« La » fonction W de LAMBERT

0.1 Introduction

En rhétorique, les élèves les plus méritants sont récompensés de leurs efforts en mathématique par l'apprentissage de la résolution d'équations trigonométriques d'une part, d'équations exponentielles et logarithmiques d'autre part.

Bien sûr, il s'agit de ne pas les effaroucher, et les exemples qui leur sont soumis sont soigneusement choisis pour que l'histoire se termine bien. Ce seront par exemple $3\,\mathrm{tg}^2 x + 5 = 7/\cos x$, $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$, $\log_{1/3}\left(3^{1-x} - 18\right) = x$ ou $9^x + 2 \times 4^x = 3 \times 6^x$, mais pas $5\sin x + 7\cos x = 19$ ni $8^x + 2 \times 4^x = 3 \times 6^x$ (qui pourtant, au premier abord, ne semblent pas si différentes des précédentes).

Il est encore une limitation dans les exercices proposés : dans une équation trigonométrique, l'inconnue apparait *uniquement* comme argument de fonctions trigonométriques ; et dans une équation exponentielle, *uniquement* comme argument de fonctions exponentielles. Pas question donc d'examiner des équations telles que $\cos x = x$ ou $2^x = x^2$; celles-ci ne sont pas considérées comme équations trigonométriques ou exponentielles, parce que l'inconnue a l'impudeur d'y figurer toute nue, en plus d'une présence, plus décente, où elle se cache dans l'argument d'une fonction transcendante. De telles équations « mixtes » ne bénéficient pas vraiment d'une appellation contrôlée, mais on pourrait les dénommer *algébrico-trigonométriques* ou *algébrico-exponentielles*.

Si elles ne sont pas abordées, ce n'est pas tant en raison de leur caractère bâtard qu'à cause d'un vice bien plus profond : elles ne se laissent pas résoudre analytiquement ! Ceci signifie que leurs solutions ne peuvent pas être écrites comme combinaison finie de fonctions élémentaires au moyen des quatre opérations, de la composition et de la définition par morceaux ([1]) ; les *fonctions élémentaires* étant celles qui sont connues en fin de secondaire : les fonctions exponentielles et logarithmiques, trigonométriques et cyclométriques. Nous pourrons toutefois y revenir d'un point de vue différent si nous avons un peu de temps à consacrer à des méthodes *numériques* de résolution : par exemple la méthode de dichotomie, ou celle de NEWTON, qui nous fourniront une valeur approchée, parfois très satisfaisante pour la pratique, de la ou des solutions.

Il est bien connu que ce carcan des expressions analytiques est trop pesant ; par exemple, la densité gaussienne admet une expression analytique :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} ;$$

elle est continue, donc primitivable. Mais « sa » primitive, elle, n'admet pas d'expression analytique…

1. Une fonction définie par morceaux est par exemple $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 1 \\ e^x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Si nous voulons nous donner un peu d'aise, il faut donc considérer comme « bien connues » d'autres fonctions que les fonctions élémentaires. Ces fonctions nouvellement apprivoisées seront appelées *fonctions spéciales*. Bien entendu, il ne s'agit pas de domestiquer à tout va : nous n'accueillerons dans notre basse-cour que des fonctions qui se rencontrent suffisamment souvent, ou de manière suffisamment impérieuse, que ce soit dans les mathématiques elles-mêmes ou dans un domaine d'application.

À titre d'exemples, nous pouvons citer les fonctions de BESSEL, les fonctions elliptiques, les fonctions eulériennes, la fonction d'erreur (qui résout le problème mentionné plus haut de primitiver la densité gaussienne), la célébrissime fonction zêta de RIEMANN, ... et bien sûr notre star du jour, la fonction de LAMBERT.

Comme c'est bien souvent le cas en mathématique, Johann LAMBERT ([2]) n'a pas réellement « inventé » la fonction qui porte son nom. Mais il a étudié une équation dont la résolution peut utiliser cette fonction, qu'il n'a pas explicitée, pas plus qu'EULER d'ailleurs, travaillant lui aussi sur le même sujet.

