

## Mettre en question la bivalence du vrai et du faux

La bivalence du vrai et du faux est un principe central au fondement de la logique standard. En ne reconnaissant pour les propositions que deux valeurs de vérité, tout à la fois exclusives l'une de l'autre – de sorte qu'est valide le principe de non-contradiction  $\neg(p \wedge \neg p)$  – et complémentaires l'une de l'autre – de sorte qu'est valide le principe du tiers-exclu  $p \vee \neg p$  –, le principe de bivalence donne aussi et surtout à la négation un sens vérifonctionnel extrêmement simple, qui consiste en une simple inversion de valeur de vérité.

Aussi simple et évidente qu'elle soit, cette bivalence a toutefois été régulièrement mise en question, et ce dès le début de l'histoire de la logique. Il y a en effet quelques bonnes raisons de douter de sa validité universelle, bonnes raisons que les logiciens ne peuvent totalement ignorer et qu'ils ont dès lors cherché à prendre en compte par diverses solutions qui tantôt préservent et tantôt corrigent le principe de bivalence. On peut alors se demander quelle est *la* bonne logique et si elle respecte effectivement le principe de bivalence. Ce sont ces préoccupations fondamentales que nous allons ici évoquer et tenter de démêler.

### 1. Raisons de douter de la bivalence

Nombre de raisons ont été évoquées, au cours de l'histoire de la logique, pour mettre en cause la bivalence. Pointons en particulier :

- Les « futurs contingents », c'est-à-dire les énoncés contingents du futur dont la valeur de vérité n'est pas encore déterminée : « *Il y aura une bataille navale demain* » ;
- Les énoncés mathématiques indémontrables, et plus généralement tous les énoncés invérifiables : « *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux* » mais aussi « *L'âme est immortelle* » ;
- Les énoncés dénués de valeur de vérité parce qu'ils sont dénués de sens, notamment parce qu'ils commettent des « erreurs de catégorie » (category-mistakes) : « *Les nombres pairs sont rouges* » ;
- Les énoncés avec des termes singuliers « non dénotant », c'est-à-dire de termes singuliers qui, pour des raisons contingentes ou nécessaires, sont dénués de référent : « *L'actuel roi de France est chauve* », « *Le carré rond est un polygone* ».

Dans cette rubrique, on retrouve aussi les énoncés de fiction, dont les termes singuliers (« Sherlock Holmes ») ne désignent rien de réel. Mais on voudra alors éventuellement faire une différence entre énoncés de fiction qui n'ont pas de valeur de vérité parce que ce dont ils parlent n'existe pas vraiment – « *Sherlock Holmes habite au 221b Baker Street* » – et énoncés de fiction qui n'ont pas de valeur de vérité parce qu'en outre, même dans la fiction, ils ne sont ni vrais ni faux – « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* » ;

- Les énoncés comportant des termes vagues : « *Bruno Leclercq est chauve* » [alors que Bruno Leclercq n'a plus beaucoup de cheveux] ;
- Les énoncés dialectiques de type héraclitéen, hégélien ou marxiste : « Je me baigne dans le même fleuve qu'hier » [alors que je me baigne au même endroit mais pas dans exactement dans la même eau], « *Le ceci est le singulier* » [alors que « ceci » sert universellement à désigner un objet singulier, mais chaque fois un objet différent] ou « *Le maître domine l'esclave* » [alors que le maître a aussi besoin de son esclave et, à cet égard, en est à son tour l'esclave] ;
- Les énoncés de dynamique temporelle : « *Bruno Leclercq est assis* » [alors qu'il est tantôt assis, tantôt debout, tantôt couché, tantôt accroupi, ...] ;
- Les paradoxes de l'auto-référence : « *La présente phrase est fausse* » [énoncé qui doit être faux s'il est vrai et vrai s'il est faux] ;
- Les « paradoxes » de la mécanique quantique : « *La lumière est à la fois corpusculaire et ondulatoire* » [alors que ces propriétés sont en principe incompatibles] ;
- Les antinomies éthiques ou juridiques : « *Ce guérisseur doit tenter ce qu'il peut pour sauver son voisin condamné par la maladie mais il ne peut rien tenter pour lui* » [là où le guérisseur a le devoir de venir en aide à une personne en danger mais n'a pas le droit de pratiquer l'exercice illégal de la médecine].

Tous ces énoncés sont autant de défis posés au principe de bivalence. Certains, au début de la liste, semblent n'être ni vrai ni faux ; d'autres, comme les énoncés à termes vagues, semblent plus ou moins vrais (et plus ou moins faux) ; d'autres encore, comme en fin de liste, semblent tout à la fois vrais et faux.

Face à ces défis, les logiciens ont développé différentes stratégies, dont certaines consistent essentiellement à s'efforcer de préserver coûte que coûte la validité du principe de bivalence et à traiter des contre-exemples sur un terrain extra-logique, et d'autres consistent à corriger de manière plus ou moins radicale le principe de bivalence pour rendre compte de ces contre-exemples sur le plan logique lui-même.

