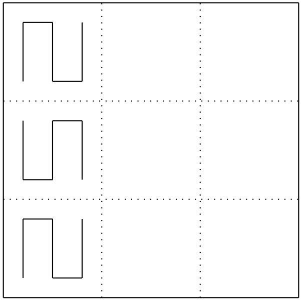
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



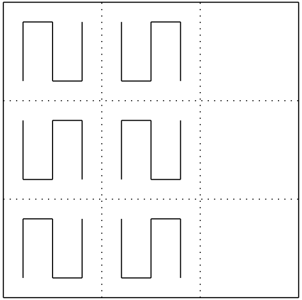
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



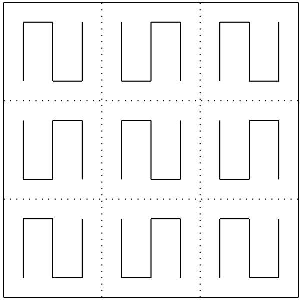
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



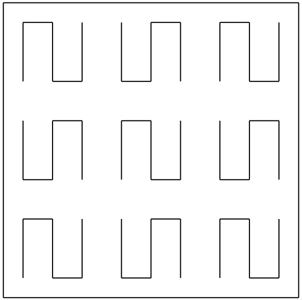
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



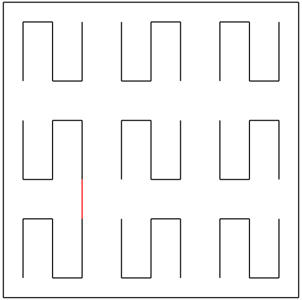
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



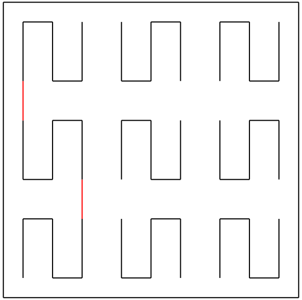
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



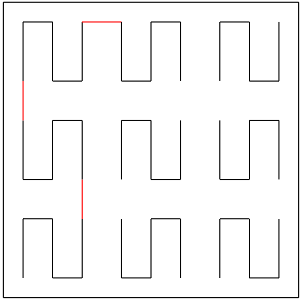
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



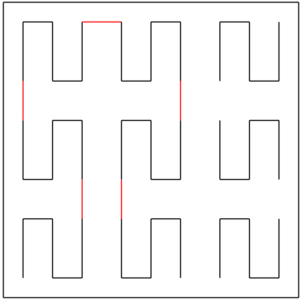
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



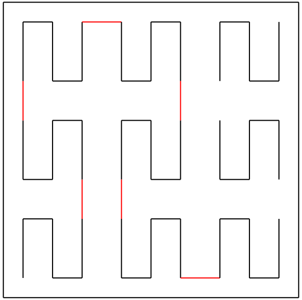
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



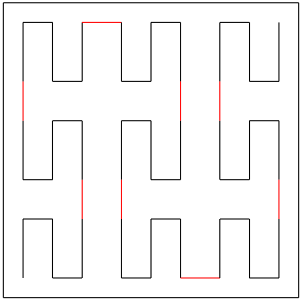
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



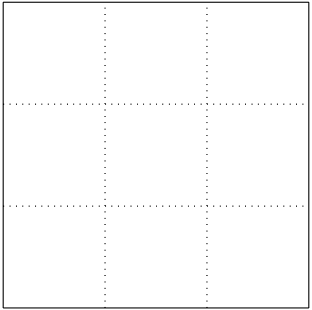
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



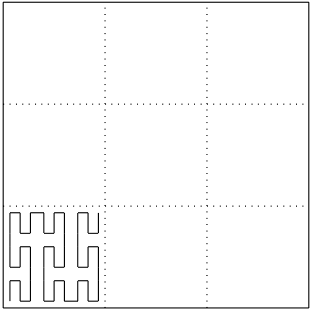
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



