Leçons de Géométrie Supérieure

Première Partie

par

Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liége.

Liége
Librairie V. BOURGUIGNON,
16, rue des Dominicains,
1933.

pas géométriques d'anal

Introduction.

Leçons de Géométrie supérieure. E. Vessiot

Le but que nous poursuivons dans le cours de <u>Géométrie supérieure</u> que nous professons à l'Université de Liège, est de permettre à nos élèves d'entreprendre l'étude de la Géométrie sur une <u>variété algébrique</u>, envisagée dans le groupe des <u>transformations birationnelles</u>. Le temps dont nous disposons ne nous permet pas d'aborder ces théories; tout au plus avons-nous pu, certaines années, exposer les premiers éléments de la Géométrie sur une courbe algébrique. (Géométrie algébrique plane et de

Le cours est divisé en trois parties : <u>La première partie</u>, celle qui fait l'objet de ce fascicule, contient les <u>préliminaires</u> de la <u>théorie</u> des courbes et des surfaces <u>algébriques</u>, avec quelques applications aux courbes et surfaces des premiers ordres. Nous avons insisté sur les représentations planes des quadriques et des surfaces cubiques, qui nous paraissent particulièrement instructives pour le but que nous poursuivons. <u>La seconde partie</u> du cours est consacrée à l'étude I des points singuliers des courbes et des surfaces algébriques, II correspondances rationnelles à leur décomposition au moyen de transformations quadratiques et III à la théorie des transformations birationnelles dans le plan et dans l'espace. IV Introduction à la géométrie sur une courbe algébrique <u>Dans la troisième partie</u>, nous abordons l'étude de la Géométrie projective à plusieurs dimensions ; nous insistons sur la représentation hyperspatiale des courbes et des surfaces ;

nous considérons plus particulièrement les courbes et les surfaces rationnelles et quelques variétés telles que les variétés de C. Segre, si utiles dans plusieurs questions. Nous terminons par l'étude de la géométrie réglée de l'espace ordinaire, en utilisant la représentation hyperspatiale.

Nous avons utilisé, dans la préparation de notre cours, différents ouvrages dont la liste se trouve à la fin du volume. Le lecteur trouvera d'ailleurs dans ces ouvrages des développements plus étendus sur les théories que nous enseignons et aussi l'exposé de questions qui n'ont pu trouver place dans notre enseignement.

Liège, le 11 novembre 1932.

Andoyer – Leçons sur la théorie des formes et la Géo anal sup.
Picard et Simart tome II 1er et 2e chapitre
Enriques et Chisini – Introduction – 1er et 2e chapitre

V

Table des matières

Pages

Errata

p. 18, n° 25, ligne 11, lire ... $\dfrac{\partial^{r+s} f}{\partial x_1^{r+s-r_1-s_1}\, \partial x_2^{r_1+s_1}}$

p. 27, dernière ligne, lire ... $(a_{20} = a_{32} = a_{44} = 0)$ ...

p. 28, n° 38, ligne 9, lire ... en mn points $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n}, B_{21} \dots$

p. 31, n° 39, ligne 5, lire ... $x_3^n \varphi_0 + x_3^{n-1} \varphi_1 + \dots + \varphi_n = 0$.

p. 46, ligne 19, lire ... à C_n en γ.

p. 49, ligne 5, le coefficient est $-\dfrac{(n-s)(n-1)}{s-1}$

p. 50, ligne 14, lire ... le terme en $x_3^{3n-8} \varphi_2$ ...

ligne 19, lire $\varphi = x_3^{2n-7} [\dots]$

ligne 21, lire x_3^{3n-9} disparaisse.

p. 51, n° 64, ligne 8, lire ... en dehors de P...

p. 52, ligne 12, lire ... une tangente r' de Γ et à r, ...

p. 69, ligne 2 au bas, lire $PA_5, \dots, PA_8$ ...

p. 82, lignes 8 et 9, lire principales au lieu de paraboliques.

p. 88, ligne 14, lire valable au lieu de vable.

p. 89, n° 120, ligne 3 ... $= \dfrac{x_4}{\varphi_m}$.

p. 91, ligne 2, lire $p+m-n$ au lieu de $p+m-1$.

p. 106, dernière ligne, le dernier facteur du premier membre est $2s+1$ au lieu de $n+s$

p. 111, ligne 7, lire ... $\frac{1}{2} n n_1 (n-1) + n_1 h$ ...

p. 114, n° 152, ligne 8, lire ... $= \dfrac{X_3}{a_4 x_1 x_3} = \dots$

p. 133, remplacer les lignes 9 à 17 par les suivantes :

Parmi les courbes Γ_3 touchant r en A_1 se trouvent les courbes Γ_3 ayant un point double en A_1 ; ces courbes forment un faisceau. D'autre part, les plans passant par a_1 coupent F suivant des coniques E rencontrant b_1 en un point variable. Aux droites de ϖ passant par A_1 correspondent les coniques découpées sur F par les plans passant par b_1. Ces coniques ne rencontrent les coniques $\mathcal{E}$ qu'en un point, donc les coniques $\mathcal{E}$ ont pour homologues dans ϖ, des courbes Γ_3 ne rencontrant plus qu'en un point variable les droites issues de A_1 ; ces courbes Γ_3 ont donc un point double en A_1 et par suite le point R appartient à a_1.

p. 161, ligne 18, lire ... plan γ varie ...

Autographie Aug. Pholien, Liége.

Chapitre I

15 Mars

La Géométrie sur une droite.

Brill et Noether

§1. – Séries de groupes de points.

Picard et Simart tome II Ch. XI

1.– Groupes de points. – Si x_1, x_2 sont les coordonnées projectives homogènes des points d'une ponctuelle s, l'équation

Voir Géo. anal. – Gosseaux.

$$f(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots a_i x_1^{n-i} x_2^i + \dots a_n x_2^n = 0 \quad (1)$$

représente un groupe de n points, G_n de la droite s. On dit que le groupe G_n est d'ordre n ; il dépend de n coefficients (ou de $n+1$ coefficients homogènes).

Si $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}; y_1^{(2)}, y_2^{(2)}; \dots ; y_1^{(n)}, y_2^{(n)}$ sont les coordonnées des n points du groupe G_n, l'équation (1) peut s'écrire

$$(y_2^{(1)} x_1 - y_1^{(1)} x_2)(y_2^{(2)} x_1 - y_1^{(2)} x_2) \dots (y_2^{(n)} x_1 - y_1^{(n)} x_2) = 0 . \quad (2)$$

Il peut arriver que dans un groupe G_n, un point soit compté ν fois ($\nu \leq n$) ; c'est-à-dire que dans l'équation (2), il y ait ν facteurs égaux. Un tel point est dit multiple d'ordre ν ou encore ν-uple pour le groupe G_n.

2.– Séries algébriques de groupes de points. –

Considérons $n - r$ ($r \geq 0$) relations

$$F_1(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0, F_2 = 0, \dots, F_{n-r} = 0 ; \quad (3)$$

dont les premiers membres sont des polynômes entiers, rationnels et homogènes en $a_0, a_1, \dots, a_n$. Supposons

$n = r$ - point
$r = 1$ - droite
$r = 2$ - plan
voir Enriques page 21

ces relations indépendantes, c'est-à-dire qu'aucune d'entre elles ne soit une conséquence des autres. Les ∞^r groupes G_n représentés par l'équation (1), les coefficients satisfaisant aux équations (3), constituent une série algébrique $\{G_n\}$, d'ordre n et de dimension r.

Sauf pour des positions particulières, r points de la droite s appartiennent à un nombre fini de groupes de $\{G_n\}$; ce nombre, ν, est appelé indice de $\{G_n\}$.

Supposons $r = n-1$. Si le polynôme F_1 est irréductible, la série $\{G_n\}$, de dimension $n-1$ est dite irréductible. Elle est dite réductible dans le cas contraire.

Le concept de série algébrique irréductible de dimension $r < n-1$ ne peut s'introduire qu'au moyen de considérations qui ne peuvent trouver place ici. L'exemple suivant fera comprendre la nature de la difficulté. Supposons $n = 3$. Chacune des équations

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \quad , \quad a_1 a_3 - a_2^2 = 0 \qquad (4)$$

définit une série $\{G_3\}$ de dimension deux et d'indice deux. Les équations simultanées (4) définissent une série $\{G_3\}$ de dimension un, réductible, formées des deux séries. L'une,

$$t^3 x_1^3 + t^2 x_1^2 x_2 + t x_1 x_2^2 + x_2^3 = 0,$$

a l'indice trois ; l'autre,

$$a_0 x_1^3 + a_3 x_2^3 = 0 ,$$

est d'indice un.

3. - Séries linéaires. - Une série $\{G_n\}$ est appelée linéaire lorsque les équations (3) sont linéaires par rapport à $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Une série linéaire est d'indice un et représentée par $|G_n|$.

On peut actuellement tirer des équations (3) les valeurs $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en fonctions linéaires et homogènes de $r+1$ paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. La série $|g_n|$ peut donc être représentée par

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0 , \qquad (5)$$

où $f_0, f_1, \ldots, f_r$ représentent des groupes de n points linéairement indépendants. Il n'est donc pas possible de trouver des valeurs non toutes nulles des paramètres λ tels que l'équation (5) soit une identité.

Si les polynômes $f_0, f_1, \ldots, f_r$ ont un facteur commun $\varphi(x_1, x_2)$, les points du groupe

$$\varphi(x_1, x_2) = 0$$

appartiennent à tous les groupes de la série (5); ce sont des points <u>fixes</u> de la série. Si n' est leur nombre, on peut les supprimer et on obtient une série linéaire $|g_{n-n'}|$ dépourvue de points <u>fixes</u>.

4.- <u>Théorème</u>.- <u>Sur une ponctuelle, une série algébrique $\Sigma\ \infty^1$, d'indice un, dépourvue de points fixes et de points multiples variables, est une série linéaire</u>.

Soit $f(x_1, x_2) = 0$ l'équation d'un groupe de Σ, les coefficients de f étant liés par un groupe $\mathfrak{A}$ de $n-1$ équations, n étant l'ordre de Σ. Pour trouver l'équation du groupe de Σ contenant le point x_1^0, x_2^0, il faut éliminer les coefficients de f entre les équations $\mathfrak{A}$ et

$$f(x_1, x_2) = 0 \; ; \; f(x_1^0, x_2^0) = 0 .$$

L'élimination n'exigeant que des opérations rationnelles, on obtiendra une équation

$$x_1^n a_0(x_1^0, x_2^0) + x_1^{n-1} x_2 a_1(x_1^0, x_2^0) + \ldots + x_2^n a_n(x_1^0, x_2^0) = 0, \qquad (1)$$

où les coefficients sont des fonctions rationnelles de x_1^0, x_2^0

que l'on peut d'ailleurs supposer être des polynômes entiers. Les équations initiales étant symétriques en x_1, x_2 ; x_1^0, x_2^0, le résultat de l'élimination doit également être symétrique par rapport à ces variables. Le groupe (1) est donc également représenté par

$$(x_1^0)^n a_0(x_1, x_2) + \dots + (x_2^0)^n a_n(x_1, x_2) = 0. \qquad (1')$$

Observons que

1°) a_0 ne peut être nulle identiquement, car alors Σ aurait un point fixe $x_2 = 0$;

2°) Les quantités $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$ ne peuvent être constantes, car alors Σ serait formée d'un groupe fixe.

Supposons que $\frac{a_i}{a_0}$ dépende effectivement de x_1^0, x_2^0. Appelons x_1^1, x_2^1 ; x_1^2, x_2^2 ; ... ; x_1^{n-1}, x_2^{n-1} les $n-1$ points qui, avec x_1^0, x_2^0, forment le groupe considéré. En remplaçant x_1^0, x_2^0 par x_1^k, x_2^k $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ dans les équations initiales, on doit toujours trouver le groupe (1), par suite, on a

$$\frac{a_i(x_1^0, x_2^0)}{a_0(x_1^0, x_2^0)} = \frac{a_i(x_1^1, x_2^1)}{a_0(x_1^1, x_2^1)} = \dots = \frac{a_i(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})}{a_0(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})}. \qquad (2)$$

Posons

$$\frac{a_i(x_1, x_2)}{a_0(x_1, x_2)} = \lambda. \qquad (3)$$

et soit λ_0 la valeur prise par λ pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$. Alors, les quantités x_1^1, x_2^1, λ_0 ; ... ; $x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \lambda_0$ satisfont également à l'équation (3). En d'autres termes, si un groupe de la série linéaire

$$a_i(x_1, x_2) - \lambda a_0(x_1, x_2) = 0 \qquad (4)$$

contient un point d'un groupe de Σ, il contient également les autres. Par suite, la série Σ peut être représentée par l'équation (4) et le théorème est démontré. On observera d'ailleurs que la série Σ

étant dépourvue de points multiples variables, les rapports (2) sont en général au nombre de n.

5.- Théorème.- Une série linéaire de dimension un ne peut avoir de points multiples variables.

Considérons une série linéaire

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2) = 0$$

et supposons que dans tout groupe, il y ait un point multiple variable avec ce groupe, c'est-à-dire dont les coordonnées dépendent de λ_0, λ_1. Passons aux coordonnées non homogènes en posant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad f_0\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = \varphi_0(x), \quad f_1\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = \varphi_1(x).$$

Les équations

$$\lambda_0 \varphi_0(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) = 0,$$
$$\lambda_0 \varphi_0'(x) + \lambda_1 \varphi_1'(x) = 0$$

doivent avoir une solution x commune, variable avec λ_0, λ_1. On en déduit

$$\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}$$

d'où, par intégration

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = C^{te}$$

ce qui est absurde.

6.- Corollaire.- Une série linéaire ne peut avoir de points multiples variables.

En effet, si la série linéaire (5) du n° 3 avait des points multiples variables, en fixant arbitrairement $r-1$ relations linéaires entre les paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$, on obtiendrait une série linéaire ∞^1 possédant des points multiples variables, ce qui est impossible.

7.- Remarque.- Reprenons la démonstration du théorème du n° 4 et laissons tomber l'hypothèse que la série Σ est dépourvue de points multiples variables. Si chaque groupe de Σ possède un point K-uple, tout groupe de Σ est formé de $\frac{n}{K}$ points K-uples, à cause de la symétrie de l'équation (1). Les rapports égaux (2) sont au nombre de $\frac{n}{K}$ et l'équation (4) représente une série linéaire d'ordre $\frac{n}{K}$ dépourvue de points multiples variables. La série Σ est représentée par l'équation

$$[a_i(x_1,x_2)-\lambda a_0(x_1,x_2)]^K=0.$$

8.- Théorème.- Une série algébrique ∞^r, d'indice un, privée de points fixes, est une série linéaire ou est formée des groupes d'une série linéaire comptés chacun un certain nombre de fois.

Le théorème a été démontré pour $r=1$. Supposons le vrai pour les séries ∞^{r-1} et démontrons-le pour les séries ∞^r.

Soit Σ une série ∞^r d'indice un, privée de points fixes. Supposons en premier lieu que les groupes de Σ soient dépourvus de points multiples variables. Fixons un groupe G^0 de Σ et considérons les groupes de Σ contenant un point P n'appartenant pas à G^0. Ces groupes forment une série Σ', ∞^{r-1}, d'indice un, donc représentable par hypothèse par l'équation

$$\lambda_1 f_1(x_1,x_2)+\lambda_2 f_2+\dots+\lambda_r f_r=0. \qquad (\Sigma')$$

Les groupes de Σ passant par un point P_0 de G^0 forment une série linéaire ∞^{r-1}, Σ'', ayant en commun, avec Σ', ∞^{r-2} groupes forment une série d'indice un, donc linéaire. Soit G un groupe de cette dernière série, d'équation

$$f(x_1,x_2)=0.$$

Les groupes G^0, G déterminent une serie linéaire ∞^1

d'équation

$$f_0 + \lambda f = 0, \qquad (1)$$

$f_0 = 0$ étant l'équation de G^0. La série (1) n'a que le groupe G en commun avec Σ', sans quoi toute la série appartiendrait à Σ', alors que G^0 ne peut appartenir à Σ'.

Par un point, passent ∞^{r-2} groupes de Σ' et un groupe de la série (1) appartenant à une série ∞^{r-1} d'indice un, donc linéaire. Cette série appartient à la série

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0. \qquad (2)$$

La série (1) comprend par suite tous les groupes de Σ et ces deux séries coïncident.

Supposons maintenant que les groupes de Σ aient des points multiples variables. Chaque groupe de Σ se compose alors de $\frac{n}{k}$ points k-uples. Ces groupes considérés comme formant une série d'indice un d'ordre $\frac{n}{k}$, appartiennent à une série linéaire. Par suite, Σ est représentée par l'équation

$$(\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r)^k = 0.$$

9.- <u>Théorème de Lüroth</u>.- <u>Si les coordonnées des points d'une courbe algébrique C peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles d'un paramètre u de telle sorte qu'un point de la courbe soit donné par n valeurs de u, il est possible d'exprimer ces coordonnées en fonctions rationnelles d'un paramètre v, à son tour fonction rationnelle de u, de telle sorte que tout point de C ne corresponde qu'à une seule valeur de v.</u>

Supposons que les coordonnées de la courbe algébrique

$$F(x,y)=0 \qquad (C)$$

puissent s'exprimer en fonctions rationnelles de u par

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(u). \qquad (1)$$

À une valeur de u correspond un point (x,y) de C, mais tout point de C est obtenu en partant de n valeurs de u. Considérons u comme l'abscisse d'un point d'une droite s. Les groupes de n points de s donnant naissance aux mêmes points de C, forment une série d'indice un dépourvue de points multiples variables ; cette série peut donc être représentée par

$$f_0(u)-v\,f_1(u)=0. \qquad (2)$$

Si un point x_0, y_0 de C correspond aux valeurs $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ de u, et si v_0 correspond dans (2) à la valeur u_1^0, cette équation (2) est vérifiée par les quantités $(u_1^0, v_0), (u_2^0, v_0), \ldots, (u_n^0, v_0)$. À un point x_0, y_0 de C correspond donc une valeur v_0 de v et inversement. L'élimination de u entre les équations (1), (2) donne

$$x=\varphi_1(v),\ y=\psi_1(v),$$

où φ_1, ψ_1 sont des fonctions rationnelles. Le théorème est donc démontré.

§ 2. - Le principe de correspondance.

10.- Définitions. Soient (y), (z) deux ponctuelles de même support ou non, y_1, y_2 les coordonnées projectives homogènes du point y, et z_1, z_2 celles de z. Considérons l'équation

$$F(y_1, y_2 ; z_1, z_2) = 0 \qquad (1)$$

dont le premier membre est un polynôme rationnel, entier et homogène de degré m en y_1, y_2 ; et un polynôme rationnel, entier et homogène de degré n en z_1, z_2. Si nous fixons y_1, y_2, l'équation (1) représente n points z ; inversement, si nous fixons z_1, z_2, elle représente m points y. On dit que l'équation (1) représente une correspondance (m, n) entre les ponctuelles (y), (z).

Nous supposerons que l'on ne puisse pas mettre en évidence, dans le polynôme F, un polynôme entier, rationnel et homogène en y seul, ou en z seul. (On aurait alors une correspondance dégénérée).

La correspondance (m, n) représentée par l'équation (1.) sera dite irréductible si le polynôme F n'est pas le produit de deux ou plusieurs polynômes de même nature. Elle est dite réductible dans le cas contraire.

11.- Principe de Chasles.- Supposons que les ponctuelles (y), (z) aient même support et soient rapportées à la même figure de référence. Un point est uni pour la correspondance (1) lorsque, considéré comme point y, il est un des points z correspondants.

Les points unis de la correspondance (1) sont donnés par

$$F(x_1, x_2 ; x_1, x_2) = 0 \; ; \qquad (2)$$

par suite, dans la définition des points unis, les rôles de y, z peuvent être intervertis.

Le premier membre de l'équation (2) est un polynôme d'ordre $m + n$; on a par suite le principe de Chasles :

<u>Une correspondance (m,n) possède $m+n$ points unis.</u>

12.- <u>Corollaire</u>.- <u>Si une correspondance (m,n) possède plus de $m+n$ points unis, elle en possède une infinité.</u>

Dans ce cas, l'équation (2) est en effet une identité.

Observons que le premier membre de l'équation (1) est alors divisible par le binôme $y_1 z_2 - y_2 z_1$; la correspondance est réductible.

13.- <u>Interprétation du principe de correspondance</u>.- Posons

$$y = \frac{y_1}{y_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}, \quad \Phi(y,z) = F\left(\frac{y_1}{y_2}, 1 ; \frac{z_1}{z_2}, 1\right).$$

Interprétons y, z comme coordonnées cartésiennes du plan. L'équation $\Phi(y,z) = 0$ représente une courbe C, d'ordre $m+n$, rencontrée en n points à distance finie par les droites $y = c^{te}$, en m points à distance finie par les droites $z = c^{te}$. Les points unis de la correspondance correspondent aux points de rencontre de la courbe C et de la bissectrice $y = z$ des axes de coordonnées.

La courbe C rencontre la droite $y = z$ en $m+n$ points, mais parmi ceux-ci peuvent se trouver des points multiples pour la courbe, ou des points où la courbe est tangente à la droite. De tels points sont des points unis qui doivent être comptés avec une certaine multiplicité. Zeuthen a établi une règle permettant d'évaluer cette multiplicité (Bull. des Sc. math., 1873 ; voir aussi Enriques - Chisini, t. I)

Observons encore que si la correspondance possède une infinité de points unis, la droite $y = z$ fait partie de la courbe C (Cfr. n° 12).

14.- Application I.- Soient, dans un plan, deux coniques homographiques distinctes Γ_1, Γ_2. Le lieu du point commun à deux tangentes a Γ_1, Γ_2 en des points homologues est une courbe algébrique C. Proposons-nous d'évaluer l'ordre de cette courbe, c'est-à-dire le nombre des points de rencontre de C avec une droite quelconque s, ne passant par aucun point commun aux coniques Γ_1, Γ_2.

Par un point X_1 de s passent deux tangentes à Γ_1; à ces tangentes correspondent deux tangentes à Γ_2 coupant s en deux points X_2. Inversement, par un point X_2 de s passent deux tangentes à Γ_2 et les tangentes à Γ_1 correspondantes coupent s en deux points X_1. Les ponctuelles (X_1), (X_2) sont liées par une correspondance $(2,2)$; il y a quatre points unis, qui sont évidemment des points de la courbe C. Celle-ci est donc du quatrième ordre.

15.- Application II.- Soient a_1, a_2, b_1, b_2 quatre droites deux à deux gauches, et n'appartenant pas à une même quadrique, A un point n'appartenant pas à une droite s'appuyant sur trois des droites données. Par un point P passe une droite s'appuyant sur a_1, a_2 et une droite s'appuyant sur b_1, b_2; le lieu du point P tel que le plan déterminé par ces deux droites passe par A est une surface algébrique F, car on obtiendra l'équation de cette surface en faisant des opérations algébriques sur des polynômes. Proposons-nous de déterminer l'ordre de F, c'est-à-dire le nombre de ses points de rencontre avec une droite :

Menons par A un plan α ne passant pas par une des droites issues de A et s'appuyant sur a_1, a_2 ou sur b_1, b_2. Soit s une droite ne s'appuyant sur aucune des droites données et ne passant pas par A. Par un point X de s passe une droite x s'appuyant sur a_1, a_2 et coupant α en X_1. Les droites s'appuyant sur b_1, b_2 et sur $X_1 A$ forment une quadrique qui coupe s en deux points Y. Inversement, par un point Y passe une droite s'appuyant sur b_1, b_2 et coupant α en un point Y_1. La quadrique lieu des droites s'appuyant sur $a_1, a_2, Y_1 A$ coupe s en deux points X. Les ponctuelles (X), (Y) sont liées par une correspondance (2,2) et il y a par suite quatre points unis. Parmi ceux-ci se trouve le point (s, α) ; les autres points unis appartiennent à F. Si le point (s, α) absorbe n points unis, la surface F est donc d'ordre $4-n$. Mais on voit immédiatement que les points de a_1, a_2, b_1, b_2 appartiennent à F ; comme ces quatre droites ne se trouvent pas sur une quadrique, on a $4-n > 2$, d'où $n = 1$. La surface F est du troisième ordre.

Cette génération de la surface cubique est due à F. Deruyts (Mém. de la Soc. des Sc. de Liège, 1890 ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1891).

16.- Application III. - Soient Γ_1, Γ_2 deux coniques distinctes d'un même plan. Proposons-nous de rechercher s'il existe des triangles circonscrits à la conique Γ_1 et inscrits dans la conique Γ_2. Nous supposerons que les coniques Γ_1, Γ_2 se rencontrent en quatre points distincts.

Soit X_1 un point de Γ_2. Par ce point passent deux tangentes à Γ_1 coupant encore Γ_2 en A_1, A_2. Par chacun des points A_1, A_2 passe une nouvelle tangente à Γ_1, rencontrant encore Γ_2 respectivement en B_1, B_2. Par chacun de ces points passe encore une nouvelle tangente à Γ_1 et les deux droites ainsi obtenues coupent encore Γ_2 en deux points X_2. Inversement, à un point X_2 de Γ_2 correspondent deux points X_1. Sur la conique Γ_2, les ponctuelles (X_1), (X_2) sont liées par une correspondance $(2,2)$; les coniques étant des courbes rationnelles, on peut appliquer le principe de Chasles à cette correspondance. Il y a par suite quatre points de Γ_2 unis pour la correspondance.

Soient P un des points communs à Γ_1, Γ_2 et p la tangente à Γ_1 en P. Si nous prenons pour X_1 le second point de rencontre de p avec Γ_2, A_1 coïncide avec P, B_1 également et par suite un des points X_2 correspondant à X_1 coïncide avec ce point. On en conclut que les quatre points unis de la correspondance envisagée sont les points où les tangentes à Γ_1 aux points communs à Γ_1, Γ_2, rencontrent encore cette conique. Par suite, il n'existe pas, en général, de triangles inscrits dans une conique et circonscrits à une autre conique.

Cela étant, soient L, M, N un triangle, Γ_1 une conique inscrite dans ce triangle, Γ_2 une conique circonscrite, non tangente à Γ_1. Si nous construisons la correspondance $(2,2)$ dont il vient d'être question, elle aura cinq points unis au moins, dont l'un est par exemple le point L ; elle en aura par suite une infinité et on a donc le résultat suivant :

<u>Théorème de Poncelet</u>. <u>Étant données deux coniques dans un plan, ou bien il n'existe aucun triangle inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre, ou bien il existe une infinité.</u>

17.- <u>Correspondances symétriques</u>. - Une correspondance symétrique est une correspondance irréductible telle que les points qui correspondent à un point déterminé sont les mêmes, quelle que soit la ponctuelle à laquelle ce point appartient.