## **2. Les stratégies de préservation**

Parmi les stratégies de préservation, on pourra, avec Susan Haack (1974), distinguer des stratégies radicalement extra-logiques qui rejettent purement et simplement les contre-exemples comme n'exprimant pas vraiment des propositions et donc ne relevant pas vraiment de la sphère logique ; des stratégies de paraphrase qui suggèrent des manières de reformuler les contre-exemples pour les transformer en propositions qui respectent bel et bien le principe de bivalence ; ou encore des stratégies qui font valoir un simple manque d'information empêchant d'identifier la valeur de vérité des énoncés concernés sans pour autant remettre en cause le fait qu'ils ont bel et bien une et une seule valeur de vérité déterminée.

### **a. Stratégies résolument extra-logiques (*no item strategies*)**

Susan Haack qualifie de « *non item strategy* » toute stratégie qui nie qu'il y ait vraiment, dans les contre-exemples avancés, des propositions susceptibles de réfuter le principe de bivalence. Bien qu'apparemment affirmatifs et descriptifs, les énoncés évoqués à titre de contre-exemples ne véhiculent pas vraiment des propositions et ils ne sont donc pas évaluables sur le plan de la valeur de vérité. Une stratégie de ce type peut en particulier être utilisée pour traiter le cas :

1) des énoncés qui sont grammaticalement mal construits (donc insensés), comme les énoncés fondés sur des erreurs de catégorie (*category-mistakes*) – « *Les nombres pairs sont rouges* » – ou sur des paradoxes de l'auto-référence – « *La présente phrase est fausse* ». De tels énoncés, disent ceux qui adoptent la stratégie « *no item* », ne véhiculent qu'en apparence des propositions, mais en fait ils sont tout aussi mal construits qu'un énoncé manifestement mal formé comme « *Vert est ou* ».

2) des énoncés qui comportent des termes sans valeur sémantique déterminée, de sorte qu'ils n'ont pas de conditions de vérité déterminée et donc à nouveau pas de sens déterminé, comme par exemple les énoncés avec termes singuliers non dénotant – « *L'actuel roi de France est chauve* », « *Le carré rond est un polygone* » – ou les énoncés avec des termes vagues, dont les limites d'application ne sont pas claires – « *Bruno Leclercq est chauve* ». De tels énoncés, disent ceux qui adoptent la stratégie « *no item* », ne véhiculent qu'en apparence des propositions, mais en fait, parce que certains de leurs termes n'ont pas de sens ou pas de sens clair, ils sont tout aussi dénués de sens et donc de valeur de vérité que « *Blublu est chauve* » [là où « *Blublu* » est un nom propre qui ne désigne personne] ou « *Bruno Leclercq est blublu* » [là où « *blublu* » est un prédicat dénué de condition d'application, donc de sens].

3) des énoncés qui relèvent d'autres actes de langage que des affirmations, comme c'est par exemple le cas des énoncés de fiction – « *Sherlock Holmes habite au 221b Baker Street* » –, qui consistent moins à affirmer une proposition, susceptible d'être vraie et fausse, qu'à « *prétendre* », c'est-à-dire à inviter les auditeurs à imaginer, que telle ou telle chose est le cas. De tels énoncés, disent ceux qui adoptent la stratégie « *no item* », ne sont qu'en apparence des affirmations de propositions, mais sont en fait aussi peu des affirmations que le sont des ordres – « *Mange ta soupe !* » – ou, pour donner des exemples de phrases apparemment affirmatives, que le sont des promesses – « *Je serai là pour toi si tu as besoin* » – ou des baptêmes – « *Notre fille s'appelle 'Marie'* » [au moment de la déclaration de naissance].

Dans tous ces cas, il s'agit donc d'extraire de la sphère logique les prétendus contre-exemples de sorte qu'il n'y ait plus rien d'étonnant à ce qu'ils ne respectent pas le principe de bivalence.

### **b. Stratégies de reformulation (*misleading form strategy*)**

Susan Haack appelle « *misleading form strategy* » toute stratégie qui considère que les violations des lois logiques ne sont qu'apparentes et seulement dues à une lecture littérale d'énoncés dont le sens authentique n'apparaît qu'après reformulation. Or, une fois correctement reformulées,

ces affirmations respectent les lois logiques et en particulier le principe de bivalence. Une stratégie de ce type peut en particulier être utilisée pour traiter le cas :

1) des énoncés dont les conditions de vérité sont en apparence indéterminées parce qu'elles ne sont pas intégralement explicitées. C'est en particulier le cas des énoncés qui comportent implicitement des indexicaux, en particulier la référence à un lieu ou à moment du temps particulier – « *Bruno Leclercq est assis [maintenant]* », « *Il pleut [ici et maintenant]* » –, énoncés que l'on peut chercher à reformuler sous forme de « phrases éternelles », c'est-à-dire de phrases dont on a précisé toutes les circonstances dans les conditions de vérité pour que leur valeur de vérité soit parfaitement déterminée – « *Bruno Leclercq est assis le 8 mars 2023 à 11h42 [GMT]* », « *Il pleut sur le Mont Ngafula à Kinshasa le 8 mars 2023 à 11h42 [GMT]* ». De la même façon, les « futurs contingents » – « *Il y aura une bataille navale demain* » – peuvent être reformulés en phrases éternelles dotées d'une valeur de vérité déterminée – « *Il y a une bataille navale au large de l'île de Chios le 7 août 356 av. JC* ».

