

# Solutions TP8 Mécanisme - Arbre - Engrenages

David Trif

22 février 2012

## Exercice 1

$$P_{foret} = 2 \text{ kW}; \quad N_{foret} = 500 \text{ tr/min} \quad (1)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{22}{37}; \quad \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{29}{17} \quad (2)$$

On utilise la relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \Rightarrow N_1 \cdot Z_1 = N_2 \cdot Z_2 \quad (3)$$

Fréquence de rotation arbre intermédiaire :

$$\frac{N_3}{N_4} = \frac{Z_4}{Z_3} \Rightarrow N_3 = \frac{Z_4}{Z_3} \cdot N_4 = \frac{17}{29} \cdot 500 = 293,1 \text{ tr/min} \quad (4)$$

Fréquence de rotation arbre de commande :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \Rightarrow N_1 = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot N_2 = \frac{31}{22} \cdot 293,1 = 413 \text{ tr/min} \quad (5)$$

Rhéogramme des puissances :<sup>1</sup>

Les valeurs des puissances :

- AB :  $P_{AB} = 2 \text{ kW}$  ; DE :  $P_{DE} = 2 \text{ kW}$

- BC :  $P_{BC} = 4 \text{ kW}$  ; CD :  $P_{CD} = 4 \text{ kW}$  ; Commande :  $P_{comm} = 8 \text{ kW}$

Calcul des moments de torsion :

$$P = M_t \cdot \omega \Rightarrow M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi N} \quad (6)$$

---

1. Figure 1

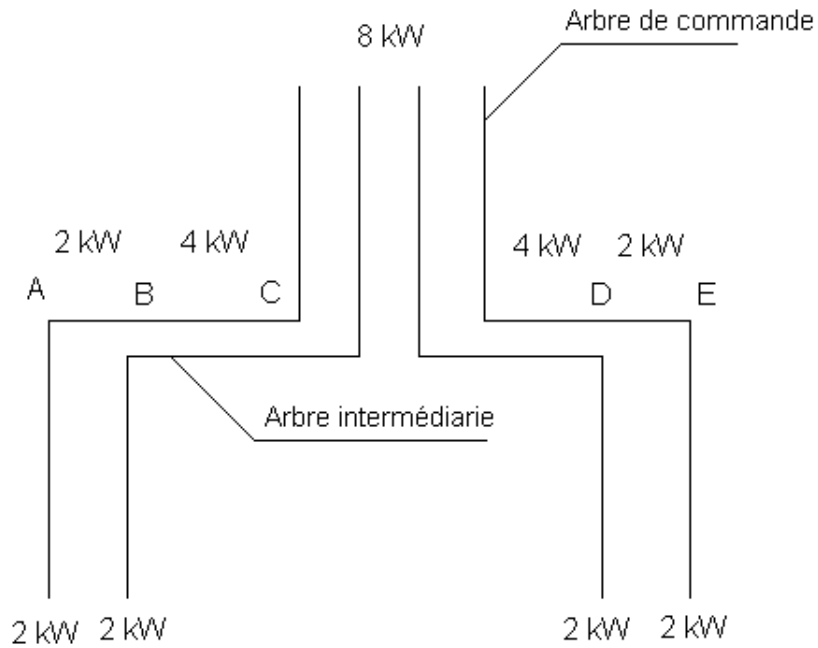


FIGURE 1 – Rhéogramme des puissances

Zone	$P$ (kW)	$N$ (tr/min)	$M_t$ (Nm)
AB	2	293,1	65,16
BC	4	293,1	130,3
CD	4	293,1	130,3
DE	2	293,1	65,16
Commande	8	413	185

Calcul des diamètres pour les arbres intermédiaire et de commande :

$$\frac{d}{120\text{mm}} = \sqrt[3]{\frac{P/736 \text{ W}}{N/\text{tr/min}}} \quad (7)$$

On prend la plus grande valeur. Les valeurs des diamètres sont présentées dans le tableau suivant (à l'aide du Fascicule A3, une vérification est possible).