Si $\Phi(y,z) = 0$ est une correspondance symétrique, $\Phi(z,y) = 0$ doit donc représenter la même correspondance. On aura donc

$$\Phi(y,z) = \lambda\,\Phi(z,y)\ ,\quad \Phi(z,y) = \lambda\,\Phi(y,z)\ ,$$

d'où $\lambda^2 = 1$. Si $\lambda = -1$, on a nécessairement

$$\Phi(y,z) \equiv \sum a_{ik}\,(y^i z^k - y^k z^i) = 0\ ,$$

et par suite la correspondance est réductible, $\Phi(y,z)$ étant divisible par $y-z$. On a donc $\lambda = +1$ et

$$\Phi(y,z) \equiv \sum a_{ik}\,(y^i z^k + y^k z^i) = 0\ .$$

L'équation précédente a le même degré en y et en z ; c'est donc une correspondance (m,m).

Supposons que parmi les points homologues d'un point uni y_1, deux coïncident avec y_1. En d'autres termes, l'équation $\Phi(y_1, z) = 0$ a la racine double $z = y_1$. On a donc

$$\Phi(y_1, y_1) = 0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial z}\,\Phi(y_1, z) = 0 \quad \text{pour } z = y_1\ .$$

Dans le plan des $y\,z$ (nº 13), la courbe $\Phi(y,z) = 0$, est symétrique par rapport à la droite $y = z$, par suite, on a également

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\Phi(y, y_1) = 0 \quad \text{pour } y = y_1\ .$$

Le point $y = z = y_1$ est au moins double pour la courbe envisagée. Par suite, le point y_1 absorbe au moins deux points unis (et en général deux).

18.- Points doubles d'une série linéaire ∞^1.-

Considérons une série linéaire d'ordre n, ∞^1, représentée en coordonnées non homogènes par

$$f_0(x) + \lambda f_1(x) = 0. \qquad (1)$$

Proposons-nous de rechercher le nombre de points, nécessairement finis, qui sont doubles pour les groupes de la série (1) qui les contiennent. A un point y, faisons correspondre les $n-1$ points z qui font partie du groupe de la série passant par y. Nous obtenons ainsi une correspondance représentée par

$$\frac{f_0(y)\,f_1(z) - f_0(z)\,f_1(y)}{y-z} = 0.$$

Les points unis sont donnés par $y = z$, c'est-à-dire, par la règle de l'Hospital, par

$$f_0(x)\,f_1'(x) - f_1(x)\,f_0'(x) = 0.$$

Cette équation est du degré $2n-1$ en x, mais le coefficient du terme en x^{2n-1} est identiquement nul. Par suite, <u>la série (1) possède $2(n-1)$ points doubles</u>.

19.- Remarque.- Un point double (au moins) d'un groupe

$$f(x_1, x_2) = 0$$

vérifie les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Par conséquent, les points doubles de la série

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2) = 0$$

sont donnés par

$$\frac{\partial(f_0, f_1)}{\partial(x_1, x_2)} = 0.$$

§ 3.- Polarité dans les groupes de points sur une droite.

20.- Définition.- Considérons, sur une ponctuelle s, un groupe G_n d'équation

$$f(x_1, x_2) = 0$$

et deux points $y(y_1, y_2)$, $z(z_1, z_2)$. Un point de la droite s a des coordonnées de la forme $\lambda y + \mu z$ et pour que ce point appartienne à G_n, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu^n f(z_1, z_2) + \mu^{n-1}\lambda\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{r!}\mu^{n-r}\lambda^r\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^r f + \dots + \frac{1}{n!}\lambda^n\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^n f = 0 \quad (1)$$

On appelle r-ième groupe polaire du point y par rapport à G_n, le groupe de $n-r$ points

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r f(x_1, x_2) = 0.$$

Cette définition suppose que l'on a $1 \leq r < n$. Le n-ième groupe polaire de y se composerait de 0 points.

21.- Remarque I.- Le développement (1) peut se mettre sous la forme équivalente

$$\lambda^n f(y_1, y_2) + \lambda^{n-1}\mu\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) + \dots + \frac{1}{}\ \lambda^r\mu^{n-r}\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{n-r} f +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\mu^n\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^n f = 0 \quad (2)$$

Le r-ième groupe polaire de y par rapport à G_n a donc également pour équation

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{n-r} f(y_1, y_2) = 0$$

22.- Remarque II.- On a

s-ième $$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^s = \left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{r+s}$$

donc le r-ième groupe polaire de y par rapport au s-ième groupe polaire de y par rapport à G_n, est le $(r+s)$-ième groupe polaire de y par rapport à G_n.

23.- Interprétation métrique.- Désignons par $M_1, M_2, \ldots, M_n$ les points du groupe G_n et supposons que ces points, ainsi que les points y, z, soient à distance finie. Si λ_1, μ_1 ; λ_2, μ_2 ; ... ; λ_n, μ_n sont les valeurs de λ, μ correspondant aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, posons

$$h_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \quad , \quad k_i = \frac{yM_i}{M_i z} .$$

Nous avons, en désignant par P_0 le point $y + z$ ($\lambda = \mu = 1$),

$$h_i = (zyP_0M_i) = \frac{zP_0}{yP_0} \cdot k_i .$$

Par suite

$$\frac{h_1}{k_1} = \frac{h_2}{k_2} = \ldots = \frac{h_n}{k_n} .$$

Dans l'équation (1), la somme des combinaisons r à r des racines $\frac{\mu}{\lambda}$ est égale au quotient de

$$(-1)^r \frac{1}{r!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^r f(z_1, z_2) \qquad (3)$$

par $f(z_1, z_2)$. Si le point z appartient au r-ième groupe polaire de y par rapport à G_n, il en résulte que <u>le r-ième groupe polaire du point y par rapport à G_n est constitué par les points z pour lesquels la somme des combinaisons r à r des rapports de section des points de G_n par rapport au segment yz, est nulle</u>.

En particulier, pour $r = 1$, la somme des rapports de section est nulle. Pour $n = 2$, $r = 1$, on retrouve un résultat connu.

Les points z sont appelés <u>centres harmoniques d'ordre r</u> de y par rapport à G_n.

24.- Théorème I.- <u>Si un point z appartient au r-ième groupe polaire de y par rapport à G_n, le point y appartient au $(n-r)$-ième groupe polaire de z par rapport à G_n.</u>

En effet, le fait que z appartient au r-ième groupe polaire de y s'exprime par l'une des équations équivalentes (n°s 20, 21)

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^r f(z_1, z_2)=0,$$

$$\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{n-r} f(y_1, y_2)=0.$$

Ces mêmes équations expriment que y appartient au $(n-r)$-ième groupe polaire de z.

25.- Théorème II.- Si G' est le r-ième groupe polaire de y par rapport à G_n et G'' le s-ième groupe polaire de z par rapport à G', G'' est également le r-ième groupe polaire de y par rapport au s-ième groupe polaire de z par rapport à G_n.

Il suffit de démontrer l'identité des groupes de points

$$\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^s\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r f(x_1, x_2)=0,$$

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^s f(x_1, x_2)=0.$$

Dans les développements des premiers membres de ces deux équations, le terme général est

$$\binom{s}{s_1}\binom{r}{r_1} z_1^{s-s_1} z_2^{s_1} y_1^{r-r_1} y_2^{r_1} \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x_1^{r-r_1-s_1}\partial x_2^{r_1+s_1}},$$

ce qui démontre le théorème.

On remarquera que le théorème II n'est que la traduction géométrique du fait que, dans un produit symbolique, les opérateurs $\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, $\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ peuvent être intervertis.

26.- Théorème III.- Si G_n contient un point s-uple P, le r-ième groupe polaire d'un point y par rapport à G_n contient $s-r$ fois le point P si $r<s$; il ne le contient pas si $r \geqslant s$.

Soient p_1, p_2 les coordonnées de P ; écrivons l'équation de G_n en mettant en évidence le point P, sous la forme

$$f(x_1, x_2) \equiv (p_2 x_1 - p_1 x_2)^s \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

φ étant de degré $n-s$ et $\varphi(p_1, p_2)$ n'étant pas nulle.

Le premier groupe polaire de y par rapport à G_n est

$$(p_2x_1 - p_1x_2)^{s-1}\left[y_1\left\{sp_2\varphi + (p_2x_1 - p_1x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\} + y_2\left\{-sp_1\varphi + (p_2x_1 - p_1x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\}\right] = 0.$$

Le théorème est donc vrai pour $r = 1$. Supposons-le démontré pour $r-1 < s-1$. Le r-ième groupe polaire de y par rapport à G_n étant le premier groupe polaire de y par rapport au $(r-1)$-ième groupe polaire de y par rapport à G_n, le théorème est démontré pour la valeur $r < s$.

En particulier, le $(s-1)$-ième groupe polaire de y contient une fois P, donc le s-ième groupe polaire de y ne contient plus P. Il en est de même des groupes polaires d'ordre supérieur à s.

27.- Théorème IV.- Le r-ième groupe polaire par rapport à G_n d'un point P, s-uple de ce groupe, contient s fois ce point P et est complété par le r-ième polaire du point P par rapport au groupe G_{n-s} obtenu en supprimant P dans G_n.

Conservons les notations précédentes (nº 26). Le premier groupe polaire de P par rapport à G_n a pour équation

$$(p_2 x_1 - p_1 x_2)^s \left(p_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = 0,$$

et le théorème est vrai pour $r = 1$. En vertu de la remarque II (nº 22), il est vrai pour $r = 2, 3, \ldots$ et par suite pour toute valeur de r.

Le r-ième groupe polaire de P par rapport à G_n a pour équation

$$(p_2 x_1 - p_1 x_2)^s \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r \varphi = 0.$$

Remarque.- Si $r > n-s$, l'équation précédente est une identité et le groupe polaire de P est indéterminé.

28.- Théorème V. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point y soit s-uple pour son groupe polaire par rapport à G_n, est qu'il soit s-uple pour G_n.

La condition est suffisante par le théorème IV ; démontrons qu'elle est nécessaire.

Le premier groupe polaire de y par rapport à G_n est

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Par hypothèse, on a

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0,$$

donc, d'après la formule d'Euler, $f(y_1, y_2) = 0$. Donc, le point y appartient au groupe G_n. Si $s > 1$ et si y était un point simple de G_n, le premier groupe polaire de y se composerait du point y et de $n-2$ points formant le premier groupe polaire de y par rapport au groupe de $n-1$ points obtenu en supprimant y dans G_n. Il faut donc que y soit au moins double pour G_n. Le théorème se démontrera en procédant de proche en proche.

Chapitre II

Courbes algébriques planes.

§1.- Généralités

29.- Définitions.- On appelle courbe algébrique plane l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (1)$$

où f est un polynôme entier, rationnel et homogène.

Une courbe algébrique plane est dite irréductible lorsque le polynôme f est irréductible ; elle est dite réductible dans le cas opposé.

Le degré n du polynôme f est appelé ordre de la courbe ; ce nombre n n'est pas altéré par une transformation homographique et par suite par une transformation de coordonnées.

Le polynôme f possède $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients homogènes ; pour déterminer une courbe d'ordre n, il faut donc connaître les rapports de $\frac{1}{2}n(n+3)$ de ces coefficients au dernier. Observons que si l'on exprime que la courbe (1) passe par un point donné, on obtient une relation linéaire entre les coefficients. Par conséquent,

Par $\frac{1}{2}n(n+3)$ points du plan, il passe une courbe algébrique d'ordre n et en général une seule.

Nous disons en général une seule, car pour certaines positions particulières des points, il se peut que les $\frac{1}{2} n(n+3)$ équations obtenues ne soient pas indépendantes (et ce fait se présente effectivement, comme on le verra plus loin, pour $n > 2$).

30.- Intersection d'une courbe et d'une droite.- Soient y, z deux points du plan. Tout point de la droite yz a des coordonnées de la forme $\lambda y + \mu z$. Les points de cette droite appartenant à la courbe C, d'équation (1), correspondent aux valeurs λ, μ racines de l'équation

$$\lambda^n f(y_1, y_2, y_3) + \lambda^{n-1}\mu\, D f(y) + \dots + \frac{1}{s!}\lambda^{n-s}\mu^s D^s f(y) + \dots + \frac{1}{n!}\mu^n D^n f(y) = 0, \quad (2)$$

où l'on a posé

$$D = z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad f(y) = f(y_1, y_2, y_3).$$

L'équation (2) admet en général n racines, donc

Une courbe d'ordre n est rencontrée en n points par une droite.

Si l'équation (2) admettait $n+1$ racines, elle serait vérifiée identiquement et la droite yz ferait partie de la courbe C, qui serait réductible.

Si une droite rencontre une courbe d'ordre n en $n+1$ points, elle appartient à cette courbe comme partie.

31.- Points multiples d'une courbe plane.- Supposons que le point y appartienne à la courbe C, nous avons $f(y) = 0$ et l'équation (2) admet la racine $\mu = 0$. Plus généralement, supposons que le premier terme non nul, dans l'équation (2), soit le terme en $\lambda^{n-s}\mu^s$, quel que soit le point z. La droite yz ne rencontre plus en général la courbe C qu'en $n-s$ points en dehors de y. Nous dirons que le point y est multiple d'ordre s ou s-uple pour la courbe C.

Pour que y soit s-uple pour la courbe C, il faut donc que l'on ait

$$f(y)=0,\ \mathcal{D}f(y)=0,\ldots,\mathcal{D}^{s-1}f(y)=0,$$

quel que soit le point z, mais que $\mathcal{D}^s f(y)$ ne soit pas nulle pour toutes les positions du point z. Ces conditions sont réalisées lorsque $f(y)$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $s-1$ sont nulles, l'une au moins des dérivées partielles d'ordre s n'étant pas nulle. On observera que si les dérivées partielles d'ordre $s-1$ sont nulles au point y, $f(y)$ et ses dérivées partielles d'ordre inférieur à $s-1$ sont également nulles, en vertu de la formule d'Euler.

Un point M d'une courbe algébrique d'ordre n est multiple d'ordre s pour cette courbe lorsque les droites passant par M rencontrent en général la courbe C en $n-s$ points distincts de M. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M soit s-uple pour la courbe C est que les dérivées partielles d'ordre $s-1$ du premier membre de l'équation de C soient nulles au point M, une au moins des dérivées partielles d'ordre s n'étant pas nulle.

Cette condition se traduit par $\frac{1}{2}s(s+1)$ relations linéaires entre les coefficients du polynôme f.

Si $s=1$, le point M est appelé point simple de la courbe C ; si $s=2$, point double ; si $s=3$, point triple.

32.- Tangente à une courbe en un point simple.- Supposons que le point y soit simple pour la courbe C. On appelle tangente en ce point à la courbe C une droite ne rencontrant plus cette courbe qu'en $n-2$ points au plus en dehors de y.

Pour que la droite yz soit tangente en y à la courbe C, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathcal{D}f(y) \equiv z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0. \qquad (3)$$

Puisque y est par hypothèse simple pour la courbe C, l'un au moins des coefficients de z_1, z_2, z_3 n'est pas nul. Il existe donc une et une seule tangente à la courbe C au point y. Cette droite a pour équation:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

<u>Remarque</u>.- Il peut arriver, pour des points simples particuliers de la courbe C, que les conditions $f(y)=0$ et (3) entraînent

$$\mathcal{D}^2 f(y) = 0, \ldots, \mathcal{D}^{r-1} f(y) = 0.$$

La tangente rencontre alors la courbe C en r points confondus au point y.

33.- <u>Théorème</u>.- <u>Si une courbe d'ordre n possède un point n-uple, elle est formée de n droites, distinctes ou non, passant par ce point.</u>

Supposons que la courbe soit représentée par l'équation (1) et soit y le point n-uple. Nous avons par hypothèse

$$f(y) = 0, \mathcal{D}f(y) = 0, \ldots, \mathcal{D}^{n-1} f(y) = 0,$$

quel que soit z et l'équation (2) a la racine n-uple $\mu = 0$. Si nous prenons pour z un point de la courbe, distinct de y, l'équation (1) devra avoir une $(n+1)$ième racine $\lambda = 0$; elle devra donc être vérifiée identiquement et l'on aura $\mathcal{D}^n f(y) = 0$. Par suite, la droite yz appartient à la courbe et celle-ci est complétée par une courbe d'ordre $n-1$ ayant la multiplicité $n-1$ au point y. En répétant le même raisonnement sur cette courbe, et ainsi de suite, on obtiendra le théorème.

On peut également démontrer ce théorème de la manière suivante : Changeons la figure de référence de manière à prendre le point y pour sommet $(0,0,1)$ de cette figure. L'équation de la courbe s'écrit

$$x_3^n \varphi_0 + x_3^{n-1}\varphi_1(x_1,x_2) + \dots + x_3^{n-s}\varphi_s(x_1,x_2) + \dots + \varphi_n(x_1,x_2) = 0.$$

les φ étant des polynômes entiers, rationnels et homogènes en x_1, x_2 dont les degrés sont indiqués par les indices. Si nous exprimons que les dérivées partielles d'ordre $n-1$ de l'équation précédente sont nulles au point $(0,0,1)$, nous trouvons

$$\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv \dots \equiv \varphi_{n-1} \equiv 0,$$

donc l'équation de la courbe est

$$\varphi_n(x_1, x_2) = 0.$$

Cette courbe se compose donc de n droites passant par le point $(0,0,1)$.

34.- <u>Tangentes en un point multiple</u>.- On appelle tangente à la courbe C en un point s-uple y de cette courbe, une droite qui ne rencontre plus la courbe qu'en $n-s-1$ points au plus en dehors de y.

Le point y étant s-uple pour C, on a, quel que soit le point z,

$$f(y) = 0,\ Df(y) = 0, \dots, D^{s-1}f(y) = 0.$$

Si le point z appartient à une tangente à C en y, nous avons $D^s f(y) = 0$ et par suite le lieu de ces points z est représenté par

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3}\right)^s f(y_1, y_2, y_3) = 0. \quad (4)$$

Les dérivées d'ordre $s-1$ par rapport aux x sont identiquement nulles au point y, car elles se ramènent, en vertu de la formule d'Euler, aux dérivées d'ordre $s-1$ de $f(y)$. L'équation (4) représente donc s droites distinctes ou non, passant par le point y et qui sont, par construction, les tangentes à la courbe C au point y.

35.- <u>Remarque I.</u>- Si nous déplaçons la figure de référence de manière à ce que le point y coïncide avec le point $O_3\ (0,0,1)$, l'équation de la courbe C prend la forme

$$x_3^{n-s}\varphi_s(x_1,x_2)+x_3^{n-s-1}\varphi_{s+1}+\dots+\varphi_n=0.$$

Les tangentes en O_3 à la courbe sont représentées par

$$\varphi_s(x_1,x_2)=0.$$

36.- <u>Remarque II.</u>- Dans l'application des théorèmes du nº 30, chaque point d'intersection d'une droite avec la courbe doit être compté avec son degré de multiplicité pour celle-ci. On doit également tenir compte des contacts de la droite avec la courbe.

37.- <u>Étude des points doubles.</u>- Soit C une courbe algébrique d'ordre n ayant un point double en $O_3\ (0,0,1)$. Son équation s'écrit

$$x_3^{n-2}\varphi_2(x_1,x_2)+x_3^{n-3}\varphi_3+\dots+\varphi_n=0.$$

Nous poserons

$$\varphi_i\equiv a_{i0}\,x_1^i+a_{i1}x_1^{i-1}\,x_2+\dots+a_{ii}\,x_2^i.$$

Les tangentes en O_3 à la courbe sont données par

$$a_{20}\,x_1^2+a_{21}x_1x_2+a_{22}\,x_2^2=0.$$

Si $a_{21}^2-4a_{20}\,a_{22}$ n'est pas nul, la courbe C a deux tangentes distinctes en O_3 ; on dit que ce point est un point double ordinaire de la courbe.

Si $a_{21}^2-4a_{20}\,a_{22}=0$, les deux tangentes à la courbe C en O_3 sont confondues ; on a un point de rebroussement. Déplaçons dans ce cas le triangle de référence de manière à ce que la tangente de rebroussement soit $x_1=0$. Cela revient à supposer $a_{20} \neq 0$, $a_{21} = a_{22} = 0$.

Coupons la courbe C par la droite $x_1 = 0$. Il vient

$$x_3^{n-3}\varphi_3(0, x_2) + \dots + \varphi_n(0, x_2) = 0,$$

équation qui a la racine $x_2 = 0$ au moins triple. Si a_{33} n'est pas nulle, la tangente de rebroussement a trois points d'intersection avec C confondus en O_3 ; on dit que O_3 est un point de rebroussement ordinaire ou cuspide. Si $a_{33} = 0$, il y a (au moins) quatre points d'intersection de la courbe et de la tangente confondus en O_3 ; on a un point de rebroussement de seconde espèce ou tacnode.

Pour continuer l'examen du point double O_3, passons aux coordonnées non homogènes en posant $x_2 = x x_3$, $x_1 = y x_3$; l'équation de C devient

$$a_{20} y^2 + a_{30} y^3 + a_{31} y^2 x + a_{32} y x^2 + a_{33} x^3 + a_{40} y^4 + \dots = 0. \quad (1)$$

Cherchons les intersections de la courbe et de la parabole

$$y = a x^2 + b x^3 + \dots \quad (2)$$

réunies en O_3. Si a_{33} n'est pas nul, il y en a trois.

Si $a_{33} = 0$, le coefficient de x^4, lorsque, dans l'équation (1) de la courbe, on a substitué la valeur y donnée par (2), est

$$a_{20} a^2 + a_{32} a + a_{44}. \quad (3)$$

Il y a, si cette expression n'est pas identiquement nulle, quatre points d'intersection réunis en O_3. Les valeurs de a racines de l'expression (3) donnent des paraboles rencontrant C en cinq points réunis en O_3.

On peut distinguer, parmi les tacnodes ($a_{33} = 0$), trois catégories suivant que le polynôme (3) a deux racines distinctes, ou deux racines confondues, ou est vérifié identiquement ($a_{20} = a_{32} = a_{\cancel{55}\,44} = 0$). Ce dernier cas doit

être exclus, car O_3 serait alors triple pour la courbe (1).
Dans le second cas, on aura

$$a_{32}^2 - 4a_{20}a_{44} = 0, \quad a = -\frac{a_{32}}{2a_{20}}.$$

Dans ces conditions, pour que les paraboles considérées aient six points d'intersection avec C confondus en O_3, il faut que l'on ait

$$a_{31}a_{32}^2 - 2a_{43}a_{20}a_{32} + 4a_{55}a_{20}^2 = 0.$$

On cherchera alors quelles sont les paraboles (2) ayant sept points d'intersection avec C confondus en O_3 et ainsi de suite.

Il existe d'autres procédés pour étudier les singularités d'une courbe, basés sur les transformations birationnelles ou sur les développements de Puiseux.

§ 2.- Intersection de deux courbes algébriques planes.

38.- Théorème de Bezout.- Deux courbes algébriques d'ordres m, n, n'ayant aucune partie commune, se rencontrent en mn points, distincts ou confondus.

Soient C_m, C_n les deux courbes, M, N deux points n'appartenant pas à ces courbes et tels que la droite MN rencontre C_m, C_n en $m+n$ points distincts.

Par M, menons une droite a coupant C_m en m points $A_1, A_2, \dots A_m$. Les droites $NA_1, NA_2, \dots, NA_m$ coupent C_n en mn points $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1m}, B_{21}, \dots, B_{mn}$. Joignons ces points à M et appelons b les mn droites obtenues. A une droite a correspondent mn droites b et inversement, à une droite b correspondent mn droites a. Entre les droites a, b, nous avons ainsi une correspondance

(mn, mn) et il y a donc $2mn$ droites unies.

Si un point A coïncide avec un point B, c'est-à-dire si une droite a passe par un des points communs à C_m, C_n, cette droite a est unie. D'autre part, si A et B appartiennent à la droite MN, la droite a correspondante est également unie ; elle coïncide alors avec la droite MN. D'autre part, toute droite unie de la correspondance envisagée ne peut se présenter que dans l'une de ces deux hypothèses. Pour démontrer le théorème de Bezout, il suffira donc de prouver que la droite MN absorbe mn droites unies.

Désignons par ξ, η respectivement les angles $N\widehat{M}A$, $N\widehat{M}B$ et soient A', B' deux points de rencontre de la droite MN respectivement avec les courbes C_m, C_n. Considérons un point A de C_m, voisin de A' et le point B voisin de B', situé sur NA.

Dans le triangle MAA', on a

$$\frac{\sin \xi}{AA'} = \frac{\sin MA'A}{MA}.$$

Prenons AA' comme infiniment petit principal. Lorsque A tend vers A' sur C_m, la droite AA' a pour limite la tangente A'T à C_m en A' et le second membre de la relation précédente a pour limite $\frac{\sin MA'T}{MA'}$, quantité finie et non nulle, puisque A'T est par hypothèse distincte de A'M. Il en résulte que $\sin \xi$ est du premier ordre. De même l'angle $A\widehat{N}A'$ est du premier ordre.

Soit MH la perpendiculaire abaissée de M sur NA. On a

$$MN = \frac{MH}{\sin ANA'},$$

donc MH est du premier ordre.

Dans le triangle MAB, on a

$$\frac{\sin(\xi-\eta)}{AB} = \frac{\sin \widehat{BAM}}{MB} = \frac{MH}{MB.MA},$$

d'où

$$\lim \frac{\sin(\xi-\eta)}{MH} = \lim . \frac{AB}{MB.MA} = \frac{A'B'}{MB'.MA'} .$$

Par suite, $\sin(\xi-\eta)$ est du premier ordre. Il en résulte que ξ et $\xi-\eta$ sont des infiniment petits du même ordre.

La correspondance entre les droites a, b est une correspondance entre les angles ξ et η ; nous aurons donc une courbe Γ, image de cette correspondance, en portant les ξ en abscisses et les η en ordonnées. A la droite MN correspondra l'origine $\xi = 0$, $\eta = 0$. Soit P le point de la courbe Γ de coordonnées $\xi = \eta$. Menons par P la parallèle à $O\xi$ et soit P' le point de rencontre avec la bissectrice $\xi = \eta$ des axes de coordonnées. La limite de la droite OP lorsque A tend vers A' et par suite lorsque P tend vers O est une tangente à Γ en O. Puisque ξ et $PP' = |\xi-\eta|$ sont des infiniment petits de même ordre, cette tangente est distincte de la droite $\xi = \eta$.

Observons maintenant que A' peut être choisi de m manières différentes et B' de n manières. On peut par suite choisir le point P de mn manières différentes dans le voisinage de O. Il en résulte que le point O est multiple d'ordre mn pour la courbe Γ, les tangentes en ce point à cette courbe étant distinctes et distinctes de la droite $\xi = \eta$. Par conséquent, la droite MN compte pour mn droites unies dans la correspondance entre les droites a, b. Le théorème de Bezout est donc démontré.