2) des énoncés dont le sens de certains termes est en apparence indéterminé. C'est en particulier le cas des énoncés avec des termes vagues – « *Bruno Leclercq est chauve* » –, dont on peut chercher à préciser plus strictement les conditions d'application – on décide d'appeler « chauve » qui a moins de 5000 cheveux, de sorte que l'énoncé prend le sens précis de « Bruno Leclercq a moins de 5000 cheveux ». Mais ce peut aussi le cas d'énoncés qui sont apparemment à la fois vrais et faux parce qu'ils se prêtent en fait à deux interprétations distinctes que l'on peut chercher à séparer nettement par deux reformulations distinctes – « *Je me baigne au même endroit qu'hier* » versus « *Je me baigne dans la même eau qu'hier* » ; « *Le ceci désigne toujours un individu singulier* » versus « *Le ceci est un mécanisme de désignation universel* » ; « *Le maître impose son rapport de force à l'esclave* » versus « *Le maître dépend de l'esclave* ». De même peut-être encore pour des énoncés qui ne seraient « paradoxaux » qu'en apparence et dans la mesure où ils seraient en fait ambigus mais pourraient être désambiguïsés par une reformulation qui éviterait ce paradoxe – « *Ce guérisseur doit (éthiquement) tenter ce qu'il peut pour sauver son voisin condamné par la maladie mais il ne peut (légalement) rien tenter pour lui* », « *La lumière est (sous tel aspect) corpusculaire et (sous tel autre aspect) ondulatoire* ».

3) des énoncés qui semblent porter sur des objets inexistantes ou même impossibles – « *L'actuel roi de France est chauve* », « *Le carré rond est un polygone* » – mais que l'on peut reformuler pour montrer qu'ils portent en fait sur des objets existants mais leur attribuent des propriétés qui rendent ces énoncés tout simplement faux – « *Il y a, parmi les objets du monde, un et seul objet qui est actuel roi de France et il est chauve* », « *Il y a, parmi les objets du monde, un objet qui est (ou des objets qui sont) à la fois carré(s) et rond(s) et c'est (ce sont) un (des) polygone(s)* ». Les énoncés de fiction – « *Sherlock Holmes habite au 221b Baker Street* » – peuvent être reformulés de la sorte de manière à être tous faux – « *Il y a, parmi les objets du monde, un détective ami du Docteur Watson et ennemi du Professeur Moriarty (et possédant encore tout un tas d'autres propriétés énoncées dans l'œuvre de Conan Doyle) et il habite au 221b Baker Street* ».

Dans tous ces cas, il s'agit donc de dépasser des violations du principe de bivalence qui ne sont qu'apparentes en reformulant les énoncés de telle manière qu'ils aient une et une seule des deux valeurs de vérité.

### c. Stratégies qui font valoir un manque d'information (*truth-value gap strategies*)

Susan Haack appelle « *truth-value gap strategy* » toute stratégie qui présente l'indécidabilité d'un énoncé comme épistémique plutôt que logique ; l'énoncé a bien une et une seule valeur de vérité, mais nous ne la connaissons simplement pas. Une stratégie de ce type peut en particulier être utilisée pour traiter le cas :

1) des futurs contingents – « *Il y aura une bataille navale demain* » –, qui ont en fait une valeur de vérité déterminée même si nous ne la connaissons pas encore, ou des énoncés invérifiables – « *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux* », « *L'âme est immortelle* » –, qui ont une valeur de vérité déterminée même si nous ne pouvons pas la connaître.

2) des énoncés de fiction dont la valeur de vérité semble indéterminée dans la fiction elle-même – « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* » –, dont on peut à nouveau dire que leur valeur de vérité est en fait bel et bien déterminée dans la fiction, mais qu'elle nous est inconnue parce que l'auteur de cette fiction ne nous l'a pas révélée.

Dans tous ces cas, il s'agit donc de réserver l'indétermination à ce que l'on connaît mais de préserver les lois logiques classiques pour ce qui est.

D'un point de vue formel, cela peut notamment se faire par un dispositif technique comme la « *supervaluation* » (Van Fraassen 1969), qui envisage plusieurs hypothèses (ontologiques) déterminées et en tire des conséquences (épistémiques) éventuellement indéterminées :

Si  $\alpha_{Hyp.1}=V$  et  $\alpha_{Hyp.2}=V$ , alors  $\alpha = V$

Si  $\alpha_{Hyp.1}=F$  et  $\alpha_{Hyp.2}=F$ , alors  $\alpha = F$

Si  $\alpha_{Hyp.1}=V$  et  $\alpha_{Hyp.2}=F$ , alors  $\alpha = I$

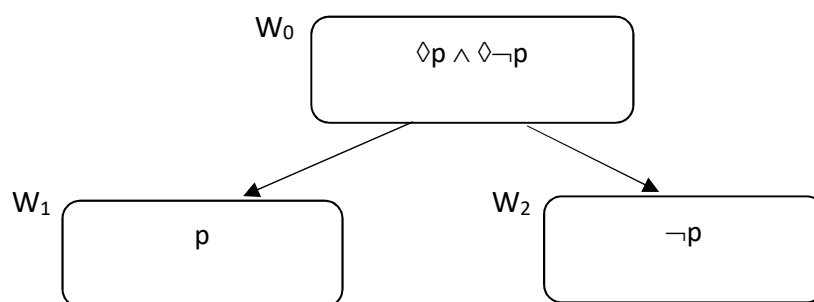
[Si  $\alpha$  est vrai dans toutes les hypothèses,  $\alpha$  est vrai ; Si  $\alpha$  est faux dans toutes les hypothèses,  $\alpha$  est faux ; Si  $\alpha$  est vrai dans une hypothèse et faux dans l'autre,  $\alpha$  est indéterminé (du point de vue épistémique)].