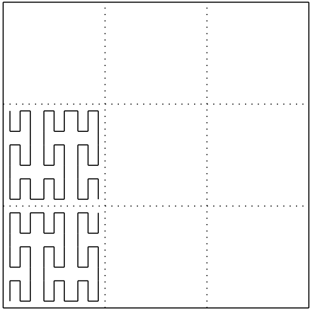
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



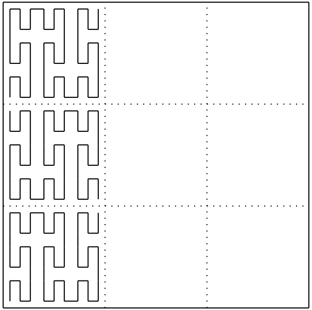
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



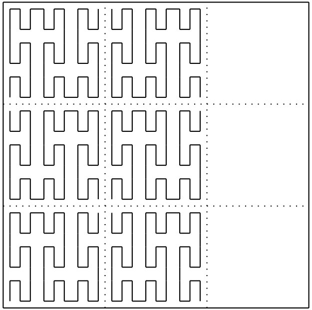
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



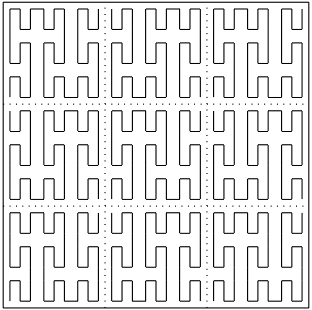
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



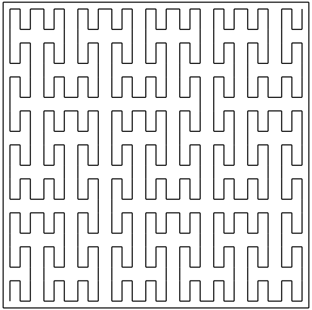
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



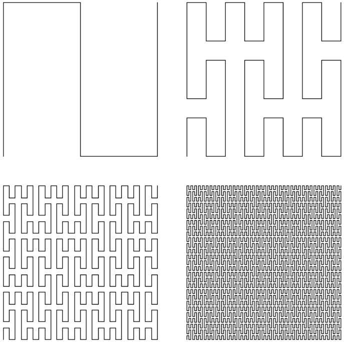
Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



Des résultats novateurs

Peano (1858-1932) définit une courbe continue qui remplit un carré.



Ne pas toujours suivre son intuition

Ces exemples étaient considérés comme paradoxaux par un certain nombre de mathématiciens de l'époque, car contraires aux intuitions.

Ne pas toujours suivre son intuition

Ces exemples étaient considérés comme paradoxaux par un certain nombre de mathématiciens de l'époque, car contraires aux intuitions.

Charles Hermite :

"Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées."

Ne pas toujours suivre son intuition

Cela montre en fait que la théorie mathématique peut produire des résultats éloignés de l'intuition (d'une époque), même en partant d'axiomes qui paraissent évidents.

Les axiomes doivent être avant tout choisis de sorte à ne pas créer d'incohérence, sans obligatoirement être conditionné par leur conformité avec l'intuition.

Ne pas toujours suivre son intuition

Les mathématiciens de la fin du 19ème siècle s'attellent à mettre en place une théorie mathématique qui doit éviter les paradoxes.

Cette théorie mathématique doit permettre de définir les objets mathématiques de base, tels que les nombres naturels.

Paradoxe du barbier

Le conseil municipal d'un village vote un arrêté municipal qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.

Paradoxe du barbier

Le conseil municipal d'un village vote un arrêté municipal qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.

- si le barbier se rase lui-même, il enfreint l'arrêté municipal !

Paradoxe du barbier

Le conseil municipal d'un village vote un arrêté municipal qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.

