

Revue des méthodes de collocation à l'attention de L. Benhamouche

Samuel Nicolay

18 décembre 2024

Résumé

La méthode de collocation est une méthode numérique largement utilisée pour résoudre des problèmes scientifiques et d'ingénierie régis par des équations aux dérivées partielles. Ce texte propose une revue complète des méthodes de collocation et de leurs applications, en se concentrant sur l'élasticité, la conduction thermique, l'analyse des champs électromagnétiques et la dynamique des fluides.

Les avantages de la méthode de collocation résident dans l'absence de nécessité de maillage élémentaire, une mise en œuvre simple, une efficacité computationnelle élevée et une facilité à traiter des domaines irréguliers, car la méthode de collocation appartient à la catégorie des méthodes numériques basées sur les nœuds.

En partant des principes fondamentaux de la méthode de collocation, le processus de discrétisation dans un domaine continu est clarifié, et l'on explique comment des solutions approchées pour résoudre les équations différentielles sont obtenues. En explorant le développement historique des méthodes de collocation, leurs premières applications et leurs jalons clés sont retracés, démontrant ainsi leur évolution dans le domaine du calcul numérique.

Les fondements mathématiques des méthodes de collocation, incluant la sélection des fonctions d'interpolation, la définition des fonctions de pondération et la dérivation des règles d'intégration, sont examinés en détail, soulignant leur importance pour comprendre l'efficacité et la stabilité de la méthode.

Enfin, l'application pratique des méthodes de collocation dans des contextes d'ingénierie est mise en avant, incluant les simulations de conduction thermique, l'analyse couplée des champs électromagnétiques et les simulations en dynamique des fluides. Ces études de cas spécifiques illustrent la large applicabilité et l'efficacité de la méthode de collocation pour relever des défis d'ingénierie complexes.

En conclusion, cet texte propose des perspectives d'évolution future de la méthode de collocation à travers une analyse rigoureuse et une discussion approfondie, facilitant ainsi de nouvelles avancées dans la recherche et les applications pratiques dans ces domaines.

1 Introduction

En ingénierie, la simulation et la résolution de modèles mathématiques complexes représentent une tâche essentielle. Cependant, à mesure que la complexité des problèmes augmente, les méthodes analytiques traditionnelles apparaissent souvent inadéquates, ce qui pousse les chercheurs et ingénieurs à se tourner vers des méthodes numériques [90, 93] pour obtenir des solutions précises et réalisables à des problèmes concrets. La résolution

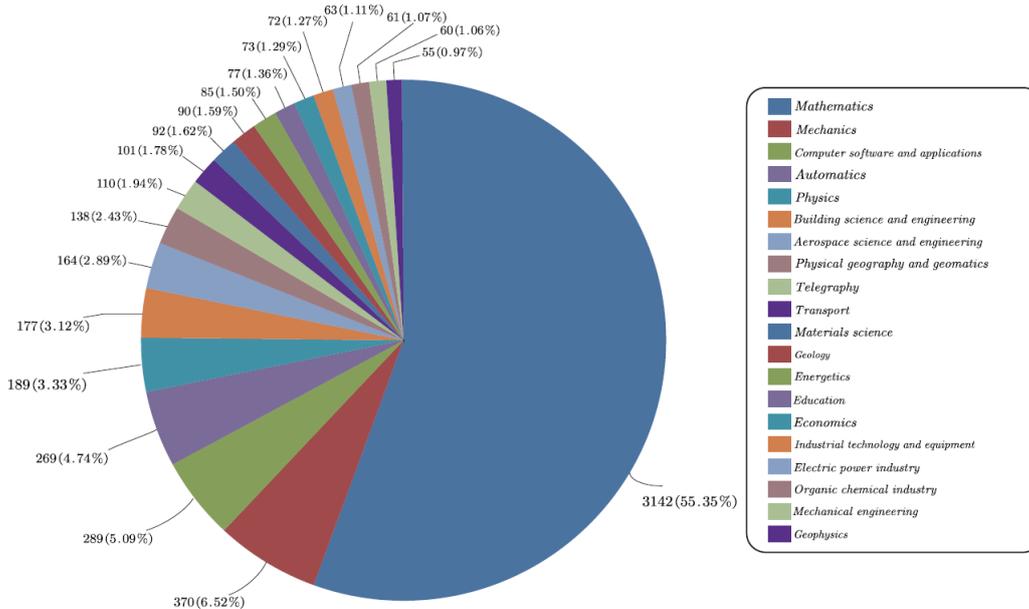


FIGURE 1 – Les principales disciplines d’application de la méthode de collocation.

d’un modèle numérique peut être résumée comme une approximation de fonction. Généralement, deux approches courantes sont utilisées : l’interpolation et la sommation des fonctions de base. Sur ces deux concepts, un grand nombre de méthodes numériques ont émergé, telles que la méthode des éléments finis (FEM) [22], la méthode des volumes finis (FVM) [112] et la méthode des éléments de frontière (BEM) [25, 111]. Parmi ces méthodes, la méthode de collocation a attiré une large attention en raison de ses avantages distincts (comme illustré dans la Figure 1). Parmi ses avantages spécifiques, on trouve le traitement naturel des frontières, une efficacité computationnelle élevée, et une applicabilité à un large éventail de champs physiques.

En sélectionnant des points de collocation ou points discrets appropriés à l’intérieur du domaine du problème, la méthode de collocation peut transformer les problèmes d’ingénierie en une série d’équations algébriques, permettant ainsi la mise en œuvre numérique de la solution. Pour un problème différentiel donné, un schéma de collocation aboutit fréquemment à des résultats numériques parmi les plus efficaces sur le plan pratique. De plus, la méthode est si polyvalente et intuitive qu’il n’est pas surprenant qu’elle soit largement utilisée depuis de nombreuses décennies.

En tant que technique numérique, la méthode de collocation a rencontré un grand succès dans la résolution de divers problèmes d’ingénierie grâce à sa flexibilité et à son adaptabilité. Ses premières applications incluent des travaux fondamentaux sur l’analyse numérique [87], des applications en dynamique des fluides et en mécanique des structures [7], ainsi que des avancées dans les fonctions de base radiales [48].

La méthode de collocation, en tant que méthode basée sur les nœuds, est naturellement combinée aux méthodes sans maillage. Avec l’approfondissement des recherches sur les méthodes sans maillage, les techniques de collocation ont également connu des développements supplémentaires. Le développement des méthodes sans maillage possède une longue histoire, avec des méthodes représentatives remontant à la méthode des différences finies généralisées (GFDM) [75–77, 106] et à la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) [23, 43, 82, 91]. Par la suite, Onate et al. [99, 100] ont proposé la

méthode des points finis (FPM) en combinant l'approximation par moindres carrés mobiles avec les techniques de discrétisation par collocation. En s'appuyant sur la FPM, Breitkopf et al. [12] ont introduit une méthode de collocation diffuse à double grille, utilisant une séquence de deux dérivées numériques du premier ordre.

D'autres travaux majeurs incluent : la méthode h-p cloud proposée par Duarte et Oden [29, 30] pour résoudre des problèmes de valeurs aux limites ; la méthode de collocation ponctuelle sans maillage (MPCM) introduite par Lee et al. [72] pour les problèmes de fissures élastiques ; et la méthode de collocation par noyaux reproducteurs développée par Aluru [2].

Pour pallier l'instabilité des méthodes de collocation traditionnelles, plusieurs techniques basées sur la discrétisation par moindres carrés ont émergé. Zhang et al. [151] ont proposé la méthode sans maillage par collocation aux moindres carrés, tandis que Park et al. [68, 102, 103] ont développé la méthode sans maillage aux moindres carrés (LSMM).

Afin d'éliminer les défauts des approches discrètes, des méthodes couplées ont également vu le jour. Par exemple, Liu et al. [78] ont proposé une méthode forte-faible sans maillage (MWS) combinant collocation et MLPG. Yang et al. [144] ont illustré la méthode forte-faible locale sans maillage (MLSW), qui facilite l'application des conditions aux limites tout en assurant une grande précision.

2 Principes Fondamentaux des Méthodes de Collocation

Du point de vue de l'interpolation, la méthode de collocation peut être introduite comme suit. Considérons tout d'abord les méthodes d'interpolation de fonctions. Par la suite, une fonction $u(x)$ peut être approximée par une fonction plus simple $\tilde{u}(x)$ qui satisfait les conditions d'interpolation.

$$\tilde{u}(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

où n est le nombre de points d'interpolation répartis dans le domaine Ω . Généralement, la fonction d'interpolation fait partie d'un espace linéaire n -dimensionnel V . Ainsi, elle peut être exprimée comme :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i Y_i(x) \quad (2)$$

où $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ sont les fonctions de base qui engendrent V . Il convient de noter que les coefficients β_i peuvent être déterminés selon les conditions d'interpolation, c'est-à-dire l'équation (1), après la résolution d'un système linéaire de n équations algébriques.

Par la suite, l'équation différentielle suivante doit être résolue approximativement :

$$Lu(x) = Q(x) \quad (3)$$

où L est un opérateur différentiel inversible, et $Q(x)$ est une fonction source. De manière similaire à l'interpolation, la méthode de collocation vise à trouver une fonction approchante $\tilde{u}(x) \in V$ qui satisfait :

$$L\tilde{u}(x_i) = Q(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

En substituant les équations (2) dans (4), la méthode de collocation peut être présentée sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} LY_1(x_1) & LY_2(x_1) & \dots & LY_n(x_1) \\ LY_1(x_2) & LY_2(x_2) & \dots & LY_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ LY_1(x_n) & LY_2(x_n) & \dots & LY_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ \vdots \\ Q(x_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Du point de vue du calcul numérique, la méthode de collocation peut être considérée comme un type spécial de la méthode des résidus pondérés (WRM) [10]. Sa théorie de base est décrite comme suit. Pour un problème d'ingénierie donné régi par des équations aux dérivées partielles (EDP), il a la définition suivante :

$$F(u) - f = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad (6)$$

$$G(u) - g = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (7)$$

En substituant la fonction d'essai $\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \beta_i Y_i$ dans les équations (6) et (7), des résidus apparaissent généralement, qui peuvent être exprimés comme suit :

$$R_I = F(\tilde{u}) - f \neq 0 \quad (8)$$

$$R_B = G(\tilde{u}) - g \neq 0 \quad (9)$$

La méthode de collocation est définie comme le traitement de la fonction pondérée qui joue un rôle dans l'élimination des résidus en tant que fonction de Dirac δ , qui peut être écrite mathématiquement comme suit :

$$\int_{\Omega} w_i R_I d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - x_i) R_I d\Omega = R_I = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\partial\Omega} w_i R_B d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta(x - x_i) R_B d\partial\Omega = R_B = 0 \quad (11)$$

où

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = x_i \\ 0, & \text{si } x \neq x_i \end{cases} \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (13)$$

$$\int_{x_i-c}^{x_i+c} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (c > 0, c \rightarrow 0) \quad (14)$$

En observant les équations (10) et (11), en résumé, la méthode de collocation est une méthode numérique qui impose que le résidu généré par chaque point de collocation dans l'équation régissant le problème soit nul. Par conséquent, les avantages de la méthode de collocation résident dans sa simplicité, sa facilité de mise en œuvre et son efficacité élevée. Cependant, ses inconvénients se manifestent principalement par une instabilité computationnelle, une précision de solution plus faible et une vitesse de convergence lente.

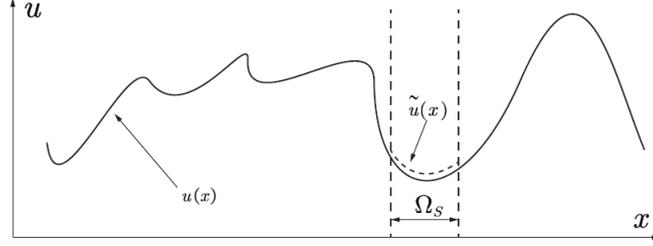


FIGURE 2 – Approximation MLS pour le problème 1D.

2.1 Schéma d'Approximation

Il existe de nombreuses façons de construire des fonctions d'approximation en fonction des informations de collocation, et le choix ainsi que la définition de ces fonctions affecteront directement la stabilité, la précision*et l'applicabilité de la méthode. Le contenu suivant présente brièvement certains des schémas d'approximation couramment utilisés.

2.1.1 Approximation par Moindres Carrés Mobiles (MLS)

La méthode des moindres carrés mobiles (MLS) a d'abord été utilisée pour l'ajustement de courbes [88], puis a été développée davantage par Wixom et al. [132], Lancaster et al. [70]. Comme illustré dans la Figure 2, les fonctions d'approximation MLS utilisent généralement une combinaison linéaire de fonctions de base polynomiales et, pour le nœud I dans le domaine de support Ω_S (généralement de forme circulaire, Figure 3, et rectangulaire, Figure 4), la fonction d'approximation peut être écrite comme suit :

$$u_I(x) \approx \tilde{u}_I(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = p_I^T(x) a(x), \quad x \in \Omega_S \quad (15)$$

où $p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]^T$ sont les fonctions de base polynomiales, m est le nombre de termes dans la base polynomiale complète, et $a(x) = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)]^T$ est le vecteur des coefficients.

Afin de déterminer le vecteur des coefficients $a(x)$, une norme discrète pondérée L^2 est construite dans le domaine de support Ω_S :

$$J(a) = \sum_{J=1}^N w_J(x) [p_J^T(x) a(x) - \hat{u}(x_J)]^2 \quad (16)$$

où N est le nombre total de nœuds dans le domaine Ω_S , et $w_J(x)$ est la fonction de poids au nœud J .