Arbre	$P$ (W)	$N$ (tr/min)	$d_{\sqrt[3]} (mm)$	$d_{\sqrt[3]} (mm)$
Intermédiaire	4000	293,1	44,28	31,28
Commande	8000	413	48,33	35,7

Serie R20 :

$$d_{int} = 44,28 \implies 45 \text{ mm} \quad (8)$$

$$d_{com} = 48,33 \implies 50 \text{ mm} \quad (9)$$

## Exercice 2

Acier St 60 ( $d = 20 \text{ mm}$ ;  $L = 500 \text{ mm}$ ).<sup>2</sup>

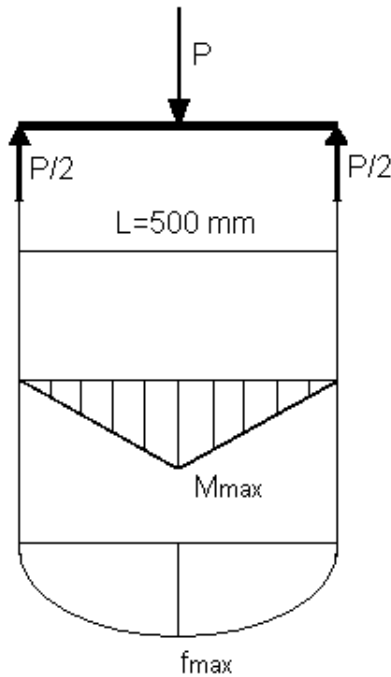


FIGURE 2 – Charge  $P$  au centre

Le coefficient de sécurité :

$$S(\sigma) = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma(S)} > 1 \quad (10)$$

Ou  $\sigma_{lim} \leftarrow$  contrainte limite;  $\sigma_S \leftarrow$  contrainte dépendante du coefficient de sécurité  $S$ .

Données supplémentaires :  $R_e = 340 \text{ N/mm}^2$ ;  $R_m = 600 \text{ N/mm}^2$ .

Contrainte admissible et coefficient de sécurité :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e}{S}; \quad S = S_{mat} \cdot S_{grav} \cdot S_{prec} \quad (11)$$

---

2. Figure 2

$$S_{mat} \rightarrow \text{sécurité matériau; } S_{mat} = 1,3 \text{ (arbre soumis à la fatigue)} \quad (12)$$

$$S_{grav} \rightarrow \text{gravité mise hors service; } S_{grav} = 1,2 \quad (13)$$

$$S_{prec} \rightarrow \text{précision du calcul effectué; } S_{prec} = 1,3 \quad (14)$$

$$\Rightarrow \sigma_{adm} = \frac{340 \text{ N/mm}^2}{1,3 \cdot 1,2 \cdot 1,3} = 167 \text{ MPa} \quad (15)$$

Contrainte maximale :

$$\sigma_{max} = \frac{32 \cdot M_{max}}{\pi d^3} \quad (16)$$

$$M_{max} = \frac{PL}{4} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{PL}{4} \cdot \frac{32}{\pi d^3} = \frac{8PL}{\pi d^3} \quad (17)$$

$$\sigma_{max} < \sigma_{adm}; \Rightarrow \frac{8PL}{\pi d^3} < \sigma_{adm} \quad (18)$$

Charge maximale

$$\frac{8P \cdot 500}{\pi \cdot 20^3} < 167 \Rightarrow P < 1052 \text{ N} \approx 1 \text{ kN} \quad (19)$$

Flèche maximale :

$$f_{max} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{1052 \text{ N} \cdot 500^3 \text{ mm}^3 \cdot 64}{48 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot 20^4 \text{ mm}^4} = 1,6 \text{ mm} \quad (20)$$