- si le barbier se rase lui-même, il enfreint l'arrêté municipal !
- si le barbier ne se rase pas lui-même, il enfreint l'arrêté municipal !

Conclusion...

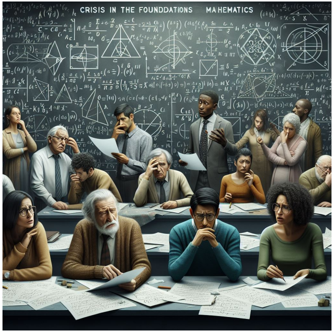
Le conseil municipal d'un village vote un arrêté municipal qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.

Un tel barbier n'existe pas!

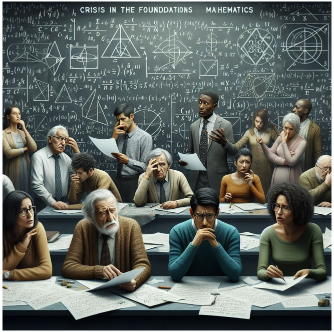
Conclusion...

Le paradoxe de Russell est une version du paradoxe du barbier appliquée à la théorie des ensembles que les logiciens tentent de mettre en place, qui mène à une contradiction : la théorie contient un théorème et son contraire.

Crise des fondements



Crise des fondements



Solution : la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel :
Collection de 8 axiomes qui décrivent les fondements des mathématiques, tout en évitant le paradoxe de Russell.

Axiome du choix

Axiome du choix

Axiome du choix

Axiome du choix

Axiome du choix

- indispensable (au moins dans des formes faibles) notamment pour les fondements de l'analyse mathématique;
- indispensable (dans ses versions les plus fortes) pour démontrer des théorèmes très importants;
- indépendant des 8 axiomes de base de Zermelo-Fraenkel (ZF);
- la théorie ZFC (les axiomes de ZF + l'axiome du choix) est cohérente : on ne peut pas démontrer un résultat et son contraire.

Paradoxe de Banach-Tarski

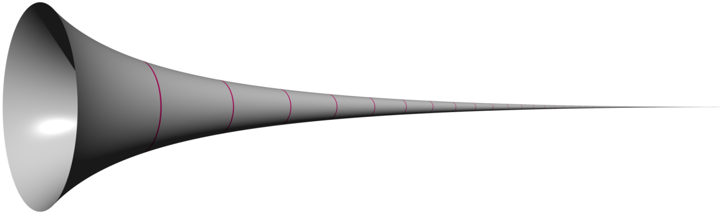
Paradoxe de Banach-Tarski

Certains mathématiciens (rares) refusent de travailler avec l'axiome du choix, puisqu'il engendre des résultats paradoxaux.

Encore une flopée de résultats étonnants

Encore une flopée de résultats étonnants

- Géométrie : la trompette de Gabriel d'aire infinie mais de volume fini.



Encore une flopée de résultats étonnants

- Géométrie : la trompette de Gabriel d'aire infinie mais de volume fini.
- Statistique : en moyenne, les amis d'une personne ont plus d'amis que cette personne.

Encore une flopée de résultats étonnants

- Géométrie : la trompette de Gabriel d'aire infinie mais de volume fini.
- Statistique : en moyenne, les amis d'une personne ont plus d'amis que cette personne.
- Probabilité : dans une classe de plus de 23 étudiants, il y a plus d'une chance sur deux que deux élèves soient nés le même jour.

Encore une flopée de résultats étonnants

- Géométrie : la trompette de Gabriel d'aire infinie mais de volume fini.
- Statistique : en moyenne, les amis d'une personne ont plus d'amis que cette personne.
- Probabilité : dans une classe de plus de 23 étudiants, il y a plus d'une chance sur deux que deux élèves soient nés le même jour.
- Probabilité : un singe qui tape indéfiniment et au hasard sur une machine à écrire arrivera *presque sûrement* à rédiger la pièce de Shakespeare *Hamlet*, entièrement et sans fautes.