FIGURE 1 – Johann LAMBERT

Cette fonction, utile dans bien des problèmes, fut découverte et redécouverte des dizaines de fois, mais sans parvenir à attirer suffisamment l'attention pour qu'émergent une terminologie et une notation largement acceptées. Ce n'est apparemment qu'il y a une trentaine d'années qu'elle a enfin acquis une petite renommée, parce qu'elle fournit la solution d'un important problème de physique quantique.

De notre point de vue plutôt terre-à-terre, disons que la fonction de LAMBERT « sert à » résoudre l'équation

$$xe^x = a,$$

d'inconnue réelle x, où a, réel lui aussi, est fixé. Mais, comme nous le verrons dans les exemples de la fin du texte, au prix d'un peu d'agilité, nous pouvons l'utiliser dans bon nombre de situations apparentées.

0.2 Définitions

Remarque préliminaire : Nous nous limiterons ici à parler de fonctions réelles de variable réelle ; le sujet admet des prolongements aux fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, mais ils ne seront pas évoqués ci-dessous.

2. Johann Heinrich LAMBERT, Mulhouse 1728 – Berlin 1777.

Définitions

L'application $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto xe^x$ ([3]), représentée sur la figure **??**, n'est pas bijective ; elle n'admet donc pas de réciproque. Elle est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$ et

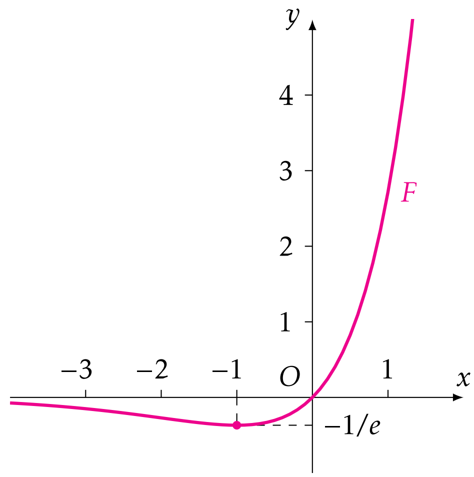

FIGURE 2 – Graphe de $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto xe^x$

strictement croissante sur $[-1;+\infty[$; elle admet donc un minimum en -1, de valeur $-1/e \simeq -0{,}368$. Ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$. De ceci, il résulte que les deux restrictions

$$F_{-1} :]-\infty;-1] \to [-1/e;0[: x \mapsto xe^x$$

et

$$F_0 : [-1;+\infty[\to [-1/e;+\infty[: x \mapsto xe^x$$

sont des bijections ; elles possèdent donc des réciproques, notées respectivement

$$W_{-1} : [-1/e;0[\to]-\infty;-1]$$

et

$$W_0 : [-1/e;+\infty[\to [-1;+\infty[\;;$$

l'une et l'autre sont appelées *fonctions de* LAMBERT ([4]). Ainsi,

- Pour tout $x \in [-1/e;+\infty[$,
$$W_0(x) \cdot e^{W_0(x)} = x\,; \tag{1}$$
pour tout $y \in [-1;+\infty[$,
$$W_0(ye^y) = y\,; \tag{2}$$
ces deux conditions ensemble équivalent à ce que, pour tous $x \in [-1/e;+\infty[$ et $y \in [-1;+\infty[$
$$y = W_0(x) \Leftrightarrow x = ye^y. \tag{3}$$

3. Cette notation F n'a évidemment rien de canonique ; mais nous la réserverons à cet usage tout au long de ce texte.

4. La notation avec les indices 0 et -1, *a priori* choquante, s'explique lorsqu'on étend l'étude aux fonctions complexes, où la fonction de LAMBERT admet une infinité de branches W_k.