### Exercice 3

Arbre - 2 appuis, avec une roue dentée au centre. <sup>3</sup>

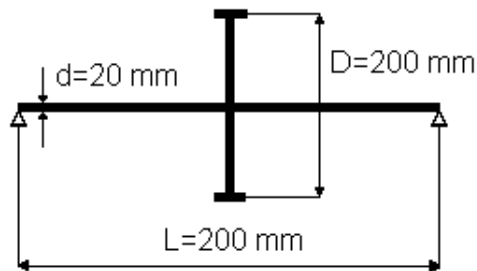


FIGURE 3 – Arbre avec une roue dentée

$N = 1500 \text{ tr/min}; P = 7 \text{ kW}; d = 20 \text{ mm}.$

$L = 200 \text{ mm}; D = 200 \text{ mm}.$

3. Figure 3

La qualité de l'acier ?

$$\sigma_{adm} \leq \frac{R_e}{S} \quad (21)$$

$$S = S_{mat} \cdot S_{grav} \cdot S_{prec} = 1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3 = 2,2 \quad (22)$$

La contrainte maximale  $\sigma_{max}$  est due aux sollicitations de flexion et torsion.

$$\sigma = \frac{32M_f}{\pi d^3}; \quad \tau = \frac{16M_t}{\pi d^3} \quad (23)$$

Moment idéal :

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75 \cdot M_t^2} \quad (24)$$

Calcul moment de torsion (en fonction de la puissance disponible et de la fréquence de rotation) :

$$M_t = \frac{P}{2\pi N} = \frac{7000 \cdot 60}{2\pi \cdot 1500} = 44,56 \text{ Nm} \quad (25)$$

Le moment de flexion :

$$M_{f_{max}} = \frac{PL}{4} = \frac{F_r L}{4} \quad F_r \rightarrow \text{force radiale} \quad (26)$$

Valeur de la force radiale :<sup>4</sup>

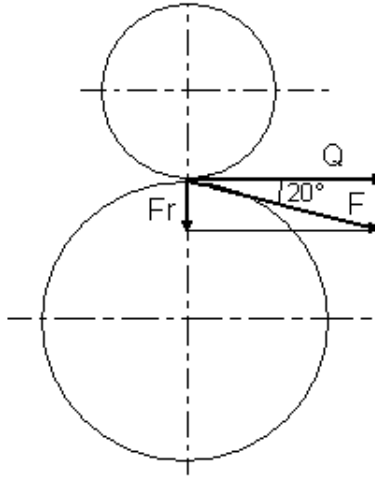


FIGURE 4 – Efforts sur les roues (arbres)

$$F_r = F_t \cdot \tan \beta = \frac{M_t}{D/2} \cdot \tan 20^\circ = \frac{44,56 \text{ Nm}}{0,1 \text{ m}} \cdot \tan 20^\circ = 162,18 \text{ N} \quad (27)$$

---

4. Figure 4

$$\Rightarrow M_f = \frac{F_r L}{4} = \frac{162,18 \cdot 0,2}{4} = 8,1 \text{ Nm} \quad (28)$$

$$\Rightarrow M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75 \cdot M_t^2} = \sqrt{8,1^2 + 0,75 \cdot 44,56^2} = 39,46 \text{ Nm} \quad (29)$$

La limite élastique  $R_e$  :

$$\sigma_{adm} \leq \frac{R_e}{S} \Rightarrow R_e \geq S \cdot \frac{32M_i}{\pi d^3} = 2,2 \cdot \frac{32 \cdot 39,46}{\pi \cdot 0,2^3} = 110,56 \text{ MPa} \quad (30)$$

Pour résister, l'acier choisi doit avoir une limite élastique  $R_e \geq 110,56 \text{ MPa}$

## Exercice 4

Donées de l'exercice :  $P_{entree}=10 \text{ kW}$ ,  $N_{entree}=1000 \text{ tr/min}$ , le nombre de dents et le module pour chaque roue dentée.