<u>Corollaire.</u> - <u>Si deux courbes algébriques d'ordre m, n ont $mn+1$ points communs, elles ont une partie</u>

commune (ou coïncident si $m = n$).

39.- Remarque.- On peut aussi démontrer le théorème de Bezout de la manière suivante : Écrivons les équations de C_m, C_n sous la forme

$$x_3^m\varphi_0 + x_3^{m-1}\varphi_1 + \dots + \varphi_m = 0,$$
$$x_3^m\psi_0 + x_3^{m-1}\psi_1 + \dots + \psi_n = 0.$$

Il y aura autant de points communs aux deux courbes qu'il y aura de couples de valeurs de x_1, x_2 pour lesquels les équations précédentes auront une solution commune x_3. En éliminant x_3 entre les deux équations, par exemple par la méthode de Sylvester, on obtient un déterminant à $(m+n)^2$ éléments, de degré mn en x_1, x_2, homogène, égalé à zéro.

40.- Théorème.- Si les courbes C_m, C_n ont en un point P, simple pour chacune des courbes, un contact d'ordre p, le point P absorbe $p+1$ points d'intersection.

Soit PQ la tangente commune en P aux courbes C_m, C_n. On peut toujours supposer que cette droite ne passe pas par les points M, N. Si A est un point de C_m voisin de P et B un point de C_n voisin de P sur la droite AN, on a, par hypothèse, lorsque A tend vers P,

$$\lim \frac{AB}{(AP)^{p+1}} = h,$$

h étant une quantité finie et non nulle. Posons

$$\Delta\xi = \widehat{PMA}, \quad \Delta\eta = \widehat{PMB}.$$

Dans les triangles APM, ABM, on a

$$\frac{\sin\Delta\xi}{AP} = \frac{\sin\widehat{APM}}{MA}, \quad \frac{\sin(\Delta\xi - \Delta\eta)}{AB} = \frac{\sin MAB}{MB}.$$

Lorsque A tend vers P, on a donc

$$\lim\frac{\Delta\xi}{AP} = \frac{\sin\widehat{QPM}}{MA}, \quad \lim\frac{\sin(\Delta\xi-\Delta\eta)}{AB} = \frac{\sin MPN}{MP}.$$

On en conclut que

$$\lim \frac{\Delta\xi - \Delta\eta}{(\Delta\xi)^{p+1}}$$

est une quantité finie et non nulle.

Le point P' de la courbe Γ, image de la correspondance, correspondant à P ($\xi = \eta = N\widehat{M}P$), est simple pour la courbe et celle-ci a un contact d'ordre p avec la droite $\xi = \eta$ en ce point. D'où le théorème.

41.– Théorème.– Si deux courbes C_m, C_n ont en commun un point P multiple d'ordre r pour C_m, s pour C_n, ce point absorbe au moins rs intersections des deux courbes et exactement rs lorsque les courbes n'ont aucune tangente commune.

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au précédent, en considérant des points A de C_m, B de C_n voisins de P, des rs manières différentes possibles. Le point P' correspondant à P sur Γ, est multiple d'ordre rs pour cette courbe et les tangentes à celle-ci en ce point ne sont distinctes de la droite $\xi = \eta$ que si les tangentes en P à C_m sont distinctes des tangentes en P à C_n.

Faisceau

42.– Systèmes algébriques ∞^1 de courbes.– Supposons que les $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients de l'équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ d'une courbe C_n, d'ordre n, soient liés par $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ relations qui soient des polynômes entiers, rationnels et homogènes égalés à zéro. Il y a ∞^1 courbes C_n satisfaisant à ces conditions ; on dit qu'elles forment un système algébrique $\{C_n\}$ de dimension un.

Il se peut que toutes les courbes d'un système $\{C_n\}$ soient réductibles et en particulier, qu'elles comprennent une partie fixe.

Les points communs à toutes les courbes d'un système $\{C_n\}$, privé de partie fixe, sont appelés points-base du système.

Le nombre de courbes du système passant par un point (distinct des points-base éventuels), est fini ; il est appelé indice du système.

On appelle faisceau un système algébrique ∞^1 représenté par

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ sont deux courbes d'ordre n. Un faisceau est représenté par la notation $|C_n|$. S'il est dépourvu de partie fixe, il possède n^2 points-base, chacun étant compté avec son degré de multiplicité (n est l'ordre de la courbe). Un faisceau a l'indice égal à un.

43.– Théorème.– Un système algébrique ∞^1, d'indice un, privé de partie fixe et de parties multiples variables, est un faisceau.

Soit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1)$$

l'équation de la courbe du système donné, les coefficients étant liés par $\frac{1}{2} n (n+3) - 1$ équations algébriques. On peut supposer sans restriction que la droite $x_3 = 0$ n'occupe pas une position particulière vis-à-vis du système donné. Dans ces conditions, les courbes (1) découperont, sur cette droite, une série algébrique ∞^1, d'indice un, privée de points fixes et de points multiples variables ; cette série est donc linéaire et représentée par

$$\varphi_0(x_1, x_2) + \lambda \varphi_1(x_1, x_2) = 0. \qquad (2)$$

A une valeur du paramètre λ correspond un groupe de la série (2) et les coordonnées des points de ce groupe dépendent algébriquement de λ. Une courbe de la série (1), passant par un point de ce groupe, passe par les autres et cette condition de passage est algébrique. Inversement, on obtient la valeur de λ qui correspond au groupe de la série (2) découpé par une courbe du système (1) par des opérations algébriques. Il y a une correspondance biunivoque algébrique entre les courbes du système (1) et les valeurs de λ, donc les coefficients de la courbe (1) sont des fonctions rationnelles de λ. L'équation de la courbe (1) peut donc s'écrire sous la forme

$$\lambda^{\nu}\psi_0(x_1,x_2,x_3)+\lambda^{\nu-1}\psi_1+\dots+\lambda\psi_{\nu-1}+\psi_\nu=0.$$

Par un point du plan passe une seule courbe de ce système, donc l'équation précédente a une seule racine et doit être de la forme

$$[\lambda f_0+f_1]^{\nu}=0. \qquad (3)$$

Mais par hypothèse, la courbe (1) est dépourvue de parties multiples. On a donc $\nu=1$ et le théorème est démontré.

44.- Remarque.- Si, dans l'énoncé du théorème précédent, on laisse tomber l'hypothèse que la courbe du système est dépourvue de parties multiples variables, l'équation (1) peut se mettre sous la forme (3), où f_0, f_1 sont des polynômes de degré $\frac{n}{\nu}$.

45.- Faisceau composé au moyen d'un autre faisceau.- Soit

$$\mu_0\varphi_0(x_1,x_2,x_3)-\mu_1\varphi_1=0 \qquad (1)$$

l'équation d'un faisceau de courbes d'ordre n. Considérons deux polynômes de degré m en μ_0,μ_1, soient $\varphi_0(\mu_0,\mu_1)$, $\varphi_1(\mu_0,\mu_1)$. L'équation

$$\lambda_0 \varphi_0(\psi_1, \psi_0) + \lambda_1 \varphi_1(\psi_1, \psi_0) = 0. \qquad (2)$$

représente un faisceau de courbe d'ordre mn. Toute courbe de ce faisceau se compose de m courbes du faisceau (1), les paramètres μ_0, μ_1 de ces m courbes satisfaisent à l'équation

$$\lambda_0 \varphi_0(\mu_0, \mu_1) + \lambda_1 \varphi_1(\mu_0, \mu_1) = 0.$$

Le faisceau (2) est dit composé au moyen du faisceau (1).

46.- Théorème.- Un faisceau de courbes réductibles, dépourvu de partie fixe, est composé au moyen d'un faisceau.

Soit $|C|$ le faisceau donné. Désignons par $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les composantes d'une courbe générale du faisceau. Ces courbes sont en général distinctes, car autrement les courbes C auraient une partie multiple variable et découperaient sur une droite une série linéaire ∞^1 ayant des points multiples variables, ce qui est impossible. Lorsque C décrit le faisceau $|C|$, les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_k$ engendrent des systèmes algébriques ∞^1 $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Chacun de ces systèmes est un faisceau, car par un point du plan ne peut passer qu'une courbe d'un quelconque de ces systèmes.

Par un point d'une courbe C_1, n'appartenant pas à la courbe C_2 qui, avec C_1, fait partie d'une même courbe C, ne peut passer une courbe de H_2, car alors par ce point passeraient deux courbes C. Par suite les faisceaux H_1, H_2 coïncident. Pour la même raison, $H_3, H_4, \ldots, H_k$ coïncident avec H_1 et le théorème est démontré.

47.- Principe de Lamé.- Si C_n, C'_n, C''_n sont trois courbes d'ordre n n'ayant deux à deux aucune partie commune et telles que l'une d'elles passe par tout point commun aux deux autres (avec la même multiplicité); si de plus les trois courbes ne sont pas composées au moyen de courbes d'un même faisceau, les courbes C_n, C'_n, C''_n appartiennent à un même faisceau.

Désignons par H, H', H'' les faisceaux déterminés respectivement par C'_n et C''_n, C''_n et C_n, C_n et C'_n. Supposons en premier lieu que la courbe générale du faisceau H soit irréductible et soit Γ une de ces courbes. La courbe du faisceau H' passant par un point de Γ, distinct des points-base de H' et par suite de H, coupe Γ en n^2+1 points; par suite ces courbes coïncident et les faisceaux H, H' et par conséquent H'' coïncident.

Le théorème sera démontré s'il est prouvé que l'un au moins des faisceaux H, H', H'' est formé de courbes irréductibles. Supposons que les faisceaux H, H', H'' soient respectivement composés au moyen de faisceaux H_1, H'_1, H''_1 de courbes d'ordre ν, ν', ν'' ($\nu \geq \nu' \geq \nu''$). La courbe C_n appartenant aux deux faisceaux H', H'', ν'' doit être un diviseur de ν'. De même ν' est un diviseur de ν. Considérons une composante Γ'_1 d'ordre ν de C', une composante Γ''_1 d'ordre ν de C'' et une composante Γ_1 d'ordre ν de C. La courbe Γ_1 sera formée de $\frac{\nu}{\nu'}$ courbes de H'_1 et de $\frac{\nu}{\nu''}$ courbes de H''_1; Γ'_1 sera une courbe de H_1 formée de $\frac{\nu}{\nu''}$ courbes de H''_1; enfin Γ''_1 sera une courbe de H_1 formée de $\frac{\nu}{\nu'}$ courbes de H'_1. Mais la courbe de H_1 étant en général irréductible, les courbes Γ_1, Γ'_1, Γ''_1 appartiendront à un même faisceau et les courbes C_n, C'_n, C''_n seront composées au moyen de courbes d'un même faisceau, contrairement à l'hypothèse.

48.- Remarque.- Le cas où les courbes C_n, C'_n, C''_n sont formées de courbes d'un même faisceau est un véritable cas d'exception, car les courbes

$$\varphi_0(\psi_1, \psi_2) = 0, \; \varphi_1(\psi_1, \psi_2) = 0, \; \varphi_2(\psi_1, \psi_2) = 0$$

n'appartiennent pas nécessairement à un même faisceau.

49.- Paradoxe de Cramer.- On a vu que $\frac{1}{2}n(n+3)$ points déterminent une seule courbe d'ordre n du plan, sauf peut être pour des positions particulières de ces points. D'autre part, deux courbes d'ordre n se coupent en n^2 points. Pour $n \geqslant 3$, n^2 est au moins égal à $\frac{1}{2}n(n+3)$. Il est évident que si l'on choisit $\frac{1}{2}n(n+3)$ points parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n, ces $\frac{1}{2}n(n+3)$ points ne détermineront pas une seule courbe d'ordre n. Cette remarque constitue le paradoxe de Cramer.

Appliquons ce qui précède au cas $n = 3$. Une cubique plane est en général complètement déterminée par 9 points ; d'autre part, deux cubiques planes se coupent en neuf points.

Observons que passer par un point pour une courbe se traduit par une relation linéaire entre les coefficients. Cela étant, les cubiques planes passant par huit points formeront en général un faisceau et auront encore un neuvième point en commun. D'une manière précise, <u>les cubiques planes passant par 8 des 9 points communs à deux cubiques planes n'ayant aucune partie commune, passent par le neuvième.</u>

Soient C_3, C'_3 les cubiques $A_1, A_2, \dots, A_9$ leurs neuf points communs. Le passage d'une cubique par ces neuf points n'imposant que 8 conditions indépendantes, si les cubiques passant par $A_1, \dots, A_8$ ne passaient pas par A_9, il faudrait que les cubiques passant par $A_1, \dots, A_7$ passent en conséquence par A_8. Supposons qu'il en soit ainsi. On peut toujours supposer que la droite A_7A_8 ne passe par aucun des points $A_1, A_2, \dots, A_6$. Il existe une cubique passant par $A_1, A_2, \dots, A_7$ et par deux points A', A'' de la droite A_7A_8 ; comme cette cubique passe par A_8, elle est formée de la droite A_7A_8 et d'une conique Γ passant par $A_1, \dots, A_6$. La conique Γ ne peut contenir A_8, car ce serait une partie commune à C_3, C'_3. Mais alors, les cubiques formées de la conique Γ et d'une droite passant par A_7 devraient passer par A_8, ce qui est absurde, d'où le théorème.

50.- <u>Application</u>.- Considérons une cubique plane C et une droite a la coupant en trois points A_1, A_2, A_3. On appelle tangentiel d'un point d'une cubique plane la seconde intersection de cette courbe avec la tangente en ce point. Soient A'_1, A'_2, A'_3 les tangentiels de A_1, A_2, A_3. Les cubiques C_3 et $A_1A'_1 + A_2A'_2 + A_3A'_3$ déterminent un faisceau dont toutes les courbes ont même tangente en A_1, A_2, A_3 et passent par A'_1, A'_2, A'_3. La cubique formée de la droite a comptée deux fois et de la droite $A'_1A'_2$ passe par A'_3 ; ce point appartient donc à la droite $A'_1A'_2$. On a donc le

<u>Théorème de Mac-Laurin</u>.- <u>Dans une cubique plane, les tangentiels de trois points en ligne droite sont en ligne droite.</u>

51.- Principe de Gergonne.- Si $n < m$ et si une courbe irréductible C_n d'ordre n passe par mn des m^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre m, C_m, C'_m, sans partie commune, il existe une courbe du faisceau déterminée par C_m, C'_m, comprenant C_n comme partie.

En effet, par un point de C_n n'appartenant pas aux courbes C_m, C'_m, passe une courbe du faisceau déterminé par ces deux courbes ; cette courbe rencontre C_n en $mn+1$ points et par suite la comprend comme partie. Elle est complétée par une courbe d'ordre $m-n$ passant par les $m(m-n)$ intersections ultérieures de C_m, C'_m.

52.- Applications.- Soient Γ une conique et $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ les côtés d'un hexagone inscrit à la conique, les sommets étant les points $a_1 b_3$, $a_1 b_2$, $b_2 a_3$, $a_3 b_1$, $a_2 b_1$ et $a_2 b_3$. Les cubiques $a_1 + a_2 + a_3$ et $b_1 + b_2 + b_3$ déterminent un faisceau dont six points-base sont sur la conique Γ ; il existe une cubique du faisceau comprenant Γ comme partie et complétée par une droite contenant les points $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. On retrouve ainsi le théorème de Pascal.

On démontre de même que si a_1, a_2, a_3, a_4 et b_1, b_2, b_3, b_4 sont deux groupes de quatre droites telles que les points $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_2 b_1$, $a_2 b_3$, $a_3 b_2$, $a_3 b_4$, $a_4 b_3$, $a_4 b_4$ soient situés sur une même conique, les points $a_1 b_3$, $a_1 b_4$, $a_2 b_2$, $a_2 b_2$, $a_2 b_4$, $a_3 b_1$, $a_3 b_3$, $a_4 b_1$, $a_4 b_2$ sont également sur une conique.

53.- <u>Théorème de Jacobi</u>.- <u>Si $m > n$, les mn points communs à deux courbes C_m d'ordre m et C_n, d'ordre n et irréductible, supposés simples pour C_n, imposent $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ conditions indépendantes aux courbes d'ordre m qui doivent les contenir</u>.

Soient

$$f_m = 0, \ \varphi_n = 0$$

les équations de C_m, C_n. Une courbe d'ordre m, passant par les mn points d'intersection de C_m, C_n, détermine avec C_m un faisceau dont une courbe comprend C_n comme partie. Les courbes cherchées ont donc une équation de la forme

$$f_m + \varphi_n \psi_{m-n} = 0,$$

où ψ_{m-n} est un polynôme de degré $m-n$. Ces courbes dépendent donc de

$$\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2) = \frac{1}{2}m(m+3) - mn + \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

d'où le théorème.

<u>Remarque</u>.- Il résulte de la démonstration que les courbes cherchées passent par les mn points d'intersection de C_m, C_n.

54.- <u>Cas particuliers</u>.- Pour $n = 1$, $n = 2$, on voit que les points d'intersection d'une courbe d'ordre m avec une droite ou une conique présentent des conditions indépendantes aux courbes d'ordre m qui doivent les contenir.

Pour $n = 3$, on voit que les $3m$ points d'intersection d'une courbe d'ordre m et d'une cubique, imposent $3m - 1$ conditions indépendantes aux courbes d'ordre m qui doivent les contenir.

En particulier, pour $m = 4$, on obtient ce résultat que par les 12 points d'intersection d'une cubique et d'une quartique, il passe ∞^3 quartiques. Si $f_4 = 0$, $\varphi_3 = 0$ sont les équations de cette quartique et de cette cubique, les ∞^3 quartiques sont représentées par

$$\lambda_0 f_4 + \varphi_3 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = 0.$$

55.- Application.- Soient C_3 une cubique irréductible, $A_1, \dots, A_7$ sept points de cette cubique. Considérons deux cubiques C'_3, C''_3 passant par $A_1, \dots, A_7$ et coupant encore C_3 la première en A'_8, A'_9, la seconde en A''_8 A''_9. Soit B le troisième point d'intersection de C_3 avec la droite $A''_8 A''_9$. Les 12 points $A_1, \dots, A_7, A'_8, A'_9, A''_8, A''_9$, B sont les intersections de C_3 avec la quartique formée de C'_3 et de la droite $A''_8 A''_9$; par conséquent, la quartique formée de C''_3 et de $A'_8 A'_9$, qui passe par les 11 premiers de ces points, doit passer par le 12e. Par suite, la droite $A'_8 A'_9$ passe par le point B et on a ainsi le

Théorème de Sylvester.- Les cubiques passant par sept points fixes d'une cubique irréductible, la rencontrent encore en des couples de points alignés sur un point fixe de cette cubique.

§ 3.- Polarités dans les courbes planes et formules de Pluecker

56.- Définition.- On appelle polaire d'ordre r ou r-ième polaire d'un point Y par rapport à une courbe C_n d'ordre n, le lieu des r-ièmes groupes polaires du point Y, sur les droites passant par ce point, par rapport aux groupes de n points de rencontre de ces droites avec la courbe.

Soient

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (C_n)$$

l'équation de C_n, $Y(y_1, y_2, y_3)$, $Z(z_1, z_2, z_3)$ deux points quelconques. Tout point de la droite YZ a des coordonnées de la forme $\xi_1 y + \xi_2 z$ et le groupe G_n des points de rencontre de C_n et de YZ est donné par

$$f(\xi_1 y + \xi_2 z) \equiv f(\xi_1 y_1 + \xi_2 z_1, \xi_1 y_2 + \xi_2 z_2, \xi_1 y_3 + \xi_2 z_3) = 0.$$

Le r-ième groupe polaire d'un point η_1, η_2 par rapport à G_n a pour équation

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^r f(\xi_1 y + \xi_2 z) = 0.$$

En particulier, le r-ième groupe polaire de Y $(\eta_2 = 0)$ est donné par

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi_1^r} (f(\xi_1 y + \xi_2 z) = 0.$$

La r-ième polaire de Y par rapport à C_n a donc pour équation

$$\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^r f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

C'est une courbe d'ordre $n - r$.

57.- <u>Propriétés immédiates</u>.- I. <u>La s-ième polaire de Y par rapport à la r-ième polaire de Y par rapport à C_n, est la $(r+s)$-ième polaire de Y par rapport à C_n.</u>

II.- <u>Si un point Z appartient à la r-ième polaire d'un point Y par rapport à C_n, le point Y appartient à la $(n-r)$-ième polaire de Z par rapport à C_n.</u>

L'équation de la r-ième polaire de Y peut également s'écrire

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3}\right)^{n-r} f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

58.- <u>Pôles d'une droite</u>.- <u>Les premières polaires</u>

des points d'une droite YZ par rapport à une courbe C_n forment un faisceau

$$\lambda\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)+\mu\left(z_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)=0.$$

pag. 33 Les points-base de ce faisceau sont appelés les pôles de la droite YZ par rapport à C_n. Ils sont en général au nombre de $(n-1)^2$. La droite YZ est la $(n-1)$-ième polaire de ses pôles.

59.- <u>Comportement des polaires en un point multiple.</u>- Supposons que C_n possède un point s-uple P. Nous pouvons sans restriction supposer que ce point P coïncide avec O_3 $(0,0,1)$. L'équation de C_n s'écrit alors, avec les notations définies plus haut,

$$x_3^{n-s}\varphi_s(x_1,x_2)+x_3^{n-s-1}\varphi_{s+1}+\dots+\varphi_n=0. \quad (1)$$

La première polaire d'un point Y distinct de O_3 a pour équation

$$x_3^{n-s}\left(y_1\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}\right)+x_3^{n-s-1}\left[y_1\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_2}+(n-s)y_3\varphi_s\right]+\dots=0. \quad (2)$$

C'est une courbe d'ordre $n-1$ ayant la multiplicité $s-1$ au point O_3. Les tangentes en ce point à cette courbe

$$y_1\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}=0$$

forment le premier groupe polaire de la droite O_3Y par rapport au groupe des tangentes $\varphi_s=0$ à la courbe C_n en O_3. Par conséquent, si une droite issue de O_3 absorbe σ des tangentes à C_n en O_3, elle absorbe $\sigma-1$ des tangentes aux premières polaires de C_n, en O_3.

Plus généralement, on a le théorème suivant (en utilisant la propriété I du n° 57).

<u>Si une courbe C_n possède en P la multiplicité s, ses r-ièmes polaires ont en P la multiplicité $s-r$. Les tangentes en P à la r-ième polaire d'un point Y</u>

distinct de P forment le r-ième groupe polaire de la droite PY par rapport au groupe des tangentes à C_n en P. Si C_n possède en P, σ tangentes confondues en une seule, cette droite absorbe $\sigma - r$ tangentes aux r-ièmes polaires de C_n en P.

En particulier, les premières polaires d'une courbe C_n passent simplement par les points doubles de la courbe ; s'il s'agit d'un point double ordinaire, les premières polaires ne touchent pas en général une des tangentes à C_n en ce point ; s'il s'agit d'un point de rebroussement, les premières polaires touchent en ce point la tangente de rebroussement.

Soit a une des tangentes à la courbe C_n en P et supposons qu'elle compte pour σ tangentes simples. La première polaire d'un point Y de a, distinct de P, par rapport à C_n, a la multiplicité $s-1$ en P, les tangentes en ce point étant la droite a comptée σ fois et le groupe polaire de la droite a par rapport au groupe des $s - \sigma$ tangentes à C_n en P, distinctes de a.

Considérons actuellement la première polaire par rapport à C_n du point P, s-uple pour cette courbe. Cette courbe est d'ordre $n-1$; sur une droite p issue de P, la courbe C_n détermine un groupe de n points dans lequel P absorbe s points. Il en résulte que P est multiple d'ordre s pour la polaire. Si p est une des tangentes en P à C_n, P compte $s+1$ fois au moins dans le groupe considéré plus haut et par suite la première polaire du point P a, en ce point, les mêmes tangentes que C_n.

Reprenons la courbe C_n donnée par l'équation (1), P coïncidant avec O_3. L'équation (2) devient

$$(n-s)\,x_3^{\,n-s-1}\,\varphi_s + \dots = 0,$$

ce qui confirme le résultat précédent. Plus généralement

<u>La r-ième polaire d'un point s-uple d'une courbe C_n par rapport à cette courbe, a la multiplicité s en ce point et mêmes tangentes que la courbe C_n. Si $r = n-s$, la $(n-s)$-ième polaire est constituée par ces tangentes. Si $r > n-s$, la r-ième polaire est indéterminée.</u>

60.- <u>Classe d'une courbe algébrique.</u>- On appelle classe d'une courbe algébrique plane le nombre des tangentes que l'on peut mener d'un point à cette courbe.

Soient C_n une courbe d'ordre n, P un point simple de cette courbe, p la tangente à C_n en P, Y un point de p. La droite p coupe C_n en n points dont deux (au moins) sont confondus en P ; par suite la première polaire de Y par rapport à C_n passe par P. Inversement, la $(n-1)$-ième polaire de P par rapport à C_n est la droite p. La première polaire de Y coupe donc C_n aux points de contact des tangentes à cette courbe menées par Y. C'est ce que l'on voit d'ailleurs immédiatement en comparant l'équation de la première polaire et celle d'une tangente. On en conclut que :

<u>Une courbe d'ordre n, dépourvue de points multiples, est de classe $n(n-1)$.</u>

D'après ce qu'on vient de voir, un point s-uple abaisse la classe de $s(s-1)$ unités au moins, et précisément de $s(s-1)$ si les s tangentes à la courbe en ce point sont distinctes.

En particulier, un point double ordinaire abaisse la classe de deux unités.

Un point de rebroussement abaisse la classe de trois unités au moins. Supposons que le point de rebroussement soit ordinaire, placé en O_3, et soit

$$x_3^{n-2}x_1^2 + x_3^{n-3}\varphi_3(x_1, x_2) + \dots + \varphi_n = 0$$

l'équation de la courbe, $\varphi_3(0,1)$ n'étant pas nul. La première polaire d'un point Y a pour équation

$$2y_1x_3^{n-2}x_1 + x_3^{n-3}\left[y_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} + (n-3)y_3x_1^2\right] + \dots = 0.$$

En éliminant x_3 entre ces équations par la méthode de Sylvester, on obtient un déterminant de degré mn en x_1, x_2 dans lequel on peut mettre en évidence x_1^3, égalé à zéro. Par suite un point de rebroussement ordinaire abaisse la classe de trois unités.

Considérons maintenant un point simple Y de C_n. La première polaire de Y est tangente à C_n en Y. Par suite, d'un point simple d'une courbe de classe m, on peut en général mener $m-2$ tangentes à la courbe, distinctes de la tangente au point considéré.