- Pour tout $x \in \,]-\infty;-1/e\,]$,
$$W_{-1}(x) \cdot e^{W_{-1}(x)} = x\,; \tag{4}$$
pour tout $y \in \,]-\infty;-1\,]$,
$$W_{-1}(ye^y) = y\,; \tag{5}$$
ces deux conditions ensemble équivalent à ce que, pour tous $x \in \,]-\infty;-1/e\,]$ et $y \in \,]-\infty;-1\,]$
$$y = W_{-1}(x) \Leftrightarrow x = ye^y. \tag{6}$$

Donc, d'un point de vue pragmatique :
- Si $a \geq 0$, $xe^x = a$ équivaut à $x = W_0(a)$;
- Si $-1/e \leq a < 0$, $xe^x = a$ équivaut à $(x = W_{-1}(a)$ ou $x = W_0(a))$;
- Si $a < -1/e$, $xe^x = a$ est impossible.

(Répétons que $-1/e \simeq -0{,}368$.)

Parfois, la lettre W est utilisée sans indice, pour désigner l'une quelconque des deux fonctions W_0 ou W_{-1} ; en particulier, lorsque x est positif, seul $W_0(x)$ est défini, qui peut être noté $W(x)$ sans risque.

Représentations graphiques

La figure **??** présente les graphes de ces deux fonctions.

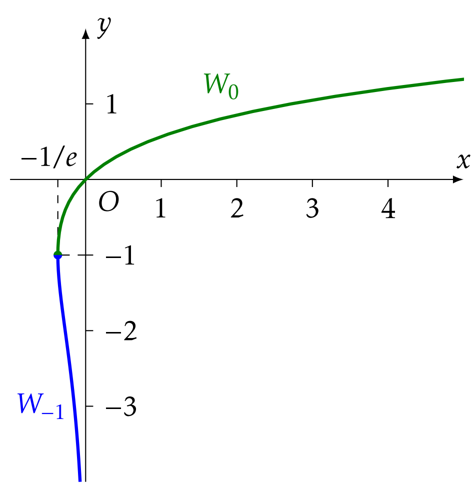

FIGURE 3 – Graphes de W_{-1} et W_0

Valeurs particulières

Notons les valeurs particulières suivantes :
- $W_{-1}(-1/e) = W_0(-1/e) = -1$;
- $W_0(0) = 0$;
- $W_0(e) = 1$.

De plus,
- $\lim_{0_-} W_{-1} = -\infty$;
- $\lim_{+\infty} W_0 = +\infty$.

0.3 Propriétés

Quelques identités

Les propriétés que voici découlent directement, ou presque, des définitions :

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)} \qquad [x \geq -1/e, x \neq 0]; \tag{7}$$

$$W(x) = \ln\left(\frac{x}{W(x)}\right) \qquad [x \geq -1/e, x \neq 0]; \tag{8}$$

$$W_0(x) = \ln x - \ln W_0(x) \qquad [x > 0]; \tag{9}$$

$$W_{-1}(x \ln x) = \ln x \text{ et } e^{W_{-1}(x \ln x)} = x \qquad [0 < x \leq 1/e]; \tag{10}$$

$$W_0(x \ln x) = \ln x \text{ et } e^{W_0(x \ln x)} = x \qquad [x \geq 1/e]; \tag{11}$$

$$W_{-1}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = -\ln x \text{ et } e^{W_{-1}(-(\ln x)/x)} = 1/x \qquad [x \geq e]; \tag{12}$$

$$W_0\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = -\ln x \text{ et } e^{W_0(-(\ln x)/x)} = 1/x \qquad [0 < x \leq e]. \tag{13}$$

Monotonie

Réciproque d'une fonction strictement croissante, $W_0 : [-1/e; +\infty[\to [-1; +\infty[$ est elle-même strictement croissante et, réciproque d'une fonction strictement décroissante, $W_{-1} : [-1/e; 0[\to]-\infty; -1]$ est strictement décroissante.