Les fréquences de rotation pour chaque arbre du réducteur : <sup>5</sup>

$$N_{AB} = N_{BC} = 1000 \text{ tr/min} \quad (31)$$

$$\frac{N_{DF}}{N_{AC}} = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow N_{DF} = N_{AC} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} = 1000 \cdot \frac{13}{16} = 815,2 \text{ rot/min} \quad (32)$$

$$\frac{N_{HJ}}{N_{DF}} = \frac{Z_3}{Z_4} \Rightarrow N_{HJ} = N_{DF} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = 815,2 \cdot \frac{15}{22} = 554 \text{ rot/min} \quad (33)$$

$$\frac{N_{KM}}{N_{HJ}} = \frac{Z_5}{Z_6} \Rightarrow N_{KM} = N_{HJ} \cdot \frac{Z_5}{Z_6} = 554 \cdot \frac{17}{29} = 324 \text{ rot/min} \quad (34)$$

Les moments de torsion :

$$M_{t_{AB}} = \frac{P_{AB}}{2\pi N_{AB}} = \frac{10000 \cdot 60}{2\pi \cdot 1000} = 95,49 \text{ Nm} \quad (35)$$

$$M_{t_{EF}} = \frac{P_{EF}}{2\pi N_{EF}} = \frac{10000 \cdot 60}{2\pi \cdot 815,2} = 117,14 \text{ Nm} \quad (36)$$

$$M_{t_{GI}} = \frac{P_{GI}}{2\pi N_{GI}} = \frac{10000 \cdot 60}{2\pi \cdot 554} = 172,37 \text{ Nm} \quad (37)$$

$$M_{t_{LM}} = \frac{P_{LM}}{2\pi N_{LM}} = \frac{10000 \cdot 60}{2\pi \cdot 324} = 294,73 \text{ Nm} \quad (38)$$

Les vitesses au niveau des points X, Y et W :

$$v_x = \omega R_1 = 2\pi \cdot N_{AC} \cdot \frac{d_1}{2} = \pi N_{AC} \cdot d_1 = \pi N_{AC} \cdot Z_1 \cdot m_{12} \quad (39)$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{\pi \cdot 1000 \cdot 13 \cdot 0,004}{60} = 2,72 \text{ m/s} \quad (40)$$

---

5. Figure 5

$$v_y = \omega R_3 = 2\pi \cdot N_{DF} \cdot \frac{d_3}{2} = \pi N_{DF} \cdot d_3 = \pi N_{DF} \cdot Z_3 \cdot m_{34} \quad (41)$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{\pi \cdot 815,2 \cdot 15 \cdot 0,003}{60} = 1,92 \text{ m/s} \quad (42)$$

$$v_w = \omega R_5 = 2\pi \cdot N_{HJ} \cdot \frac{d_5}{2} = \pi N_{HJ} \cdot d_5 = \pi N_{HJ} \cdot Z_5 \cdot m_{56} \quad (43)$$

$$\Rightarrow v_w = \frac{\pi \cdot 554 \cdot 17 \cdot 0,005}{60} = 2,46 \text{ m/s} \quad (44)$$

Les efforts  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_w$  :

$$Q_x = \frac{P_x}{v_x} = \frac{10000 \text{ Nm/s}}{2,72 \text{ m/s}} = 3,6 \text{ kN} \quad (45)$$

$$Q_y = \frac{P_y}{v_y} = \frac{10000 \text{ Nm/s}}{1,92 \text{ m/s}} = 5,2 \text{ kN} \quad (46)$$

$$Q_w = \frac{P_w}{v_w} = \frac{10000 \text{ Nm/s}}{2,46 \text{ m/s}} = 4,1 \text{ kN} \quad (47)$$

Effort radial, arbre de sortie (KM) :

$$F_r = Q \cdot \tan \beta = 4,1 \cdot \tan 20^\circ = 1,5 \text{ kN} \quad (48)$$