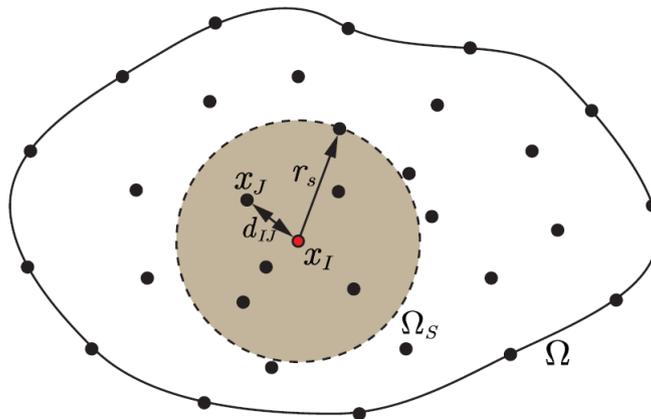
Pour trouver la valeur stationnaire du fonctionnel $J(a)$ par rapport à $a(x)$, c'est-à-dire résoudre $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$, on obtient :

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) \hat{u} \quad (17)$$

avec

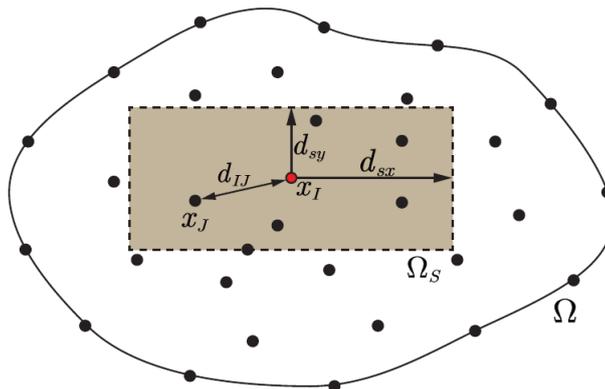
$$A(x) = \sum_{J=1}^N w_J(x) p_J(x) p_J^T(x) \quad (18)$$

$$B(x) = [w_1(x) p_1(x), w_2(x) p_2(x), \dots, w_N(x) p_N(x)] \quad (19)$$



d_{IJ} : distance between x_I and x_J
 r_s : radius of circular support domain Ω_S

FIGURE 3 – Domaine de support de forme circulaire.



d_{sx} : Half length of a rectangular support domain Ω_S in x direction
 d_{sy} : Half length of a rectangular support domain Ω_S in y direction

FIGURE 4 – Domaine de support de forme rectangulaire.

$$\hat{u} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N]^T \quad (20)$$

En substituant les équations (17) dans (15), on obtient :

$$\tilde{u}_I(x) = p_I^T(x)A^{-1}(x)B(x)\hat{u} = \sum_{J=1}^N \varphi_J(x)\hat{u}_J = \varphi(x)\hat{u} \quad (21)$$

où

$$\varphi_J(x) = p_I^T(x) [A^{-1}(x)B_J(x)] \quad (22)$$

Pour le calcul de la dérivée de la fonction de forme $\varphi_J(x)$, deux méthodes ont été proposées par Nayroles et al. [95] et Belytschko et al. [9]. De plus, pour améliorer l'efficacité de la construction du schéma d'approximation MLS, Cheng et al. [18] ont proposé la méthode sans maillage par variable complexe (CVMLS). Dans cette méthode, les coefficients inconnus sont moins nombreux que dans l'approximation MLS, ce qui signifie qu'il y a moins de nœuds utilisés pour discrétiser le modèle.

2.2 Approximation par noyaux

La méthode des particules lissées hydrodynamiques (SPH) [80,92,133] a été largement utilisée dans divers domaines, tels que la dynamique des fluides, la mécanique des impacts et des explosions, et elle offre des avantages distincts pour les problèmes impliquant la densité comme variable de champ.

Pour la fonction $u(x)$, l'approximation par noyaux peut être exprimée comme suit :

$$u_I(x) \approx \tilde{u}_I(x) = \int_{\Omega} u_J(x)w_J(x - x_I, h) d\Omega_S \quad (23)$$

où h est le rayon du domaine lissé. $w_J(x - x_I, h)$ est la fonction noyau, qui peut également être appelée la fonction de poids. En général, le noyau possède les propriétés suivantes :

$$\int_{\Omega} w_J(x - x_I, h) d\Omega_S = 1 \quad (24)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_J(x - x_I, h) = \delta(x - x_I) \quad (25)$$

$$w_J(x - x_I, h) > 0, \quad \forall x \in \Omega_S(x_I) \quad (26)$$

$$w_J(x - x_I, h) > 0, \quad \forall x \notin \Omega_S(x_I) \quad (27)$$

En général, la fonction de poids dans l'équation (23) est sélectionnée comme étant gaussienne ou spline. L'équation (23) peut alors être calculée comme suit :

$$\tilde{u}_I = \sum_{J=1}^N u_J(x)w_J(x - x_I, h)V \quad (28)$$

où V_J représente la mesure spatiale correspondant à la particule numérotée x_J , c'est-à-dire que le problème tridimensionnel représente le volume et est donné par :

$$V_J = \frac{m_J}{\rho_J} \quad (29)$$

où m_J et ρ_J sont respectivement la masse et la densité au nœud x_J . Ainsi, en substituant les équations (29) dans (28), on obtient :

$$\tilde{u}_I = \sum_{J=1}^N \varphi_J(x) u_J \quad (30)$$

où

$$\varphi_J(x) = \frac{m_J}{\rho_J} w_J(x - x_I, h) \quad (31)$$

2.3 Approximation par Base Polynomiale

Pour la fonction d'approximation, l'approximation par base polynomiale utilise une combinaison linéaire de fonctions de base polynomiales :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i = p^T(x) a \quad (32)$$

où $p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]^T$, $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$ est le vecteur des coefficients, qui peut être obtenu en construisant une expression fonctionnelle :

$$J = \sum_{J=1}^N [p_J^T(x) a - \hat{u}_J] \quad (33)$$

En posant $J = 0$ à chaque nœud de collocation, on obtient :

$$a = P^{-1} \hat{u} \quad (34)$$

où

$$P = [p_J^T(x)]_{J=1}^N = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & p_2(x_N) & \dots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \quad (35)$$

Ainsi, pour le nœud de calcul x_I , le schéma d'approximation peut être écrit comme suit :

$$\tilde{u}_I(x) = p_I^T(x) a = p_I^T(x) P^{-1} \hat{u} = \sum_{J=1}^N \varphi_J(x) \hat{u}_J = \varphi(x) \hat{u} \quad (36)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction de forme :

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)] = p_I^T(x) P^{-1} \quad (37)$$

dont la dérivée peut être calculée comme suit :

$$\varphi_{,i}(x) = p_{I,i}^T(x) P^{-1} \quad (38)$$

$$\varphi_{,ij}(x) = p_{I,ij}^T(x) P^{-1} \quad (39)$$

Il convient de noter que les fonctions de forme appartenant à l'interpolation ponctuelle possèdent la propriété de Kronecker δ . Ainsi, les conditions aux limites de Dirichlet peuvent être directement imposées. Cependant, l'interpolation ponctuelle nécessite que le nombre de points de support N soit strictement égal au nombre de termes m du vecteur des fonctions de base, ce qui est une condition très stricte, et la distribution arbitraire des points de support peut facilement conduire à la singularité de $P(x)$ ou à une détérioration du nombre de condition. Par conséquent, la compatibilité de la méthode de construction de cette fonction d'approximation est faible.

2.4 Approximation par Différences Finies Généralisées

L'approximation par différences finies généralisées est proposée pour s'adapter à des grilles irrégulières arbitraires, ce qui en fait une technique d'approximation basée sur les nœuds. Cependant, ce schéma d'approximation n'est pas destiné à approximer la fonction de champ, mais plutôt à approximer les variables différentielles de la fonction de champ. Sur le domaine de support Ω_S d'un nœud x_I , la fonction d'approximation de la variable de champ $u(x)$ peut être exprimée par un développement en série de Taylor :

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = u_I + h \frac{\partial u_I}{\partial x} + k \frac{\partial u_I}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_I}{\partial x^2} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_I}{\partial y^2} + kh \frac{\partial^2 u_I}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3) \quad (40)$$

où

$$u_I = u(x_I, y_I) \quad (41)$$

$$h = x - x_I \quad (42)$$

$$k = y - y_I \quad (43)$$

$$\Delta = \sqrt{h^2 + k^2} \quad (44)$$

En appliquant l'équation (40) pour calculer l'ensemble des points de support locaux x_J avec $J = 1, \dots, N$ du point x_I , un ensemble d'équations linéaires peut être obtenu :

$$a \cdot d = f \quad (45)$$

Il convient de noter que le nœud x_I n'est pas dans l'ensemble x_J , $J = 1, \dots, N$, et

$$a = \begin{bmatrix} h_1 & k_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{k_1^2}{2} & h_1 k_1 \\ h_2 & k_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & h_2 k_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_J & k_J & \frac{h_J^2}{2} & \frac{k_J^2}{2} & h_J k_J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_N & k_N & \frac{h_N^2}{2} & \frac{k_N^2}{2} & h_N k_N \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$d = \left[\frac{\partial u_I}{\partial x}, \frac{\partial u_I}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_I}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_I}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_I}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (47)$$

$$f = [(u_1 - u_I), (u_2 - u_I), \dots, (u_N - u_I)]^T \quad (48)$$

Ainsi, les cinq variables inconnues des dérivées du nœud x_I peuvent être exprimées par :

$$d = a^{-1} f \quad (49)$$

Afin d'assurer la cohérence des approximations et d'éviter la singularité de a , il est nécessaire d'augmenter le nombre de points de support, c'est-à-dire que $N > 5$, et construire l'expression fonctionnelle suivante sur cet ensemble de points :

$$\Pi = \sum_{J=1}^N \frac{1}{3} J (a_J d - f_J)^2, \quad N > 5 \quad (50)$$

dans laquelle

$$a_J = \left[h_J, k_J, \frac{h_J^2}{2}, \frac{k_J^2}{2}, h_J k_J \right] \quad (51)$$

$$f_J = u_J - u_I \quad (52)$$

En prenant la valeur stationnaire, c'est-à-dire $\frac{\partial \Pi}{\partial d} = 0$, on obtient :

$$d = A^{-1} B f \quad (53)$$

dans laquelle

$$A = \sum_{J=1}^N \frac{1}{\Delta_J^3} a_J^T a_J \quad (54)$$

$$B = \left[\frac{a_1^T}{\Delta_1^3}, \frac{a_2^T}{\Delta_2^3}, \dots, \frac{a_J^T}{\Delta_J^3}, \dots, \frac{a_N^T}{\Delta_N^3} \right] \quad (55)$$

Évidemment, l'approximation par différences finies généralisées donne une expression différentielle pour la variable de champ calculée au point x_I :

$$d_i = \sum_{J=1}^N (A^{-1} B_J)_i \cdot (u_J - u_I) \quad (56)$$

Dans le processus de calcul, seule la variable de champ u_I et son approximation différentielle d_i sont introduites dans l'équation régissant et ses conditions aux limites, ce qui permet de construire et résoudre l'équation discrète.

3 Méthodes de Collocation en Mécanique des Solides

Afin d'étudier le mécanisme de comportement en mécanique des solides, les méthodes de collocation ont suscité une attention considérable. Connues pour leurs caractéristiques sans maillage, les méthodes de collocation ont été largement utilisées pour simuler l'élasticité, la plasticité, la mécanique de la rupture et les problèmes de couplage multi-champs. Cette section fournit un aperçu des réalisations de la recherche dans les méthodes de collocation en mécanique des solides, tout en explorant la perspective de la recherche future pour faire avancer le développement de ce domaine.

3.1 Élasticité et Plasticité

La mécanique élastique et plastique a toujours représenté un défi fondamental dans le domaine de l'ingénierie, englobant divers aspects, du comportement élastique des matériaux à la déformation plastique et la rupture. Les méthodes de collocation, en tant qu'approche numérique très prometteuse, ont démontré un potentiel remarquable pour traiter les problèmes liés à la mécanique des solides élastiques et plastiques. Les méthodes de collocation discrétisent les structures à travers des points répartis, également appelés nœuds de collocation, offrant ainsi une grande flexibilité pour traiter des géométries complexes et l'hétérogénéité des matériaux. Par conséquent, ces caractéristiques en font un outil puissant pour étudier l'élasticité et la plasticité des matériaux. Cette sous-section se concentre sur l'application des méthodes de collocation dans les problèmes liés à la mécanique des solides élastiques et plastiques, en mettant l'accent sur les avantages des méthodes de collocation pour traiter des géométries complexes, de grandes déformations et des grands déplacements. À travers une revue exhaustive de la littérature, l'objectif est de fournir une perspective complète pour mieux comprendre et appliquer la méthode

de collocation afin de résoudre des problèmes complexes d'ingénierie impliquant le comportement des matériaux.