61.- Points d'inflexion.- La tangente en un point simple Y d'une courbe C_n peut couper celle-ci en ν points confondus en Y. Si ν est impair, Y est appelé point d'inflexion; si ν est pair et supérieur à deux, Y est appelé point d'ondulation. En particulier, si $\nu = 3$ Y est un point d'inflexion ordinaire.

Si la droite YZ est la tangente au point simple Y de C_n et coupe la courbe en ν points confondus en Y, on a

$$f(y)=0,\ \Sigma z_i \frac{\partial f}{\partial y_i}=0,\ \left(\Sigma z_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right)^2 f=0, \dots, \left(\Sigma z_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right)^{\nu-1} f=0,$$

les 3^e, 4^e, ... relations étant une conséquence des deux premières. En d'autres termes, les courbes

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3}\right)^k f(y)=0,\ (k=2,3,\dots,\nu-1)$$

doivent être réductibles et comprendre la tangente comme partie.

La première polaire du point Y a ν points d'intersection avec la tangente à la courbe en Y confondus en ce point ; il en résulte que par Y on peut encore mener $m-\nu$ autres tangentes à la courbe, m étant la classe de la courbe C_n.

Considérons la r-ième polaire de Y par rapport à C_n. Pour $r<n$, cette courbe est bien déterminée. Supposons $r>n-\nu$. La r-ième polaire de Y est d'ordre $n-r<\nu$ et doit d'autre part être rencontrée en ν points confondus en Y par la tangente à C_n en ce point ; cette r-ième polaire contient donc cette tangente comme partie et on retrouve le résultat précédent.

En un point Y pour lequel ν est supérieur à deux, la courbe

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} + x_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} + 2x_2x_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} + 2x_3x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1} + 2x_1x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \quad (1)$$

doit dégénérer en deux droites dont l'une est la tangente en Y. On doit donc avoir

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = 0. \quad (2)$$

Inversement, si la relation (2) est vérifiée en un point de la courbe C_n, la courbe (1) dégénère en deux droites. Comme cette courbe doit couper la tangente en Y en trois points confondus en Y, la courbe (1) dégénère en deux droites passant par Y et dont l'une est la tangente en ce point.

L'équation (2), où les y sont les coordonnées courantes, est appelée hessienne de la courbe C_n ; c'est une courbe d'ordre $3(n-2)$.

Les points d'inflexion et d'ondulation d'une courbe appartiennent à sa hessienne. Réciproquement, un point d'intersection de la courbe et de sa hessienne, simple pour la courbe, est un point d'inflexion ou d'ondulation.

En général, ces points seront des points d'inflexion ordinaires.

La hessienne d'une courbe passe par les points multiples de celle-ci, donc Une courbe d'ordre n, privée de points multiples, possède $3n(n-2)$ points d'inflexion (ordinaires).

62.- Comportement de la hessienne en un point multiple.- Considérons la hessienne de la courbe C_n, possédant un point s-uple en O_3, d'équation

$$x_3^{n-s}\varphi_s(x_1,x_2)+x_3^{n-s-1}\varphi_{s+1}+\dots+\varphi_n=0. \qquad (1)$$

Elle a pour équation

$$\begin{vmatrix} x_3^{n-s}\dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1^2}+\dots & x_3^{n-s}\dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1\partial x_2}+\dots & (n-s)x_3^{n-s-1}\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}+\dots \\ x_3^{n-s}\dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1\partial x_2}+\dots & x_3^{n-s}\dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_2^2}+\dots & (n-s)x_3^{n-s-1}\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}+\dots \\ (n-s)x_3^{n-s-1}\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}+\dots & (n-s)x_3^{n-s-1}\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}+\dots & (n-s)(n-s-1)x_3^{n-s-2}\varphi_s+\dots \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

Le coefficient de la plus haute puissance $3n-3s-2$ de x_3 est

$$(n-s)\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1\,\partial x_2} & (n-s)\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_2^2} & (n-1)\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_2} & (n-s-1)\,\varphi_s \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{(n-s)\overset{n-1}{\cancel{(n-2s-1)}}}{s-1}\,\varphi_s \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1\,\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\varphi_s}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

La courbe (2) étant d'ordre $3(n-2)$, on voit que la hessienne d'une courbe d'ordre n possède en général, en un point s-uple de cette courbe, la multiplicité $3s-4$, les tangentes en ce point étant les tangentes à la courbe donnée et le hessien de ces tangentes.

Supposons $s=2$ et posons

$$\varphi_2 = a_{20}\,x_1^2 + 2a_{21}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 .$$

L'équation des tangentes à la hessienne (2) en O_3 devient

$$(a_{21}^2 - a_{20}\,a_{22})\,\varphi_2 = 0 .$$

Si O_3 est un point double ordinaire de C_n, ce point est double ordinaire pour la hessienne et les tangentes aux deux courbes coïncident.

Si O_3 est un point de rebroussement ordinaire de C_n, on a $a_{21}^2 - a_{20}\,a_{22} = 0$ et la hessienne a un point triple au moins en O_3. Dans ces conditions, le coefficient de la plus haute puissance $3n-9$ de x_3 dans l'équation (2) est, à un facteur numérique près,

$$\varphi_2\left[a_{20}\,\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_2^2} - 2a_{21}\,\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + a_{22}\,\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1^2}\right].$$

Le point O_3 est donc triple pour la hessienne, deux des tangentes étant confondues avec la tangente de rebroussement à la courbe C_n.

Cherchons maintenant quel est le nombre des points d'intersection d'une courbe C_n et de sa hessienne H absorbés en un point double de C_n.

Si $\psi(x_1, x_2, x_3)$ est un polynôme de degré $2(n-3)$, à coefficients quelconques, la courbe

$$H + \lambda f \psi = 0 \qquad (3)$$

rencontre C_n et H aux points communs à ces deux courbes.

Supposons O_3 double ordinaire pour C_n et posons $\psi = x_3^{2n-6}$. L'équation de la courbe (3), on peut choisir λ de manière à ce que le terme en $x_3^{2n-8}\varphi_2$ disparaisse. Cette courbe possède un point triple en O_3 et par suite il y a 6 points d'intersection de H et de C_n absorbés en O_3.

Supposons que O_3 soit un cuspide de C_n. Posons

$$\psi = x_3^{2n-7}\left[a_{20}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} - 2a_{21}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2}\right]$$

et disposons de λ de manière à ce que le terme en x_3^{2n-9} disparaisse dans l'équation (3). Cette courbe a un point quadruple en O_3 et rencontre donc C_n en 8 points confondus en O_3.

<u>En un point double ordinaire de C_n, la hessienne de cette courbe possède un point double et les mêmes tangentes que la courbe C_n. Il y a 6 points d'intersection des deux courbes absorbés en ce point.</u>

<u>En un point de rebroussement ordinaire de C_n, la hessienne de cette courbe possède un point triple, deux des tangentes étant confondues avec la tangente de</u>

rebroussement à C_n. Il y a 8 points d'intersection des deux courbes absorbés en ce point.

63.- Premier groupe de formules de Plücker.- Soit C_n une courbe d'ordre n possédant d points doubles ordinaires, r points de rebroussement ordinaires, sans autres points multiples. La classe m de la courbe est donnée par les intersections de C_n avec les premières polaires, en dehors des points doubles. On a donc

$$m = n(n-1) - 2d - 3r. \qquad (P_1)$$

Le nombre i des points d'inflexion de C_n est donné par les intersections de la hessienne en dehors des points doubles

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8r. \qquad (P_2)$$

Ce sont les deux premières formules de Plücker.

64.- Courbes enveloppes.- Soit C_n une courbe d'ordre n. Sa transformée par dualité est une courbe enveloppe Γ_n de classe n. Nous allons rechercher la nature des singularités corrélatives d'un point double et d'un point de rebroussement ordinaires.

Soit P un point double ordinaire de C_n, les tangentes p_1, p_2 à la courbe en ce point coupant encore C_n chacune en $n-3$ points en dehors de C_n En dehors de P. Au point P correspond une tangente p à Γ_n et aux droites p_1, p_2, deux points P_1, P_2 de p. Une droite passant par P coupe encore C_n en $n-2$ points, donc par un point de p ne passent que $n-2$ tangentes à Γ_n en dehors de p. En particulier, p_1 (ou p_2) coupe C_n en $n-3$ points en dehors de P, donc par P_1 (ou P_2) passent $n-3$ tangentes à Γ_n en dehors de p.

Considérons Γ_n comme lieu de points. La polaire d'un point de p coupe Γ en deux points de p ; la polaire de P_1 (ou de P_2) coupe Γ en trois points de p. La première propriété exige que p soit une tangente d'inflexion de Γ, ou que cette droite touche Γ en deux points distincts. Mais dans la première hypothèse, il n'y aurait qu'un point de p, le point d'inflexion, dont la polaire couperait Γ en trois points de p. Il faut donc que Γ touche p en deux points qui sont nécessairement P_1, P_2. La droite p est une bitangente de Γ.

Soient maintenant R un point de rebroussement ordinaire de C_n, r la tangente de rebroussement. A R correspond une tangente r' de Γ_p et à r, un point R' de r'. En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que la polaire d'un point de r' par rapport à Γ coupe cette courbe en deux points de r'. En particulier, la polaire de R' coupe Γ en trois points de r'. On en conclut que R' est un point d'inflexion de Γ, la tangente en ce point étant r'.

<u>La singularité corrélative d'un point double ordinaire est une bitangente ; celle d'un point de rebroussement ordinaire est une tangente d'inflexion.</u>

65.- <u>Second groupe de formules de Plücker</u>.- Soit t le nombre des bitangentes d'une courbe C_n. En appliquant les premières formules de Plücker à la corrélative de C_n, qui est une courbe d'ordre m et de classe n, on a

$$n = m(m-1) - 2t - 3i, \qquad (P_3)$$

$$r = 3m(m-2) - 6t - 8i. \qquad (P_4)$$

Ce sont les secondes formules de Plücker.

66.- <u>Remarque</u>.- Si une courbe C_n est dépourvue de points multiples ($d = 0$, $r = 0$), on a $i > 0$, $t > 0$ et par suite la courbe la plus générale de son ordre n'est pas la plus générale de sa classe (Paradoxe de Poncelet).

§4.- Jacobienne d'un réseau de courbes.

67.- Réseaux de courbes.- On appelle réseau de courbes l'ensemble des courbes représentées par l'équation

$$\lambda_0 f_0 (x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0. \qquad (1)$$

Un point commun à toutes les courbes du réseau est appelé point-base du réseau. Une courbe, faisant partie de toutes les courbes du réseau est appelée composante fixe du réseau. Un réseau dépourvu de composante fixe possède un nombre fini (éventuellement nul) de points-base. Par deux points du plan, distincts des points-base, passe une courbe du réseau et en général une seule.

Un réseau formé de courbes C est représenté par la notation $|C|$.

Les courbes d'un réseau $|C|$ ne peuvent avoir une partie multiple variable, car en coupant ces courbes par une droite, on aurait sur celle-ci une série linéaire de groupes de points ayant des points multiples variables.

Considérons un réseau $|C|$, privé de partie fixe, dont les courbes soient réductibles. Tout faisceau de courbes C extrait du réseau (en se donnant une relation linéaire entre les λ) est composé au moyen d'un faisceau. Soient $|C'|$, $|C''|$ deux faisceaux formés de courbes C, H', H'' les faisceaux au moyen desquels ils sont composés.

Les faisceaux $|C'|$, $|C''|$ ont une courbe commune, donc les faisceaux H', H'' ont au moins deux courbes communes et par suite ils coïncident. Donc, un réseau de courbes privé de partie fixe, dont les courbes sont réductibles, est composé au moyen d'un faisceau.

Si

$$\mu_0 \psi_0 (x_1, x_2, x_3) + \mu_1 \psi_1 = 0$$

est l'équation du faisceau H, un réseau composé au moyen de ce faisceau a pour équation

$$\lambda_0 \varphi_0 (\psi_0, \psi_1) + \lambda_1 \varphi_1 (\psi_0, \psi_1) + \lambda_2 \varphi_2 (\psi_0, \psi_1) = 0, \qquad (2)$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ étant des polynômes entiers, rationnels et homogènes à deux variables, du même degré.

Un réseau dont les courbes sont irréductibles est appelé irréductible ; il est dit réductible dans le cas opposé.

68.- Jacobienne d'un réseau.- On appelle jacobienne d'un réseau $|C|$ le lieu des points doubles des courbes de ce réseau. Si le réseau $|C|$ est représenté par l'équation (1), l'équation de la jacobienne est

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & \frac{\partial f_0}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Si n est l'ordre d'une courbe C, la jacobienne est une courbe d'ordre $3(n-1)$.

69.- Remarque.- I. Si un réseau est composé au moyen d'un faisceau, sa jacobienne est indéterminée. En effet, en supposant que le réseau soit représenté par l'équation (2), on a

$$J \equiv \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} \right| \equiv 0 \qquad (i = 0,1,2 ; k = 1,2,3).$$

70.- Remarque II.- Si un réseau possède une composante fixe $\varphi = 0$ et est donc représenté par

$$\varphi\ (\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = 0,$$

sa jacobienne a pour équation

$$\varphi^3 \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0.$$

71.- Théorème.- Les courbes d'un réseau passant par un point de la jacobienne ont même tangente en ce point, ou bien elles ont toutes un point double en ce point.

Soient $|C|$ un réseau, P un point de sa jacobienne J. Les courbes de $|C|$ passant par P forment un faisceau et une courbe au moins de ce faisceau a un point double en P. Soient C_0 cette courbe, C_1 une seconde courbe du faisceau. Si P est simple pour C_1, toutes les courbes du faisceau ont même tangente que C_1 en P. Si P est double (ou de multiplicité supérieure) pour C_1, toutes les courbes du faisceau ont un point double en P (Ce dernier cas est évidemment exceptionnel).

72.- Remarque.- Supposons que O_3 soit un point de la jacobienne du réseau $|C|$ et qu'il n'existe qu'une courbe de ce réseau ayant un point double en P. Le réseau peut être défini par l'équation (1) où

$$f_0 = x_3^{n-2}\,\alpha_2(x_1, x_2) + \dots + \alpha_n = 0,$$
$$f_1 = x_3^{n-1}\,\beta_1(x_1, x_2) + \dots + \beta_n = 0,$$
$$f_3 = x_3^{n}\gamma_0 + x_3^{n-1}\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0.$$

Dans l'équation de la jacobienne, le terme de degré le plus élevé en x_3 est

$$x_3^{3n-4} \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial\beta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\beta_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & n\gamma_0 \end{vmatrix} = n\gamma_0\, x_3^{3n-4} \frac{\partial(\alpha_2, \beta_1)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

La tangente à la jacobienne en O_3 est

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = 0 ;$$

elle est donc distincte de la tangente, $\beta_1 = 0$, aux courbes du réseau passant par O_3.

73.– Théorème.– La jacobienne d'un réseau est le lieu des points dont les droites polaires par rapport à trois courbes du réseau, n'appartenant pas à un même faisceau, sont concourantes.

En effet, la droite polaire, c'est-à-dire à $(n-1)$-ième polaire d'un point x par rapport à la courbe $f_i = 0$ est

$$X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} = 0 . \quad (i = 0,1,2).$$

L'équation $J = 0$ (nº 68) exprime que ces trois droites sont concourantes.

Remarque.– On peut définir la jacobienne de trois courbes d'ordres quelconques comme le lieu des points dont les droites polaires par rapport à ces trois courbes sont concourantes. Si n_1, n_2, n_3 sont les ordres des trois courbes, la jacobienne est d'ordre $n_1+n_2+n_3-3$. Une ou deux courbes peuvent même être des droites, à condition d'appeler droite polaire d'une droite par rapport à un point, cette droite elle-même (comme cela résulte du reste des équations).

74.– Comportement de la jacobienne en un point-base du réseau.– Supposons que O_3 soit un point-base s-uple pour le réseau (1) et posons

$$f_0 \equiv x_3^{n-s}\alpha_s(x_1,x_2) + \dots + \alpha_n = 0,$$
$$f_1 \equiv x_3^{n-s}\beta_s(x_1,x_2) + \dots + \beta_n = 0,$$
$$f_2 \equiv x_3^{n-s}\gamma_s(x_1,x_2) + \dots + \gamma_n = 0.$$

Ordonnons l'équation de la jacobienne par rapport aux puissances décroissantes de x_3. Le terme de degré le plus élevé, $3n-3s-1$, a pour coefficient

$$(n-s)\left|\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_1}\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_2}\ \alpha_s\right|$$

et est identiquement nul. Le terme en $x_3^{3n-3s-2}$ a pour coefficient

$$(n-s-1)\left|\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_1}\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_2}\ \alpha_{s+1}\right| + (n-s)\left|\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_1}\ \frac{\partial \alpha_{s+1}}{\partial x_2}\ \alpha_s\right| + (n-s)\left|\frac{\partial \alpha_{s+1}}{\partial x_1}\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_2}\ \alpha_s\right|.$$

c'est-à-dire à un facteur numérique près,

$$\left|\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_1}\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_2}\ \alpha_{s+1}\right|.$$

<u>En un point-base s-uple du réseau, la jacobienne a en général la multiplicité $3s-1$.</u>

75.- <u>Remarque sur la hessienne.</u>- La hessienne d'une courbe est la jacobienne du réseau de ses premières polaires.

Chapitre III

Courbes planes du troisième et du quatrième ordres.

§ 1.- Cubiques planes.

76.- Classification.- Une cubique plane irréductible ne peut avoir de point triple, ni plus d'un point double, ni une tangente double. En utilisant les formules de Plücker, on trouve trois espèces de cubiques planes.

a) Cubiques sans points doubles, de classe six, possédant 9 points d'inflexion.

b) Cubiques ayant un point double ordinaire, de classe quatre, possédant trois points d'inflexion.

c) Cubiques ayant un point de rebroussement ordinaire, de classe trois, possédant un point d'inflexion.

Nous commencerons par l'étude des cubiques de la première catégorie.

77.- Théorème de Salmon.- Le rapport anharmonique des quatre tangentes à une cubique plane dépourvue de point double, menées par un point de celle-ci, est constant.

Soient C_3 une cubique plane sans point double, A, A', B trois de ses points en ligne droite, D un point de C_3 ayant pour tangentiel B. Une droite a, menée par A, coupe encore C_3 en P_1, P_2. Les droites DP_1, DP_2 coupent encore C_3 en P'_1, P'_2. Les points A', P'_1, P'_2 sont en ligne droite. En effet, la cubique C_3 et la cubique $AA' + DP_1 + DP_2$ formée des droites AA', DP_1, DP_2, déterminent un faisceau ayant pour points-base A, A', B, D, P_1, P_2, P'_1, P'_2 et dont toutes les courbes touchent C_3 en D. La courbe du faisceau passant par un point de BD est formée des droites BD, a et $A'P'_1$. Par suite $A'P'_1$ passe par P'_2.

Le raisonnement ne cesse d'être vrai si la droite a est tangente à C_3, P_1 et P_2 étant confondus. Alors P'_1, P'_2 sont également confondus et la droite $A'P'_1$ est tangente à C_3 en P'_1.

Nous désignerons par a' la droite $A'P'_1$.

A une droite a correspond une droite a' et inversement. La correspondance entre les droites a, a' des faisceaux de centres A, A' étant biunivoque, est une homographie. Dans ces correspondances, les tangentes à C_3 issues de A, A' se correspondent dans un certain ordre ; par suite les rapports anharmoniques de ces deux quaternes de tangentes sont égaux.

78.- <u>Invariant d'une cubique plane.</u>- Par le point B, passent quatre tangentes à C_3, par suite le point D peut occuper quatre positions et les deux quaternes de tangentes sont projectifs de quatre manières.

Soit ω un des six rapports anharmoniques formés par les quatre tangentes menées d'un point de C_3 à cette courbe.

Formons l'expression

$$J = 4\,\frac{(1-\omega+\omega^2)^3}{(1+\omega)^2(1-2\omega)^2(2-\omega)^2}.$$

Elle ne varie pas lorsque l'on remplace ω par une quelconque des autres valeurs du rapport anharmonique des tangentes considérées. De plus elle est indépendante de la position du point de C_3 d'où l'on mène les tangentes. La quantité J est appelée invariant de la cubique C_3.

Il est bien évident que deux cubiques projectivement identiques, c'est-à-dire telles que l'on passe de l'une à l'autre par une homographie, ont même invariant.

Du fait que J ne dépend pas de la position du point de C_3 d'où l'on mène les quatre tangentes à cette courbe, ni de l'ordre dans lequel on prend ces droites pour calculer ω, résulte que J s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de l'équation de la courbe.

79.- Configuration des points d'inflexion.-

Soient A_1, A_2, deux points d'inflexion de C_3, a_1, a_2, les tangentes en ces points (tangentes d'inflexion). Désignons par A_3 le troisième point de rencontre de A_1A_2 avec C_3, par a_3 la tangente en ce point. Dans le faisceau déterminé par les cubiques C_3 et $a_1+a_2+a_3$, il existe une courbe passant par un point de A_1A_2 distinct de A_1, A_2, A_3 ; elle est formée de la droite A_1A_2 comptée trois fois et par suite le tangentiel de A_3 coïncide avec ce point. A_3 est donc un point d'inflexion, donc

Les neuf points d'inflexion d'une cubique sans point double sont trois à trois en ligne droite.

Une droite passant par trois points d'inflexion de C_3 est appelée droite inflexionnelle.

Par un point d'inflexion passent quatre droites inflexionnelles. Il y a $\binom{9}{2} = 36$ droites joignant 9 points deux à deux ; chaque droite inflexionnelle en absorbe trois, donc <u>il y a douze droites inflexionnelles</u>.

On appelle <u>triangle inflexionnel</u> un triangle dont les côtés sont des droites inflexionnelles, aucun des sommets n'étant un point d'inflexion. Tout point d'inflexion appartient à un côté d'un triangle inflexionnel et par suite il y a quatre de ces triangles. Si l'on désigne les points d'inflexion de C_3 par $1, 2, 3, \dots, 9$ et par $(i\,j\,k)$ la droite inflexionnelle contenant les points i, j, k ; les quatre triangles inflexionnels sont

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}(123),\\(456),\\(789),\end{array}\right. \quad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{l}(148),\\(259),\\(367),\end{array}\right. \quad \mathrm{III}\left\{\begin{array}{l}(157),\\(268),\\(349),\end{array}\right. \quad \mathrm{IV}\left\{\begin{array}{l}(169),\\(358),\\(247).\end{array}\right.$$

80.- <u>Propriété caractéristique des points d'inflexion</u>.- Soient A un point d'inflexion de C_3, a la tangente d'inflexion, p, q, r trois droites passant par A et coupant encore C_3 respectivement en P_1, P_2 ; Q_1, Q_2 ; R_1, R_2.

Les courbes C_3 et $p+q+r$ déterminent un faisceau dont toutes les courbes rencontrent a en trois points confondus en A. La courbe du faisceau passant par un point de a distinct de A contient donc cette droite et est complétée par une conique γ passant par P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2.

Réciproquement, par un point A de C_3, menons trois droites p, q, r et supposons que les points de rencontre ultérieurs de ces droites avec C_3 appartiennent à une conique γ. Dans le faisceau déterminé par les cubiques C_3 et $p+q+r$, se trouve une courbe contenant γ et complétée par une droite a rencontrant toutes les courbes du faisceau en trois points confondus en A. Ce point est donc un point d'inflexion de C_3, la tangente d'inflexion étant a.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point A d'une cubique soit un point d'inflexion est que les six points où trois droites passant par A coupent encore la cubique, soient situés sur une conique. (Poncelet).

La polaire a' de A ne varie pas lorsque p varie, puisqu'elle passe par les conjugués harmoniques de A par rapport à Q_1, Q_2 et à R_1, R_2. Cette droite a' est appelée polaire harmonique du point d'inflexion A. En particulier, p peut être une droite inflexionnelle, donc les conjugués harmoniques d'un point d'inflexion par rapport aux couples de points d'inflexion situés sur les quatre droites inflexionnelles passant par le point considéré, appartiennent à la polaire harmonique de ce point.

La droite a' coupe la cubique C_3 aux points de contact des tangentes à cette courbe menées par A.

81.- Faisceau sizigétique de cubiques.-

On appelle faisceau sizigétique de cubiques planes un faisceau dont les neuf points-base sont les points d'inflexion de toute cubique de ce faisceau.

Soit C_3 une cubique dépourvue de point double. La hessienne H de cette cubique est également une cubique qui coupe C_3 aux neuf points d'inflexion de cette courbe. Si C_3 appartient à un faisceau sizigétique, la cubique H passe par les neuf points-base de ce faisceau et appartient à ce faisceau. Inversement, les courbes C_3 et H déterminent un faisceau sizigétique. Soient en effet A un point d'inflexion de C_3 ; p, q, r trois droites inflexionnelles passant par A ; P_1 et P_2, Q_1 et Q_2, R_1 et R_2 les points d'inflexion situés respectivement sur ces droites, a' la polaire harmonique de A. La conique γ passant par P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 passe également par R_2, puisque la polaire a' de A par rapport à γ passe par le conjugué harmonique de A par rapport à $R_1 . R_2$. Il en résulte, par le théorème de Poncelet, que A est un point d'inflexion de toute cubique du faisceau déterminé par C_3 et H. La conique γ dégénère d'ailleurs en deux droites inflexionnelles.

Le faisceau envisagé contient, comme courbes dégénérées, les quatre triangles inflexionnels de C_3.

82.- <u>Théorème</u>.- <u>Si neuf points du plan sont tels que les droites qui les joignent deux à deux passent toujours par un troisième de ces points, ce sont les points-base d'un faisceau sizigétique</u> (Cremona).

Les droites distinctes joignant ces neuf points deux à deux sont au nombre de 12 et forment quatre triangles tels que les 9 points se distribuent sur les côtés de chacun de ces triangles. Deux de ces triangles déterminent un faisceau de cubiques ayant les neuf points comme points-base et comprenant les deux autres triangles comme cubiques dégénérées. Soient A un des points-base, p, q, r trois droites issues de A et contenant chacune deux autres points-base, respectivement P_1 et P_2, Q_1 et Q_2, R_1 et R_2. Ces points se distribuent sur deux droites, la droite P_1Q_1 contenant, pour fixer les idées R_1 et la droite P_2Q_2, R_2. La polaire de A par rapport à ces deux droites est la polaire harmonique de A par rapport à toute cubique du faisceau considéré, d'où le théorème.

83.- Théorème.- Deux cubiques dépourvues de point double, ayant même invariant J, sont projectivement identiques, de dix-huit manières différentes.