Ce dispositif a l'avantage de préserver entièrement les lois logiques caractéristiques du principe de bivalence, et ce même sur le plan épistémique :

|           | <b>p</b> |          | <b>¬p</b> |          | <b>p∨¬p</b> |          | <b>p∧¬p</b> |          | <b>¬(p∧¬p)</b> |          | <b>p⊃p</b> |          |
|-----------|----------|----------|-----------|----------|-------------|----------|-------------|----------|----------------|----------|------------|----------|
| <b>1</b>  | <b>V</b> |          | <b>F</b>  |          | <b>V</b>    |          | <b>F</b>    |          | <b>V</b>       |          | <b>V</b>   |          |
| <b>2a</b> | <b>V</b> | <b>I</b> | <b>F</b>  | <b>I</b> | <b>V</b>    | <b>V</b> | <b>F</b>    | <b>F</b> | <b>V</b>       | <b>V</b> | <b>V</b>   | <b>V</b> |
| <b>2b</b> | <b>F</b> |          | <b>V</b>  |          | <b>V</b>    |          | <b>;F</b>   |          | <b>V</b>       |          | <b>V</b>   |          |
| <b>3</b>  | <b>F</b> |          | <b>V</b>  |          | <b>V</b>    |          | <b>F</b>    |          | <b>V</b>       |          | <b>V</b>   |          |

[Dans ce tableau, les lignes 1 et 3 correspondent aux cas classiques où, respectivement,  $p$  est Vrai et  $p$  est Faux ; la ligne 2 correspond à un cas d'indétermination (épistémique) résultant de la coexistence de deux hypothèses (2a) et (2b), qui sont toutes deux (ontologiquement) déterminées ; chacune de ces deux hypothèses se comporte classiquement, de sorte que dans tous les cas  $p \vee \neg p$  est Vrai et  $p \wedge \neg p$  est Faux.]

Un autre dispositif technique permettant de rendre compte de l'incertitude épistémique en conservant la détermination sur le plan logique est modal (Kripke 1963) :



[Le monde initial  $W_0$  est celui de l'incertitude épistémique, où il est tout à la fois possible que  $p$  soit Vrai et que  $p$  soit Faux ; cela implique qu'il y a un monde possible  $W_1$  où  $p$  est Vrai et un monde possible  $W_2$  où  $p$  est Faux, mais il n'y a aucun monde qui violerait les lois logiques classiques et où  $p$  serait à la fois Vrai et Faux]

Toutes ces stratégies, on le voit, veillent donc à préserver le principe de bivalence et les lois de la logique classique. Les prétendus contre-exemples à ces lois peuvent être écartés comme simplement apparents ; ce ne sont pas d'authentiques propositions, ou ce sont des propositions mal formulées, ou ce sont des compte-rendus d'incertitude épistémiques plutôt que des propositions sur comment les choses sont.

Bien qu'elles partagent la même démarche de disqualifier la valeur logique de ces contre-exemples, ces stratégies, notons-le, sont distinctes les unes des autres et incompatibles les unes avec les autres. Ainsi, traiter l'énoncé de fiction « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* » comme une invitation à imaginer (*pretence*) plutôt que comme une affirmation, avec pour conséquence que cet énoncé n'est ni vrai ni faux, n'est pas la même chose que de le traiter comme une proposition mal formulée ayant pour sens réel « *Il y a, parmi les objets du monde, un détective ami du Docteur Watson et ennemi du Professeur Moriarty (+ possédant tout un tas d'autres propriétés énoncées dans l'œuvre de Conan Doyle) et il habite au 221b Baker Street* », ce qui implique cette fois que cet énoncé est faux, et pas non plus la même chose que de le traiter comme une incertitude épistémique entre deux propositions dont la valeur de vérité est déterminée, ce qui veut dire que la proposition a bien une des deux valeurs de vérité mais que nous ne la connaissons pas. Entre ces différentes stratégies, il faut donc choisir. Et on peut se demander quelle est la stratégie légitime pour la logique.

Mais d'autres stratégies sont encore possibles, qui remettent cette fois en cause le principe de bivalence.

### 3. Les stratégies de révision

Parmi les stratégies de révision, on pourra distinguer des stratégies qui rejettent certaines lois de la logique classique et celles qui remettent plus fondamentalement en cause le principe même de la bivalence.

#### a. Stratégies de rejet de certaines lois logiques classiques

On peut rejeter certaines des lois caractéristiques de la bivalence sans les contester toutes.

Ainsi, on peut contester la validité de loi du tiers-exclu sans celle du principe de non-contradiction. C'est ce que fait la logique intuitionniste dans une perspective vérificationniste, qui conteste qu'on puisse totalement séparer incertitude épistémique et indétermination (onto)logique ; si un énoncé est par principe invérifiable, sa valeur de vérité est indéterminée (et pas seulement inconnue). C'est notamment le cas :

1) des énoncés mathématique indémontrables – « *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux* » – et des énoncés empiriquement invérifiables – « *L'âme est immortelle* » –, dont il serait dogmatique de dire que la valeur de vérité est déterminée même si rien ne permet de la déterminer.