Une méthode de collocation stable sans maillage [127] utilisant l'approximation par noyaux reconstruits comme fonction d'approximation est présentée. En effectuant une intégration précise d'ordre élevé dans des sous-domaines réguliers, elle présente des caractéristiques d'efficacité élevée, de grande précision et de bonne stabilité, et la supériorité de la méthode est vérifiée par des exemples en élasticité. La méthode de collocation variable [45] combine l'efficacité de la méthode de collocation avec la précision de la méthode de Galerkin, et le potentiel de la méthode est démontré dans des exemples d'élasticité linéaire et non linéaire. En incorporant des techniques isogéométriques et des techniques de mise à l'échelle des frontières, le problème solide en 2D peut être résolu par une formulation orientée surface appelée la méthode hybride collocation-Galerkin basée sur les B-splines rationnelles non uniformes (NURBS) [65], ce qui permet de modéliser avec un nombre arbitraire de frontières. Ensuite, en utilisant la méthode de collocation basée sur NURBS pour résoudre les équations différentielles ordinaires, Chen et al. [14] ont étendu leurs recherches aux problèmes solides tridimensionnels, qui peuvent également être des problèmes non linéaires. En utilisant la méthode de greffage de points sans maillage, une approche efficace pour le module de cisaillement [121] a été présentée pour analyser l'élasticité-plasticité des solides et des plaques bidimensionnels, cette méthode ayant l'avantage de sa simplicité et de sa mise en œuvre facile pour les propriétés des matériaux. Pour le solide élastodynamique transitoire fissuré avec des propriétés de matériaux anisotropes, la méthode des éléments de frontière dans le domaine temporel [136] a été présentée, avec discrétisation spatiale par la méthode de Galerkin et discrétisation temporelle par la méthode de collocation. L'intérêt de cette méthode est de convertir les intégrales hypersingulières en intégrales faiblement singulières, et cette méthode a été appliquée aux solides piezoélectriques 2D transitoires fissurés [118]. Une formulation isogéométrique (IGA) de collocation [8] a été développée pour résoudre des problèmes de statique et de dynamique en régime permanent. Elle donne des résultats stables, est robuste, précise d'ordre supérieur, et possède une efficacité computationnelle plus élevée que la méthode des éléments finis. Par la suite, cette méthode a été étendue pour résoudre des problèmes de grandes déformations et le comportement des matériaux hyperélastiques [66]. Ensuite, pour les matériaux linéaires et plastiques, la méthode mixte de collocation "contrainte-déplacement isogéométrique" [31] a été proposée. Elle présente non seulement une meilleure efficacité computationnelle que la méthode IGA conventionnelle, mais surmonte également des problèmes existants tels que l'auto-verrouillage volumétrique et l'instabilité. Stevens et al. [115] ont proposé une méthode de collocation par fonction de base radiale locale sans maillage (RBF) avec des taux de convergence élevés et l'ont appliquée pour résoudre des problèmes d'élasticité linéaire. Basées sur l'approximation par moindres carrés mobiles, des formulations locales sans maillage [98] ont été établies pour le champ élastique, ce qui garantit la précision des résultats et réduit le coût de calcul. Sur la base de la technique T-spline IGA, la méthode hybride variationnelle-collocation immergée [13] a été proposée pour résoudre les problèmes de couplage fluide-structure, et ses résultats sont bien en accord avec la solution exacte. La méthode de collocation par noyau reproducteur de gradient [20] a été développée pour résoudre des problèmes élastiques. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle simplifie le processus de calcul de la méthode de collocation par noyaux reproducteurs (RKCM) tout en garantissant une convergence optimale. Par la suite, cette méthode [84] a été utilisée pour résoudre des EDP d'ordre élevé, et les résultats montrent que son effi-

cacité computationnelle est bien supérieure à celle de la méthode RKCM traditionnelle. De plus, en utilisant l'approximation par moindres carrés, la méthode de collocation par noyau reproducteur pondéré [145] a été introduite pour le problème inverse de l'élasticité. La méthode sans maillage des frontières singulières [46] combine la réduction de dimension de la méthode BEM et maintient les avantages des caractéristiques sans maillage et sans intégration de la méthode de solution fondamentale. De plus, elle est performante pour les problèmes élastiques avec des géométries complexes. En introduisant les techniques de noyaux fixes, mobiles et multiples fixes, l'efficacité et la précision de la méthode de nuage fini [3] surpassent celles de la méthode de collocation par points. Les résultats computationnels montrent que, en tant que méthode véritablement sans maillage, cette méthode présente de bonnes perspectives pour les applications en ingénierie. La méthode de collocation par interpolation radiale [81] a été adoptée pour traiter les équations de Poisson non linéaires. Dans cette méthode, pour imposer les conditions aux limites de Neumann, l'interpolation de Hermite a été choisie pour améliorer la stabilité numérique. Ensuite, la méthode de collocation par points radiaux a évolué vers une méthode de collocation par points radiaux régularisée par moindres carrés [62], en introduisant une technique de régularisation, ce qui peut garantir la stabilité et la précision des résultats. De plus, en tant que méthode purement sans maillage, cette méthode permet d'éviter le processus de reconstruction du maillage. Un cadre de collocation par forme forte pondérée [19] a été construit pour analyser numériquement les structures élastiques linéaires incompressibles. Et cette méthode ne présente pas le problème de verrouillage volumétrique et a une bonne convergence. L'avantage de la méthode d'équilibre modifié en ligne (ELM) [113] est que, dans les problèmes d'élastodynamique, les conditions aux limites naturelles sont automatiquement satisfaites par une formulation faible, et les deux formes de construction des fonctions de forme, incluant l'approximation par moindres carrés mobiles et l'approximation par interpolation par points radiaux, sont discutées. Les résultats montrent que la méthode est plus stable et précise que la méthode de collocation directe. Comparée à la méthode de collocation basée sur l'approximation DRK, la méthode de collocation par interpolation à noyau reproducteur différentiel (DRK) [130] a l'avantage que la fonction de forme de la fonction d'interpolation DRK possède la propriété delta, ce qui permet de réduire le coût computationnel.

3.2 Poutres, Plaques et Coques

L'analyse et la conception des structures de poutres, plaques et coques ont toujours été des tâches cruciales dans les problèmes d'ingénierie. Elles sont largement utilisées dans l'aérospatiale, les ponts, les navires et divers systèmes mécaniques. Une compréhension complète et l'optimisation du comportement de ces structures sont essentielles pour garantir leur performance, leur sécurité et leur durabilité. Diverses théories correspondantes ont été développées, y compris la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre et la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Les méthodes de collocation, en tant qu'outil numérique puissant, ont joué un rôle central dans la résolution des problèmes d'ingénierie liés aux structures de poutres, plaques et coques. Contrairement aux méthodes traditionnelles des éléments finis, les méthodes de collocation ne nécessitent pas de maillage, offrant ainsi une plus grande flexibilité pour traiter des géométries complexes et des conditions aux limites. Cela en fait un choix idéal pour explorer la déformation, la conduction thermique, les vibrations et d'autres problèmes dans ces éléments structuraux. Dans cette sous-section, une série de travaux pertinents

sur l'application des méthodes sans maillage dans les structures de poutres, plaques et coques est présentée pour mettre en avant les dernières avancées de la recherche et les pratiques en ingénierie dans ce domaine. En comprenant en profondeur les forces et les limites de ces méthodes, une meilleure compréhension de leur potentiel et de leur applicabilité dans l'analyse des structures de poutres, plaques et coques peut être obtenue.

La méthode d'analyse isogéométrique (IGA) [53] a attiré une large attention des chercheurs. Reali et Gomez ont d'abord introduit l'approche de collocation isogéométrique [110] pour les structures minces, y compris les poutres d'Euler et les plaques de Kirchhoff, et les résultats numériques montrent que cette approche a une forte adaptabilité pour les modèles géométriques complexes et possède une bonne convergence. Marino a appliqué la méthode de collocation isogéométrique [85] pour calculer la poutre non linéaire, et la technique de paramétrisation de rotation sélectionnée a rendu l'approche précise et efficace. Les formulations basées sur le déplacement et mixtes de l'IGA [86] permettent d'analyser des poutres avec une courbure de flexion arbitraire, et elles peuvent s'adapter à des modèles géométriques complexes sans problème de verrouillage. Pavan et al. [104] ont étendu la méthode de collocation isogéométrique (IGA) pour résoudre des poutres composites stratifiées. Comme dans la plupart des méthodes par forme forte, les équations gouvernantes sont discrétisées directement, ce qui rend le calcul plus efficace, et une variété de théories de déformation par cisaillement sont prises en compte dans des exemples numériques pour vérifier la précision de la méthode. Afin de surmonter le problème apparaissant dans le cadre local de Serret–Frenet (SF) et sur le vecteur de Darboux, une méthode IGA-C [54] utilisant les cadres de Bishop a été présentée. L'état dynamique non linéaire du récupérateur d'énergie piézoélectrique a été analysé par un schéma de collocation sans maillage basé sur les contraintes de couple non locales [6], dans lequel la fonction de base fusionnée peut efficacement éliminer la singularité. La méthode de collocation de Chebyshev [63] a calculé le comportement dynamique des poutres non linéaires sans opération d'intégration, et l'analyse des valeurs propres a été donnée avec précision. Une méthode de collocation sans maillage [44] a été proposée pour étudier les poutres 3D à gradient fonctionnel, dans laquelle les effets non classiques peuvent être directement traités. Pour les poutres de Bernoulli-Euler et les plaques de Kirchhoff-Love, Chen et al. [15] ont développé une méthode de collocation basée sur l'interpolation Hermite DRK pour les résoudre avec une variété de conditions aux limites. Absorbant les avantages de la méthode IGA et de la méthode des éléments de frontière, la méthode de collocation basée sur les éléments de frontière isogéométriques [143] peut calculer la structure de coque à un coût computationnel réduit. Les coques cylindriques nanocomposites ont été analysées par une approche semi-analytique basée sur la collocation de Chebyshev [26], et ses résultats peuvent aider à améliorer la stabilité des structures de coque. Basé sur la formule de cisaillement d'ordre supérieur, le comportement de vibration libre des coques à gradient fonctionnel a été étudié par la méthode de collocation [96] utilisant la fonction de base radiale. La méthode de collocation spectrale avec des polynômes orthogonaux [138] a été utilisée pour analyser la vibration libre des structures de coques stratifiées. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle permet de traiter des structures de coques avec des conditions aux limites arbitraires. Pour le comportement non linéaire en régime permanent ou transitoire des plaques circulaires, la méthode de collocation des points orthogonaux globaux intérieurs a été développée par Nath et al. [94]. Selon la théorie du cisaillement du premier ordre, le déplacement et la rotation d'une coque avec une géométrie conique ont été exprimés par les polynômes de Chebyshev et Fourier [71], respectivement. Le point fort de cette méthode est sa simplicité, puisqu'au-

cune intégration numérique ou différentiation n'est nécessaire dans le processus de calcul. En combinant les fonctions de base radiales et la méthode de collocation, Wang et al. [128] ont proposé la méthode de collocation par fonction de base radiale (RBCM) pour adopter les coques fines fonctionnellement graduées avec des matériaux hétérogènes. Par la suite, Wang et al. [126] ont proposé la méthode de collocation hermitienne et ont montré que la technique d'approximation par noyaux reproducteurs de gradient introduite pouvait éviter l'opération différentielle d'ordre élevé pour améliorer l'efficacité computationnelle. De plus, cette méthode a une précision plus élevée que la méthode de collocation directe à la frontière. En tenant compte de l'environnement thermique, l'analyse du flambage des plaques nanocomposites a été étudiée par une méthode de collocation Chebyshev 2D [52], et les facteurs affectant la stabilité et la vitesse angulaire critique ont été examinés. La méthode de collocation Chebyshev [21] a été utilisée pour discrétiser les équations dynamiques des déplacements de grandes déformations des plaques sandwich dans l'état post-flambage, et de nombreux facteurs affectant la fréquence naturelle ont été discutés en détail. La méthode de collocation sans maillage [51] utilisant la fonction de base radiale spline a été réalisée pour étudier le comportement hyperélastique des plaques de silicone sous une charge uniformément répartie, et l'efficacité de la méthode a été vérifiée par des expériences. Trois types de formulations ont été proposées pour résoudre le problème de flexion des plaques composites stratifiées, et la méthode de collocation isogéométrique [105] a ensuite été utilisée pour discrétiser les équations, dont l'effet peut réduire le problème de verrouillage par cisaillement des plaques en état clampé. Pour les plaques stratifiées composées de plaques fines et épaisses, Ferreira et al. [33] ont suggéré une méthode de solution qui intègre la technique de collocation par fonction de base radiale dans la formule unifiée de Carrera pour prédire les comportements en régime permanent et transitoire. En utilisant la technique de collocation sans maillage pour traiter la frontière et la formulation faible pour gérer le calcul différentiel, Wu et al. [135] ont proposé les méthodes de collocation (MC) et Galerkin sans éléments (EFG) basées sur le théorème variationnel mixte de Reissner (RMVT) pour les plaques fonctionnellement graduées, et cette méthode a montré une bonne convergence. Pour le problème de flexion des plaques Kirchhoff [73], l'équation gouvernante a été discrétisée par le schéma d'approximation par base radiale, et la singularité et la symétrie des systèmes d'équations ont été traitées par la méthode de collocation hermitienne.

3.3 Analyse de la Rupture

En science des matériaux, la question du comportement de la rupture a toujours été un domaine d'étude vital, influençant la fiabilité et la sécurité des structures. Les méthodes de collocation, avec leur nature sans maillage, permettent de traiter plus facilement les formes géométriques complexes et les processus de propagation des fissures. De plus, elles éliminent les complexités associées à la génération et à la reconstruction du maillage, offrant ainsi une flexibilité et une précision remarquables pour prédire la propagation des fissures, le comportement des pointes de fissures et les facteurs d'intensité de contrainte. Par la suite, les réalisations de la recherche sur les méthodes de collocation dans le domaine de la mécanique de la rupture seront présentées dans cette sous-section.

Nguyen-Thanh et al. [97] ont établi un schéma pour la propagation des fissures dans les composites renforcés de fibres à une échelle microscopique par la méthode de collocation sans maillage isogéométrique. De plus, cette méthode présente l'avantage d'une analyse adaptative. Schillinger et al. [114] ont préconisé une méthode hybride isogéométrique avec

une efficacité computationnelle plus élevée que la méthode de Galerkin. La combinaison de la méthode de collocation et de la formule de Galerkin permet de traiter non seulement les conditions aux limites secondaires et les contraintes d'interface, mais aussi les termes d'intégrale. En combinant avec la technique des éléments de frontière et la technique de collocation de frontière [32], la propagation des fissures et les phénomènes de coalescence ont été prédits avec précision. La méthode de collocation sans maillage enrichie [146] a été présentée pour construire un cadre pour les problèmes de rupture. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que le calcul de la dérivée pour la fonction de poids ou la matrice des moments peut être évité par une technique d'approximation. Les problèmes avec des géométries non convexes et des caractéristiques locales ont été traités par la méthode de collocation par base radiale en sous-domaines [125], ce qui améliore l'adaptabilité de la méthode RBCM traditionnelle. Le problème de rupture pour les matériaux piézoélectriques/piézomagnétiques à gradient fonctionnel a été traité dans un domaine fini par la méthode de collocation de frontière [17] avec la technique semi-inverse, et les facteurs affectant le comportement des fissures ont été discutés.

3.4 Problèmes de Couplage Multi-Physiques

Les problèmes de couplage multi-champs impliquent des interactions entre plusieurs champs physiques, y compris les champs élastique, thermique, électrique, magnétique, etc. Les méthodes de collocation, avec leur grande aptitude à traiter les problèmes multi-champs, peuvent simuler efficacement le comportement de ces champs multi-physiques. Dans cette sous-section, la littérature pertinente sur l'application des méthodes de collocation pour prédire les problèmes de couplage multi-champs sera revue.