Soient C_3, C'_3 deux cubiques ayant même invariant J. Considérons un point d'inflexion A de C_3, la tangente d'inflexion a et la polaire harmonique b de A. Soient A', a', b' des éléments analogues de C'_3. La droite b coupe C_3 en trois points P, Q, R tels que les droites AP, AQ, AR sont tangentes à C_3 en P, Q, R. De même, la droite b' coupe C'_3 en trois points P', Q', R' et les tangentes à la courbe en ces points passent par A'. Désignons enfin par S, S' les points ab, a'b'.

Puisque C_3, C'_3 ont même invariant J, le rapport anharmonique de quatre tangentes mené à C_3 d'un point de cette courbe et celui de quatre tangentes menées d'un point de C'_3 à cette courbe, sont égaux. On a donc

$$PQRS \,\bar{\wedge}\, P'Q'R'S'.$$

Soient p une droite passant par A et coupant encore C_3 en M, N ; p' la droite passant par A', coupant encore C'_3 en M', N' et la droite b' au point homologue du point pb dans la projectivité $\binom{PQR}{P'Q'R'}$.

Considérons l'homographie $\Omega_1 = \begin{pmatrix} P & S & A & M \\ P' & S' & A' & M' \end{pmatrix}$. Elle fait correspondre à C_3 une cubique C''_3 passant par A', P', Q', R', M', ayant A' comme point d'inflexion et a' comme tangente d'inflexion ; de plus C''_3 touche

$A'P'$, $A'Q'$, $A'R'$ respectivement en P', Q', R'. La cubique C''_3 coïncide donc avec C'_3.

On démontre de même que l'homographie $\Omega_2\begin{pmatrix} PSAM \\ P'S'A'M' \end{pmatrix}$ transforme C_3 en C'_3.

Observons maintenant que les points d'inflexion de C_3 et de C'_3 peuvent se grouper par couples de 9 manières différentes. Par suite il existe 18 projectivités transformant C_3 en C'_3.

Le nombre de ces projectivités peut d'ailleurs être augmenté pour des courbes particulières.

84.- Cubiques harmoniques.- Si les tangentes menées d'un point d'une cubique C_3 à cette courbe forment un rapport harmonique, C_3 est appelée cubique harmonique. On a alors $J = \infty$.

Reprenons les notations précédentes. Si C_3 et C'_3 sont harmoniques, on a

$$PQRS \,\bar{\wedge}\, P'Q'R'S' \;, \quad PQRS \,\bar{\wedge}\, Q'P'R'S'.$$

Par suite, Deux cubiques harmoniques sont projectives de 36 manières.

85.- Cubiques équianharmoniques.-

Une cubique est appelée équianharmonique si le rapport anharmonique des quatre tangentes menées d'un de ses points à la courbe est équianharmonique. On a alors $1 - \omega + \omega^2 = 0$ et $J = 0$.

Si C_3 et C'_3 sont équianharmoniques, on a

$$PQRS \,\bar{\wedge}\, P'Q'R'S' \;, \quad PQRS \,\bar{\wedge}\, Q'P'R'S' \;, \quad PQRS \,\bar{\wedge}\, R'P'Q'S',$$

donc Deux cubiques équianharmoniques sont projectives de 54 manières.

86.- Coniques tritangentes à une cubique.-

Soient C_3 une cubique, C_2 une conique la touchant en trois points A_1, A_2, A_3, les tangentes en ces points étant a_1, a_2, a_3. Soient en outre B_1, B_2, B_3 les tangentiels de A_1, A_2, A_3. La cubique du faisceau déterminé par C_3 et $a_1+a_2+a_3$, passant par un point de C_2 distinct de A_1, A_2, A_3, comprend cette conique comme partie ; elle est complétée par une droite passant par B_1, B_2, B_3. Réciproquement, soient A_1, A_2, A_3 dont les tangentiels B_1, B_2, B_3 sont en ligne droite ; la cubique du faisceau déterminé par C_3 et $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, passant par un point de $B_1 B_2$, contient cette droite et est complétée par une conique C_2 touchant C_3 en A_1, A_2, A_3.

<u>Les tangentiels des points de contact d'une conique tritangente à une cubique sont en ligne droite, et réciproquement.</u>

Si l'on se donne A_1, A_2 et par suite B_1, B_2, B_3, on peut mener quatre tangentes à C_3 par B_3. Il semble donc qu'il y a quatre coniques tritangentes à C_3, A_1, A_2 étant des points de contact. Cependant, B_3 est, d'après le théorème de Mac Laurin, le tangentiel du troisième point de rencontre de C_3 avec la droite A_1, A_2. Par suite, on ne trouvera que trois coniques irréductibles répondant à la question, la quatrième étant formée de la droite $A_1 A_2$ comptée deux fois.

Soit Γ_2 une conique passant par les points A_1, A_2, A_3, contacts d'une conique C_2 avec C_3. Γ_2 coupe encore C_3 en trois points A'_1, A'_2, A'_3 ; soit C'_2 la conique touchant C_3 en A'_1, A'_2 et passant par A'_3. Les quartiques passant par les intersections de C_3 et de $2\,\Gamma_2$, sont assujetties à 11 conditions. L'une de ces quartiques est composée de C_2 et de C'_2 ; il en résulte que C'_2 touche C_3 en A'_3.

Si, par les points de contact d'une conique tritangente à une cubique plane, on fait passer une conique, celle-ci coupe encore la cubique en trois points qui sont les points de contact d'une conique tritangente.

Lorsque, C_2 étant donnée, Γ_2 varie et tend vers C_2, C'_2 varie et tend également vers C_2. On en conclut que les coniques tritangentes à une cubique plane forment trois familles ∞^2 telles que deux points de la cubique soient les points de contact d'une conique de chaque famille.

87.- Coniques biosculatrices à une cubique.-

Soit C_2 une conique osculant C_3 en A_1, A_2. Soit B le troisième point de rencontre de C_3 avec la droite $a = A_1A_2$. Dans le faisceau déterminé par C_3 et $3a$, il y a une courbe contenant C_2 ; elle est complétée par la tangente en B à C_3 et cette droite doit rencontrer C_3 en trois points confondus en B ; ce point est donc un point d'inflexion. Inversement, si a est une droite passant par un point d'inflexion B de C_3, la courbe du faisceau déterminé par les cubiques planes C_3 et $3a$, contenant la tangente à C_3 en B, est complétée par une conique osculant C_3 aux points A_1, A_2 où a coupe encore C_3.

Il existe neuf familles ∞^1 de coniques biosculatrices à une conique plane, les points de contact d'une conique étant alignés sur un point d'inflexion de la cubique.

En particulier, si a est tangente à C_3, le point de contact A étant distinct de B, on obtient une conique ayant un contact du cinquième ordre avec C_3 en A.

Il existe 27 coniques ayant un contact du cinquième ordre avec une cubique ; les tangentiels des points de contact sont des points d'inflexion.

88.- Coniques ayant un contact du quatrième ordre avec une cubique.- Soient C_2 une conique ayant un contact du quatrième ordre avec une cubique C_3 en un point A, A' le second point de rencontre de C_2 avec C_3, B le tangentiel de A. Le faisceau déterminé par les courbes C_3, $2AB + AA'$ contient une courbe comprenant comme partie C_2 et complétée par la tangente b en B. Cette droite b doit donc passer par le troisième point de rencontre de AA' avec C_3.

Inversement, soit A un point de C_3, B son tangentiel, B' le tangentiel de B. Le faisceau déterminé par C_3 et $2AB + AB'$ comprend une courbe formée de la droite BB' et d'une conique ayant un contact du quatrième ordre avec C_3 en A et passant par le troisième point d'intersection A' de AB' avec C_3.

89.- Génération de la cubique.- Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points de C_3 ; C_2, C'_2 deux coniques passant par ces quatre points et coupant encore C_3 la première en B_1, B_2, la seconde en B'_1, B'_2. Les droites B_1B_2, $B'_1B'_2$ coupent encore C_3 en un même point B. En effet, les cubiques C_3, $C_2 + B'_1B'_2$, $C'_2 + B_1B_2$ ont en commun huit points, donc elles en ont un neuvième B (et appartiennent à un même faisceau).

Inversement, menons par B une droite coupant encore C_3 en B''_1, B''_2. Les cubiques C_3 et $C_2 + B''_1 B''_2$ déterminent un faisceau qui comprend une courbe ayant $B_1 B_2$ comme partie et qui est complétée par une conique passant par $A_1, A_2, A_3, A_4, B''_1, B''_2$.

Le faisceau de coniques $|C_2|$ et le faisceau de droites de sommet B sont liés par une correspondance algébrique biunivoque, c'est-à-dire par une projectivité.

Réciproquement, le lieu des points d'intersection des coniques et des droites de deux faisceaux projectifs, est une cubique plane passant par les points-base des faisceaux. On le démontre immédiatement en utilisant le principe de correspondance.

<u>Toute cubique plane est le lieu des points d'intersection des coniques et des droites homologues de deux faisceaux projectifs</u> (Chasles).

90.- <u>Construction d'une cubique donnée par neuf points</u>.- Soient $A_1, A_2, ---, A_9$ neuf points n'appartenant pas à une infinité de cubiques. Désignons par C_2 les coniques passant par A_1, A_2, A_3, A_4. Pour construire la cubique passant par $A_1, \ldots, A_9$ au moyen du théorème de Chasles, il faut construire le point B. Le rapport anharmonique des quatre droites BA_5, BA_6, BA_7, BA_8 est égal au rapport anharmonique des quatre coniques C_2 passant par A_5, A_6, A_7, A_8. Ce rapport anharmonique est connu. Le lieu d'un point P tel que les droites $PA_5, \ldots, PA_8$ aient un rapport anharmonique donné est une conique Γ passant par $A_5, \ldots, A_8$.

Cette conique passe par B. On construira de même une conique Γ' passant par A_5, A_6, A_7, A_9 en répétant le raisonnement précédent. Le point B est la quatrième intersection des coniques Γ, Γ'. Ces coniques sont distinctes, puisque B doit être unique.

91.- <u>Construction du neuvième point commun à deux cubiques passant par huit points.</u>- Si les 9 points $A_1, A_2, \dots, A_9$ dont il est question dans le n° 90 appartenaient à deux cubiques et par suite à une infinité, la construction précédente devrait tomber en défaut ; il y aurait une infinité de points B et les coniques Γ, Γ' devraient coïncider. Le point A_9 serait donc sur la conique Γ, lieu du point P tel que les droites $PA_5, \dots, PA_8$ forment un quaterne projectif au quaterne des coniques passant par $A_1, \dots, A_4$ et, respectivement par $A_5, \dots, A_8$. Mais, pour la même raison, A_9 se trouve sur la conique Γ'' lieu d'un point Q tel que le quaterne $QA_4, \dots, QA_7$ soit projectif au quaterne des coniques passant par A_1, A_2, A_3, A_8 et, respectivement, par $A_4, \dots, A_7$. Les coniques Γ, Γ'' ont en commun A_5, A_6, A_7 et le point A_9, qui est ainsi déduit de la connaissance des points $A_1, \dots, A_8$.

92.- <u>Théorème de Grassmann.</u>- <u>Le lieu d'un point M tel que les droites qui le joignent aux sommets d'un triangle rencontrent les côtés d'un second triangle en trois points d'une droite m, est une cubique. La droite m enveloppe une courbe de troisième classe.</u>

Soient

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,\ b_x = 0,\ c_x = 0$$

les côtés du premier triangle, le second étant pris pour triangle de référence. La droite passant par le point $b_x = c_x = 0$ et par le point $M(y_1, y_2, y_3)$ a pour équation

$$c_y b_x - b_y c_x = 0.$$

Elle rencontre le côté $x_1 = 0$ au point de coordonnées

$$0,\ c_3 b_y - b_3 c_y,\ b_2 c_y - c_2 b_y.$$

On obtient par permutation tournante les coordonnées des points de rencontre de $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ avec les droites passant par M et respectivement par $c_x = a_x = 0$, $a_x = b_x = 0$. L'équation du lieu est donc

$$\begin{vmatrix} 0 & c_3 b_x - b_3 c_x & b_2 c_x - c_2 b_x \\ a_3 c_x - c_3 a_x & 0 & c_1 a_x - a_1 c_x \\ b_2 a_x - a_2 b_x & a_1 b_x - b_1 a_x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est donc une cubique passant par les sommets des deux triangles.

L'enveloppe de la droite m s'obtient par dualité.

__Remarque__.- On démontre de la même manière le théorème suivant : Soient $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ deux triangles. Le lieu d'un point P tel que si les droites PB_1, PB_2, PB_3 coupent $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ respectivement en C_1, C_2, C_3, les droites $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$ concourent en un même point Q, est une cubique passant par les sommets des deux triangles. Le lieu du point Q est une cubique passant par les mêmes points.

93.- __Cubiques ayant un point double ordinaire__.- Soit C_3 une cubique ayant un point double ordinaire. Nous pouvons supposer que ce point double est le point O_3, les tangentes à la courbe en ce point étant $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. L'équation de la courbe est alors

$$6x_1x_2x_3 + a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_3^3 = 0.$$

La courbe a trois points d'inflexion. Le raisonnement du début du n° 79 peut être repris et ces trois points sont en ligne droite. En prenant cette droite pour côté $x_3 = 0$ du triangle de référence, l'équation de la courbe se réduit à

$$6x_1x_2x_3 + a_0x_1^3 + a_3x_3^3 = 0.$$

94.- Cubiques ayant un point de rebroussement. - C_3 étant une cubique ayant un point de rebroussement, prenons ce point pour sommet $O_3\,(0,0,1)$ du triangle de référence, la tangente en O_3 pour droite $x_1 = 0$, le point d'inflexion de la courbe pour point $O_1\,(1,0,0)$ et la tangente en O_1 pour droite $x_3 = 0$. L'équation de la courbe est, en choisissant convenablement le point unitaire,

$$x_1^2x_3 - x_2^3 = 0.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : u : u^3,$$

ce qui donne une représentation paramétrique de la courbe.

Les paramètres u_1, u_2, u_3 des points de rencontre de la courbe avec la droite $a_x = 0$ sont racines de l'équation

$$a_1 + a_2u + a_3u^3 = 0$$

et on a donc

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

et réciproquement.

Par un point de la courbe, on ne peut mener qu'une tangente à celle-ci, le point de contact étant distinct du point choisi. Si u_0 est le paramètre d'un point A_0,

u_1 celui de son tangentiel, on a

$$2u_0 + u_1 = 0.$$

Le tangentiel A_2 de A_1 est donné par $u_2 = -2u_1 = 4u_0$. Et ainsi de suite. Le tangentiel A_n de A_{n-1} est

$$u_n = (-1)^n 2^n u_0.$$

De même, le point A_{-n}, dont le tangentiel est A_{-n+1}, est donné par

$$u_{-n} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0.$$

Lorsque n croît au delà de toute limite, le point A_n tend vers le point de rebroussement O_3 ($u = \infty$) et le point A_{-n} vers le point d'inflexion O_1 ($u = 0$).

§ 2.- La quartique plane de classe douze.

95.- Préliminaires.- D'après les formules de Plücker, une quartique plane dépourvue de points doubles est de classe douze; elle possède 24 points d'inflexion et 28 tangentes doubles.

96.- Génération de la quartique.- Soient C_4 une quartique plane de classe 12, C_2 et C'_2 deux coniques passant par quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de C_4 et coupant encore cette courbe la première en B_1, B_2, B_3, B_4, la seconde en B'_1, B'_2, B'_3, B'_4. Soit en outre Γ_2 une conique passant par les quatre points B et coupant encore C_4 en A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Les quartiques C_4, $C'_2 + \Gamma_2$ déterminent un faisceau dont une courbe contient C_2 comme partie; elle est complétée par une conique Γ'_2 passant par les points A' et B'. D'après cette construction, à toute conique C'_2 passant par les points A, correspond une conique Γ'_2 passant par les points A' et inversement. Entre les faisceaux $|C'_2|$, $|\Gamma'_2|$, nous avons donc une correspondance algébrique biunivoque, c'est-à-dire une projectivité.

Inversement, le lieu des points d'intersection des coniques homologues de deux faisceaux projectifs, sans points-base communs, est une quartique passant simplement par les points-base des faisceaux.

<u>Toute quartique plane de la classe douze est le lieu des points communs aux courbes homologues de deux faisceaux projectifs de coniques.</u>

<u>Remarque</u>.- Le théorème précédent peut être démontré dans le cas de quartiques ayant des points doubles. La quartique lieu des intersections des coniques de deux faisceaux projectifs ayant un point-base en commun, a en général la multiplicité deux en ce point.

97.- <u>Enveloppe d'un système ∞^1 d'indice deux de coniques</u>.-

Tout système algébrique ∞^1 d'indice deux de coniques peut être représenté par l'équation

$$\lambda^2 \varphi_0(x_1, x_2, x_3) + 2\lambda \varphi_1 + \varphi_2 = 0. \qquad (1)$$

Supposons ce système dépourvu de points-base. Il a pour enveloppe la quartique plane

$$\varphi_1^2 - \varphi_0 \varphi_2 = 0, \qquad (2)$$

et toute conique du système (1) touche la courbe (2) en quatre points.

Le système (1) contient six coniques dégénérées en deux droites, qui sont des bitangentes de la quartique (2).

<u>Remarque</u>.- Un point-base du système (1) serait un point multiple (en général double) de la courbe (2).

98.- **Théorème**.- *Toute conique passant par les points de contact de deux bitangentes à une quartique de classe 12, coupe encore celle-ci en quatre points qui sont les points de contact d'une conique tangente à la quartique.*

Soient C_4 une quartique, a_1, a_2 deux des 28 bitangentes, A_{11}, A_{12} et A_{21}, A_{22} leurs points de contact. Par ces points, menons une conique C_2 coupant encore C_4 en B_1, B_2, B_3, B_4 et par ces points B, menons une conique Γ_2 coupant ultérieurement C_4 en A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Le faisceau déterminé par les courbes C_4 et $\Gamma_2 + a_1 + a_2$ contient une courbe comprenant C_2 comme partie et complétée par une conique C'_2 passant par les points A et A'. Les coniques C'_2 passant par les points A et Γ_2, passant par les points B, engendrent deux faisceaux projectifs. Dans cette projectivité, à la conique C_2, appartenant au faisceau $|\Gamma_2|$, correspond la conique $a_1 + a_2$ du faisceau $|C'_2|$ et à la conique C_2 du faisceau $|C'_2|$ correspond dans $|\Gamma_2|$ une conique tangente à C_4 en chacun des points B, ce qui démontre le théorème.

Remarque.- Chaque couple de bitangentes de C_4 donne naissance à un système ∞^1 de coniques touchant C_4 en quatre points, mais, comme on le verra, les systèmes ainsi obtenus ne sont pas tous distincts.

99.- **Théorème**.- *Les coniques touchant C_4 aux quatre points de rencontre de cette courbe et des coniques passant par les points de contact de deux bitangentes, appartiennent à un réseau.*

Conservons les notations du n° 98 et soient C_2, C'_2 deux coniques passant par les points A. Parmi les courbes du faisceau déterminé par C_4, $C_2 + C'_2$, se trouve une quartique comprenant les droites a_1, a_2 et complétée par une conique γ rencontrant C_2, C'_2 en des points de C_4. Lorsque C'_2 (ou C_2) varie, la conique γ décrit un faisceau. Lorsque C'_2 (ou C_2) tend vers la courbe C_2 (ou C'_2), γ a pour limite la conique tangente à C_4 aux quatre points de rencontre de C_2 (ou C'_2) avec C_4 en dehors des points A.

On peut choisir le couple de coniques C_2, C'_2 de ∞^2 manières et par suite, on obtient ∞^2 coniques γ formant un système contenant ∞^2 faisceaux ; ce système est donc un réseau.

100.- <u>Théorème</u>.- <u>Il existe 63 systèmes ∞^1, d'indice deux, de coniques tangentes en quatre points à une courbe plane du quatrième ordre et de la douzième classe ; cette courbe est l'enveloppe de chacun de ces systèmes. Dans un quelconque de ces systèmes se trouvent six coniques dégénérées en des couples de bitangentes de la quartique</u>.

Soit

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0 \qquad (1)$$

l'équation du réseau formé par les coniques γ. Une conique γ coupe C_4 en 8 points se partageant en deux groupes de 4 points, points-base de faisceaux contenus dans le réseau. Posons

$$X_1 : X_2 : X_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 ,$$

et interprétons X_1, X_2, X_3 comme coordonnées des points d'un plan ϖ. Aux coniques (1) correspondent les droites

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 \qquad (2)$$

du plan ϖ. A la courbe C_4 correspond une courbe rencontrée en deux points par les droites (1), c'est-à-dire une conique K. Les coniques du réseau (1) tangentes en quatre points à C_4 ont pour homologues dans ϖ les tangentes à K. Soit

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$$

l'équation tangentielle de K. On peut exprimer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en fonctions rationnelles et entières du second degré d'un paramètre λ, par suite, en introduisant ces expressions dans (1) et en ordonnant par rapport à λ, les coniques (1) tangentes en quatre points à C_4 ont pour équation

$$\lambda^2 \varphi_0 + 2\lambda \varphi_1 + \varphi_2 = 0. \qquad (3)$$

C_4 est l'enveloppe de ce système et a pour équation

$$\varphi_1^2 - \varphi_0 \varphi_2 = 0.$$

Comme on l'a vu (n° 97), il y a six coniques du système (3) formées de couples de bitangentes de C_4.

Chaque couple de bitangentes de C_4 donne naissance à un système de coniques touchant C_4 en 4 points, mais chacun de ceux-ci provient de six de ces couples. Les systèmes de coniques envisagés sont donc au nombre de $\frac{1}{6}\binom{28}{2} = 63$.

101.- Configuration des bitangentes.- Les six couples de bitangentes appartenant à un système ∞^1 de coniques touchant C_4 en quatre points, sont dites former un groupe de Steiner.

Soient a et a', b et b' deux couples de bitangentes d'un groupe de Steiner ; les points de contact appartiennent à une même conique. Inversement, si les points de contact de 4 bitangentes appartiennent à une conique, ces bitangentes forment deux couples d'un groupe de Steiner. Ce partage des 4 bitangentes en deux couples peut se faire de trois manières : a, a' et b, b' ; a, b et a', b' ; a, b' et a', b.

Par les points de contact de a, a' passent 5 coniques passant par les points de contact de 2 autres bitangentes. Chacune de ces coniques provient de six couples de bitangentes. Il y a $\binom{28}{2}$ couples de bitangentes, donc les coniques envisagées sont au nombre de $\frac{5}{6}\binom{28}{2} = 315$.

<u>Les 56 points de contact des 28 bitangentes d'une quartique plane appartiennent 8 à 8 à 315 coniques, les quatre points de contact de chaque couple de bitangentes appartenant à cinq de ces coniques.</u>

102.- <u>Equation réduite d'une quartique.</u>- Soient

$$a_x = 0,\ a'_x = 0,\ b_x = 0,\ b'_x = 0,\ \varphi = 0$$

les équations de 4 bitangentes d'un groupe de Steiner et l'équation de la conique passant par leurs points de contact. La courbe C_4 est l'enveloppe du système de coniques

$$a_x a'_x + 2\lambda\varphi + \lambda^2 b_x b'_x = 0.$$

Son équation est donc

$$a_x a'_x b_x b'_x - \varphi^2 = 0.$$

Chapitre IV

Surfaces et courbes gauches algébriques.

§1.- Généralités sur les surfaces algébriques.

103.- Définitions.- On appelle surface algébrique l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad (1)$$

dont le premier membre est un polynôme entier, rationnel et homogène. Le degré n de F est appelé ordre de la surface ; l'ordre n'est pas altéré par une homographie et en particulier par un changement de la figure de référence.

La surface (1) est appelée irréductible si le polynôme F est irréductible ; elle est dite réductible dans le cas opposé.

Le polynôme F contient $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ termes, par suite, il faut $N = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$ conditions pour déterminer une surface d'ordre n.

Par N points de l'espace passe une surface d'ordre n et en général une seule.

104.- Intersection d'une surface et d'une droite.- Posons

$$D \equiv z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial}{\partial y_4} .$$

Les points $\xi_1 y + \xi_2 z$ d'une droite yz appartenant à la surface F d'équation (1) sont donnés par

$$\xi_1^n F(y) + \xi_1^{n-1}\xi_2 DF(y) + \dots + \frac{1}{s!}\xi_1^{n-s}\xi_2^s D^s F(y) + \dots + \frac{1}{n!}\xi_2^n D^n F(y) = 0. \quad (2)$$

On en conclut que :

Une surface d'ordre n est rencontrée par une droite en n points.

Si une droite rencontre une surface d'ordre n en $n+1$ points, elle appartient tout entière à cette surface.

105.- **Points simples et points multiples d'une surface.** - Supposons que le point y appartienne à la surface F. Nous dirons que le point y est multiple d'ordre s pour cette surface si toute droite passant par y ne rencontre plus la surface qu'en $n-s$ points au plus et en général en $n-s$ points en dehors de y. Pour que y soit multiple d'ordre s ou s-uple pour F, l'équation (2) doit avoir la racine $\xi_2 = 0$ multiple d'ordre s au moins quel que soit le point z ; de plus, il doit exister des points z pour lesquels cette multiplicité doit être s. On doit donc avoir

$$F(y) \equiv 0, \quad DF(y) \equiv 0, \dots, D^{s-1}F(y) \equiv 0,$$

mais, $D^s F(y)$ n'est pas toujours identiquement nulle. On en conclut que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit s-uple pour une surface algébrique F est que toutes les dérivées partielles d'ordre $s-1$ de $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soient nulles en ce point, une au moins des dérivées partielles d'ordre s n'étant pas nulle.

Cette condition se traduit par $\binom{s+2}{3}$ relations linéaires entre les coefficients de l'équation de F.

Un point 1-uple est dit simple, un point 2-uple, double, un point 3-uple, triple.

106.- <u>Tangentes et plan tangent en un point simple.</u>- Soit y un point simple de F. On a $F(y)=0$ mais l'une au moins des dérivées partielles du premier ordre de $F(y)$ n'est pas nulle.

On appelle tangente à F en y une droite ne rencontrant plus F qu'en $n-2$ points au plus en dehors de y. Si la droite yz est tangente à F en y, on a donc $DF(y)=0$. Il en résulte que le lieu de ces tangentes est un plan

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial F}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0. \qquad (3)$$

Ce plan est appelé plan tangent à la surface F au point simple y.