Dérivée

Calculons la dérivée de la fonction W, en utilisant la règle de dérivation de la réciproque, et en tenant compte que $F'(x) = (x+1)e^x$:

$$W'(x) = (\overset{-1}{F})'(x) = \frac{1}{F'(\overset{-1}{F}(x))} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} = \frac{1}{W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)}} = \frac{1}{x + e^{W(x)}},$$

pour $x > -1/e$. En particulier, $W_0'(0) = 1$. Si au contraire $x \neq 0$, nous avons également :

$$W'(x) = \frac{1}{W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)}} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(W(x)+1)}.$$

Primitive

Pour obtenir une primitive de W, nous utilisons le changement de variable $t = W(x)$, c'est-à-dire $x = h(t) = te^t$, de sorte que $h'(t) = e^t + te^t = (t+1)e^t$, puis nous travaillons deux fois par parties :

$$\begin{aligned}
\int W(x)\,dx &= \int W(te^t)\cdot(t+1)e^t\,dt\Big|_{t=W(x)} \\
&= \int (t^2+t)e^t\,dt\Big|_{t=W(x)} \\
&= \left((t^2+t)e^t - \int (2t+1)e^t\,dt\right)\Big|_{t=W(x)} \\
&= \left((t^2+t)e^t - \left((2t+1)e^t - \int 2e^t\,dt\right)\right)\Big|_{t=W(x)} \\
&= \left((t^2-t-1)e^t + \int 2e^t\,dt\right)\Big|_{t=W(x)} \\
&= (t^2-t+1)e^t\Big|_{t=W(x)} \\
&= \left(t-1+\frac{1}{t}\right)te^t\Big|_{t=W(x)} \\
&= x\left(W(x)-1+\frac{1}{W(x)}\right).
\end{aligned}$$

Le même changement de variable peut être utile pour primitiver différentes fonctions faisant intervenir W.

0.4 Exemples d'utilisation

La fonction W permet de résoudre explicitement certaines équations « algébrico--exponentielles » ; voici quelques exemples un peu représentatifs.

1. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.
   (a) $5^x = 5x$;
   (b) $2^x + x = 5$;
   (c) $x^2 = 2^{-x}$;
   (d) $5^x = 8x + 6$;
   (e) $3^x = x^9$;
   (f) $4^x + x = 260$.

   Solutions.

   (a) L'équation admet manifestement 1 pour solution, mais y en a-t-il d'autres ? Récrivons-la sous la forme $x\cdot 5^{-x} = \frac{1}{5}$, puis $x\cdot e^{-x\ln 5} = \frac{1}{5}$, et posons $y = -x\ln 5$; elle devient $ye^y = -\frac{1}{5}\ln 5$. Comme le membre de droite vaut approximativement $-0{,}322$ et appartient donc à $]-1/e;0[$, nous trouvons deux solutions $y = W_0(-\frac{1}{5}\ln 5)$ et $y = W_{-1}(-\frac{1}{5}\ln 5)$. Les valeurs correspondantes de x sont $x = -\frac{1}{\ln 5}W_0(-\frac{1}{5}\ln 5)$ et $x = -\frac{1}{\ln 5}W_{-1}(-\frac{1}{5}\ln 5)$.
   Mais, selon (**??**), $W_{-1}(-\frac{1}{5}\ln 5) = -\ln 5$, et la seconde valeur de x vaut donc 1 ; la première, par contre, ne se simplifie pas, et nous avons

$$S = \left\{1, -\frac{1}{\ln 5}W_0\left(-\frac{\ln 5}{5}\right)\right\}.$$

L'utilisation d'une table ou d'une calculatrice idoine ([5]) nous fournit l'approximation $-\frac{1}{\ln 5} W_0(-\frac{1}{5}\ln 5) \simeq 0{,}353$.

(b) L'équation se récrit $(5-x)\cdot 2^{5-x} = 32$, ou encore $(5-x)\ln 2 \cdot e^{(5-x)\ln 2} = 32\ln 2$; comme $32\ln 2 > 0$, ceci équivaut à $(5-x)\ln 2 = W_0(32\ln 2)$, et ainsi

$$S = \left\{5 - \frac{W_0(32\ln 2)}{\ln 2}\right\}.$$

Cette unique solution vaut approximativement 1,716.