Pour les structures flexoélectriques 2D, la méthode de collocation par éléments finis mixtes [119] avec approximation C_0 continue peut réduire le nombre de degrés de liberté par rapport à la méthode de Lagrange traditionnelle, et les résultats obtenus ont été utiles pour l'analyse de la sécurité structurale. Par la suite, ils ont poursuivi leurs recherches [120] pour explorer l'effet des propriétés de flexoélectricité sur la pointe de fissure. La méthode de collocation élément de frontière-intégrale virtuelle [74] a été proposée pour traiter le problème de couplage magneto-électro-élastique. L'innovation clé de cette méthode réside dans l'utilisation d'une frontière virtuelle pour contourner les problèmes de singularité à la frontière physique. En considérant le problème élasto-visco-plastique pour les poutres 3D, une méthode de collocation isogéométrique mixte [131] a discrétisé directement les équations différentielles non linéaires comme la plupart des approches par forme forte. Dans cette méthode, les variables physiques, y compris le déplacement, les orientations et les contraintes, ont été discrétisées par des B-splines ou NURBS, et le terme temporel a été discrétisé par un schéma implicite de retour-mapping. La relation entre le comportement dynamique non linéaire et la taille du récupérateur d'énergie impliquant le champ électro-élastique a été étudiée par la méthode de collocation sans maillage [1], et la précision de cette méthode a été garantie par la technique du gradient de déformation. Wu et al. [134] ont étendu la méthode de collocation sans maillage aux structures de coques sous des champs multi-couplés thermo-électro-élastiques. Les points forts de la méthode reposent sur le fait que la dérivée des fonctions de forme peut être obtenue par des conditions de reproduction différentielle, et la propriété delta des fonctions de forme a facilité l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet. Dans nos travaux précédents, la méthode d'élément libre zonal [58], initialement proposée par Gao et al. [40], a discrétisé les équations gouvernantes pour le champ électro-élastique sous

une forme forte, et son point fort réside dans le fait qu'elle surmonte le problème des coins dans la méthode sans maillage grâce à la technique zonale. Ensuite, nos recherches ont été étendues pour traiter le problème de couplage multi-champs thermo-électro-mécanique transitoire [56], dont la précision et la stabilité sont garanties par le schéma de Galerkin. En raison de la large applicabilité de l'effet magneto-électrique, la méthode de Galerkin zonale multi-physiques [57] a été proposée pour analyser les réponses dynamiques des structures magneto-électro-élastiques fonctionnellement graduées.

4 Collocation dans la Conduction Thermique et l'Écoulement de Fluides

La conduction thermique et la dynamique des fluides sont des problèmes d'ingénierie essentiels et incontournables. Pour les problèmes de transfert thermique, la méthode de collocation peut simuler efficacement les phénomènes complexes de transfert thermique tels que la conduction thermique, la convection et le rayonnement en utilisant des techniques de discrétisation et d'approximation numériques. Pour les problèmes d'écoulement de fluides, en les modélisant sous forme d'équations différentielles et en appliquant les techniques numériques appropriées, la méthode de collocation aborde efficacement divers aspects cruciaux, y compris les vitesses d'écoulement, les distributions de pression et les caractéristiques des fluides, qui jouent un rôle essentiel dans l'amélioration de la conception et l'optimisation des performances des systèmes d'ingénierie. Cette section propose une exploration d'une série d'études littéraires pour mettre en évidence les progrès significatifs et les cas réussis de la méthode de collocation dans la résolution des problèmes de conduction thermique et d'écoulement de fluides.

4.1 Problèmes de Conduction Thermique

Accompagné de points de collocation distribués aléatoirement et de l'approximation par fonctions de base radiales, un cadre de collocation sans maillage [150] a été proposé pour résoudre les problèmes de conduction thermique. Cependant, deux problèmes importants nécessitaient une résolution urgente. L'un est que la matrice de solution n'est pas creuse. L'autre est qu'avec l'augmentation du nombre de points de collocation, la mauvaise condition de la matrice de solution et le coût computationnel augmentaient également. La méthode de collocation par ondelettes de Legendre [55] a été utilisée pour simuler le comportement des structures poroélastiques dans un environnement thermique. En utilisant la technique de mappage de Kirchhoff, la solution du terme non linéaire causé par la conductivité thermique variable a été obtenue. Une caractéristique remarquable de cette méthode était sa capacité à fournir des résultats de haute précision même avec un faible nombre de points de collocation. Le problème de transfert thermique d'une structure cylindrique infiniment longue a été calculé par la méthode de collocation spectrale [117]. Le schéma Eulerien et le schéma de collocation spectrale discrétisent les termes temporels, spatiaux et dérivés, ce qui donne des résultats computationnels d'une grande précision. De manière similaire, Chen et al. [16] ont utilisé la méthode de collocation spectrale pour analyser deux modèles physiques pour la convection naturelle dans une cavité carrée, et ils ont étudié plusieurs facteurs influençant la fonction de courant adimensionnée et la distribution de température. La distribution de température pour ailette à conductivité thermique radiative [83] a été approximée en utilisant des polynômes d'in-

terpolation de Lagrange dans la méthode de collocation spectrale. De plus, l'efficacité de la méthode a été validée par une comparaison avec les résultats rapportés dans la littérature précédente. Dans les problèmes de conduction thermique avec des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées, les termes dérivés fractionnaires dans le temps ont été traités par une approche de collocation localisée [137] avec des solutions fondamentales. Une méthode hybride [24] qui combinait les méthodes de collocation avec la méthode de Galerkin était capable de calculer efficacement les problèmes de transfert thermique convectif générés par l'écoulement incompressible à l'extérieur d'un cylindre. La contribution de cette méthode était que, sous l'hypothèse que le flux thermique n'a aucune influence sur le champ de vitesse, l'incertitude de la vitesse d'entrée et du flux thermique de paroi a été résolue. La méthode de collocation sans maillage utilisant la technique d'approximation par fonction de base B-spline, appelée méthode de collocation B-spline locale sans maillage [49], a fourni une nouvelle idée pour traiter les problèmes de conduction thermique transitoire avec des propriétés de matériaux hétérogènes. En tant que technique purement sans maillage, son avantage réside dans le fait qu'elle peut directement traiter la discontinuité de l'interface des matériaux.

4.2 Problèmes d'Écoulement de Fluide

Karageorghis et al. [61] ont obtenu la solution des problèmes de valeur aux limites à deux points en utilisant la méthode de collocation spectrale, et l'avantage clé de cette méthode réside dans le fait que la performance de la fonction d'essai n'était pas affectée par les termes non linéaires. Dans le cadre lagrangien, la méthode de collocation sans maillage pondérée [129] a excellé non seulement par sa capacité à capturer facilement les frontières ou interfaces mobiles, mais aussi par son évitement de l'introduction de coefficients pour traiter les termes incompressibles. De plus, les résultats numériques obtenus par cette méthode étaient meilleurs que ceux de la méthode traditionnelle des différences finies (FDM) ou des SPHs. Aronson et al. [5] ont introduit la technique de stabilité basée sur les résidus dans la méthode de collocation isogéométrique. La méthode hérite non seulement d'une excellente convergence et précision, mais elle peut aussi traiter les oscillations parasites dans le transport scalaire et les problèmes de fluide incompressible. Afin de traiter le problème de couplage fluide-structure, les objets de recherche dans le maillage eulerien ont été discrétisés par des particules lagrangiennes. De plus, cette méthode [108] assurait une continuité d'ordre élevé entre les nœuds et les particules et offrait une plus grande efficacité pour le calcul des fonctions de forme par rapport aux méthodes SPH. Ensuite, ils ont appliqué cette méthode pour simuler le problème des vagues d'eau [109]. Aronson et al. ont proposé deux schémas, le schéma vitesse-pression et le schéma vorticité-vitesse-pression, pour analyser les problèmes d'écoulement incompressible [4], et les résultats ont montré que la dernière approche présentait un taux de convergence plus rapide par rapport à la première. De plus, cette méthode combinait une haute précision d'ordre supérieur tout en héritant des avantages de l'efficacité computationnelle associés à la méthode de collocation. Les phénomènes d'écoulement de fluide dans l'environnement thermique ont été étudiés à l'aide de la méthode de collocation par fonction de base radiale locale [50], dans laquelle l'efficacité de la solution numérique était assurée par la méthode de compressibilité artificielle. L'écoulement des eaux souterraines avec conditions non confinées a été prédit par la méthode de collocation sans maillage par points [89] utilisant des fonctions de base radiales, ce qui permet de discrétiser directement l'équation gouvernante. Le défi du problème vitesse-courbure 2D a été résolu en utilisant

la méthode de collocation sans maillage par points [64]. La contribution de cette approche réside dans sa capacité à obtenir les dérivées de fonctions arbitraires par le biais de fonctions de forme construites par l'approximation par moindres carrés mobiles, offrant ainsi un moyen innovant d'imposer des conditions aux limites de vorticité. Pour les problèmes biomédicaux, une méthode de collocation sans maillage localisée [148] a été employée pour étudier le problème de dynamique des fluides avec des propriétés de fluide incompressible. Les oscillations numériques ont été supprimées par un schéma amont d'ordre élevé, conduisant à une précision d'ordre trois dans les résultats obtenus. La méthode de collocation sans maillage utilisant l'approximation hermitienne par fonction de base radiale a calculé les réponses transitoires du problème convectif-diffusif [69]. Il convient de noter que des résultats de calcul précis pouvaient encore être obtenus même sous des conditions de champ de vitesse fort et de longue durée. Une méthode de collocation spectrale [107] a calculé numériquement les équations de la couche limite axisymétrique 2D avec des propriétés compressibles. De plus, l'opération de préconditionnement pour les équations gouvernantes a accéléré l'efficacité computationnelle, et les résultats ont montré que l'influence de la courbure transversale sur la stabilité devait être prise en compte. Par la suite, ils ont poursuivi leurs études [116] sur les problèmes d'écoulement incompressible tridimensionnels. Le véritable problème d'écoulement compressible a été exploré par la méthode des points finis [101], et en même temps, la technique h-adaptative a également été proposée. Les résultats numériques, y compris les ailes, étaient satisfaisants, ce qui a prouvé la capacité de la méthode à résoudre des problèmes pratiques. Grâce à la technique de soustraction de singularité et à l'expansion asymptotique, Bottella et Peyret ont également appliqué la méthode de collocation de Chebyshev [11] pour traiter les problèmes de singularité provenant des discontinuités de frontière ou des changements dans les types de conditions aux limites. Toujours en utilisant la méthode de collocation de Chebyshev, le problème de l'écoulement de la couche limite de magnétohydrodynamique, en tant que fluide non newtonien, a été étudié numériquement [67]. Notez que dans cette approche, les équations gouvernantes pouvaient être transformées en équations différentielles ordinaires.

5 Avancées récentes des méthodes de collocation

Avec le développement des méthodes numériques, plusieurs méthodes de collocation novatrices ont émergé ces dernières années. Basée sur la technique des gradients lissés, Wang et al. [124] ont proposé une méthode de collocation sans maillage de lissage des gradients superconvergente. Cette méthode permet non seulement de surmonter le problème de la discordance du degré de base, mais aussi d'atteindre une précision d'ordre 2 grâce à une fonction de base linéaire. Par la suite, ils ont étendu leurs recherches aux plaques composites stratifiées [28] et ont complété un travail d'analyse de la précision [27] des méthodes de collocation sans maillage. En introduisant des interpolants fractionnaires de Lagrange obéissant à la théorie spectrale, une méthode de collocation spectrale fractionnaire avec convergence exponentielle a été proposée par Zayernouri et al. [149] pour traiter les équations aux dérivées partielles fractionnaires. Fu et al. [34] ont introduit pour la première fois les schémas de collocation localisée et ont résumé plusieurs problèmes complexes résolus avec succès par ces méthodes. Une méthode de collocation trigonométrique de Fourier d'ordre arbitraire a été proposée par Wang et al. [122] pour résoudre des problèmes oscillatoires multi-fréquences. En combinant la méthode de collocation et la

méthode d'apprentissage profond, le problème de flexion de la plaque de Kirchhoff* a été résolu par la méthode de collocation profonde proposée par Guo et al. [47]. Grâce à la formulation récursive des gradients, Wang et al. [123] ont établi une méthode de collocation isogéométrique superconvergente, qui présente une efficacité computationnelle supérieure à celle de la méthode isogéométrique standard tout en garantissant la propriété de superconvergence. Les trois principales méthodes qui seront décrites ici sont la méthode différentielle d'élément [37], la méthode d'élément libre [36] et la méthode de ligne finie [35]. Yan et al. [140–142] ont utilisé la méthode de dynamique des particules Lagrangiennes mise à jour (ULPH) pour simuler le problème des écoulements multiphasés et le problème d'entrée d'objets solides dans l'eau. Yu et al. [147] ont établi des opérateurs différentiels non locaux de manière unifiée. Jingwen Ren et al. [60] ont proposé une nouvelle idée pour les problèmes IGA. Prenant la conduction thermique comme arrière-plan, l'introduction de ces trois méthodes est brièvement présentée ci-dessous. Tout d'abord, dans la conduction thermique, l'équation gouvernante et les conditions aux limites sont données comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} \right) + Q(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (57)$$

$$T(x) = \tilde{T}(x), \quad x \in \Gamma_1 \quad (58)$$

$$q(x) = -\lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i = \tilde{q}(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (59)$$

$$q(x) = -\lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i = h(T(x) - T_\infty), \quad x \in \Gamma_3 \quad (60)$$

où λ_{ij} est le tenseur de conductivité thermique du second ordre, T est la température, T_∞ est la température environnementale, Q est le taux de génération de chaleur, q est le flux de chaleur, et Γ_1 , Γ_2 , et Γ_3 sont les frontières respectivement par rapport à \tilde{T} , \tilde{q} et T_∞ . $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

5.1 Méthode Différentielle d'Élément (EDM)

Comme montré dans la Figure 5, les éléments de collocation isoparamétriques sont utilisés pour discrétiser le modèle computationnel. Il est à noter que dans l'élément de collocation 2D à 9 nœuds, l'équation gouvernante et l'équation d'équilibre des flux sont satisfaites respectivement aux nœuds internes, aux nœuds d'interface et aux nœuds de frontière. L'innovation principale de l'EDM est de fournir l'expression analytique (Éqs. (61) et (62)) de la dérivée des fonctions de forme dans l'élément isoparamétrique d'ordre supérieur, ce qui permet de discrétiser directement l'équation gouvernante sans aucune autre opération [37].