107.- <u>Tangentes principales en un point simple.</u>- Une tangente à F en un point simple y est dite principale lorsqu'elle ne rencontre plus la surface qu'en $n-3$ points en dehors de y. Si une tangente yz est principale, on doit donc avoir $D^2F(y)=0$, c'est-à-dire que le point z et par suite la droite yz tout entière doit appartenir à la quadrique

$$x_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + x_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2} + x_4^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_4^2} + 2x_1x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} + \dots + 2x_3x_4 \frac{\partial^2 F}{\partial y_3 \partial y_4} = 0 \qquad (4)$$

Cette quadrique contient le point y et son plan tangent en ce point est précisément le plan (3), tangent à la surface F. En général, le plan (3) coupe la quadrique (4) suivant deux droites passant par y, donc <u>Par un point simple d'une surface algébrique, passent en général deux tangentes principales.</u>

Ces deux tangentes sont confondues lorsque la quadrique (4) est un cône et seulement dans ce cas. Ce fait se présente donc si le point y appartient à la surface, d'ordre $4(n-2)$,

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} \right| = 0 , \qquad (5)$$

appelée hessienne de la surface F. Le point y est alors appelé point parabolique. On voit qu'il existe en général une infinité de points paraboliques. Le lieu de ces points est appelé courbe parabolique de la surface F. Cette courbe est en général d'ordre $4n(n-2)$.

Toutes les tangentes à F en y ne peuvent être ~~paraboliques~~ principales que si le plan (3) fait partie de la quadrique (4). Il faut donc que la quadrique (4) dégénère, c'est-à-dire que le déterminant de l'équation (5) soit de caractéristique deux. Ce fait ne se présente qu'exceptionnellement.

Remarque. - Les tangentes principales sont les tangentes asymptotiques de la géométrie infinitésimale.

108. - Théorème. - Une surface d'ordre n ayant un point n-uple est un cône ayant ce point pour sommet.

En effet, si y est le point n-uple et z un autre point de la surface, la droite yz coupe cette surface, d'ordre n, en n+1 points et appartient donc tout entière à cette surface. Celle-ci est donc le lieu d'une droite passant par y.

109. - Théorème. - Une surface d'ordre n possédant deux points n-uples, se compose de n plans passant par ces deux points.

Soient en effet y, z les deux points n-uples, C la section de la surface par un plan passant par z mais non par y. La surface est le cône projetant C du point y. Mais C, ayant un point n-uple z, est formée de n droites passant par z, d'où le théorème.

110.- <u>Cône tangent en un point multiple</u>.- Si y est un point s-uple de F, la droite yz est dite tangente à F en y si elle ne rencontre plus F qu'en $n-s-1$ points au plus en dehors de y. Le point z doit donc satisfaire à l'équation $D^s F(y) = 0$. Le lieu de ce point est donc le cône

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial y_4}\right)^s F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

appelé cône tangent à la surface au point s-uple y.

111.- <u>Remarque</u>.- Si une surface F possède un point s-uple en O_4 $(0,0,0,1)$ son équation peut s'écrire

$$x_4^{n-s} \varphi_s(x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-s-1} \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_n = 0,$$

où les φ sont des polynômes entiers, rationnels et homogènes en x_1, x_2, x_3, dont le degré est indiqué par l'indice. Le cône tangent à la surface en O_4 a pour équation

$$\varphi_s(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

112.- <u>Points doubles d'une surface algébrique</u>.- Considérons une surface F, d'ordre n, ayant un point double en O_4, d'équation

$$x_4^{n-2} \varphi_2(x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-3} \varphi_3 + \dots + \varphi_n = 0.$$

Trois cas peuvent se présenter.

1°) Le cône tangent $\varphi_2 = 0$ est irréductible. Le point est dit <u>point double conique</u>. Tout plan passant par O_4 coupe la surface suivant une courbe ayant un point double en O_4 ; ce point est double ordinaire pour la section si le plan de celle-ci n'est pas tangent au cône $\varphi_2 = 0$; c'est un point de rebroussement lorsque le plan est tangent au cône. Ce point de rebroussement est ordinaire lorsque $\varphi_3 = 0$ ne contient pas $\varphi_2 = 0$ comme partie.

2°) φ_2 se décompose en deux facteurs linéaires. Le point est dit point double biplanaire. Par un choix convenable de la figure de référence, on peut poser $\varphi_2 = x_2 x_3$. Un plan passant par O_4 mais non par la droite $x_2 = x_3 = 0$, coupe la surface suivant une courbe ayant un point double ordinaire en O_4. Les plans passant par la droite $x_2 = x_3 = 0$ coupent F suivant des courbes ayant en O_4 un point de rebroussement, ordinaire si $\varphi_3(1,0,0)$ n'est pas nulle, de seconde espèce si $\varphi_3(1,0,0) = 0$.

3°) φ_2 se décompose en un carré parfait. Le point est dit point double uniplanaire. On peut poser $\varphi_2 = x_3^2$. Si $\varphi_3(x_1, x_2, 0)$ n'est pas identiquement nulle, la section de la surface par le plan $x_3 = 0$ possède un point triple en O_4. Les plans passant par O_4 coupent F suivant des courbes ayant un point de rebroussement ordinaire en O_4, sauf les plans qui passent par les tangentes à la section de F par $x_3 = 0$, qui coupent F suivant des courbes ayant un tacnode en O_4.

Si $\varphi_3(x_1, x_2, 0)$ est identiquement nulle, toutes les sections de F par des plans passant par O_4 ont un point de rebroussement de seconde espèce en O_4.

113.- Monoïdes. - On appelle monoïde une surface d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple. Ce point multiple est le sommet du monoïde.

Un monoïde de sommet O_4 a une équation de la forme

$$x_4 \varphi_{n-1}(x_1, x_2, x_3) + \varphi_n(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Les $n(n-1)$ droites communes aux cônes $\varphi_{n-1} = 0$, $\varphi_n = 0$, appartiennent au monoïde.

114.- Courbes multiples d'une surface.-

Une courbe C est dite s-uple pour une surface F lorsque tous ses points sont s-uples pour la surface (sauf peut être un nombre fini de points de la courbe qui peuvent avoir une multiplicité supérieure). La courbe C appartient à toutes les surfaces.

$$\frac{\partial^{s-1} F(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial^{s_1}_{x_1} \partial^{s_2}_{x_2} \partial^{s_3}_{x_3} \partial^{s_4}_{x_4}} = 0, \quad (s_1+s_2+s_3+s_4=s).$$

mais elle n'appartient pas à toutes les surfaces obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles d'ordre s de F.

On démontrera plus loin, que le cône tangent à F en un point de C se compose de s plans tangents à C.

115.- Intersection d'une surface et de son plan tangent en un point simple.-

Considérons une surface F ayant un point simple en O_4, d'équation

$$x_4^{n-1}(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+x_4^{n-2}\varphi_2+\dots+\varphi_n=0. \qquad (1)$$

Le plan tangent à la surface en O_4 est le plan

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0.$$

On peut supposer que c'est le plan $x_3=0$, ce qui revient à poser $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$. Les tangentes principales de la surface en O_4 sont découpées, sur $x_3=0$, par la quadrique

$$(n-1)x_3x_4+\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=0. \qquad (2)$$

D'autre part, la section de la surface par le plan tangent $x_3=0$ est

$$x_3=0, \quad x_4^{n-2}\varphi_2(x_1,x_2,0)+\dots+\varphi_n(x_1,x_2,0)=0. \qquad (3)$$

Cette courbe a donc un point double en O_4, les tangentes en ce point étant les tangentes principales, dans l'hypothèse où $\varphi_2(x_1, x_2, 0)$ n'est pas identiquement nulle. Dans la même hypothèse, le point O_4 est parabolique pour la surface si

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^i \, \partial x_2^k}\right| = 0, \qquad (i+k=2).$$

la quadrique (2) étant alors un cône. La courbe (3) a alors un point de rebroussement en O_4.

Pour que toutes les tangentes à la surface F en O_4 soient principales, il faut que la quadrique (2) se décompose en deux plans dont l'un soit $x_3 = 0$. On doit donc avoir $\varphi_2 \equiv x_3 \psi_1(x_1, x_2, x_3)$. La courbe (3) a donc pour équation

$$x_3 = 0, \; x_4^{n-3} \varphi_3(x_1, x_2, 0) + \dots + \varphi_n(x_1, x_2, 0) = 0,$$

elle a par suite un point triple (au moins) à l'origine).

<u>Le plan tangent en un point simple à une surface algébrique coupe celle-ci suivant une courbe ayant un point double au point de contact, les tangentes à la courbe en ce point étant les tangentes principales. Il y a exception si toutes les tangentes au point considéré sont principales, la courbe a alors un point au moins triple.</u>

§ 2.- Courbes gauches algébriques.

116.- <u>Définition</u>.- Soient $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane et $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ quatre polynômes entiers, rationnels et homogènes, de même degré, tels que la courbe

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 = 0$$

rencontre $f = 0$ en des points variables et que, de plus, le premier membre de l'équation précédente ne puisse être nul pour des valeurs non toutes nulles des λ. L'ensemble des points de l'espace

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x_1}{\varphi_1(u_1,u_2,u_3)} = \dfrac{x_2}{\varphi_2} = \dfrac{x_3}{\varphi_3} = \dfrac{x_4}{\varphi_4}\,, \\ f(u_1,u_2,u_3) = 0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

est appelé courbe gauche algébrique.

A un point u_1, u_2, u_3 de $f=0$ correspond un point de la courbe (1), mais un point de cette courbe peut provenir de plusieurs points de la courbe $f=0$.

La courbe (1) est dite irréductible lorsque la courbe $f=0$ est irréductible ; elle est réductible dans le cas contraire.

117.- __Remarque__.- On pourrait définir une courbe gauche algébrique comme le lieu des points satisfaisant aux équations

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=0,\ f_2=0,\ f_3=0\,, \qquad (2)$$

dont les coefficients dépendent algébriquement d'un paramètre t. On démontre que cette définition se ramène à la précédente, mais cette démonstration soulève de délicates questions d'élimination. Il peut en effet se faire que pour certaines valeurs de t, en nombre fini, les équations (2) peuvent se réduire à une seule.

L'exemple suivant montrera que cette particularité se présente même dans des cas simples.

Considérons les quadriques (axes rectangulaires)

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda(z-xy)=1\,. \qquad (3)$$

Proposons-nous de rechercher le lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur cette quadrique, lorsque λ varie. Il faut éliminer λ entre (3) et les équations

$$\frac{x}{x-\lambda y} = \frac{y}{y-\lambda x} = \frac{z}{z-\lambda}\,.$$

Pour $\lambda = 0$, on trouve une sphère faisant partie du lieu.

118.– Cônes projetant une courbe gauche.– Considérons la courbe gauche C, représentée par les équations (1), et un point y. Le lieu des droites passant par y et s'appuyant sur C est un cône : le cône projetant C du point y. Si x est un point du lieu, tout point de la droite xy appartiendra au lieu et l'un d'eux, $y+\lambda x$, appartiendra à C. L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant u_1, u_2, u_3, λ entre les équations

$$\frac{y_1+\lambda x_1}{\varphi_1(u_1,u_2,u_3)} = \frac{y_2 \lambda x_2}{\varphi_2} = \frac{y_3 \lambda x_3}{\varphi_3} = \frac{y_4+\lambda x_4}{\varphi_4}$$

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Il en résulte que le cône projetant C d'un point y est algébrique.

Le raisonnement précédent reste valable si le point y appartient à C.

On appelle ordre de la courbe gauche C l'ordre maximum des cônes projetant la courbe. Si n est cet ordre, un plan passant par le sommet du cône coupe celui-ci suivant n droites qui contiennent chacune en un point la courbe C. Donc, une courbe d'ordre n est rencontrée en n points par un plan.

L'ordre d'un cône projetant C ne pourra être abaissé que si le sommet appartient à la courbe ou si les droites du cône s'appuient chacune en plus d'un point sur la courbe. Ces conditions ne se présentent qu'exceptionnellement.

119.– Représentation monoïdale (Cayley). Soit C une courbe d'ordre n ne passant pas par le point $O_4 (0,0,0,1)$ et telle que les droites passant par O_4 et par un point de C ne rencontrent plus en général cette courbe en un second point. Dans ces conditions, le cône projetant C de O_4 est d'ordre n, soit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1)$$

son équation.

Soit M' un point de la section Γ du cône (1) par le plan $x_4 = 0$. La droite O_4 M' coupe C en un seul point M dont la coordonnée x_4 est donc une fonction rationnelle des coordonnées de M'. On a donc

$$x_4 = \frac{\varphi_m(x_1, x_2, x_3)}{\varphi_{m-1}(x_1, x_2, x_3)}$$

et la courbe C appartient au monoïde

$$x_4 \varphi_{m-1} - \varphi_m = 0. \qquad (2)$$

Les cônes $f = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$ ont en commun $n(m-1)$ droites. Soit P' un point de Γ situé sur une de ces droites. Lorsque M' tend vers P' sur la courbe Γ, x_4 ne peut croître au delà de toute limite, car C ne passe pas par O_4; il faut donc que le cône $\varphi_m = 0$ contienne le point P'. Par suite, l'intersection du cône (1) et du monoïde (2) se compose de la courbe C et des $n(m-1)$ droites

$$f = 0, \quad \varphi_{m-1} = 0,$$

(qui appartiennent aussi à $\varphi_m = 0$).

120.- Remarque.- La courbe C peut être représentée par les équations

$$\frac{x_1}{u_1 \varphi_{m-1}(u_1, u_2, u_3)} = \frac{x_2}{u_2 \varphi_{m-1}} = \frac{x_3}{u_3 \varphi_{m-1}} = \frac{x_4}{\varphi_m},$$

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

On en conclut que si une courbe gauche algébrique est irréductible, ses cônes projetants sont irréductibles.

121.- Courbes intersections complètes de deux surfaces.- L'intersection de deux surfaces F_m, F_n est une courbe gauche algébrique d'ordre mn. En effet, les cônes projetant une telle courbe sont algébriques et on peut, par des opérations algébriques, obtenir une représentation monoïdale de cette courbe.

122.- Intersection d'une courbe et d'une surface algébriques.- Reprenons la courbe C, d'ordre n, représentée par les équations (1), (2) (n° 119) et soit F une surface d'ordre p ne contenant pas cette courbe ou une partie de cette courbe si elle est réductible. Supposons que F ne passe pas par O_4.

Projetons de O_4 sur le plan $x_4 = 0$ la courbe intersection de la surface F et du monoïde (2). Nous obtenons une courbe Γ' d'ordre mp, qui coupe Γ en mnp points. Ces points sont les projections des points communs à C et à F, et des points de F situés sur les $n(m-1)$ droites communes au cône (1) et au monoïde (2). Le nombre des points communs à C et à F est donc égal à

$$nmp - n(m-1)p = np.$$

Une courbe algébrique gauche d'ordre n et une surface algébrique d'ordre p ne contenant pas tout ou partie de la courbe, ont np points communs.

122.- Corollaire.- Trois surfaces algébriques d'ordres n_1, n_2, n_3, n'ayant aucune courbe en commun, se rencontrent en $n_1 n_2 n_3$ points.

123.- Remarque sur la représentation monoïdale.- Une courbe gauche C admet une infinité de représentations monoïdales par des cônes et des monoïdes dont le sommet est déterminé. La courbe C, d'équations (1), (2), (n° 119) est aussi représentée par les équations

$$f = 0 \quad , \quad x_4\left[\alpha\varphi_{m-1} + \beta f\right] - \alpha\varphi_m - \gamma f = 0,$$

où α, β, γ sont des polynômes quelconques de degrés respectifs p, $p+m-n-\cancel{1}$, $p+m-1$, p étant un entier positif convenablement choisi.

D'une manière générale, pour que les équations

$$f = 0 \quad , x_4 \varphi_{m-1} - \varphi_m = 0 \,,$$
$$f = 0 \,, \quad x_4 \psi_{r-1} - \psi_r = 0$$

représentent la même courbe, on doit avoir, sur la courbe

$$\frac{\varphi_{m-1}}{\psi_{r-1}} = \frac{\varphi_m}{\psi_r} \,,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{m-1} \psi_r - \psi_{r-1} \varphi_m = \theta f \,,$$

θ étant un polynôme.

124.- __Points simples et multiples d'une courbe gauche__.- Considérons une courbe gauche d'ordre n. Un point P de cette courbe sera dit multiple d'ordre s ou s-uple pour la courbe C si les plans passant par P ne coupent plus en général la courbe qu'en $n-s$ points (et en moins de $n-s$ points pour certaines positions éventuelles du plan). Le cône projetant une courbe d'un point s-uple est en général d'ordre $n-s$, cet ordre n'est abaissé que si les droites passant par le point s-uple et par un point de la courbe, coupent encore toutes celles-ci en un ou plusieurs points.

Pour $s = 1, 2, 3$, les points s-uples sont appelés simples, doubles, triples.

L'intersection de deux surfaces ayant respectivement les multiplicités r, s en un point P, est une courbe gauche ayant une multiplicité au moins égale à rs en P.

Supposons en effet que P coïncide avec O_4 et soient

$$x_4^{m-r}\varphi_r(x_1,x_2,x_3)+x_4^{m-r-1}\varphi_{r+1}+\dots+\varphi_m=0,$$
$$x_4^{n-s}\psi_s(x_1,x_2,x_3)+x_4^{n-s-1}\psi_{s+1}+\dots+\psi_n=0$$

les équations des deux surfaces. Le cône projetant la courbe C, commune aux deux surfaces, du point O_4, aura pour équation le résultant de l'élimination de x_4 entre les équations précédentes. Ce résultant est d'ordre au plus égal à $mn-rs$. Une droite du cône ne rencontrant en général la courbe qu'en un point en dehors de O_4 et cette courbe étant d'ordre mn, on en déduit la propriété énoncée.

Observons encore que si deux surfaces ont, en un point simple pour chacune d'elles, même plan tangent, ce point est au moins double pour la courbe intersection des deux surfaces. Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en supposant $r=s=1$, $\varphi_1\equiv\psi_1$. Cette expression se met en facteur dans le résultant, qui est donc au plus, débarrassé de ce facteur, de degré $mn-2$.

125.- <u>Tangente à une courbe en un point simple.</u>- Soit C une courbe irréductible d'ordre n d'équations

$$\left.\begin{aligned} x_1:x_2:x_3:x_4 &= \varphi_1(u_1,u_2,u_3):\varphi_2:\varphi_3:\varphi_4,\\ f(u_1,u_2,u_3)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Supposons qu'à un point de C correspondent ν valeurs u_1, u_2, u_3. Alors les courbes

$$\lambda_1\varphi_1(u_1,u_2,u_3)+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3+\lambda_4\varphi_4=0\qquad(2)$$

coupent la courbe $f=0$ suivant $n\nu$ points variables.

Soient y un point de C et $v_1, v_2, \dots v_\nu$ les points de $f=0$ qui lui correspondent. Si les courbes (2) passant par v_1 et par suite par $v_2, v_3, \dots, v_\nu$ ne rencontrent plus la courbe $f=0$ qu'en moins de $(n-1)\nu$ points variables, le point y est au moins double pour C. Supposons que y soit simple pour C. Les courbes (2) passant par $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ coupent encore $f=0$ en $(n-1)\nu$ points variables. Considérons les courbes (2) tangentes à $f=0$ au point v_1 et par suite aux points $v_2, v_3, \dots, v_\nu$. En représentant pour abréger par φ le premier membre de l'équation (2), ces conditions s'expriment par les équations

$$\varphi = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} : \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = \frac{\partial f}{\partial u_1} : \frac{\partial f}{\partial u_2} : \frac{\partial f}{\partial u_3}, \text{ pour } u = v_1. \quad (3)$$

c'est-à-dire par trois équations linéaires en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Les plans

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

dont les coefficients λ satisfont aux équations (3), passent par y et ne rencontrent plus C qu'en $n-2$ points en dehors de y. On les appelle plans tangents à C au point y. Ces plans forment un faisceau dont l'axe est une droite t, passant par y, appelée tangente à C en y.

En un point simple y de C, il existe donc une tangente unique, droite telle que les plans qui la contiennent ne rencontrent plus C qu'en $n-2$ points (au plus) en dehors de y.

Si F est une surface contenant C, la droite t est tangente à F au point y (simple pour la surface en général). La tangente t peut être obtenue comme intersection des plans tangents en y à deux surfaces contenant la courbe et passant simplement par y.

126.- Points doubles apparents. - Soient C une courbe d'ordre n, P un point extérieur, Γ la projection de C à partir de P sur un plan ϖ. Nous nous plaçons dans le cas général où Γ est d'ordre n.

Si M est un point simple de C tel que la droite PM ne rencontre plus C en dehors de M, soit M' la projection de M sur ϖ à partir de P. Désignons par t la tangente à C en M. Le plan tP coupe ϖ suivant une droite t', tangente à Γ en M'. Ce point est donc simple pour Γ.

Supposons qu'il existe une droite passant par P et rencontrant C en deux points simples M_1, M_2, et Γ en M'. Soient t_1, t_2 les tangentes à C en M_1, M_2 ; t'_1, t'_2 les projections de ces droites à partir de P sur ϖ. Le point M' est double pour Γ et les tangentes à cette courbe en M' sont t'_1, t'_2.

De tels points sont appelés points doubles apparents de la courbe C.

Les bisécantes d'une courbe gauche sont en nombre ∞^2 et ne peuvent appartenir à un plan. Par tout point de l'espace passe donc au moins une de ces bisécantes et par suite toute courbe gauche possède des points doubles apparents.

<u>Remarque</u>.- Si l'on reprend la représentation monoïdale d'une courbe gauche (n° 119), si M' est un point double apparent de C, appartenant à Γ, la droite O_4 M' coupe C en deux points et l'équation (2) doit avoir deux solutions x_4 ; on a donc, le long de O_4 M', $\varphi_{m-1} = 0$, $\varphi_m = 0$ et $f = 0$. Les bisécantes de C passant par O_4 se trouvent donc parmi les $n\,(m-1)$ droites communes au cône (1) et au monoïde (2), mais l'inverse n'est pas vrai.

127.- **Théorème.-** Etant donné une courbe gauche irréductible, il est toujours possible de trouver au plus quatre surfaces n'ayant que cette courbe en commun (Valhen).

Soient C la courbe donnée, Γ_1, Γ_2 les cônes projetant cette courbe de deux points A_1, A_2. Désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les courbes irréductibles qui, avec C, forment l'intersection complète de Γ_1, Γ_2. Soient $P_1, P_2, \ldots$ des points choisis respectivement sur $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ mais n'appartenant pas à C. On peut choisir un point A_3 tel que les droites A_3P_1, $A_3P_2, \ldots$ ne rencontrent pas C. Le cône Γ_3, projetant C de A_3, a en commun avec Γ_1, Γ_2, outre la courbe C, un certain nombre fini de points appartenant aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Soit A_4 un point tel que les droites qui les joignent à ces derniers points ne rencontrent pas C. Le cône Γ_4 projetant C de A_4 n'a que la courbe C en commun avec les cônes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

Remarque.- Il existe effectivement des courbes qui ne peuvent être intersection complète de moins de quatre surfaces. Telle est par exemple la courbe gauche du cinquième ordre possédant une seule droite quadrisécante.

128.- Courbes représentées par des matrices.-

Considérons les équations

$$\|\varphi_{ik}\| = 0, \quad (i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,n+1). \qquad (1)$$

où φ_{ik} est un polynôme entier rationnel et homogène en x_1, x_2, x_3, x_4, de degré $p_i + q_k$. Nous conviendrons que les équations (1) signifient que tous les déterminants d'ordre n tirés de la matrice $\| \varphi_{ik} \|$ sont nuls. Le lieu des points satisfaisant à ces conditions est en général une courbe C. L'ordre de cette courbe s'exprime en fonction des nombres p, q. Nous traiterons ici le cas particulier d'une matrice à trois lignes ($n = 3$) et quatre colonnes ($k = 4$). Le cas général a été étudié par Stuyvaert et M. Giambelli.

Appelons Δ_k le déterminant tiré de la matrice en supprimant la k-ième colonne. Les déterminants Δ_3, Δ_4, égalés à zéro, représentent deux surfaces d'ordre $p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 + q_3$ et $p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 + q_4$, qui ont en commun la courbe C et la courbe C' d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (2)$$

En égalant à zéro les déterminants obtenus en supprimant la troisième ou la seconde ligne on obtient deux surfaces d'ordres $p_1 + p_2 + q_1 + q_2$, $p_1 + p_3 + q_1 + q_2$, ayant en commun la courbe C' et la courbe

$$\varphi_{11} = 0, \ \varphi_{12} = 0,$$

d'ordre $(p_1 + q_1)(p_1 + q_2)$. La courbe C' est donc d'ordre

$$(p_1 + p_2 + p_3)(q_1 + q_2) + p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2 + q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2 .$$

Par suite, la courbe C est d'ordre

$$\sum_1^3 p_i \sum_1^4 q_k + \sum_1^3 \sum_1^3 p_i p_k + \sum_1^4 \sum_1^4 q_i q_k - \sum_1^4 q_i^2 .$$

§ 3.- Polarités dans les surfaces algébriques.

129.- Polaires d'un point par rapport à une surface.- Soit F une surface d'ordre n, d'équation

$$F\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \qquad (1)$$

On appelle r-ième polaire d'un point y par rapport à cette surface le lieu des r-ièmes polaires de y par rapport aux groupes de n points découpés par F sur les droites issues du point y. Il en résulte que l'équation de cette surface peut se mettre sous l'une des formes

$$\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^r F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial y_4}\right)^{n-r} F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0.$$

C'est donc une surface d'ordre $n-r$.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

I.- La s-ième polaire de y par rapport à la r-ième polaire de y par rapport à F, est la $(r+s)$-ième polaire de y par rapport à F.

II.- Si un point z appartient à la r-ième polaire de y par rapport à F, le point y appartient à la $(n-r)$-ième polaire de z par rapport à F.

130.- Classe d'une surface algébrique.-

On appelle classe d'une surface algébrique le nombre des plans tangents à cette surface passant par une droite arbitraire de l'espace.

Le plan tangent en un point simple d'une surface est la $(n-1)$-ième polaire de ce point.

Les points de contact des plans tangents menés à F par une droite g appartiendront donc aux premières polaires des points de g. On voit aisément que ces polaires forment un faisceau, c'est-à-dire passent par une même courbe d'ordre $(n-1)^2$. Il en résulte que <u>la classe d'une surface algébrique d'ordre n est en général égale à $n(n-1)^2$</u>. Mais comme on va le voir, la présence de points et de courbes multiples abaisse la classe d'une surface.