2) des futurs contingents – « *Il y aura une bataille navale demain* » –, dont on peut soutenir que la valeur de vérité n'est pas seulement inconnue mais (encore) indéterminée au moment où on les énonce.

3) des énoncés de fiction dont la valeur de vérité est indéterminée dans la fiction elle-même – « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* » –, dont on peut dire que la valeur de vérité n'est pas seulement inconnue mais à jamais indéterminée.

En logique intuitionniste,  $\alpha$  est Vrai si et seulement si  $\alpha$  est démontrable/vérifiable. C'est pourquoi on comprend :

$\neg\alpha$  comme : on peut démontrer/vérifier que  $\alpha$  est Faux

$\alpha \wedge \beta$  comme : on peut démontrer/vérifier que  $\alpha$  et démontrer/vérifier que  $\beta$

$\alpha \vee \beta$  comme : on peut démontrer/vérifier que  $\alpha$  ou démontrer/vérifier que  $\beta$

$\alpha \supset \beta$  comme : si on peut démontrer/vérifier que  $\alpha$ , on peut démontrer/vérifier que  $\beta$

En conséquence :

Il faut distinguer  $\alpha$  = Faux de  $\neg\alpha$  = Vrai.

$\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$  Mais  $\not\models \alpha \vee \neg\alpha$

[Le principe de non-contradiction est valide, mais le principe du tiers-exclu ne l'est pas]

$\models \alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$  Mais  $\not\models \neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$

[Le principe de double-négation est valide dans un sens, mais pas dans l'autre]

$\neg(\alpha \vee \beta) \models \neg\alpha \wedge \neg\beta$   $\neg\alpha \wedge \neg\beta \models \neg(\alpha \vee \beta)$   $\neg\alpha \vee \neg\beta \models \neg(\alpha \wedge \beta)$  Mais  $\neg(\alpha \wedge \beta) \not\models \neg\alpha \vee \neg\beta$

[Les lois de De Morgan ne sont pas toutes valides, de sorte que la conjonction et la disjonction inclusive ne peuvent plus être définies l'une par l'autre]

$\neg\alpha \vee \beta \models \alpha \supset \beta$  Mais  $\alpha \supset \beta \not\models \neg\alpha \vee \beta$

[La disjonction inclusive et le conditionnel ne peuvent pas être définis l'un par l'autre]

$\alpha \supset \beta \models \neg\beta \supset \neg\alpha$  Mais  $\neg\alpha \supset \neg\beta \not\models \beta \supset \alpha$

[La contraposition est valide dans un sens mais pas dans l'autre]

$\neg\alpha \models \alpha \supset \beta$   $\alpha \models \beta \supset \alpha$   $\alpha \wedge \neg\alpha \models \beta$  Mais  $\alpha \not\models \beta \vee \neg\beta$

[*Ex falso quodlibet sequitur*, *Ex quodlibet verum sequitur*, *Ex contradictione quodlibet sequitur* (Principe d'explosion) sont valides, mais pas *Ex quodlibet necessarium sequitur*]

$\not\models (\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$   $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \not\models \alpha$

[Certains « paradoxes » de l'implication ne sont plus valides]

À l'inverse, on peut admettre le caractère effectif et non seulement apparent de contradictions et dès lors rejeter le principe de non-contradiction pour rendre compte :

1) des contradictions (héraclitéennes, hégéliennes, marxistes) : il est tout à la fois vrai et faux que « Je me baigne dans le même fleuve qu'hier », que « Le ceci est le singulier », que « Le maître domine l'esclave ».

2) des paradoxes de l'auto-référence : il est tout à la fois vrai et faux que « La présente phrase est fausse ».

3) des « paradoxes » de la mécanique quantique : il est tout à la fois vrai et faux que « La lumière est corpusculaire ».

4) des antinomies déontiques : il est tout à la fois vrai et faux que « Ce guérisseur doit tenter ce qu'il peut pour sauver son voisin condamné par la maladie ».

Dans ces logiques, dites « paraconsistantes », qui admettent des violations du principe de non-contradiction, on cherche toutefois à éviter que puisse alors être démontré tout et n'importe quoi en vertu du principe d'explosion ( $\alpha \wedge \neg\alpha \models \beta$ ). C'est pourquoi on abandonne généralement au moins un des deux principes suivants :

$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$  (Introduction de la disjonction)

$\alpha \vee \beta, \neg \alpha \vdash \beta$  (Syllogisme disjonctif)

Que l'on remette en question le principe du tiers-exclu ou le principe de non-contradiction, on modifie radicalement le sens de la négation (qui n'inverse plus simplement la valeur de vérité) et par là les rapports entre les deux valeurs de vérité, qui n'apparaissent plus complémentaires l'une de l'autre ou plus exclusives l'une de l'autre.

Mais on peut aussi, plus explicitement encore, rejeter la dualité des valeurs de vérité.

### **b. Stratégies des logiques multivalentes**

Au-delà du Vrai et du Faux, on peut admettre d'autres valeurs de vérité.