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = J_{ik}^{-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_k} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 N_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = \left[[J]_{ik}^{-1} \frac{\partial^2 N_\alpha}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \frac{\partial [J]_{ik}^{-1}}{\partial \xi_l} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi_k} \right] \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \quad (62)$$

où N_α est la fonction de forme au nœud α . J_{ik} est la matrice de Jacobi. ξ et x sont les coordonnées dans les systèmes de coordonnées locaux et globaux, respectivement.

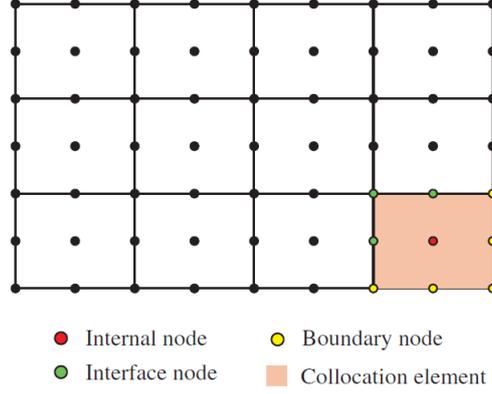


FIGURE 5 – Élément de collocation en méthode des éléments discrets (EDM).

Ainsi, les équations discrétisées pour les nœuds internes, d'interface et de frontière sont données comme suit [37, 59] :

$$\left[\frac{\partial \lambda_{ij}(\xi)}{\partial x_i} \frac{\partial N_\alpha(\xi)}{\partial x_j} + \lambda_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 N_\alpha(\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \right] T^\alpha = -Q(\xi), \quad \xi \in \Omega \quad (63)$$

$$\sum_{f=1}^M -\lambda_{ij}(\xi^I) \frac{\partial N_\alpha(\xi^I)}{\partial x_j} n_i^f(\xi^I) T^\alpha = 0, \quad \xi \in \Gamma_I \quad (64)$$

$$\sum_{f=1}^K -\lambda_{ij}(\xi^b) \frac{\partial N_\alpha(\xi^b)}{\partial x_j} n_i^f(\xi^b) T^\alpha = q(\xi^b), \quad \xi \in \Gamma_b \quad (65)$$

où λ_{ij} est la conductivité thermique. ξ , ξ^I , et ξ^b sont les coordonnées locales des nœuds internes, d'interface et de frontière, respectivement. M et K sont le nombre de surfaces d'éléments liées au nœud d'interface et au nœud de frontière, respectivement. n_i^f est la normale unitaire par rapport à la surface f . q est le flux thermique connu.

En résumé, la méthode différentielle d'élément est une méthode de collocation par éléments avec une haute précision et une efficacité computationnelle élevée.

5.2 Méthode de Collocation par Élément Libre (FrEM)

La méthode de collocation par élément libre conserve les avantages de l'utilisation de l'expression analytique pour discrétiser directement l'équation gouvernante et les conditions aux limites, et elle possède la caractéristique distincte de former librement l'élément de collocation à chaque point, l'élément étant indépendant des éléments des nœuds voisins [36]. Comme dans les méthodes sans maillage, une série de nœuds est discrétisée dans le domaine de calcul dans FrEM. À chaque nœud de collocation, un élément local indépendant, appelé élément libre, peut être formé avec les nœuds environnants, comme montré dans la Figure 6. Contrairement à la méthode EDM, il n'existe pas d'interfaces d'éléments dans FrEM, et donc FrEM est adapté aussi bien pour la mécanique des solides [40] que pour la mécanique des fluides [39].

En prenant le problème de conduction thermique comme exemple, les équations discrétisées dans FrEM peuvent être obtenues à partir des Éqs. (57) et (58) comme

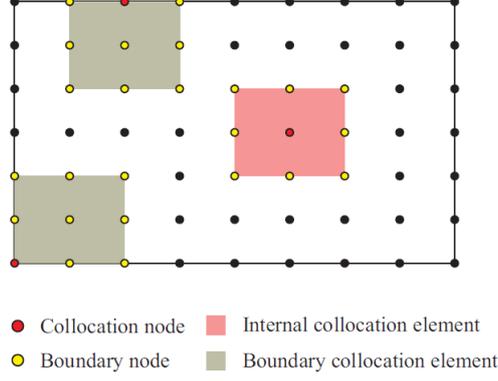


FIGURE 6 – Nœuds de collocation et leurs éléments libres à 9 nœuds en méthode des éléments finis (FrEM).

suit [36] :

$$\left[\frac{\partial \lambda_{ij}(\xi^c)}{\partial x_i} \frac{\partial N_\alpha(\xi^c)}{\partial x_j} + \lambda_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 N_\alpha(\xi^c)}{\partial x_i \partial x_j} \right] T^\alpha = -Q(\xi^c), \quad \xi \in \Omega \quad (66)$$

$$-\lambda_{ij}(\xi^b) \frac{\partial N_\alpha(\xi^b)}{\partial x_j} n_i(\xi^b) T^\alpha = q(\xi^b), \quad \xi \in \Gamma_b \quad (67)$$

où ξ^c et ξ^b sont les coordonnées locales des nœuds internes et de frontière, respectivement. n_i est la normale unitaire. q est le flux thermique connu.

Dans FrEM, l'utilisation des éléments isoparamétriques peut garantir sa stabilité. De plus, la caractéristique distincte de la formation libre d'un élément à chaque point évite l'apparition d'interfaces entre les éléments, ce qui la rend très adaptable pour traiter les problèmes de fluide en utilisant un schéma amont [79]. FrEM possède des schémas par forme forte et forme faible [41, 139], et de nombreux exemples ont été utilisés pour examiner leur stabilité et leur flexibilité [36, 36, 39, 79, 139].

5.3 Méthode Zonal Galerkin d'Élément Libre (ZGFREM)

En absorbant l'idée de la méthode des blocs finis, ZGFREM est proposé en introduisant la technique des zones dans FrEM. Comme montré dans la Figure 7, le modèle computationnel est d'abord divisé en cinq zones, puis chaque zone est discrétisée par un groupe de nœuds de collocation. Comparé à FrEM, un nouveau type de nœud de collocation, le nœud de collocation d'interface, apparaît. Il formera un élément de collocation pour la zone I et la zone IV, respectivement.

De plus, les équations pertinentes de la méthode des éléments libres de Galerkin zonal pour le problème thermo-mécanique sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{ijmn}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_n} - \beta_{ij}(x) T(x) \right) + f_i(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (68)$$

$$u_m(x) = \tilde{u}_m(x), \quad x \in \Gamma_u \quad (58b)$$

$$\sigma_{ij}(x) n_j = \left(D_{ijmn}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_n} - \beta_{ij}(x) T(x) \right) n_j = \tilde{t}_i(x), \quad x \in \Gamma_\sigma \quad (69)$$

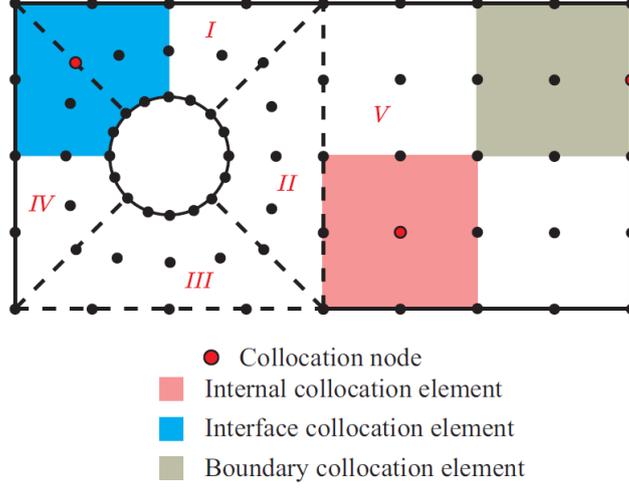


FIGURE 7 – Nœuds de collocation et leurs éléments de collocation à 9 nœuds en ZGFREM (Zeroth-Gradient Finite Element Method).

où β_{ij} est le coefficient de température-contraintes. D_{ijmn} est le tenseur contrainte-déformation. u est le déplacement mécanique. T est la température. f_i est la force de corps. Γ_u et Γ_σ sont les frontières des déplacements spécifiques et des tensions. Grâce au format généralisé de la méthode de Galerkin et en prenant la fonction de forme comme fonction pondérée $N_c = w$, l'équation gouvernante pour les problèmes de couplage thermo-mécanique devient :

$$\int_{\Omega} D_{ijmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \frac{\partial N_c}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} N_c f_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} N_c \tilde{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \beta_{ij} T \frac{\partial N_c}{\partial x_j} d\Omega \quad (70)$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} D_{ijmn} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial N_c}{\partial x_j} u_m^\alpha d\Omega = \int_{\Omega} N_c f_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} N_c \tilde{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \beta_{ij} T \frac{\partial N_c}{\partial x_j} d\Omega \quad (71)$$

5.4 Méthode de Ligne Finie (FLM)

La méthode de ligne finie (FLM) est une nouvelle méthode numérique conceptuelle [35], qui établit le schéma de solution basé sur un nombre fini de lignes traversant le nœud de collocation. Comme dans la méthode de l'élément libre [36], le domaine de solution dans FLM est toujours discrétisé en une série de nœuds de collocation, et un ensemble de lignes composé de 2 ou 3 lignes est défini pour chaque nœud de collocation dans les problèmes 2D ou 3D, respectivement. La Figure 8 montre trois ensembles de lignes 2D définis à trois positions différentes pour le cas 2D. Les dérivées partielles de premier et de haut ordre des variables physiques par rapport aux coordonnées globales peuvent être dérivées par la dérivée de la longueur d'arc sur chaque ligne [42]. Par exemple, la dérivée partielle de premier ordre de la variable physique u peut être dérivée et exprimée comme suit :

$$\frac{\partial u(x^c)}{\partial x_i} = d_i^{c\alpha} u^\alpha, \quad d_i^{c\alpha} u^\alpha = N_i'^\alpha(x^c) \quad (72)$$

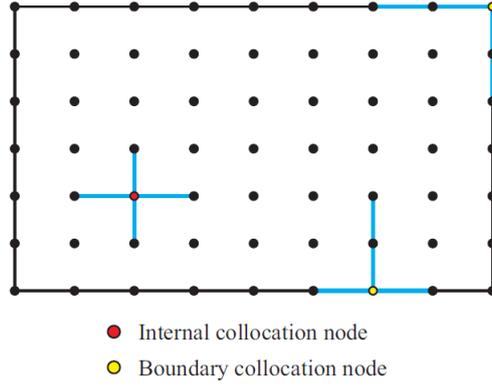


FIGURE 8 – Système de lignes 2D en méthode des éléments finis (FLM).

où u^α est la valeur nodale α -ième de u sur l'ensemble de lignes défini pour le nœud de collocation x^c , et

$$d_i^{c\alpha} = \sum_{I=1}^d [J]_{iI}^{-1} \left. \frac{\partial L_I^\alpha(l)}{\partial l} \right|_{l=l(x^c)} \quad (73)$$

dans laquelle $d = 2$ ou 3 pour les problèmes 2D ou 3D, L_I^α est la fonction d'interpolation de Lagrange du nœud α définie sur la I -ième ligne mesurée par la longueur d'arc l , et $[J]$ est la matrice de Jacobi allant de l aux coordonnées globales x_i [42]. Les dérivées spatiales d'ordre supérieur peuvent être obtenues en utilisant récursivement l'Éq. (72).

Il est très simple d'utiliser l'Éq. (72) pour établir un système discrétisé pour les EDP. Par exemple, l'Éq. gouvernante (57) avec les conditions aux limites (58) et (59) peut être discrétisée comme suit :

$$d_i^{c\beta} \lambda_{ij}^\beta d_j^{\beta\alpha} T^\alpha = -Q(x^c), \quad x^c \in \Omega \quad (74)$$

$$T(x^c) = \tilde{T}(x^c), \quad x^c \in \Gamma_1 \quad (75)$$

$$-\lambda_{ij}(x^c) n_i(x^c) d_j^{c\alpha} T^\alpha = q(x^c), \quad x^c \in \Gamma_2 \quad (76)$$

La méthode FLM permet non seulement d'éviter la construction d'éléments de haute dimension pour les problèmes 2D ou 3D, mais elle peut également résoudre des problèmes de dérivées partielles d'ordre élevé avec des modèles géométriquement complexes à l'aide d'ensembles de lignes flexibles. Il est également à noter que FLM ne dispose que du schéma par forme forte, sans formulation par forme faible, et l'expérience montre que FLM est la méthode la plus stable parmi les méthodes numériques par forme forte.

6 Exemple de démonstration

6.1 Analyse de Conduction Thermique pour une Plaque 2D

Une plaque 2D avec un matériau homogène est considérée, et sa géométrie ainsi que ses conditions aux limites sont montrées dans la Figure 9. La solution analytique de la température à n'importe quel point de ce problème est :

$$T(x, y) = \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)} \right) \times (T_2 - T_1) + T_1 \quad (77)$$

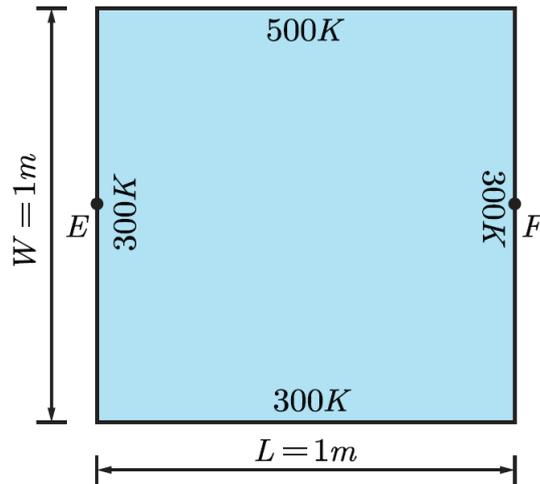


FIGURE 9 – Modèle pour la plaque 2D.

où $T_1 = 300 K$, $T_2 = 500 K$.