131.- <u>Comportement des polaires en un point multiple</u>.- Soit F une surface d'ordre n ayant en O_4 la multiplicité s. Son équation s'écrit

$$x_4^{n-s}\varphi_s(x_1,x_2,x_3)+x_4^{n-s-1}\varphi_{s+1}(x_1,x_2,x_3)+\dots+\varphi_n=0. \qquad (1)$$

La première polaire d'un point y par rapport à F a pour équation

$$x_4^{n-s}\left[y_1\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_3}\right]+x_4^{n-s-1}\left[y_1\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial x_3}+(n-s)y_4\varphi_s\right]+\dots=0 \qquad (2)$$

Si y est distinct de O_4, cette polaire est une surface d'ordre $n-1$, ayant la multiplicité $s-1$ en O_4, le cône tangent en ce point étant, dans la gerbe de sommet O_4, le polaire de la droite O_4y par rapport au cône $\varphi_s=0$, tangent à F en O_4.

Si y coïncide avec O_4, la surface (2), d'ordre $n-1$, a la multiplicité s en O_4 et même cône tangent que F en ce point.

En utilisant la propriété I (n° 129) on en déduit que :

<u>La r-ième polaire d'un point y distinct de O_4 par rapport à F, a la multiplicité $s-r$ en O_4, le cône tangent étant le r-ième polaire de la droite O_4y</u>

par rapport au cône tangent à F en O_4 dans la gerbe de sommet O_4.

La r-ième polaire du point O_4 par rapport à F a la multiplicité s en O_4 et même cône tangent que F en ce point. Pour $r = n-s$, elle se réduit à ce cône et pour $r > n-s$, elle est indéterminée.

Si le point O_4 est un point s-uple isolé de F, c'est-à-dire qui n'appartient pas à une courbe multiple de la surface, on voit que un point s-uple isolé abaisse en général la classe d'une surface de $s(s-1)^2$ unités.

132.- Examen des points doubles isolés.- Soit F une surface ayant un point double isolé en O_4. La première polaire d'un point y distinct de O_4 passe en général simplement par O_4. Supposons que O_4 soit double biplanaire. L'équation de la surface F peut s'écrire

$$x_4^{n-2}\, x_1 x_2 + x_4^{n-3}\, \varphi_3(x_1, x_2, x_3) + \dots + \varphi_n = 0 \,. \quad (1)$$

La polaire d'un point y s'écrit

$$x_4^{n-2}\left[y_1 x_2 + y_2 x_1\right] + x_4^{n-3}\left[y_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + (n-2) y_4 x_1 x_2\right] + \dots = 0. \quad (2)$$

Le plan tangent à cette polaire passe par la droite commune aux plans tangents à F. Si le point y se trouve dans un des plans tangents, par exemple dans le plan $x_2 = 0$, sa polaire touche ce plan en O_4. Si le point y se trouve sur la droite $x_1 = x_2 = 0$, la première polaire a un point double conique en O_4, le cône tangent étant variable avec le point y.

Supposons maintenant que F ait en O_4 un point double uniplanaire. Son équation peut s'écrire

$$x_4^{n-2} x_3^2 + x_4^{n-3} \varphi_3 + \dots + \varphi_n = 0 .$$

La polaire d'un point y

$$2 y_3 x_4^{n-2} x_3 + x_4^{n-3} \left[y_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + (n-2) y_4 x_3^2 \right] + \dots = 0 .$$

touche en O_4 le plan $x_3 = 0$ tangent à la surface. Si le point y appartient à ce plan ($y_3 = 0$), la polaire a un point double en O_4, le cône tangent étant variable avec le point y.

133.- Plans tangents à une surface en un point d'une courbe multiple. - Soit F une surface algébrique d'ordre n possédant une courbe C, multiple d'ordre s. Les r-ièmes polaires des points de l'espace passent $s-r$ fois par C. Supposons que C ne soit pas une droite. Toute bisécante de C coupe F en $n-2s$ points extérieurs à C et une r-ième polaire en $n-r-2(s-r)$ points extérieurs à C. En particulier, la tangente m en un point M de C, supposé simple pour cette courbe, coupe F en $n-2s$ points extérieurs à C et une r-ième polaire en $n+r-2s$ points extérieurs à C.

Supposons que M coïncide avec le point O_4, la tangente m avec la droite $x_1 = x_2 = 0$, et soit

$$x_4^{n-s} \varphi_s (x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-s-1} \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_n = 0$$

l'équation de F. Pour que la droite $x_1 = x_2 = 0$, tangente à C en O_4, rencontre F et ses premières, secondes, ..., $(s-1)$-ièmes polaires, respectivement en $2s$, $2(s-1)$, $2(s-2)$, ..., 2 points confondus en O_4, il faut que φ_s et ses dérivées partielles par rapport à x_1, x_2, x_3, jusqu'à l'ordre $s-1$, soient identiquement nulles pour $x_1 = x_2 = 0$ (condition nécessaire, mais non suffisante).

Il en résulte que φ_s ne dépend pas de x_3. Par suite, le cône tangent $\varphi_s = 0$ à F en O_4 se compose de s plans passant par la tangente à C en O_4.

Supposons maintenant que C soit une droite s-uple pour F. On peut prendre cette droite pour arête $x_1 = x_2 = 0$ du tétraèdre de référence. Le polynôme φ_s et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $s-1$ doivent être nuls pour $x_1 = x_2 = 0$ et par suite φ_s ne dépend pas de x_3.

Le cône tangent à une surface en un point simple d'une courbe s-uple pour cette surface, se compose de s plans passant par la tangente à la courbe au point considéré (s'il s'agit d'une droite multiple, les s plans passent par cette droite).

134.- Jacobienne d'un système linéaire ∞^3 de surfaces. - Considérons le système linéaire ∞^3 de surfaces d'ordre n, d'équation

$$\lambda_1 F_1 (x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0. \qquad (1)$$

On appelle jacobienne de ce système le lieu des points qui sont doubles pour une de ses surfaces. Pour qu'un point soit double pour la surface (1), il faut que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et la jacobienne a donc pour équation

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right| = 0 \quad . \ (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad . \qquad (2)$$

La jacobienne est donc une surface d'ordre $4(n-1)$.

On voit immédiatement que cette surface est aussi le lieu des points dont les plans $(n-1)$-ièmes polaires par rapport aux surfaces (1), sont concourantes.

135.- Théorème. - La jacobienne du système (1) est le lieu des points tels que les surfaces de ce

<u>système passant par un de ces points, soient tangentes à une droite.</u>

Soit M un point de la jacobienne du système (1). Les surfaces de ce système passant par ce point forment un réseau (système linéaire ∞^2); l'une d'elles, F'_0, a un point double en M. Soient F'_1, F'_2 deux autres surfaces passant par M, choisies de telle sorte que F'_0, F'_1, F'_2 soient linéairement indépendantes et définissent le réseau des surfaces (1) passant par M. Toute surface de ce réseau est tangente en M à la tangente commune à F'_1, F'_2.

Inversement, supposons que les surfaces (1) passant par un point M aient une tangente commune m en ce point. Soient a, b deux droites passant par M et telles que le plan ab ne contienne pas m. Il existe une surface du système (1), tangente en M à a et à b; elle a nécessairement un point double en M, car si M était simple pour cette surface, les droites a, b, m appartiendraient au plan tangent. Le point M appartient donc à la jacobienne.

136.- <u>Remarque</u>.- La jacobienne J d'un système linéaire $|F|$, ∞^3, de surfaces F peut elle être indéterminée? Si cette particularité se présente, les surfaces F passant par un point quelconque de l'espace doivent avoir une droite tangente commune en ce point. Cela n'est possible que si les surfaces F passant par un point M passent en conséquence par une courbe C ou ont en conséquence une partie commune Φ.

Dans le premier cas, chaque surface est lieu de

∞^1 courbe C et le système $|F|$ a pour équation

$$\lambda_1 F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \lambda_2 F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \lambda_3 F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \lambda_4 F_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant des polynômes de même degré. La jacobienne de ce système a pour équation

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} \right| = 0$$

et est bien indéterminée.

Dans le second cas, le système $|F)$ a pour équation

$$\lambda_1 F_1(\varphi_1, \varphi_2) + \lambda_2 F_2(\varphi_1, \varphi_2) + \lambda_3 F_3(\varphi_1, \varphi_2) + \lambda_4 F_4(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

L'équation de la jacobienne de ce système est

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right| = 0$$

et est indéterminée.

Nous nous bornerons à ces brèves indications.

§4.- Surfaces ayant une droite multiple.

137.- Equation d'une surface.- Soit F une surface d'ordre n ayant la droite $x_3 = x_4 = 0$ comme droite s-uple. Ecrivons l'équation de F sous la forme

$$F \equiv \sum x_3^i x_4^k \varphi_{ik}(x_1, x_2) = 0, \qquad (1)$$

φ_{ik} étant un polynôme de degré $n-i-k$ et i, k prenant toutes les valeurs entières positives ou nulles telles que $i+k \leq n$. Si l'on projette du point O_4 la section de la surface (1) par le plan $x_4 = \lambda x_3$, on obtient, dans le plan $x_4 = 0$, une courbe

$$\sum x_3^{i+k} \lambda^k \varphi_{ik}(x_1, x_2) = 0$$

dont doit se détacher la droite $x_3 = 0$ comptée s fois. On a donc $i+k \geq s$.

138.- Plans tangents en un point de la droite multiple.- Soit $y(y_1, y_2, 0, 0)$ un point de la droite multiple. Le cône des tangentes en M a pour équation

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial}{\partial y_4}\right)^s F(y_1,y_2,y_3,y_4)=0. \quad (2)$$

Ce cône se compose de s plans passant par la droite multiple (n° 133). Les dérivées partielles d'ordre s qui ne sont pas nulles au point y sont celles qui ne contiennent plus y_3, y_4. L'équation (2) se réduit donc à

$$\left(x_3\frac{\partial}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial}{\partial y_4}\right)^s\left[y_3^s\varphi_{s0}+y_3^{s-1}y_4\varphi_{s-1,1}+\dots+y_4^s\varphi_{0s}\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$x_3^s\varphi_{s0}(y_1,y_2)+x_3^{s-1}x_4\varphi_{s-1,1}(y_1,y_2)+\dots+x_4^s\varphi_{0s}(y_1,y_2)=0. \quad (3)$$

Si nous désignons par C les courbes planes d'ordre $n-s$, sections de la surface par les plans passant par la droite multiple, on voit que par un point de cette droite passent en général s courbes C, situées dans les s plans tangents à F en ce point. Un plan passant par la droite multiple est tangent à la surface en chacun des $n-s$ points de rencontre de cette droite avec la courbe C située dans ce plan.

139. - <u>Points-pince</u>. - On appelle point-pince un point d'une courbe multiple d'une surface en lequel deux des plans tangents à la surface sont confondus. Cherchons le nombre des points-pince appartenant à la droite multiple de la surface F.

Pour qu'un point y soit un point pince, il faut que dans l'équation (3) correspondante, on ait une racine double $\frac{x_3}{x_4}$. Pour trouver le nombre de ces points, éliminons x_3, x_4 entre l'équation (3) et sa dérivée par rapport à x_3. Après suppression dans le résultat du facteur φ_{s0}, qui donne des solutions étrangères, il reste une équation d'ordre $2(n-s)(s-1)$ en y_1, y_2. Si cette équation n'est pas une identité, il y a $2(n-s)(s-1)$ points-pince.

Si au contraire cette équation est une identité, tous les points de la droite multiples sont des points-pince.

Précisons ce raisonnement dans le cas simple où $n = 4$, $s = 2$. L'équation (3) s'écrit

$$x_3^2 \varphi_{20}(y_1, y_2) + x_3 x_4 \varphi_{11}(y_1, y_2) + x_4^2 \varphi_{02}(y_1, y_2) = 0, \qquad (3')$$

où φ_{20}, φ_{11}, φ_{02} sont du second degré. Les points-pince sont donnés par

$$\varphi_{11}^2 - 4\varphi_{20}\varphi_{02} = 0 \qquad (4)$$

et il y en a donc en général quatre, à moins que l'équation précédente ne soit une identité. Posons

$$\varphi_{20} \equiv a_0 y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2,\ \varphi_{11} \equiv b_0 y_1^2 + b_1 y_1 y_2 + b_2 y_2^2,\ \varphi_{02} \equiv c_0 y_1^2 + c_1 y_1 y_2 + c_2 y_2.$$

Pour que l'équation (4) soit une identité, il faut que l'on ait

$$b_0^2 - 4a_0 c_0 = 0,\ b_0 b_1 - 2a_0 c_1 - 2a_1 c_0 = 0,\ b_1^2 + 2b_0 b_2 - 4a_0 c_2 - 4a_1 c_1 - 4a_2 c_0 = 0,$$
$$b_1 b_2 - 2a_1 c_2 - 2a_2 c_1 = 0,\ b_2^2 - 4a_2 c_2 = 0.$$

On en déduit que dans l'équation (3'), les coefficients de y_1^2, y_2^2 sont des carrés parfaits que nous écrirons respectivement $(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)^2$, $(\gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4)^2$. Les quantités a_0, b_0, c_0, a_2, b_2, c_2 s'expriment au moyen de α_3, α_4, γ_3, γ_4. Deux cas sont à considérer.

1°) $\alpha_3\gamma_4 - \alpha_4\gamma_3$ n'est pas nul. Un calcul simple montre que l'équation (3') se réduit à

$$\left[y_1(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) + y_2(\gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4)\right]^2 = 0.$$

En tout point de la droite double, les plans tangents sont confondus en un plan variable avec le point de contact.

2°) $\alpha_3\gamma_4 - \alpha_4\gamma_3 = 0$. Cela revient à supposer

$$\gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 = \lambda(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4).$$

On trouve alors que l'on a nécessairement, pour coefficient de $y_1 y_2$ dans (3'), une expression $\mu^2(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)^2$.

L'équation (3') devient donc

$$(y_1^2 + \mu^2 y_1 y_2 + \lambda^2 y_2^2)(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)^2 = 0 .$$

En tout point de la droite double, les plans tangents sont confondus en un plan fixe, indépendant du point de contact.

140.- <u>Plans tangents menés par la droite multiple.</u> - Soit F une surface d'ordre n possédant une droite s-uple d sans autre singularité. Proposons-nous de déterminer le nombre des plans tangents à F passant par d, le point de contact n'appartenant pas à d. Considérons un plan α ne passant pas par d et soit C_α la courbe suivant laquelle il coupe F ; C_α possède un point s-uple en αd. Un plan ϖ passant par d coupe F suivant une courbe C_ϖ d'ordre $n-s$. La droite $\varpi\alpha$ possède $(n-s-1)^2$ pôles par rapport à la courbe C_ϖ. Le lieu de ces pôles, lorsque ϖ varie est une courbe algébrique K. L'ordre de la courbe K est égal au nombre de ses points appartenant au plan α ; un point de K appartient au plan α lorsque la courbe C_ϖ est tangente à ce plan, c'est-à-dire lorsque le plan ϖ passe par une tangente à C_α passant par le point αd. L'ordre de K est donc égal à $(n+s)(n-s-1)$. Il en résulte que la courbe K s'appuie en $(n-s-1)(2s+1)$ points sur d.

Soit P un point de rencontre de K et de F en dehors de α et de d. La droite polaire du point P par rapport à la courbe C_ϖ située dans le plan $\varpi = Pd$, est indéterminée et P est donc double (au moins) pour cette courbe. Il en résulte que le plan $\varpi = Pd$ touche F en P. Cela étant, K coupe F en

$$n(n+s)(n-s-1) - (n+s)(n-s-1) - s(n-s-1)\overset{(2s+1)}{\cancel{(n+s)}} = (n-s-1)\left[n(n+s-1) - 2s(s+1)\right]$$

points en dehors de α, d. Par suite, par une droite s-uple d'une surface F d'ordre n, passent $(n-s-1)[n(n+s-1)-2s(s+1)]$ plans tangents à F, les points de contact n'appartenant pas à d.

Ce théorème est dû à Fouret (Voir notre note dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909).

§ 5.- Surfaces réglées algébriques gauches.

141.- Equation d'une surface réglée.- Une surface réglée est le lieu d'une droite. Son équation s'obtiendra donc en éliminant un paramètre u entre les équations

$$a_x \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \quad b_x = 0 \qquad (1)$$

de deux plans, les coefficients $a_1, \dots, b_1$ étant des fonctions de ce paramètre. Pour que la surface réglée soit algébrique, il faut que u entre algébriquement dans les coefficients des équations des plans.

Soit R la surface réglée algébrique obtenue dans ces conditions. On peut supposer que l'équation de la surface R est $a_x = 0$, u étant, dans cette équation, une fonction (algébrique) de x_1, x_2, x_3, x_4 définie par l'équation $b_x = 0$.

142.- Equation du plan tangent à une surface réglée.- Le plan tangent en un point y à la surface réglée R est donné par

$$a_x + \left(y_1\frac{\partial a_1}{\partial u} + y_2\frac{\partial a_2}{\partial u} + y_3\frac{\partial a_3}{\partial u} + y_4\frac{\partial a_4}{\partial u}\right)\left(x_1\frac{\partial u}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial y_2} + x_3\frac{\partial u}{\partial y_3} + x_4\frac{\partial u}{\partial y_4}\right) = 0,$$

où $\frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots$ sont obtenus en dérivant $b_y = 0$ par rapport à y_1, y_2, y_3, y_4. L'équation du plan tangent est donc

$$\left| \sum y_i \frac{\partial a_i}{\partial u} \quad \sum y_i \frac{\partial b_i}{\partial u} \right| = 0. \qquad (2)$$

On en conclut que le plan tangent en un point y d'une surface réglée contient la génératrice passant par ce point.

143.- Classification des surfaces réglées.-

Une génératrice d'une surface réglée R est dite singulière si les plans tangents aux différents points de cette génératrice sont confondus. Pour une telle génératrice, la quantité

$$\sum y_i \frac{\partial a_i}{\partial u} : \sum y_i \frac{\partial b_i}{\partial u}$$

ne dépend pas du point y.

Si toutes les génératrices d'une réglée R sont singulières, la surface est l'enveloppe d'une famille ∞^1 de plans et est donc une développable. Dans le cas opposé, la surface est dite réglée gauche.

144.- Théorème.- Tout plan passant par une génératrice non singulière d'une surface réglée gauche, est tangent à cette surface.

En effet, tout plan

$$\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x = 0 \qquad (3)$$

est tangent à la surface au point déterminé par les équations

$$a_x = 0, \; b_x = 0 \;, \quad \lambda_1 \sum x_i \frac{\partial a_i}{\partial u} + \lambda_2 \sum x_i \frac{\partial b_i}{\partial u} = 0. \qquad (4)$$

145.- Corollaire.- Une surface réglée gauche d'ordre n est de classe n.

146.- Théorème de Chasles.- Les points de contact et les plans tangents à une surface réglée gauche, sur une génératrice non singulière, se correspondent dans une projectivité.

Il y a en effet une projectivité entre le faisceau de plans (3) et le point représenté par les équations (4), u étant fixé et correspondant à une génératrice non singulière.

147.- Courbe double d'une surface gauche.-

Le plan tangent η en un point y d'une génératrice g_0 d'une surface réglée R d'ordre n, coupe R suivant g_0 et une courbe Γ d'ordre $n-1$. Le point y doit être double au moins pour la section de R par η, donc la courbe Γ passe par y. Cette courbe Γ coupe g_0 en $n-2$ points $M_1, M_2, \dots, M_{n-2}$ distincts de y.

Par un point M' de Γ passe une génératrice g de R. Lorsque M' tend vers y sur Γ, g a pour limite g_0, mais lorsque M' tend vers M_1, g_0 tend vers une génératrice g_1 distincte de g_0. Il en résulte que M_1 est double pour R. Il en est de même des points $M_2, \dots, M_{n-2}$. Lorsque g_0 décrit la surface, ces $n-2$ points engendrent une courbe K, double pour la surface R.

148.- Remarque.- Une courbe C telle que par un de ses points passent s génératrices de R, est s-uple pour cette surface. Une surface réglée gauche peut en outre posséder des génératrices multiples.

149.- Lieu des droites s'appuyant sur trois courbes.-

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes d'ordres n_1, n_2, n_3. Supposons que C_2, C_3 se coupent en ν_{23} points, C_3, C_1 en ν_{31} points, C_1, C_2 en ν_{12} points. Les droites s'appuyant sur C_1, C_2, C_3 en des points distincts, forment une réglée F.

Les droites s'appuyant sur C_1 et sur trois droites deux à deux gauches r_1, r_2, r_3 sont au nombre de $2n_1$, donc les droites s'appuyant sur C_1, r_1, r_2 forment une réglée R_1 d'ordre $2n_1$. Cette réglée passe simplement par C_1.

La courbe C_2 rencontre R_1 en $2n_1n_2 - \nu_{12}$ points en dehors de C_1, dont les droites s'appuyant sur C_1, C_2, r_1 en des points distincts forment une réglée R_2 d'ordre $2n_1 n_2 - \nu_{12}$. Par un point de C_1 passent n_2 droites s'appuyant sur C_2 et r_1, donc C_1 est n_2-uple pour R_2. De même, C_2 est n_1-uple pour R_2.

La courbe C_3 rencontre R_2 en $n_3(2n_1n_2 - \nu_{12}) - n_2\nu_{31} - n_1\nu_{23}$ points non situés sur C_1, C_2, donc ce nombre est l'ordre de F. Par un point de C_1 passent $n_2n_3 - \nu_{23}$ droites s'appuyant en des points distincts sur C_2, C_3 ; ce nombre est donc la multiplicité de C_1 pour F. On détermine de même les multiplicités de C_2, C_3.

La surface F est d'ordre $2n_1n_2n_3 - n_1\nu_{23} - n_2\nu_{31} - n_3\nu_{12}$. Les courbes C_1, C_2, C_3 sont respectivement multiples d'ordres $n_2n_3 - \nu_{23}$, $n_3n_1 - \nu_{31}$, $n_1n_2 - \nu_{12}$ pour F.

150.- Lieu des bisécantes d'une courbe s'appuyant sur une seconde courbe.-

Soient C une courbe d'ordre n ayant h points doubles apparents, C_1 une courbe d'ordre n_1, s'appuyant en ν points sur C, F la surface lieu des bisécantes de C s'appuyant sur C_1 en des points distincts des ν points communs à C, C_1.

Soit r une droite ne s'appuyant ni sur C, ni sur C_1. Dans un plan passant par r se trouvent $\frac{1}{2}n(n-1)$ bisécantes de C. Par un point de r passent h bisécantes de C. Donc les bisécantes de C s'appuyant sur r forment une surface R d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)+h$. La droite r est h-uple pour R. Les cordes de C passant par un point de C forment un cône d'ordre $n-1$, donc C est $(n-1)$-uple pour R.

La courbe C_1 coupe R en $n_1 \left[\frac{1}{2} n(n-1)+h\right]-(n-1)\nu$ points en dehors de C, donc ce nombre est l'ordre de F. La courbe C est multiple d'ordre $n_1(n-1)-\nu$ pour F et C_1 est multiple d'ordre h.

<u>La surface F est d'ordre $\frac{1}{2}\, n\, n_1(n-1)+n_1 h-(n-1)\nu$ et C est multiple d'ordre $n_1(n-1)-\nu$, C_1 d'ordre h.</u>

Chapitre V

Courbes tracées sur une quadrique.

§1.- Représentation plane d'une quadrique.

151.- Représentation plane d'une quadrique non conique.- Soient Q une quadrique non conique, P un point de Q, ϖ un plan ne passant pas par P. Si M est un point de la quadrique, la droite PM coupe ϖ en un point M' et il y a une correspondance généralement biunivoque entre les points M de Q et M' de ϖ.

Cette correspondance constitue la représentation de la quadrique Q sur le plan ϖ.

Par le point P passent deux génératrices rectilignes a, b de Q, coupant ϖ suivant des points A', B'. Aux points d'une génératrice rectiligne de Q s'appuyant sur a mais distincte de b correspondent dans le plan ϖ les points d'une droite passant par A' et aux points d'une droite de Q s'appuyant sur b mais distincte de a correspondent les points d'une droite passant par B'. Considérons un plan α passant par P mais non par a, b. Aux points M de la conique section de Q par α correspondent les points de la droite $\alpha\varpi$. Lorsque M tend vers P sur la conique considérée, la droite MP a pour limite la tangente à Q en P située dans le plan α et le point correspondant M' de ϖ a pour limite le point de la droite $\alpha\varpi$ situé sur la droite $p' = A'B'$. On convient de dire qu'un point infiniment voisin de P sur la conique (Q, α), correspond le point de p' situé sur la tangente en P à cette conique.

Aux points de la conique Γ, section de Q par un plan ne passant pas par P, correspondent les points d'une conique Γ' de ϖ passant par A', B'. Inversement, si Γ' est une conique de ϖ passant par A', B', le cône projetant Γ' de P coupe Q suivant les droites a, b et une conique Γ dont le plan ne passe en général pas par P.

Les coniques Γ' sont en nombre ∞^3 et forment un système linéaire : Aux coniques Γ, découpées sur Q par les plans d'un faisceau d'axe d, correspondent dans ϖ les coniques Γ' formant un faisceau dont les points-base sont A', B' et les points qui correspondent aux intersections de d avec Q. Il en résulte qu'entre les plans de l'espace et les coniques Γ' existe une projectivité Ω : Aux coniques Γ' d'un réseau correspondent les plans d'une gerbe.

Considérons une droite b'_1 passant par A' et la droite b_1 qui avec a, forme l'intersection de Q et du plan Pb'_1. La droite b_1 ne peut passer par P si, comme nous le supposerons, b'_1 est distinct de p'. Cela étant, considérons les coniques Γ' tangentes à b'_1 en A' ; elles forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet A. Deux coniques du réseau ne se rencontrent plus qu'en un point variable et par suite une droite passant par A ne rencontre Q qu'en un point variable, donc A appartient à Q. Parmi les coniques Γ' du réseau, se trouvent celles qui sont formées de la droite b'_1 et d'une droite passant par B', donc le point A appartient à la droite b_1, car à ces coniques correspondent les plans passant par b_1. Parmi les coniques Γ' du réseau considéré, se trouvent également celles qui sont formées de p' et d'une droite quelconque passant par A' ; à ces coniques correspondent les plans passant par a, donc A appartient à cette droite. On traduit cette propriété en disant qu'un point infiniment voisin de A' sur b'_1 correspond le point A de a. Lorsque la droite b'_1 varie, A décrit a et cette correspondance est une projectivité.

De même, aux points infiniment voisins de B' dans ϖ correspondent, dans une projectivité, les points de la droite b.