(c) Transformons l'équation en $x \cdot e^{x/2} = \pm 1$, puis en $\frac{\ln 2}{2} x \cdot e^{(\ln 2/2)x} = \pm\frac{\ln 2}{2}$.

- Si nous considérons le membre de droite avec le signe +, nous avons donc $\frac{\ln 2}{2} x = W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$, donc $x = \frac{2}{\ln 2} W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \simeq 0{,}767$;
- Si nous considérons le membre de droite avec le signe −, comme $-\ln 2/2 \simeq$ $\simeq -0{,}347 > -0{,}368 \simeq -1/e$,

$$\frac{\ln 2}{2} x \cdot e^{(\ln 2/2)x} = -\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln 2}{2} x = W_0\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\ln 2}{2} x = W_{-1}\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)\right),$$

et, en utilisant (**??**) puis (**??**) :

$$x = \frac{2}{\ln 2} W_0\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{2}{\ln 2} W_0\left(-\frac{\ln 4}{4}\right) = \frac{2}{\ln 2}(-\ln 4) = -4$$

ou

$$x = \frac{2}{\ln 2} W_{-1}\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{2}{\ln 2}(-\ln 2) = -2.$$

En définitive,

$$S = \left\{-4, -2, \frac{2}{\ln 2} W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right\}.$$

(d) Nous avons :

$$\begin{aligned}
&5^x = 8x + 6 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = 8x + 6 \\
&\quad \Leftrightarrow 8\left(x + \tfrac{3}{4}\right) e^{-x\ln 5} = 1 \\
&\quad \Leftrightarrow 8\left(x + \tfrac{3}{4}\right) e^{-(x+3/4)\ln 5} = e^{-3\ln 5/4} \\
&\quad \Leftrightarrow -\ln 5\left(x + \tfrac{3}{4}\right) e^{-(x+3/4)\ln 5} = -\tfrac{\ln 5}{8} 5^{-3/4} \\
&\quad \Leftrightarrow -\ln 5\left(x + \tfrac{3}{4}\right) = W_{-1}\left(-\tfrac{\ln 5}{8} 5^{-3/4}\right) \text{ ou } -\ln 5\left(x + \tfrac{3}{4}\right) = W_0\left(-\tfrac{\ln 5}{8} 5^{-3/4}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{car } \tfrac{\ln 5}{8} 5^{-3/4} \simeq -0{,}06 \in \,]-1/e; 0[\,] \\
&\quad \Leftrightarrow x = -\tfrac{1}{\ln 5} W_{-1}\left(-\tfrac{\ln 5}{8} 5^{-3/4}\right) - \tfrac{3}{4} \text{ ou } x = -\tfrac{1}{\ln 5} W_0\left(-\tfrac{\ln 5}{8} 5^{-3/4}\right) - \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \left\{-\frac{1}{\ln 5} W_0\left(-\frac{\ln 5}{8} 5^{-3/4}\right) - \frac{3}{4}, -\frac{1}{\ln 5} W_{-1}\left(-\frac{\ln 5}{8} 5^{-3/4}\right) - \frac{3}{4}\right\} \\
&\simeq \{-0{,}710, 1{,}897\}.
\end{aligned}$$

5. Pour que *Mathematica*™ nous fournisse $W_0(x)$, nous codons `ProductLog[x]` ; pour obtenir $W_{-1}(x)$, `ProductLog[-1,x]`.