Les trois méthodes EDM, FrEM et ZGFREM sont toutes utilisées pour calculer ce problème. Le graphique de contours et la température le long du chemin EF (E (0, 0.5), F (1, 0.5)) sont tracés dans les Figures 10 et 11, respectivement. De plus, afin de tester la convergence globale, les trois méthodes sont exécutées en utilisant respectivement 121, 441 et 1681 nœuds. La relation entre la norme L_2 et le nombre de nœuds est montrée dans la Figure 12.

6.2 Structure Sandwich Ondulée

Pour mieux démontrer les performances de la méthode de collocation, un exemple numérique pour prédire les réponses des structures sandwich ondulées par la méthode “zonal Galerkin free element” est donné. Ce problème englobe les aspects de transfert de chaleur, de mécanique des solides, et de couplage thermo-mécanique. La distribution des zones utilisée dans cet exemple est illustrée dans la Figure 13. Les détails géométriques du modèle et les propriétés des matériaux peuvent être trouvés dans la Figure 14, les Tableaux 1 et 2.

TABLE 1 – Paramètres de conception pour la structure sandwich ondulée

Paramètres de conception	Valeur
t_T	3 mm
t_B	3 mm
t_P	3 mm
d	50 mm
l	160 mm
l_1	22 mm
t_w	1 mm
θ	60°

Sous l’hypothèse que le déplacement de la surface inférieure est fixe dans toutes les directions, les surfaces supérieure et inférieure de la structure sont soumises à des condi-

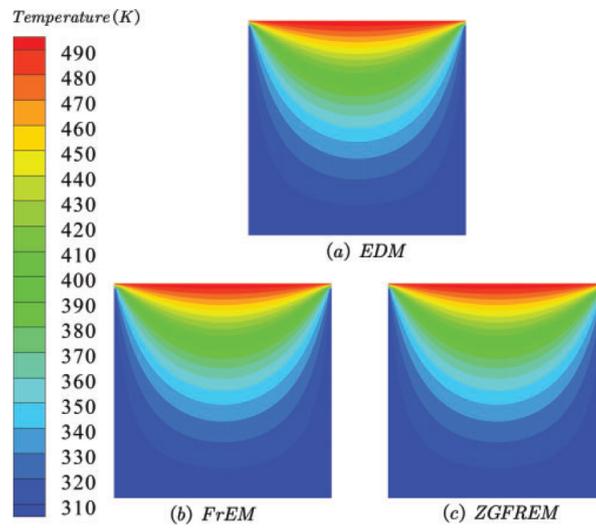


FIGURE 10 – Graphiques de contour pour la température de la plaque 2D obtenue par différentes méthodes de collocation.

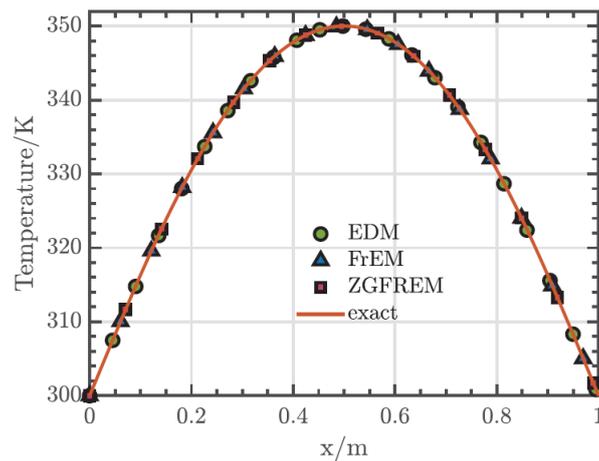


FIGURE 11 – La température le long du chemin EF obtenue par différentes méthodes de collocation.

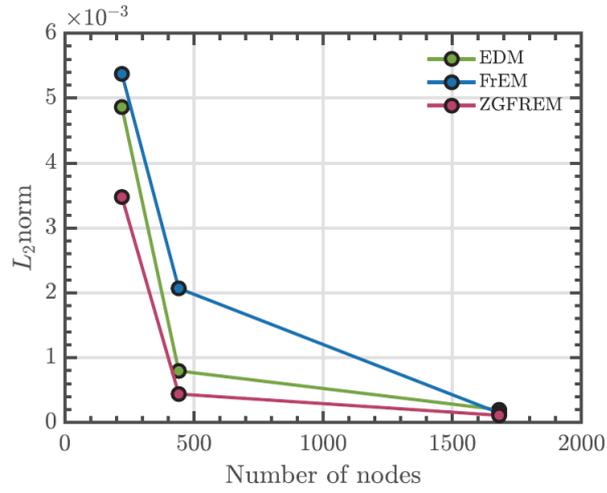


FIGURE 12 – La courbe de la norme L^2 en fonction du nombre de nœuds obtenue par différentes méthodes de collocation.

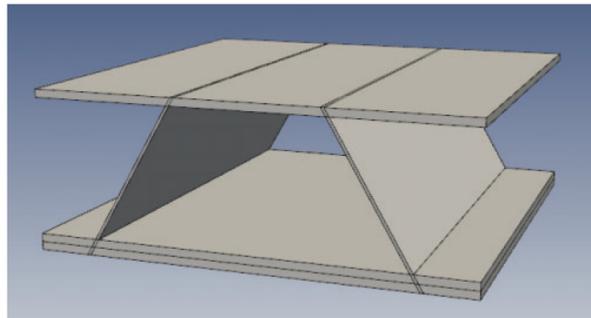


FIGURE 13 – Diagramme schématique de la distribution des zones de la structure sandwich ondulée.

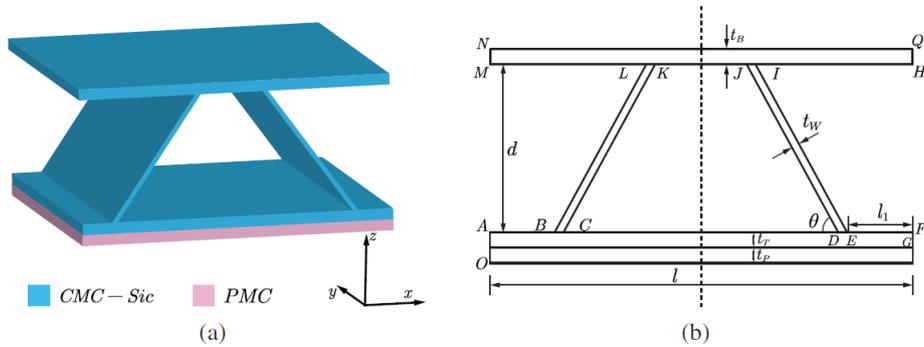


FIGURE 14 – Modèle de la structure sandwich ondulée (a) géométrie (b) vue de face (plan $y = 0$).

TABLE 2 – Propriétés des matériaux pour la structure sandwich ondulée

Propriétés	CMC-Sic	PMC
Constantes élastiques (GPa)		
E_1	70.2	162
E_2	70.2	162
E_3	60	9.1
G_{12}	26	60
G_{13}	22.2	5.2
G_{23}	22.2	5.2
Rapport de Poisson		
ν_{12}	0.35	0.35
ν_{13}	0.35	0.35
ν_{23}	0.35	0.35
Constante d'expansion thermique (K^{-1})		
α	3.0×10^{-6}	1.0×10^{-6}
Coefficient de conductivité thermique ($W \cdot m \cdot K^{-1}$)		
λ	20	0.41

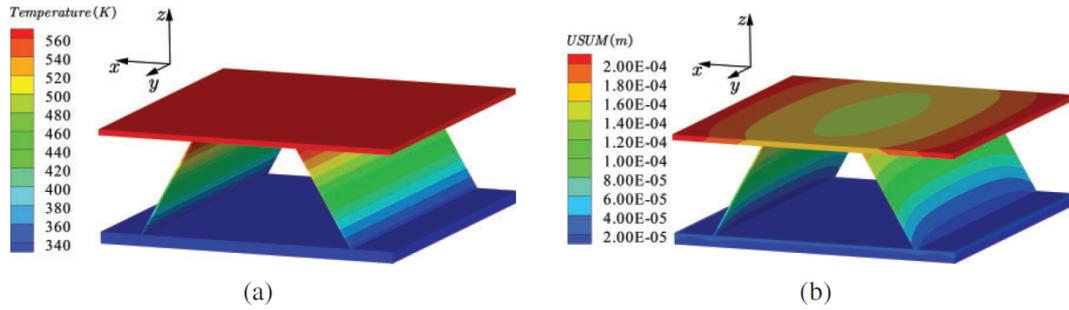


FIGURE 15 – Graphiques de contour sur la structure sandwich ondulée dans un environnement thermique (a) température (b) déplacement total.

tions aux limites de température de 317 et 573K, respectivement, tandis que les autres surfaces sont imposées comme conditions aux limites libres.

À des fins de comparaison, une analyse par éléments finis (ABAQUS) est également réalisée en utilisant un nombre similaire de nœuds. La Figure 15 présente la distribution de température calculée et la déformation de la structure. Il est évident que la température se propage vers le bas le long du sternum. La Figure 16 présente le flux de chaleur total et les contraintes de Mises. Dans la Figure 17, la température le long de la ligne CD et les déplacements le long de la ligne PQ sont donnés, les lignes étant formées par les coordonnées (0.0526, 0.16, 0.059), (0.0185, 0.16, 0), (0, 0.16, 0.006), (0.16, 0.16, 0.006) aux points C, D, P et Q. Il est à noter que des déplacements importants sont observés des deux côtés de la plaque inférieure, une région d'intérêt particulier. De plus, dans la Figure 17b, l'erreur relative maximale entre les deux méthodes est de 1.35%, ce qui valide la précision de la méthode zonale Galerkin free element.

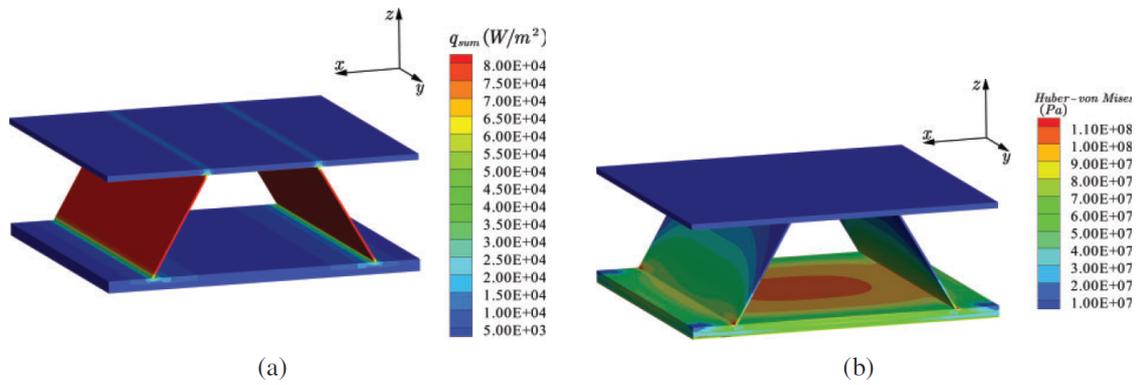


FIGURE 16 – Graphiques de contour sur la structure sandwich ondulée dans un environnement thermique (a) flux de chaleur total (b) critère de Huber-von Mises.

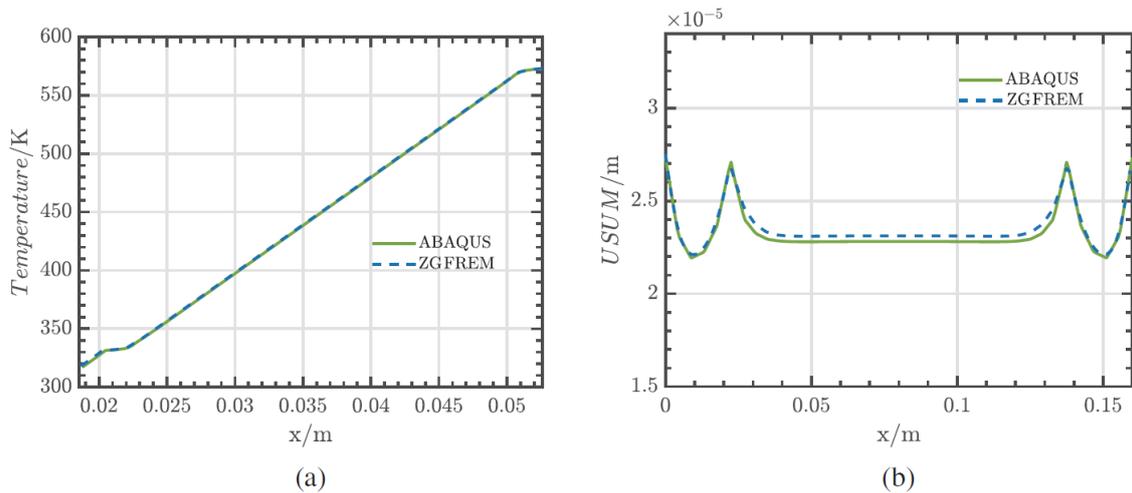


FIGURE 17 – Réponses structurelles obtenues par deux méthodes différentes (a) température le long de la ligne CD (b) déplacement le long de la ligne PQ.

7 Conclusion et Perspectives de Recherche Futures

Dans cet article, un aperçu de l'origine, du développement et de l'application de la méthode de collocation est présenté. Le principe et certaines techniques d'approximation courantes dans la méthode de collocation sont brièvement introduits. Comparée aux méthodes numériques avec opération d'intégration, la méthode de collocation offre une manière de traitement plus directe, et en raison de sa caractéristique basée sur les nœuds, la méthode de collocation devient un outil puissant pour traiter des problèmes tels que les grandes déformations, les processus de formage, et les problèmes d'explosion. Certaines techniques pour améliorer la stabilité de la méthode de collocation sont également résumées. De plus, la méthode de collocation avec différentes techniques d'approximation peut être combinée avec des méthodes de haute précision, afin de tirer parti de leurs avantages respectifs.