Les résultats sont présentés dans le tableau ci-après :

Zone	Puissance (W)	$M_t$ (Nm)	$N$ (tr/min)	$v$ (m/s)	$Q$ - effort (kN)
AB	10000	95,49	1000	—	—
BC	0	0	1000	—	—
point X	10000	—	—	2,72	3,6
DE	0	0	815,2	—	—
EF	10000	117,14	815,2	—	—
point Y	10000	—	—	1,92	5,2
HG	0	0	554	—	—
GI	10000	172,37	554	—	—
IJ	0	0	554	—	—
point W	10000	—	—	2,46	4,1
KL	0	0	324	—	—
LM	10000	294,73	324	—	—

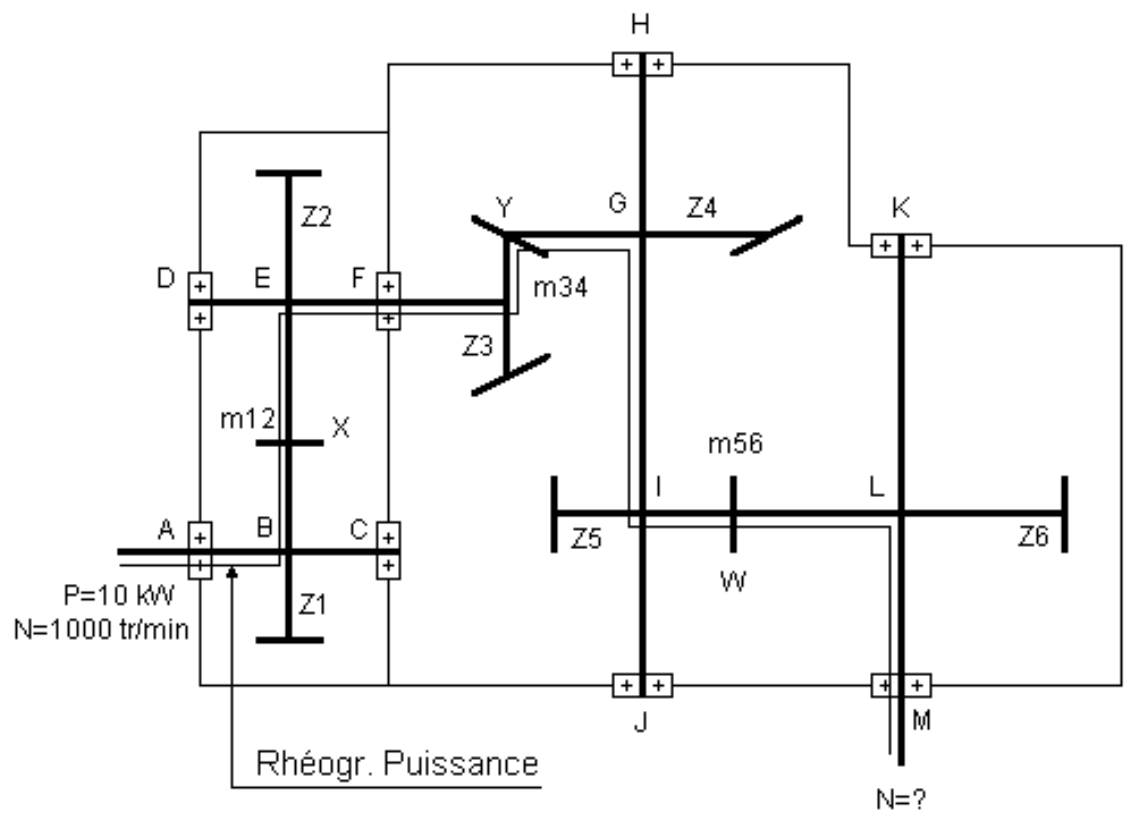


FIGURE 5 – Réducteur à 3 étages