(e) Nous avons

$$3^x = x^9 \Leftrightarrow 3^{x/9} = x \Leftrightarrow e^{x\ln 3/9} = x \Leftrightarrow -\frac{x\ln 3}{9}\cdot e^{-x\ln 3/9} = -\frac{\ln 3}{9}\,;$$

or, $-\ln 3/9 \simeq -0{,}122$, qui est compris entre $-1/e$ et 0. La dernière égalité équivaut donc à

$$-\frac{x\ln 3}{9} = W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{9}\right) \text{ ou } -\frac{x\ln 3}{9} = W_0\left(-\frac{\ln 3}{9}\right),$$

soit encore

$$x = -\frac{9}{\ln 3}W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{9}\right) \text{ ou } x = -\frac{9}{\ln 3}W_0\left(-\frac{\ln 3}{9}\right).$$

Comme $\ln 3/9 = \ln 27/27$ et que $27 > e$, la propriété (**??**) nous indique que la première solution vaut tout simplement 27.

$$S = \left\{-\frac{9}{\ln 3}W_0\left(-\frac{\ln 3}{9}\right), 27\right\},$$

où la première valeur est voisine de 1,151.

(f) L'équation se récrit

$$(260-x)\cdot 4^{260-x} = 4^{260},$$

ou encore

$$(260-x)\ln 4\cdot e^{(260-x)\ln 4} = 4^{260}\ln 4\,;$$

comme $4^{260}\ln 4 > 0$, ceci équivaut à

$$(260-x)\ln 4 = W_0(4^{260}\ln 4)$$

et donc à

$$x = 260 - \frac{W_0(4^{260}\ln 4)}{\ln 4}\,;$$

mais $W_0(4^{260}\ln 4) = W_0(4^{256}\cdot 256\cdot\ln 4) = W_0(4^{256}\cdot\ln 4^{256}) = \ln 4^{256} = 256\ln 4$, grâce à (**??**), de sorte que

$$S = \{4\},$$

tout simplement.

2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+^*$:

(a) $x^x = 5$;

(b) $x^x = \sqrt{2}/2$;

(c) $x^x = e^{-2}$.

Solutions. La technique de départ est chaque fois la même, mais les conclusions diffèrent. Comme l'inconnue x est strictement positive, il est permis d'en prendre le logarithme.

(a) Ici,

$$\begin{aligned} x^x = 5 &\Leftrightarrow x\ln x = \ln 5 \\ &\Leftrightarrow \ln x \cdot e^{\ln x} = \ln 5 \\ &\Leftrightarrow \ln x = W_0(\ln 5) && [\text{car } \ln 5 > 0] \\ &\Leftrightarrow x = e^{W_0(\ln 5)}\,; \end{aligned}$$

ainsi,

$$S = \left\{e^{W_0(\ln 5)}\right\}.$$

Cette unique solution vaut approximativement 2,129.

(b) Observons ici avant tout que $\sqrt{2}/2 = (1/2)^{1/2}$, de sorte que 1/2 est « solution évidente ». Mais, pour ne rien omettre, procédons tout de même de la manière systématique.

$$\begin{aligned} x^x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow x\ln x = -\tfrac{1}{2}\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \ln x \cdot e^{\ln x} = -\tfrac{1}{2}\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \ln x = W_{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2\right) \text{ ou } \ln x = W_0\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2\right) \\ &\qquad\qquad [\text{car } -1/e \simeq -0{,}368 < -\tfrac{1}{2}\ln 2 \simeq -0{,}347 < 0] \\ &\Leftrightarrow x = e^{W_{-1}(-\ln 2/2)} \text{ ou } x = e^{W_0(-\ln 2/2)}\,; \end{aligned}$$

notons que, comme $0 < 2 < e$, la propriété (**??**) s'applique, et $e^{W_0(-\ln 2/2)} = 1/2$: nous retrouvons la solution devinée d'emblée ; en outre, $-\ln 2/2 = -\ln 4/4$, et comme $4 > e$, (**??**) entraine : $e^{W_{-1}(-\ln 2/2)} = e^{W_{-1}(-\ln 4/4)} = 1/4$; finalement,

$$S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}.$$

(c) Nous avons : $x^x = e^{-2} \Leftrightarrow x\ln x = -2$. Comme $-2 < -1/e$, cette équation n'a pas de solution ; $S = \emptyset$.