Ainsi en va-t-il des **logiques « trivalentes »**, qui admettent trois valeurs de vérité, à savoir

- **le Vrai, le Faux et l'Indéterminé** pour traiter notamment les cas

1) des futurs contingents : « *Il y aura une bataille navale demain* ».

2) des énoncés indémonstrables et plus généralement invérifiables : « *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux* », « *L'âme est immortelle* ».

3) des énoncés avec termes singuliers non dénotant : « *L'actuel roi de France est chauve* », « *Le carré rond est un polygone* », « *Sherlock Holmes habite au 221b Baker Street* », mais aussi « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* »

- **le Vrai, le Faux et l'Insensé** pour traiter notamment les cas

1) des énoncés avec erreurs de catégorie : « *Les nombres pairs sont rouges* »

2) des paradoxes de l'auto-référence : « *La présente phrase est fausse* »

Sur la base de cette trivalence peut être construite une logique propositionnelle vérifonctionnelle. Elle sera évidemment différente selon que la troisième valeur de vérité est l'Indéterminé ou l'Insensé. En effet, on peut considérer qu'une disjonction inclusive est vraie dès qu'un de ses deux termes est Vrai même si l'autre est Indéterminé [le Vrai l'emporte dans la disjonction inclusive], ou qu'une conjonction est fausse dès qu'un de ses deux termes est Faux même si l'autre est Indéterminé [le Faux l'emporte dans la conjonction]. Mais on considérera au contraire qu'une disjonction inclusive ou une conjonction sont insensées dès qu'un de ses termes est Insensé [l'Insensé l'emporte pour tous les connecteurs]. On aura donc les tables suivantes :

**Logique trivalente Vrai-Faux-Indéterminé**  
(Łukasiewicz 1920, Kleene 1945)

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| V   | F        |
| I   | I        |
| F   | V        |

| $p \wedge q$ | V | I | F |
|--------------|---|---|---|
| V            | V | I | F |
| I            | I | I | F |
| F            | F | F | F |

| $p \vee q$ | V | I | F |
|------------|---|---|---|
| V          | V | V | V |
| I          | V | I | I |
| F          | V | I | F |

| $p \supset q$ | V | I     | F |
|---------------|---|-------|---|
| V             | V | I     | F |
| I             | V | V/I * | I |
| F             | V | V     | V |

| $p \equiv q$ | V | I | F |
|--------------|---|---|---|
| V            | V | I | F |
| I            | I | V | I |
| F            | F | I | V |

\* V dans le systèmes de Łukasiewicz pour préserver la validité de  $p \supset p$ , I dans le système de Kleene.

**Logique trivalente Vrai-Faux-Insensé**  
(Bochvar 1939, Smiley 1959)

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| V   | F        |
| I   | I        |
| F   | V        |

| $p \wedge q$ | V | I | F |
|--------------|---|---|---|
| V            | V | I | F |
| I            | I | I | I |
| F            | F | I | F |

| $p \vee q$ | V | I | F |
|------------|---|---|---|
| V          | V | I | V |
| I          | I | I | I |
| F          | V | I | F |

| $p \supset q$ | V | I | F |
|---------------|---|---|---|
| V             | V | I | F |
| I             | I | I | I |
| F             | V | I | V |

| $p \equiv q$ | V | I | F |
|--------------|---|---|---|
| V            | V | I | F |
| I            | I | I | I |
| F            | F | I | V |

Dans ces logiques vérifonctionnelles, certaines lois logiques classiques ne sont plus valides (au sens de Vrai dans toutes les interprétations). Ainsi, dans les systèmes de Łukasiewicz et de Kleene,

$$\not\models \alpha \vee \neg\alpha \qquad \not\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

[Ni la loi du tiers-exclu ni la loi de non-contradiction ne sont valides car les deux formules ont la valeur Indéterminé quand  $\alpha$  a la valeur Indéterminé.]

Au lieu d'une logique trivalente, on peut aussi, comme c'est le cas chez Łukasiewicz 1953, mais aussi et surtout Dunn 1976 et Belnap 1977, définir une **logique quadrivalente** avec **le Vrai, le Faux, le Vrai-et-faux et le Ni-Vrai-ni-Faux**. Cela permettrait de traiter notamment comme (tout à la fois) Vrai-et-Faux :

1) les contradictions (héraclitéennes, hégéliennes, marxistes) : il est tout à la fois vrai et faux que « *Je me baigne dans le même fleuve qu'hier* », que « *Le ceci est le singulier* », que « *Le maître domine l'esclave* ».

2) les paradoxes de l'auto-référence : il est tout à la fois vrai et faux que « *La présente phrase est fausse* ».

3) les « paradoxes » de la mécanique quantique : il est tout à la fois vrai et faux que « *La lumière est corpusculaire* ».

4) les antinomies déontiques : il est tout à la fois vrai et faux que « *Ce guérisseur doit tenter ce qu'il peut pour sauver son voisin condamné par la maladie* ».

et de traiter notamment comme Ni-Vrai-Ni-Faux :

1) les futurs contingents : « *Il y aura une bataille navale demain* ».

2) les énoncés indémontrables et plus généralement invérifiables : « *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux* », « *L'âme est immortelle* ».