De cette revue, il ressort que la méthode de collocation a une large gamme de problèmes d'application pratique en ingénierie, y compris la mécanique des solides (poutres, plaques, coques, fracture, etc.), les problèmes de conduction thermique et d'écoulement de fluide, ainsi que les problèmes de couplage multi-champs.

À ce jour, il reste encore des travaux de recherche difficiles à accomplir sur la méthode de collocation, et quelques suggestions pour les futures directions de recherche peuvent être résumées comme suit :

- La méthode de collocation, grâce à sa caractéristique distincte par nœud, offre une voie pour réaliser des calculs parallèles haute performance. L'exploration des techniques de calcul parallèle et l'optimisation des algorithmes pour le calcul distribué peuvent considérablement améliorer l'applicabilité de la méthode de collocation pour résoudre des problèmes à grande échelle dans divers domaines de l'ingénierie et des sciences.
- En tirant parti des avantages des méthodes de collocation isogéométriques dans la modélisation de conception assistée par ordinateur (CAO), il existe un potentiel de travaux pertinents dans la recherche biomécanique, en particulier dans l'étude des tissus biologiques tels que les structures squelettiques. L'approche interdisciplinaire peut offrir des aperçus précieux sur le comportement des systèmes biologiques complexes sous des charges mécaniques.
- Combiner la méthode de collocation avec d'autres techniques numériques de haute précision peut exploiter les points forts de chaque méthode, assurant à la fois une grande précision et une efficacité. En intégrant des méthodes complémentaires, cela peut améliorer les performances globales des simulations numériques, en particulier dans les scénarios où une précision extrême est requise.
- Coupler la méthode de collocation avec des techniques d'intelligence artificielle, telles que l'apprentissage automatique, pourrait constituer un sujet de recherche intéressant. Cette intégration pourrait améliorer l'adaptabilité de la méthode de collocation, lui permettant de s'auto-optimiser et de s'adapter à l'évolution des domaines de problèmes. L'application des méthodes d'IA pour guider le raffinement adaptatif du maillage ou l'optimisation de la distribution des points de collocation pourrait être une direction de recherche prometteuse.
- Le développement de logiciels commerciaux centrés autour de la méthode de collocation pourrait favoriser son adoption plus large dans les communautés d'ingénierie et scientifiques. Ces logiciels pourraient offrir des interfaces conviviales, des solveurs efficaces et un soutien pour une large gamme d'applications en ingénierie,

rendant la méthode de collocation plus accessible aux praticiens.

Ces directions de recherche suggérées visent à étendre davantage les capacités et les applications de la méthode de collocation, en faisant un outil polyvalent et puissant dans diverses disciplines scientifiques et d'ingénierie. La méthode de collocation revue n'est qu'une partie des méthodes numériques. Des investigations plus complètes sur diverses méthodes numériques, en particulier classées par dimensions d'opération, peuvent être trouvées dans la référence [38].

Références

- [1] R. Alshenawy, S. Sahmani, B. Safaei, Y. Elmoghazy, A. Al-Alwan, et al. Nonlinear dynamical performance of microsize piezoelectric bridge-type energy harvesters based upon strain gradient-based meshless collocation approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 151 :199–215, 2023.
- [2] N. R. Aluru. A point collocation method based on reproducing kernel approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(6) :1083–1121, 2000.
- [3] N.R. Aluru and G. Li. Finite cloud method : A true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(10) :2373–2410, 2001.
- [4] R. M. Aronson and J. A. Evans. Divergence-conforming isogeometric collocation methods for the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 410 :115990, 2023.
- [5] R. M. Aronson, C. Wetterer-Nelson, and J. A. Evans. Stabilized isogeometric collocation methods for scalar transport and incompressible fluid flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 417 :116283, 2023.
- [6] M. Atif Shahzad, S. Sahmani, and B. Safaei. Nonlocal couple stress-based meshless collocation model for nonlinear dynamic performance of microbeam-type piezoelectric energy harvesters. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 101 :105059, 2023.
- [7] S. N. Atluri and T. Zhu. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22(2) :117–127, 1998.
- [8] F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, T. J. R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli. Isogeometric collocation for elastostatics and explicit dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 249–252 :2–14, 2012.
- [9] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2) :229–256, 1994.
- [10] R. B. Bird. Application of the method of weighted residuals to the equation of transport phenomena. *Journal of Applied Mechanics*, 1954.
- [11] O. Botella and R. Peyret. Computing singular solutions of the navier-stokes equations with the chebyshev-collocation method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36(2) :125–163, 2001.
- [12] P. Breitkopf, G. Touzot, and P. Villon. Double grid diffuse collocation method. *Computational Mechanics*, 25(2) :199–206, 2000.

- [13] H. Casquero, L. Liu, C. Bona-Casas, Y. Zhang, and H. Gomez. A hybrid variational-collocation immersed method for fluid-structure interaction using unstructured t-splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 105(11) :855–880, 2016.
- [14] L. Chen, W. Dornisch, and S. Klinkel. Hybrid collocation-galerkin approach for the analysis of surface-represented 3d-solids employing sb-fem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295 :268–289, 2015.
- [15] S. M. Chen, C. P. Wu, and Y. M. Wang. A hermite drk interpolation-based collocation method for the analyses of bernoulli-euler beams and kirchhoff-love plates. *Computational Mechanics*, 47(4) :425–453, 2011.
- [16] Y. Y. Chen, B. W. Li, and J. K. Zhang. Spectral collocation method for natural convection in a square porous cavity with local thermal equilibrium and non-equilibrium models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 96 :84–96, 2016.
- [17] J. Cheng, B. Sun, M. Wang, and Z. Li. Analysis of iii crack in a finite plate of functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials using boundary collocation method. *Archive of Applied Mechanics*, 89(2) :231–243, 2019.
- [18] Y. Cheng and J. Li. A complex variable meshless method for fracture problems. *Science in China Series G*, 49(1) :46–59, 2006.
- [19] S. W. Chi, J. S. Chen, and H. Y. Hu. A weighted collocation on the strong form with mixed radial basis approximations for incompressible linear elasticity. *Computational Mechanics*, 53(2) :309–324, 2014.
- [20] S. W. Chi, J. S. Chen, H. Y. Hu, and J. P. Yang. A gradient reproducing kernel collocation method for boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(13) :1381–1402, 2013.
- [21] C. Chu, M. S. H. Al-Furjan, R. Kolahchi, and A. Farrokhian. A nonlinear chebyshev-based collocation technique to frequency analysis of thermally pre/post-buckled third-order circular sandwich plates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 118 :107056, 2023.
- [22] R. W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *2nd Conference on Electronic Computation*, pages 345–378, 1960.
- [23] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191(2) :448–475, 2003.
- [24] P. G. Constantine, A. Doostan, and G. Iaccarino. A hybrid collocation/galerkin scheme for convective heat transfer problems with stochastic boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(6–7) :868–880, 2009.
- [25] T. Cruse and F. Rizzo. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22(1) :244–259, 1968.
- [26] Z. Dai and Y. Kiani. Stability of higher-order lattice composite cylindrical shell reinforced with graphene platelets by means of a chebyshev collocation-based semi-analytical approach. *Engineering Structures*, 296 :116952, 2023.

- [27] L. Deng and D. Wang. An accuracy analysis framework for meshfree collocation methods with particular emphasis on boundary effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 404 :115782, 2023.
- [28] L. Deng, D. Wang, X. Xu, Z. Lin, and S. Fu. A superconvergent meshfree collocation formulation for laminated composite plates with particular focus on convergence analysis. *Composite Structures*, 321 :117248, 2023.
- [29] C. A. Duarte and J. T. Oden. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1) :237–262, 1996.
- [30] C. A. Duarte and J. T. Oden. H-p clouds-an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12(6) :673–705, 1996.
- [31] F. Fahrenndorf, S. Morganti, A. Reali, T. J. R. Hughes, and L. D. Lorenzis. Mixed stress-displacement isogeometric collocation for nearly incompressible elasticity and elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 369 :113112, 2020.
- [32] M. Fatehi Marji and I. Dehghani. Kinked crack analysis by a hybridized boundary element/boundary collocation method. *International Journal of Solids and Structures*, 47(7) :922–933, 2010.
- [33] A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, and C. M. C. Roque. Radial basis functions collocation for the bending and free vibration analysis of laminated plates using the reissner-mixed variational theorem. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 39 :104–112, 2013.
- [34] Z. J. Fu, Z. Tang, Q. Liu, Y. Gu, and F. Wang. Localized collocation schemes and their applications. *Acta Mechanica Sinica*, 38, 2022.
- [35] X. W. Gao, J. X. Ding, and H. Y. Liu. Finite line method and its application in coupled heat transfer between fluid-solid domains. *Acta Physica Sinica*, 71(19), 2022.
- [36] X. W. Gao, L. F. Gao, Y. Zhang, M. Cui, and J. Lv. Free element collocation method : A new method combining advantages of finite element and mesh free methods. *Computers and Structures*, 215 :10–26, 2019.
- [37] X. W. Gao, S. Z. Huang, M. Cui, B. Ruan, and Q. H. et al. Zhu. Element differential method for solving general heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 115 :882–894, 2017.
- [38] X. W. Gao, W. W. Jiang, X. B. Xu, H. Y. Liu, and K. et al. Yang. Overview of advanced numerical methods classified by operation dimensions. *Aerospace Research Communications*, 1, 2023.
- [39] X. W. Gao, H. Liu, M. Cui, K. Yang, and H. Peng. Free element method and its application in cfd. *Engineering Computations*, 36(8) :2747–2765, 2019.
- [40] X. W. Gao, H. Y. Liu, and B. Ruan. Discontinuous zone free element method with variable condensation and applications in thermal-stress analysis of functionally graded material structures with cracks. *Computers and Structures*, 243 :106411, 2021.
- [41] X. W. Gao, B. B. Xu, J. Lv, and H. F. Peng. Free element method and its application in structural analysis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(3) :703–713, 2019.

- [42] X. W. Gao, Y. M. Zhu, and T. Pan. Finite line method for solving high-order partial differential equations in science and engineering. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 7 :100477, 2022.
- [43] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics : Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3) :375–389, 1977.
- [44] G. Giunta, S. Belouettar, and A. J. M. Ferreira. A static analysis of three-dimensional functionally graded beams by hierarchical modelling and a collocation meshless solution method. *Acta Mechanica*, 227(4) :969–991, 2016.
- [45] H. Gomez and L. de Lorenzis. The variational collocation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 309 :152–181, 2016.
- [46] Y. Gu, W. Chen, H. Gao, and C. Zhang. A meshless singular boundary method for three-dimensional elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(2) :109–126, 2016.
- [47] H. Guo, X. Zhuang, and T. Rabczuk. A deep collocation method for the bending analysis of kirchhoff plate. *Computers, Materials & Continua*, 59(2) :433–456, 2019.
- [48] R. L. Hardy. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76(8) :1905–1915, 1971.
- [49] M. I. P. Hidayat. Meshless local b-spline collocation method for heterogeneous heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 101 :76–88, 2019.
- [50] Y. C. Hon, B. Sarler, and D. Yun. Local radial basis function collocation method for solving thermo-driven fluid-flow problems with free surface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 57 :2–8, 2015.
- [51] S. Hosseini and G. Rahimi. Experimental and numerical analysis of hyperelastic plates using mooney-rivlin strain energy function and meshless collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 150 :199–218, 2023.
- [52] Y. Huang, S. Peng, M. Habibi, and Z. Moradi. Buckling simulation of eccentrically rotating nanocomposite sector plates in thermal environment using the 2d chebyshev collocation method. *Thin-Walled Structures*, 193 :111203, 2023.
- [53] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39) :4135–4195, 2005.
- [54] D. Ignesti, G. Ferri, F. Auricchio, A. Reali, and E. Marino. An improved isogeometric collocation formulation for spatial multi-patch shear-deformable beams with arbitrary initial curvature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 403 :115722, 2023.
- [55] K. Jangid and S. Mukhopadhyay. Application of legendre wavelet collocation method to the analysis of poro-thermoelastic coupling with variable thermal conductivity. *Computers and Mathematics with Applications*, 146 :1–11, 2023.
- [56] W. W. Jiang and X. W. Gao. Analysis of thermo-electro-mechanical dynamic behavior of piezoelectric structures based on zonal galerkin free element method. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 99 :104939, 2023.

- [57] W. W. Jiang, X. W. Gao, and H. Y. Liu. Multi-physics zonal galerkin free element method for static and dynamic responses of functionally graded magneto-electro-elastic structures. *Composite Structures*, 321 :117217, 2023.
- [58] W. W. Jiang, X. W. Gao, B. B. Xu, and J. Lv. Analysis of piezoelectric problems using zonal free element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 127 :40–52, 2021.
- [59] W. W. Jiang, X. W. Gao, B. B. Xu, and J. Lv. Static and forced vibration analysis of layered piezoelectric functionally graded structures based on element differential method. *Applied Mathematics and Computation*, 437 :127548, 2023.
- [60] H. L. Jingwen Ren. New perspective to isogeometric analysis : Solving isogeometric analysis problem by fitting load function. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 136(3) :2957–2984, 2023.
- [61] A. Karageorghis, T. N. Phillips, and A. R. Davies. Spectral collocation methods for the primary two-point boundary value problem in modelling viscoelastic flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(4) :805–813, 1988.
- [62] B. B. T. Kee, G. R. Liu, and C. Lu. A regularized least-squares radial point collocation method (rls-rpcm) for adaptive analysis. *Computational Mechanics*, 40(5) :837–853, 2007.
- [63] P. Khaneh Masjedi and A. Maheri. Chebyshev collocation method for the free vibration analysis of geometrically exact beams with fully intrinsic formulation. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 66 :329–340, 2017.
- [64] Y. Kim, D. W. Kim, S. Jun, and J. H. Lee. Meshfree point collocation method for the stream-vorticity formulation of 2d incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33) :3095–3109, 2007.
- [65] S. Klinkel, L. Chen, and W. Dornisch. A nurbs based hybrid collocation-galerkin method for the analysis of boundary represented solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284 :689–711, 2015.
- [66] R. Kruse, N. Nguyen-Thanh, L. de Lorenzis, and T. J. R. Hughes. Isogeometric collocation for large deformation elasticity and frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296 :73–112, 2015.
- [67] R. B. Kudenatti, L. Sandhya, and N. M. Bujurke. Numerical study on magneto-hydrodynamic boundary layer flow of the carreau fluid in a porous medium : The chebyshev collocation method. *Engineering with Computers*, 38(3) :2633–2654, 2022.
- [68] K. C. Kwon, S. H. Park, and S. K. Youn. The least-squares meshfree method for elasto-plasticity and its application to metal forming analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(6) :751–788, 2005.
- [69] A. La Rocca, A. Hernandez Rosales, and H. Power. Radial basis function hermite collocation approach for the solution of time dependent convection-diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(4) :359–370, 2005.
- [70] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surface generated by moving least square methods. *Mathematics of Computation*, 37(155) :141, 1981.
- [71] J. Lee. Free vibration analysis of joined conical-cylindrical shells by matched fourier-chebyshev collocation method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 32(10) :4601–4612, 2018.