3. Résoudre l'équation

$$x^x = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}},$$

d'inconnue réelle x.

Solution. Notons que le membre de droite s'écrit plus simplement $\sqrt[3]{18}/2$; mais nous avons choisi de l'écrire $(-2/3)^{-2/3}$ pour que nul ne puisse manquer la solution évidente $x = -2/3$. Pour la recherche des solutions strictement positives, nous pouvons travailler comme dans les exemples précédents :

$$\begin{aligned} x^x = \frac{\sqrt[3]{18}}{2} &\Leftrightarrow x\ln x = \ln(-2/3)^{-2/3} \\ &\Leftrightarrow \ln x \cdot e^{\ln x} = \tfrac{2}{3}(\ln 3 - \ln 2) \\ &\Leftrightarrow \ln x = W_0\left(\tfrac{2}{3}(\ln 3 - \ln 2)\right) && [\text{car } \tfrac{2}{3}(\ln 3 - \ln 2) > 0] \\ &\Leftrightarrow x = e^{W_0\left(\frac{2}{3}(\ln 3 - \ln 2)\right)}\,; \end{aligned}$$

cette solution est approximativement égale à 1,243.

Il faut noter que nous n'avons pas prouvé que $-2/3$ est la seule solution négative ; nous pouvons donc seulement affirmer que

$$S \supseteq \left\{-\frac{2}{3}, e^{W_0\left(\frac{2}{3}(\ln 3 - \ln 2)\right)}\right\}.$$

4. Déterminer la réciproque de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x + e^x$.

   Notons en effet que cette fonction est continue et strictement croissante, et que sa limite en $\pm\infty$ est $\pm\infty$. Tout ceci entraine qu'elle est bijective. Pour calculer $\overset{-1}{f}(y)$, où y est un réel quelconque, il faut résoudre par rapport à x l'équation $y = x + e^x$. Ceci n'est pas possible en nous cantonnant aux fonctions élémentaires. Mais l'usage de la fonction W_0 résout le problème. En effet, en posant $x = \ln t$, l'égalité précédente devient $y = \ln t + t$, ou encore $e^y = t \cdot e^t$. Comme $e^y > 0$, ceci équivaut à $t = W_0(e^y)$, et finalement $x = \ln(W_0(e^y))$. Donc,

$$\overset{-1}{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : y \mapsto \ln(W_0(e^y)).$$

   N.B. : D'après (**??**), $\ln(W_0(e^y)) = x - W_0(e^x)$.

5. Expliciter y en fonction de x à partir de la relation $x^y = y^x$ $(x, y \geq 0)$.

   L'ensemble des points du premier quadrant qui satisfont cette relation est représenté sur la figure **??**. On y voit, bien évidemment, la bissectrice du pre-

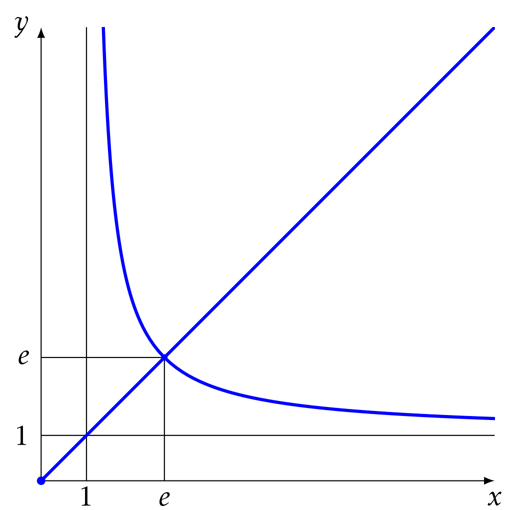

FIGURE 4 – Graphe de la relation $x^y = y^x$ sur $(\mathbf{R}_+)^2$

mier quadrant : si $y = x$, l'égalité $x^y = y^x$ est satisfaite. Ce qui nous intéresse, c'est l'autre partie, celle dont l'aspect est hyperbolique — mais ce n'est pas une branche d'hyperbole !