3) les énoncés avec termes singuliers non dénotant : « *L'actuel roi de France est chauve* », « *Le carré rond est un polygone* », « *Sherlock Holmes habite au 221b Baker Street* », mais aussi « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* ».

Des tables de vérité peuvent être construites pour cette quadrivalence :

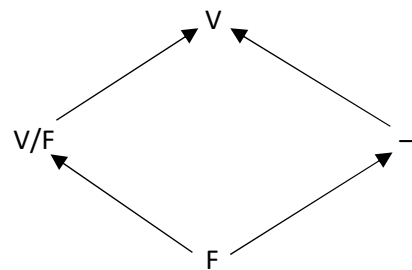
|                      |                      |                    |                     |
|----------------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| V (Vrai et pas Faux) | F (Faux et pas Vrai) | V/F (Vrai et Faux) | — (Ni vrai ni Faux) |
|----------------------|----------------------|--------------------|---------------------|

| <b>p</b>   | <b>¬p</b>  |
|------------|------------|
| <b>V</b>   | <b>F</b>   |
| <b>V/F</b> | <b>V/F</b> |
| <b>—</b>   | <b>—</b>   |
| <b>F</b>   | <b>V</b>   |

La négation « inverse » les valeurs de vérité Vrai et Faux, de sorte que ce qui était Vrai et Faux devient Faux et Vrai (reste les deux) et que ce qui n'était ni Vrai ni Faux reste ni Vrai ni Faux :

| <b>p^q</b> | <b>V</b> | <b>V/F</b> | <b>—</b> | <b>F</b> |
|------------|----------|------------|----------|----------|
| <b>V</b>   | V        | V/F        | —        | F        |
| <b>V/F</b> | V/F      | V/F        | F        | F        |
| <b>—</b>   | —        | F          | —        | F        |
| <b>F</b>   | F        | F          | F        | F        |

La conjonction prend pour résultat la plus grande limite inférieure dans le « treillis » :



| <b>p^q</b> | <b>V</b> | <b>V/F</b> | <b>—</b> | <b>F</b> |
|------------|----------|------------|----------|----------|
| <b>V</b>   | V        | V          | V        | V        |
| <b>V/F</b> | V        | V/F        | V        | V/F      |
| <b>—</b>   | V        | V          | —        | —        |
| <b>F</b>   | V        | V/F        | —        | F        |

La disjonction prend pour résultat la plus petite limite supérieure dans le même « treillis ».

Là encore, il résulte de cette logique vérifonctionnelle des modifications substantielles des lois logiques. Ainsi, non seulement, ni le principe de non-contradiction ni le principe du tiers-exclu ne sont valides (au sens de Vrai dans toutes les interprétations), mais on a en outre :

$$\alpha \not\models \beta \vee \neg\beta$$

$$\alpha \wedge \neg\alpha \not\models \beta$$

$$\alpha, \neg\alpha \vee \beta \not\models \beta$$

[*Ex quodlibet necessarium sequitur*, Principe d'explosion et Syllogisme disjonctif non valides]

Mais on peut aussi questionner la dualité du Vrai et du Faux en faisant de leur distinction une différence de degré plutôt que de nature ; l'énoncé est plus ou moins vrai. Cela permet notamment de traiter le cas :

1) des énoncés comportant un terme « vague » – « *Bruno Leclercq est chauve* ».

2) des futurs contingents – « *Il y aura une bataille navale demain* » – pour lesquels une valeur de vérité est tout de même plus probable que l'autre.

Selon le système de Łukasiewicz (1930), les valeurs de vérité correspondent alors à des degrés de vérité pouvant aller de 0 à 1 (100%). On définit alors les valeurs de vérité des propositions composées de la manière suivante :

$$|\neg p| = 1 - |p|$$

$$|p \vee q| = \max \{|p|, |q|\}$$

$$|p \wedge q| = \min \{|p|, |q|\}$$

$$|p \Rightarrow q| = \begin{cases} 1 & \text{si } |p| \leq |q| \\ 1 - |p| + |q| & \text{si } |p| > |q| \end{cases}$$

[Si p moins vrai que q, le conditionnel est vrai ; si p est plus vrai que q, le conditionnel est moins vrai que 100% (et d'autant moins vrai que la différence de vérité entre p et q est grande)]

Là encore les lois logiques classiques sont bousculées si on considère que ne sont valides que les propositions complexes qui sont vraies à 100% dans toutes les interprétations.

#### **4. En conclusion**

De nombreuses stratégies, qui ont chacune leur cohérence, ont été développées pour faire face aux défis que posent au principe de bivalence une multitude de contre-exemples flagrants. On peut toutefois se demander laquelle de ces stratégies est la meilleure, et en définitive quelle est la bonne logique.