- [72] S. H. Lee and Y. C. Yoon. Meshfree point collocation method for elasticity and crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(1) :22–48, 2004.
- [73] V. M. A. Leitao. A meshless method for kirchhoff plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(10) :1107–1130, 2001.
- [74] X. C. Li and W. A. Yao. Virtual boundary element-integral collocation method for the plane magnetoelectroelastic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(8) :709–717, 2006.
- [75] T. Liszka. An interpolation method for an irregular net of nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9) :1599–1612, 1984.
- [76] T. Liszka and J. Orkisz. Finite difference method at arbitrary irregular meshes in non-linear problems of applied mechanics. In *International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, San Francisco, USA, 1977.
- [77] T. Liszka and J. Orkisz. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers Structures*, 11(1) :83–95, 1980.
- [78] G. R. Liu and Y. T. Gu. A meshfree method : Meshfree weak-strong (mws) form method, for 2-d solids. *Computational Mechanics*, 33(1) :2–14, 2003.
- [79] H. Y. Liu, X. W. Gao, and B. B. Xu. An implicit free element method for simulation of compressible flow. *Computers & Fluids*, 192 :104276, 2019.
- [80] M. B. Liu, G. R. Liu, Z. Zong, and K. Y. Lam. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers & Fluids*, 32(3) :305–322, 2003.
- [81] X. Liu, G. R. Liu, K. Tai, and K. Y. Lam. Radial point interpolation collocation method (rpim) for the solution of nonlinear poisson problems. *Computational Mechanics*, 36(4) :298–306, 2005.
- [82] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astrophysical Journal*, 8(12) :1013–1024, 1977.
- [83] J. Ma, Y. Sun, B. Li, and H. Chen. Spectral collocation method for radiative-conductive porous fin with temperature dependent properties. *Energy Conversion and Management*, 111 :279–288, 2016.
- [84] A. Mahdavi, S. W. Chi, and H. Zhu. A gradient reproducing kernel collocation method for high order differential equations. *Computational Mechanics*, 64(5) :1421–1454, 2019.
- [85] E. Marino. Isogeometric collocation for three-dimensional geometrically exact shear-deformable beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 307 :383–410, 2016.
- [86] E. Marino. Locking-free isogeometric collocation formulation for three-dimensional geometrically exact shear-deformable beams with arbitrary initial curvature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 324 :546–572, 2017.
- [87] E. S. D. F. Mayers. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge University Press, 2003.
- [88] D. H. Mclain. Drawing contours from arbitrary data points. *Computer Journal*, 17(4) :318–324, 1974.

- [89] M. Meenal and T. I. Eldho. Two-dimensional contaminant transport modeling using meshfree point collocation method (pcm). *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(4) :551–561, 2012.
- [90] G. Meinardus. *Approximation of functions : Theory and numerical methods*. Springer Science & Business Media, 1967.
- [91] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30 :543–574, 1992.
- [92] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30(1), 1992.
- [93] I. P. Mysovskih. *Lectures on numerical methods*. Springer Science & Business Media, 1969.
- [94] Y. Nath, P. C. Dumir, and R. S. Bhatia. Nonlinear static and dynamic analysis of circular plates and shallow spherical shells using the collocation method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(3) :565–578, 1985.
- [95] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10(5) :307–318, 1992.
- [96] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, and C. M. C. Roque. Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 37 :24–34, 2013.
- [97] N. Nguyen-Thanh, W. Li, J. Huang, and K. Zhou. Multi phase-field modeling of anisotropic crack propagation in 3d fiber-reinforced composites based on an adaptive isogeometric meshfree collocation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 393 :114794, 2022.
- [98] T. Oliveira and A. Portela. Weak-form collocation—a local meshless method in linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 73 :144–160, 2016.
- [99] E. Onate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, and R. L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. application to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22) :3839–3866, 1996.
- [100] E. Onate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and C. Sacco. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1–4) :315–346, 1996.
- [101] E. Ortega, E. Onate, and S. Idelsohn. A finite point method for adaptive three-dimensional compressible flow calculations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(9) :937–971, 2009.
- [102] S. H. Park, K. C. Kwon, and S. K. Youn. A study on the convergence of least-squares meshfree method under inaccurate integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10) :1397–1419, 2003.
- [103] S. H. Park and S. K. Youn. The least-squares meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(9) :997–1012, 2001.
- [104] G. S. Pavan, H. Muppidi, and J. Dixit. Static, free vibrational and buckling analysis of laminated composite beams using isogeometric collocation method. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 96 :104758, 2022.

- [105] G. S. Pavan and K. S. Nanjunda Rao. Bending analysis of laminated composite plates using isogeometric collocation method. *Composite Structures*, 176 :715–728, 2017.
- [106] N. Perrone and R. Kao. A general finite difference method for arbitrary meshes. *Computers Structures*, 5(1) :45–57, 1975.
- [107] C. D. Pruett and C. L. Streett. A spectral collocation method for compressible, non-similar boundary layers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 13(6) :713–737, 1991.
- [108] Z. Qian, L. Wang, C. Zhang, and Q. Chen. A highly efficient and accurate lagrangian-eulerian stabilized collocation method (lescm) for the fluid-rigid body interaction problems with free surface flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 398 :115238, 2022.
- [109] Z. Qian, L. Wang, C. Zhang, Q. Liu, Q. Chen, et al. Numerical modeling of water waves with the highly efficient and accurate lagrangian-eulerian stabilized collocation method (lescm). *Applied Ocean Research*, 138 :103672, 2023.
- [110] A. Reali and H. Gomez. An isogeometric collocation approach for bernoulli-euler beams and kirchhoff plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284 :623–636, 2015.
- [111] J. Rizzo, Frank. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 25(1) :83, 1967.
- [112] P. J. Roache. A generalized finite difference formulation for differential expressions using collocated variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8 :48–56, 1976.
- [113] A. Sadeghirad, I. Mahmoudzadeh Kani, M. Rahimian, and A. Vaziri Astaneh. A numerical approach based on the meshless collocation method in elastodynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 25(6) :857–870, 2009.
- [114] D. Schillinger, M. J. Borden, and H. K. Stolarski. Isogeometric collocation for phase-field fracture models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284 :583–610, 2015.
- [115] D. Stevens, H. Power, and K. A. Cliffe. A meshless local rbf collocation method using integral operators for linear elasticity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 88 :246–258, 2014.
- [116] C. J. Subich, K. G. Lamb, and M. Stastna. Simulation of the navier-stokes equations in three dimensions with a spectral collocation method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73(2) :103–129, 2013.
- [117] Y. Sun, X. Li, J. Zhao, Y. Hu, X. Jing, et al. Investigation of transient coupled conduction and radiation heat transfer in the linearly anisotropic scattering cylindrical medium by spectral collocation method. *International Journal of Thermal Sciences*, 172 :107308, 2022.
- [118] A. Tan, S. Hirose, and C. Zhang. A time-domain collocation-galerkin bem for transient dynamic crack analysis in anisotropic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(11) :1025–1038, 2005.
- [119] X. Tian, J. Sladek, V. Sladek, Q. Deng, and Q. Li. A collocation mixed finite element method for the analysis of flexoelectric solids. *International Journal of Solids and Structures*, 217–218 :27–39, 2021.

- [120] X. Tian, M. Xu, H. Zhou, Q. Deng, J. Sladek, et al. Modeling the flexoelectric effect around the tip of nano-cracks using a collocation mfem. *Engineering Fracture Mechanics*, 289 :109452, 2023.
- [121] W. Tu, Y. T. Gu, and P. H. Wen. Effective shear modulus approach for two dimensional solids and plate bending problems by meshless point collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(5) :675–684, 2012.
- [122] B. Wang, A. Iserles, and X. Wu. Arbitrary-order trigonometric fourier collocation methods for multi-frequency oscillatory systems. *Foundations of Computational Mathematics*, 16(1) :151–181, 2016.
- [123] D. Wang, D. Qi, and X. Li. Superconvergent isogeometric collocation method with greville points. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 377 :113689, 2021.
- [124] D. Wang, J. Wang, and J. Wu. Superconvergent gradient smoothing meshfree collocation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 340 :728–766, 2018.
- [125] L. Wang, J. S. Chen, and H. Y. Hu. Subdomain radial basis collocation method for fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(7) :851–876, 2010.
- [126] L. Wang, Y. Liu, Z. Liao, Y. Zhou, and F. Yang. Gradient reproducing kernel based hermite collocation method (ghcm) for eigenvalue analysis of functionally graded thin plates with in-plane material. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 148 :73–89, 2023.
- [127] L. Wang, Y. Liu, and Z. W. Qian. Meshfree stabilized collocation method in elasticity. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 38 :305–312, 2021.
- [128] L. Wang, Y. Liu, Y. Zhou, and F. Yang. Static and dynamic analysis of thin functionally graded shell with in-plane material inhomogeneity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 193 :106165, 2021.
- [129] L. Wang, Z. Qian, Y. Zhou, and Y. Peng. A weighted meshfree collocation method for incompressible flows using radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, 401 :108964, 2020.
- [130] Y. M. Wang, S. M. Chen, and C. P. Wu. A meshless collocation method based on the differential reproducing kernel interpolation. *Computational Mechanics*, 45(6) :585–606, 2010.
- [131] O. Weeger, D. Schillinger, and R. Muller. Mixed isogeometric collocation for geometrically exact 3d beams with elasto-visco-plastic material behavior and softening effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 399 :115456, 2022.
- [132] J. A. Wixom and W. J. Gordon. Shepard’s method of “metric interpolation” to bivariate and multivariate interpolation. *Mathematics of Computation*, 32(141) :253–264, 1978.
- [133] S. Wong and Y. Wong. Large deformation analysis with galerkin based smoothed particle hydrodynamics. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 36(2) :97–118, 2008.
- [134] C. P. Wu, K. H. Chiu, and R. Y. Jiang. A meshless collocation method for the coupled analysis of functionally graded piezo-thermo-elastic shells and plates under thermal loads. *International Journal of Engineering Science*, 56 :29–48, 2012.

- [135] C. P. Wu, K. H. Chiu, and Y. M. Wang. Rmvt-based meshless collocation and element-free galerkin methods for the quasi-3d analysis of multilayered composite and fgm plates. *Composite Structures*, 93(2) :923–943, 2011.
- [136] M. Wunsche, F. Garcia-Sanchez, A. Saez, and C. Zhang. A 2d time-domain collocation-galerkin bem for dynamic crack analysis in piezoelectric solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(4) :377–387, 2010.
- [137] Q. Xi, Z. Fu, T. Rabczuk, and D. Yin. A localized collocation scheme with fundamental solutions for long-time anomalous heat conduction analysis in functionally graded materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 180 :121778, 2021.
- [138] X. Xie, H. Zheng, and G. Jin. Integrated orthogonal polynomials based spectral collocation method for vibration analysis of coupled laminated shell structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 98 :132–143, 2015.
- [139] B. B. Xu and X. Gao. Petrov-galerkin zonal free element method for 2d and 3d mechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 124 :5047–5068, 2023.
- [140] J. Yan, S. fan Li, A. Zhang, X. yu Kan, and P. N. Sun. Updated lagrangian particle hydrodynamics (ulph) modeling and simulation of multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 393 :406–437, 2019.
- [141] J. Yan, S. Li, X. Kan, A. Zhang, and X. Lai. Higher-order nonlocal theory of updated lagrangian particle hydrodynamics (ulph) and simulations of multiphase flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 368 :113176, 2020.
- [142] J. Yan, S. Li, X. Kan, A. Zhang, and L. Liu. Updated lagrangian particle hydrodynamics (ulph) modeling of solid object water entry problems. *Computational Mechanics*, 67(6) :1685–1703, 2021.
- [143] H. Yang, C. Dong, Y. Wu, and R. Dai. Mixed dimensional isogeometric fe-be coupling analysis for solid-shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 382 :113841, 2021.
- [144] J. Yang and J. Zheng. Meshless local strong-weak (mlsw) method for irregular domain problems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49 :659–666, 2017.
- [145] J. P. Yang and W. C. Hsin. Weighted reproducing kernel collocation method based on error analysis for solving inverse elasticity problems. *Acta Mechanica*, 230(10) :3477–3497, 2019.
- [146] Y. C. Yoon, S. H. Lee, and T. Belytschko. Enriched meshfree collocation method with diffuse derivatives for elastic fracture. *Computers and Mathematics with Applications*, 51(8) :1349–1366, 2006.
- [147] H. Yu and S. Li. On approximation theory of nonlocal differential operators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(23) :6984–7012, 2021.
- [148] Z. E. Zahab, E. Divo, and A. J. Kassab. A localized collocation meshless method (lcmm) for incompressible flows cfd modeling with applications to transient hemodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(8) :1045–1061, 2009.
- [149] M. Zayernouri and G. Karniadakis. Fractional spectral collocation method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36 :A40–A62, 2014.

- [150] M. Zerroukat, H. Power, and C. S. Chen. A numerical method for heat transfer problems using collocation and radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(7) :1263–1278, 1998.
- [151] X. Zhang, X. H. Liu, K. Z. Song, and M. W. Lu. Least-squares collocation meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(9) :1089–1100, 2001.