Il s'agit donc de résoudre par rapport à y l'équation $x^y = y^x$, ou plus précisément d'en déterminer la solution non triviale. Si $x = 0$, elle devient $0^y = y^0$, soit $0^y = 1$, qui n'a pas d'autre solution que $y = 0$: nous retrouvons la solution triviale.

Recherchons maintenant les autres solutions : nous supposons donc que x et y sont des réels strictement positifs distincts. Une idée est de poser $t = y/x$; t ne vaut ni 0 ni 1 ; $y = tx$, et, comme x et y sont strictements positifs, l'équation devient successivement :

$$\begin{aligned} x^y = y^x &\Leftrightarrow x^{tx} = (xt)^x \\ &\Leftrightarrow x^{tx} = x^x t^x \\ &\Leftrightarrow x^{(t-1)x} = t^x \\ &\Leftrightarrow x^{t-1} = t \\ &\Leftrightarrow x = t^{1/(t-1)}\,; \end{aligned}$$

alors,

$$y = t \cdot t^{1/(t-1)} = t^{1+1/(t-1)} = t^{t/(t-1)}.$$

L'ensemble des solutions non triviales strictement positives est donc

$$\Big\{(t^{1/(t-1)}, t^{t/(t-1)}) : t \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}\Big\}.$$

Par exemple, pour $t = 2$, nous avons la solution $(2,4)$ et pour $t = 3$: $\left(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$. Mais ceci ne répond pas à notre ambition : exprimer y comme fonction de x. Procédons plutôt comme suit :

$$\begin{aligned} x^y = y^x &\Leftrightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x) \\ &\Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} = \frac{\ln x}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{1}{y} \cdot e^{\ln(1/y)} = -\frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto -(\ln x)/x$ qui intervient dans le membre de droite de la dernière égalité est $f' : x \mapsto (\ln x - 1)/x$, ce qui montre que f décroit sur $]0;e]$ et croît sur $[e;+\infty[$; comme $f(e) = -1/e$, nous avons donc $f(x) \geq -1/e$ pour tout $x > 0$.

- Si $0 < x \leq 1$, $f(x)$ est positif, donc la dernière égalité entraine

  $$\ln \frac{1}{y} = W_0\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = -\ln x = \ln \frac{1}{x},$$

  en utilisant (**??**), de sorte que $y = x$: il n'y a pas d'autre solution que la solution triviale.
- Si $x > 1$, $f(x)$ est compris entre $-1/e$ et 0, de sorte que

  $$\ln \frac{1}{y} \cdot e^{\ln(1/y)} = -\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \left[\ln \frac{1}{y} = W_0\left(-\frac{\ln x}{x}\right) \text{ ou } \ln \frac{1}{y} = W_{-1}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)\right].$$

  - Si $1 < x \leq e$, d'après (**??**), $W_0(-(\ln x)/x) = \ln(1/x)$, donc la première des deux solutions ci-dessus est la solution triviale $y = x$, et celle que nous cherchons est la seconde : $y = e^{-W_{-1}(-(\ln x)/x)}$;

- Si $x \geq e$, d'après (**??**), $W_{-1}(-(\ln x)/x) = \ln(1/x)$, donc la seconde des deux solutions ci-dessus est la solution triviale $y = x$, et celle que nous cherchons est la première : $y = e^{-W_0(-(\ln x)/x)}$.

En définitive, la « branche curviligne » de la relation $x^y = y^x$ est le graphe de la fonction

$$\Phi :]1;+\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-W_{-1}(-(\ln x)/x)} & \text{si } 1 < x < e, \\ e^{-W_0(-(\ln x)/x)} & \text{si } x \geq e. \end{cases}$$

Références

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Henri_Lambert (consulté le 22/09/24)

[2] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lambert/ (consulté le 22/09/24)

[3] https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_W_de_Lambert (consulté le 22/09/24)

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function (consulté le 22/09/24)