Poser la question en ces termes est cependant en soi trompeur. Plutôt qu'une stratégie unique, qui pourrait prévaloir dans tous les cas et imposer universellement sa logique, la double leçon à tirer des efforts déployés ces cent dernières années pour surmonter les difficultés rencontrées par la logique standard formalisée de manière canonique dans les travaux de Frege puis dans cet ouvrage de référence que constituent les *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead, c'est sans doute précisément que

##### **a. il n'y pas de stratégie unique qui constitue la solution universelle à tous les défis rencontrés**

En fonction du défi rencontré, différentes stratégies doivent sans doute être déployées :

- certains énoncés comme les énoncés dénués de sens – « *Les nombres pairs sont rouges* » - sont sans doute plus adéquatement traités comme inévaluables conformément à la *no-item strategy* ;

- d'autres comme les énoncés dont les conditions de vérité sont en apparence indéterminées parce qu'elles ne sont pas intégralement explicitées – « *Bruno Leclercq est assis* » – méritent sans doute d'être reformulés sous forme de « phrases éternelles » – « *Bruno Leclercq est assis le 8 mars 2023 à 11h42 [GMT]* » – conformément à la *misleading form strategy* ;

- d'autres comme ceux pour lesquels l'indétermination est essentiellement épistémique – « *Il y aura une bataille navale demain* », « *L'âme est immortelle* » – doivent plutôt être traités comme des cas d'incertitude selon la *truth-value gap strategy* ;

- d'autres comme ceux pour lesquels l'indétermination épistémique est plus principielle, au sens où on ne peut concevoir aucun moyen de la dépasser, invitent plus résolument à rejeter le tiers-exclu – « *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux* », « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* » – ou la non-contradiction – « *La présente phrase est fausse* » ;

- d'autres encore comme ceux pour lesquels on envisage une gradualité de la vérité – « *Bruno Leclercq est chauve* » – suggèrent l'usage d'une logique multivalente (dont la logique bivalente est un cas particulier).

#### **b. pour un même défi, plusieurs stratégies peuvent s'avérer moins concurrentes que complémentaires**

Si on ne retient que l'exemple de l'énoncé « *Sherlock Holmes a un naevus sur l'épaule droite* », on peut en fait tout à la fois :

- souligner qu'il ne s'agit là d'une affirmation prétendant à la vérité mais seulement d'une invitation à imaginer une situation contrefactuelle (*pretence*) ;

- soutenir que, néanmoins, prise comme affirmation, cet énoncé est inévaluable dans le monde actuel dans la mesure il ne porte sur rien puisqu'un de ses termes singuliers est non dénotant [comme l'indique Strawson (1950), l'énoncé présuppose la référence et ne peut être évalué si cette présupposition n'est pas remplie] ;

- ou alors qu'il est faux dans le monde actuel si on le comprend comme affirmant qu'il existe quelqu'un de tel que Sherlock Holmes et qu'il a un naevus sur l'épaule droite [comme l'indique Russell (1905), l'énoncé affirme alors implicitement une existence et est donc faux si cette affirmation n'est pas vraie] ;

- soutenir par ailleurs que, dans le monde de la fiction lui-même, cet énoncé est indéterminé, c'est-à-dire qu'il a la valeur de vérité indéterminé mais que l'énoncé complexe « *Sherlock Holmes a une tête ou il a un naevus sur l'épaule gauche* » est quant à lui vrai dans la fiction parce que son premier terme y est vrai ;

- ou alors que l'indétermination de cet énoncé montre que le monde de la fiction est incomplet et viole la loi du tiers-exclu.

Ces différentes analyses logiques peuvent en fait être déployées à différents niveaux de l'analyse pour faire apparaître des propriétés logiques distinctes des différents types de discours dans lesquels cet énoncé peut s'insérer et des différents projets épistémologiques que peuvent servir ces discours. On ne peut en fait décider de la stratégie à adopter sans tenir compte des buts poursuivis par l'analyse logique. Et cela indique que, loin de vouloir rendre compte de la rationalité intrinsèque du monde, la logique est plutôt une boîte à outils servant à mettre en évidence diverses manières rationnelles de le considérer.

#### **Références**

Belnap N., 1977, "A useful four-valued logic", in J. Michael Dunn and George Epstein eds., *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Springer books.

- Bochvar D.A., 1939, "On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of contradictories", *Matématičeskij sbornik*, vol. 4.
- Dunn J.M., 1976, "Intuitive semantics for first-degree entailments and 'coupled trees'", *Philosophical Studies*, vol. 29, pp. 149–168.
- Haack S., 1974, *Deviant Logic*, Cambridge University Press.
- Heyting A., 1930, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 42–71, 158–169.
- Heyting A., 1956, *Intuitionism. An introduction*, North-Holland, Amsterdam.
- Kleene S.C., 1945, "On the interpretation of Intuitionistic number theory", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 10.
- Kripke S., 1963, "Semantical Considerations Of The Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica*, vol. 16, 83–94.
- Łukasiewicz J., 1920, « On 3-valued logic », reprinted in S. McCall ed., *Polish Logic*, Oxford University Press, 1967.
- Łukasiewicz J., 1930, "Many-valued systems of propositional logic", reprinted in S. McCall ed., *Polish Logic*, Oxford University Press, 1967.
- Łukasiewicz J., 1953, "A system of modal logic", *Journal of Computing Systems*, vol. 1, pp. 111–149.
- Russell B., 1905, "On denoting", *Mind*, vol. 14.
- Smiley T.J., 1959, "Entailment and deducibility", *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. LIX.
- Strawson P.F., 1950, "On referring", *Mind*, vol. 59.
- van Fraassen B., 1969, "Presuppositions, supervaluations and free logic", in K. Lambert ed., *The logical way of doing things*, Yale University Press.