152.- Représentation analytique. - Disposons du tétraèdre de référence de manière à ce que P coïncide avec $O_4\ (0,0,0,1)$, A' avec $O_2\ (0,1,0,0)$, B' avec $O_3\ (0,0,1,0)$. L'équation de Q est de la forme

$$a_0 X_2 X_3 + X_1 (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0 . \qquad (1)$$

Si ϖ est le plan $X_4 = 0$, à un point X de Q correspond un point x du plan ϖ tel que

$$\frac{X_1}{a_4 x_1^2} = \frac{X_2}{a_4 x_1 x_2} = \frac{X_3}{a_4 x_1 x_3} = \frac{X_4}{-x_1(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)-a_0 x_2 x_3} . \qquad (2)$$

à un plan

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$$

correspond la conique

$$a_4 x_1 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) - \lambda_4 x_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) - \lambda_4 a_0 x_2 x_3 = 0 . \qquad (3)$$

Réciproquement, si l'on se donne le système (3) et si l'on établit la projectivité (2) entre les courbes de ce système et les plans de l'espace, on retrouve la quadrique (1). Un système linéaire ∞^3 de coniques, ayant deux points-base, peut donc être considéré comme homologue du système des sections planes d'une quadrique, dans une représentation plane de celle-ci.

Observons que le système (3) peut s'écrire plus simplement

$$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_1 x_2 + \mu_3 x_1 x_3 + \mu_4 x_2 x_3 = 0.$$

En posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2 : x_1 x_2 : x_1 x_3 : x_2 x_3 ,$$

on obtient la quadrique

$$X_2 X_3 - X_1 X_4 = 0.$$

153.- Remarque. - Nous avons utilisé plus haut l'expression "point infiniment voisin". Il s'agit d'une convention de langage qui se justifie d'ailleurs dans la théorie des transformations birationnelles.

154.- Représentation plane d'un cône quadratique. - Supposons que Q soit un cône quadratique de sommet O ; soient P un de ses points distincts du sommet, ϖ un plan ne passant ni par O, ni par P ; A' l'intersection de ϖ et de la droite OP ; p' l'intersection de ϖ et du plan tangent en P. On obtient une représentation du cône Q sur le plan ϖ en faisant correspondre à un point M de Q le point M' où la droite PM coupe le plan ϖ.

Aux points infiniment voisins de P correspondent les points de la droite p'. Aux droites de Q correspondent les droites passant par A' ; aux sections planes de Q correspondent les coniques Γ' de ϖ tangentes à p' en A'. Entre les coniques Γ' et les plans de l'espace existe une projectivité. Nous conviendrons de dire que les coniques Γ' passent par le point A'_1 infiniment voisin de A' sur la droite p'.

Soient Γ_1 une conique de Q coupant OP en un point

A distinct de O, P ; Γ'_1 la conique homologue dans ϖ. Les coniques Γ' osculant Γ'_1 en A' forment un réseau dont deux courbes se rencontrent en un point variable. Aux courbes de ce réseau correspondent les plans d'une gerbe de sommet A_1 appartenant à Q. Parmi les courbes Γ' considérées, se trouvent les coniques formées de la droite p' et d'une droite passant par A'. Par suite le point A_1 appartient à OP. Comme il appartient à Γ_1, il coïncide avec A. Nous dirons qu'au point infiniment voisin de A'_1 sur Γ'_1 correspond le point A. Cette correspondance est une projectivité, car si le plan de Γ_1 décrit un faisceau dont l'axe ne rencontre pas OP, Γ'_1 décrit un faisceau, projectif au premier, dont les courbes ne s'osculent pas en A'.

Aux sections de Q par les plans passant par O correspondent les couples de droites passant par A'; nous traduirons cette propriété en disant qu'à un point de Q infiniment voisin de O correspond un point de ϖ infiniment voisin de A'; cette correspondance est d'ailleurs projective.

Tout système de coniques tangentes à une droite en un point peut être considéré comme l'homologue du système des sections planes d'un cône quadratique, dans une représentation plane de celui-ci. Considérons en effet le système

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_3 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_1 x_2 = 0$$

formé par les coniques touchant la droite $x_1 = 0$ un point $(0,1,0)$. En posant

$$\frac{X_1}{x_1^2} = \frac{X_2}{x_1 x_3} = \frac{X_3}{x_3^2} = \frac{X_4}{x_1 x_2},$$

on obtient le cône

$$X_2^2 - X_1 X_3 = 0.$$

Le point P est le point $(0,0,1,0)$.

§2.- Représentation d'une courbe tracée sur une quadrique.

155.- <u>Courbe tracée sur une quadrique</u>.- Soit C une courbe algébrique tracée sur une quadrique non conique Q. Désignons par $|a_1|$, $|b_1|$ les deux systèmes de génératrices rectilignes de Q et supposons que C rencontre une génératrice déterminée $\bar{a}_1$ de $|a_1|$ en m points et une génératrice déterminée $\bar{b}_1$ de $|b_1|$ en n points. La courbe C est d'ordre $m+n$; tout plan passant par $\bar{a}_1$ la rencontre encore en n points appartenant à une droite de $|b_1|$; par suite, toutes les droites b_1 coupent C en n points. De même, toutes les droites a_1 coupent C en m points. Nous désignerons la courbe C par le symbole $C_{m,n}$.

156.- <u>Représentation plane d'une courbe $C_{m,n}$</u>.- Reprenons les notations du n° 151 et supposons que $C_{m,n}$ ne passe pas par P. Il lui correspond, dans la représentation de la quadrique Q sur le plan ϖ, une courbe $\Gamma_{m,n}$, d'ordre $m+n$, passant m fois par A' et n fois par B'. Inversement, si $\Gamma_{m,n}$ est une courbe d'ordre $m+n$ passant m fois par A' et n fois par B', le cône projetant cette courbe de P rencontre Q suivant la droite a comptée m fois, la droite b comptée n fois et une courbe $C_{m,n}$ ne passant pas par P.

Si la courbe $C_{m,n}$ passe par P, ce point étant supposé simple pour la courbe, il lui correspond dans le plan ϖ une courbe $\Gamma'_{m,n}$, d'ordre $m+n-1$, passant

$m-1$ fois par A', $n-1$ fois par B' et rencontrant encore la droite $p' = A'B'$ au point de cette droite situé sur la tangente à $C_{m,n}$ en P. Inversement, à une courbe telle que $\Gamma'_{m,n}$ correspond sur Q une courbe $C_{m,n}$ passant simplement par P. La courbe $\Gamma'_{m,n}$ jointe à la droite p', courbe que nous représenterons par la notation $\Gamma'_{m,n} + p'$, est une courbe $\Gamma_{m,n}$.

Considérons plus généralement, dans le plan ϖ, une courbe Γ'' d'ordre $m+n-\nu$, passant $m-\nu$ fois par A' et $n-\nu$ fois par B'. Toute courbe du plan ϖ peut être considérée comme une courbe Γ''. Le cône projetant la courbe Γ'' de P coupe Q suivant une courbe d'ordre $2(m+n-\nu)$ comprenant $m-\nu$ fois a, $n-\nu$ fois b et complétée par une courbe C d'ordre $m+n$ coupée en n points par les droites b_1, en m points par les droites a_1 ; C est donc une courbe $C_{m,n}$. Un plan passant par P ne rencontre plus cette courbe qu'en $m+n-\nu$ points en dehors de P, donc P est ν-uple pour la courbe. La courbe Γ'', jointe à ν fois la droite p', ce que nous représenterons par $\Gamma'' + \nu p'$, constitue une courbe $\Gamma_{m,n}$. Observons d'autre part que si une courbe $C_{m,n}$ a la multiplicité ν en P, sa projection sur ϖ est une courbe Γ''.

De ce qui précède, on conclut que <u>l'ensemble des courbes $C_{m,n}$ est représenté sur le plan ϖ par l'ensemble des courbes $\Gamma_{m,n}$</u> (contenant éventuellement un certain nombre de fois la droite p').

Les courbes $\Gamma_{m,n}$ dépendent de

$$\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+3) - \tfrac{1}{2}m(m+1) - \tfrac{1}{2}n(n+1) = mn+m+n$$

paramètres, donc <u>les courbes $C_{m,n}$ dépendent de $mn+m+n$ paramètres</u>.

On observera qu'il ne peut passer, par P, en dehors des droites a, b, des bisécantes de la courbe $C_{m,n}$.

157.- Coniques et cubiques gauches. - Les coniques tracées sur Q sont les courbes $C_{1,1}$; elles sont représentées sur ϖ par les ∞^3 coniques $\Gamma_{1,1}$ passant par A', B', comme on l'a vu plus haut.

Les cubiques gauches tracées sur Q sont les courbes $C_{1,2}$, $C_{2,1}$. Elles sont représentées sur ϖ par les courbes $\Gamma_{1,2}$ passant par A' et ayant un point double en B', ou $\Gamma_{2,1}$, passant par B' et deux fois par A'.

Les cubiques gauches tracées sur une quadrique forment deux familles ∞^5.

158.- Courbes gauches du quatrième ordre. - Les courbes du quatrième ordre tracées sur Q sont les courbes $C_{1,3}$, $C_{2,2}$, $C_{3,1}$. Occupons-nous tout d'abord des secondes.

Les courbes $C_{2,2}$ sont représentées sur ϖ par les quartiques $\Gamma_{2,2}$ ayant des points doubles en A', B'. Parmi ces quartiques se trouvent les courbes composées d'une cubique plane passant par A', B' et de la droite p'. Les courbes $C_{2,2}$ sont les courbes découpées sur Q par les autres quadriques de l'espace ; on les appelle biquadratiques gauches. Les biquadratiques gauches tracées sur une quadrique sont en nombre ∞^8.

On voit que par P ne passent que deux bisécantes a, b de $C_{2,2}$, qui a ainsi deux points doubles apparents.

Les courbes $C_{1,3}$ sont représentées sur ϖ par les quartiques ayant un point simple en A' et un point triple en B'. Parmi ces courbes se trouvent celles qui sont formées d'une cubique plane passant une fois par A', deux fois par B', et d'une droite passant par B'. Par suite, une courbe $C_{1,3}$ peut dégénérer en une cubique gauche $C_{1,2}$ et une génératrice de Q, sécante simple de cette cubique.

Les courbes $C_{3,1}$ donnent lieu à une représentation analogue, les points A', B' étant intervertis.

<u>Les quartiques gauches ayant des trisécantes, tracées sur une quadrique, forment deux familles ∞^7.</u>

159.- <u>Génération des courbes $C_{m,n}$.</u>- Considérons une courbe $C_{m,n}$ et son image $\Gamma_{m,n}$ sur le plan ϖ. A une droite r, passant par A', faisons correspondre les n droites passant par B' et par les n points de rencontre de $\Gamma_{m,n}$ avec r en dehors de A'. Par le même procédé, à une droite s passant par B' correspondent m droites passant par A'. Les droites r, s sont liées par une correspondance (m, n) et le lieu des points communs à deux droites homologues est la courbe $\Gamma_{m,n}$.

Sur la quadrique Q, cette correspondance donne naissance à une correspondance (m, n) entre les systèmes de génératrices rectilignes $|b_1|$, $|a_1|$. Le lieu des points communs à deux droites homologues est la courbe $C_{m,n}$. Par suite

<u>Toute courbe $C_{m,n}$ tracée sur une quadrique est le lieu des points communs aux éléments homologues dans une correspondance (m, n) entre les deux systèmes de génératrices rectilignes de cette quadrique.</u>

160.- <u>Remarque sur le principe de correspondance.</u>- Soient (y), (z) deux ponctuelles superposées ou non ; y_1, y_2 les coordonnées d'un point y de (y) ; z_1, z_2 celles d'un point z de (z). Posons

$$\frac{X_1}{y_1 z_1} = \frac{X_2}{y_1 z_2} = \frac{X_3}{y_2 z_1} = \frac{X_4}{y_2 z_2} . \qquad (1)$$

On en déduit

$$X_1 X_4 = X_2 X_3 \qquad (2)$$

et par suite, par les formules (1) on obtient une représentation biunivoque des couples de points de (y), (z) sur la quadrique Q d'équation (2). Aux couples de points y ; z formés d'un point y fixe et d'un point z variable correspondent sur Q les points d'une droite b_1 d'équations

$$y_2 X_1 - y_1 X_3 = 0 \ , \ y_2 X_2 - y_1 X_4 = 0 .$$

De même, aux couples formés d'un point z fixe et d'un point y variable correspondent les points d'une génératrice rectiligne a_1 de l'autre mode de Q. Il en résulte que les couples de points homologues dans une correspondance (m, n) entre les points de (y), (z), sont représentés sur Q par les points d'une courbe $C_{m,n}$.

Supposons en particulier que les ponctuelles (y), (z) soient superposées et rapportées au même système de référence. Les points unis correspondront à la section de $C_{m,n}$ par le plan $X_2 = X_3$. En considérant la représentation de la quadrique Q sur un plan, à partir d'un point situé dans le plan $X_2 = X_3$, à la courbe $C_{m,n}$ correspond une courbe $\Gamma_{m,n}$ sur laquelle les points unis sont découpés par une droite. On retrouve ainsi une interprétation du principe de correspondance analogue à celle qui a été donnée au chapitre I.

§ 3. La biquadratique gauche.

page 119

161.- Préliminaires. - Soit C une biquadratique gauche dépourvue de points doubles. Désignons par Q une quadrique non conique passant par C. Pour étudier la courbe C, nous utiliserons deux représentations planes de la quadrique Q. La première sera obtenue en projetant, sur un plan ϖ, les points de Q à partir d'un point P de cette quadrique n'appartenant pas à C. Nous désignerons par A', B' les points d'intersection de ϖ avec les droites de Q passant par P, par p' la droite $A'B'$. La seconde représentation plane sera obtenue en projetant les points de Q sur un plan ϖ_1 d'un point P_1 de C. Les points d'intersection de ϖ_1 avec les droites de Q passant par P_1 seront désignés par A'_1, B'_1 ; on posera $p'_1 = A'_1 B'_1$.

Dans la première représentation, à la courbe C correspond une quartique plane Γ ayant des points doubles en A', B'. Dans la seconde, il correspond à C une cubique plane Γ_1, dépourvue de points doubles, passant par A'_1, B'_1 et coupant encore p'_1 en un troisième point P'_1.

Rappelons que C possède deux points doubles apparents.

162.- Tangentes et plans osculateurs. - Soient M un point de C, m la tangente en ce point, M' l'homologue de M sur ϖ. La droite m', intersection des plans ϖ, Pm est tangente à Γ en M'. Les tangentes à la courbe C engendrent une surface développable Δ dont l'ordre est égal au nombre des tangentes à C coupant une droite r passant par P mais d'ailleurs quelconque.

Ce nombre est égal au nombre des tangentes à Γ passant par le point ϖ, c'est-à-dire à la classe de Γ. La surface Δ est donc d'ordre huit.

Reprenons le même raisonnement en remplaçant P par P_1 et ϖ par ϖ_1. La classe de Γ_1 étant six, on voit qu'il existe six tangentes à C s'appuyant sur une droite passant par P_1. Par suite, P_1 et donc C sont doubles pour Δ.

Par le point A', on peut mener 4 tangentes à Γ, donc sur une bisécante de C s'appuyent quatre tangentes à cette courbe (ce qu'on pourrait déduire du fait que C est double pour Δ).

Soit maintenant M' un point d'inflexion de Γ et M le point correspondant de C. Le plan passant par P et par la tangente à Γ en M' coupe C en trois points réunis en M, c'est donc le plan osculateur en M à la courbe. La courbe Γ possédant 12 points d'inflexion, il y a 12 plans osculateurs à C passant par le point P, extérieur à C. On sait que ces plans sont tangents à la surface Δ. Le même raisonnement peut être répété en considérant la seconde représentation plane ; comme la courbe Γ_1 possède 9 points d'inflexion, par un point P_1 de C passent 9 plans osculateurs à cette courbe.

<u>La développable Δ des tangentes à une biquadratique gauche C est du huitième ordre et passe doublement par la courbe C (arête de rebroussement). Par un point de l'espace passent 12 plans tangents à Δ et par un point de C, 9 plans tangents.</u>

163.- <u>Plans bitangents.</u>- Les plans bitangents à C, c'est-à-dire les plans tangents à C en deux points distincts, sont en nombre ∞^1. Ceux de ces plans passant par P sont également bitangents à Γ. Le nombre des bitangentes de ces courbes étant 8, il y a 8 plans bitangents à C passant par P.

Considérons la seconde représentation plane. Par le point P'_1 passent quatre tangentes à Γ_1. Les plans projetant ces tangentes de P_1 sont tangents à C en P_1 et chacun au point de C qui correspond au point de contact avec Γ_1 de la tangente correspondante. Donc, un point de C est un point de contact de 4 plans bitangents.

De cette seconde représentation plane, on peut déduire une construction des plans bitangents. Soit γ un plan bitangent, touchant C en deux points R, S distincts de P_1. La conique (Q, γ) touche C en R, S ; à cette conique correspond dans ϖ_1 une conique γ_1 passant par A'_1, B'_1 et touchant la cubique Γ_1 aux points homologues R_1, S_1 de R, S. Soient r, s les tangentes à Γ_1 en R_1, S_1 ; R'_1, S'_1 les tangentiels de R_1, S_1. Les cubiques Γ_1, $p'_1 + r + s$ déterminent un faisceau dont une courbe comprend γ_1 comme partie et est complétée par une droite passant par R'_1, S'_1, P'_1. Inversement, si nous menons par P'_1 une droite coupant encore Γ_1 en R'_1, S'_1, il existe une conique passant par A'_1, B'_1 et touchant Γ_1 en deux points R_1, S_1 dont les tangentiels sont respectivement R'_1, S'_1. A cette conique correspond un plan bitangent de C. Transportée dans l'espace, cette construction donne la suivante :
Menons par un point P_1 de C un plan tangent (par $P_1 P'_1$) coupant encore C en deux points R', S'. Les points de contact des 4 tangentes à C s'appuyant sur $P_1 R'$ et les points de contact des 4 tangentes s'appuyant sur

$P_1 S'$, sont les points de contact de 16 plans bitangents à C.

La droite joignant les points de contact d'un plan bitangent engendre une surface Ψ. Par un point P_1 de C passent 4 de ces droites, donc C est quadruple pour la surface Ψ. Reprenons la seconde représentation plane de Q et soient M un point de C distinct de P_1, M' son homologue sur ϖ_1. S'il existe une droite de Ψ s'appuyant sur $P_1 M$ en un point distinct de P_1, M, il existe une conique γ_1 passant par A'_1, B'_1, touchant Γ_1 en des points R_1, S_1 tels que la droite $R_1 S_1$ passe par M', et réciproquement. Or, les tangentiels R'_1, S'_1 de R_1, S_1 sont en ligne droite avec P'_1, donc le tangentiel de M' est P'_1. Mais alors, la droite $P_1 M$ appartient à Ψ. Il en résulte que si une bisécante de $C_{2,2}$ est rencontrée, en dehors de cette courbe, par une droite de Ψ, elle appartient à cette surface. Par suite, la surface Ψ est d'ordre huit et passe quatre fois par $C_{2,2}$. La surface Ψ est d'ailleurs composée des quatre cônes du second ordre circonscrits à la courbe $C_{2,2}$.

164. - Plans stationnaires. - On appelle plan stationnaire un plan ne rencontrant la courbe C qu'en un seul point (comptant pour quatre).

Prenons la seconde représentation plane et supposons que P_1 ne soit pas le point de contact d'un plan stationnaire. Soient γ un plan stationnaire, M le point de contact, M' son homologue sur ϖ_1; γ_1 la conique de ϖ_1 homologue de la conique (Q, γ). La conique (Q, γ) a un contact du troisième ordre avec C en M, donc γ_1 a un contact du troisième ordre avec la cubique Γ_1 en M'. Soit m' la tangente à Γ_1 en M'. Les cubiques Γ_1, $p'_1 + 2m'$ déterminent un faisceau dont une courbe comprend γ_1 comme partie et est complétée par une droite touchant Γ_1 au tangentiel M'_1 de M' et passant par P'_1. Inversement, si M'_1 est un point dont le tangentiel est P'_1 et M' un point dont le tangentiel est M'_1, le faisceau déterminé par les cubiques Γ_1 et $p'_1 + 2\,M'M'_1$ contient une courbe comprenant comme partie la droite $P'_1M'_1$ et complétée par une conique γ_1 passant par A'_1, B'_1 et ayant un contact du troisième ordre avec Γ_1 au point M'. A cette conique γ_1 correspond un plan stationnaire de C. Il y a quatre positions de M'_1 et par suite 16 positions de M'.

<u>Une biquadratique gauche possède 16 plans stationnaires.</u>

Chapitre VI

La surface du troisième ordre.

§ 1.- Les vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.

165.- Préliminaires.- Considérons une surface du troisième ordre ou surface cubique. Trois cas peuvent se présenter :

a) La surface cubique est un cône.

b) La surface cubique est réglée.

c) La surface cubique possède au plus un nombre fini de droites. Dans ce cas, elle possède au plus des points doubles en nombre fini. C'est de ces dernières surfaces que nous nous occuperons d'abord.

166.- Théorème I.- Une surface cubique dépourvue de points doubles contient vingt-sept droites.

Soient F une surface cubique sans points doubles, C_1, C_2, C_3, C_4 les sections de cette surface par quatre plans formant un tétraèdre proprement dit. Les droites s'appuyant sur C_1, C_2, C_3 forment une surface réglée R d'ordre 27, passant six fois par chacune des courbes C_1, C_2, C_3 (n° 149). La courbe C_4 coupe R en $3 \times 27 - 3 \times 3 \times 6 = 27$ points non situés sur C_1, C_2 ou C_3. Par chacun de ces points passe une droite de R, rencontrant F en quatre points distincts et appartenant par suite à cette surface.

167.- Théorème I.- *Il y a dix droites d'une surface cubique sans point double qui rencontrent une droite de cette surface.*

Soit r une droite de F. Les droites s'appuyant sur r, C_1 et C_2 forment une réglée R_1 d'ordre neuf, pour laquelle C_1, C_2 sont doubles et r_1 quintuple. La courbe C_3 coupe R_1 en $3 \times 9 - 2 \times 3 \times 2 - 5 = 10$ points non situés sur C_1, C_2 ou r. Les droites passant par ces points et appartenant à R_1 coupent F en quatre points distincts et appartiennent à cette surface.

168.- Théorème II.- *Il y a cinq droites de la surface cubique sans point double s'appuyant sur deux droites de cette surface ne se rencontrant pas.*

Soient r_1, r_2 deux droites de F ne se rencontrant pas. Les droites s'appuyant sur C_1, C_2, r_1 forment une surface R_1 d'ordre 9. Cette surface est rencontrée en $9-2\times 2=5$ points en dehors de C_1, C_2, par r_2. Les droites de R_1 passant par ces cinq points coupent F en quatre points distincts et appartiennent à cette surface.

169.- Théorème V.- *Il y a trois droites d'une surface cubique sans point double s'appuyant sur trois droites de cette surface ne se rencontrant pas deux à deux.*

En effet, si r_1, r_2, r_3 sont trois droites de F ne se rencontrant pas deux à deux, les droites s'appuyant sur r_1, r_2, r_3 forment une demi-quadrique coupant C_1 en trois points en dehors de r_1, r_2, r_3. Les génératrices de la demi-quadrique passant par ces points coupent F en quatre points distincts et appartiennent à cette surface.

170.- Remarque.- Le nombre des droites distinctes appartenant à une surface cubique possédant des points doubles en nombre fini, est inférieur à 27. Cela tient, comme on le verra plus loin, au fait que l'acquisition d'un point double par la surface F implique la coïncidence de quelques-unes des 27 droites.

§ 2.- Représentation plane de la surface cubique générale.

171.- Cubiques gauches appartenant à une surface cubique.- Soit F une surface cubique dépourvue de points doubles ou, comme nous dirons brièvement, une surface cubique générale. Soient r_1, r_2 deux droites de F ne se rencontrant pas, r une troisième droite de F s'appuyant sur r_1, r_2. Considérons le réseau formé par les quadriques passant par r, r_1, r_2. Ces quadriques ne peuvent toucher F le long de chacune de ces droites, car alors F serait réductible ; elles ne peuvent toucher F le long de deux de ces droites, car alors elles rencontreraient encore F suivant des droites et cette surface serait réglée ; elles ne peuvent toucher F le long d'une de ces droites, car alors elles rencontreraient encore F suivant des coniques et les plans de celles-ci couperaient F suivant ∞^1 droites au moins. Il en résulte que les quadriques envisagées découpent sur F des cubiques gauches. Il y a d'ailleurs au plus un nombre fini de ces cubiques gauches qui soient réductibles, car autrement F serait réglée.

Une surface cubique générale contient des cubiques gauches irréductibles.

172.- Bisécantes d'une cubique gauche de F appartenant à cette surface.- Soient K une cubique gauche irréductible appartenant à F, C_1, C_2 deux sections planes de F. Les bisécantes de K s'appuyant sur C_1 forment une surface réglée R d'ordre six passant une fois par C_1 et trois fois par K. La courbe C_2 rencontre cette surface en 6 points en dehors de K et de C_1. Les droites de R passant par chacun de ces six points appartiennent à F. Désignons-les par $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Supposons que deux des droites précédentes, par exemple a_1, a_2, puissent se rencontrer. Le point de rencontre P appartient certainement à K. Le cône projetant K de P coupe F suivant K, a_1, a_2 et suivant une troisième droite passant par P et qui est une corde de K. Cette droite ne peut être située dans le plan de a_1, a_2 et par suite P est un point double de F, ce qui est contraire aux hypothèses.

Il existe six cordes deux à deux gauches d'une cubique gauche de F appartenant à cette surface.

173.- Représentation plane de F.- Rapportons projectivement les quadriques Q passant par K aux droites d'un plan ϖ. Nous établissons ainsi une correspondance birationnelle entre les cordes p de K et les points P' du plan ϖ. A un point P' de ϖ faisons correspondre le troisième point d'intersection P de F avec la corde p de K homologue de P'. Inversement, à un point P de F correspondra en général un point P' de ϖ. Nous avons ainsi établi une correspondance généralement biunivoque entre les points de F et ceux de ϖ. Il n'y a exception que si le point P' correspond à l'une des droites $a_1, a_2, \dots, a_6$. Le point P est alors indéterminé sur la droite correspondante. Nous désignerons par $A_1, A_2, \dots, A_6$ les points de ϖ qui correspondent aux droites $a_1, a_2, \dots, a_6$; ces points sont appelés points fondamentaux de la représentation plane de F.

Les points de K ne sont pas des points d'exception pour la correspondance. Soit en effet M un point de K ; le cône Q_0 projetant K de M coupe F suivant K et une seconde courbe du troisième ordre K' passant par M. A ce cône correspond une droite m du plan ϖ dont les points sont les homologues des points de K'. Un seul de ces points correspond au point M considéré sur la courbe K'. Aux droites passant par ce point correspondent les quadriques Q tangentes à K' en M, c'est-à-dire tangentes à F en ce point.

Les cordes de K s'appuyant sur une section plane C de F forment une surface d'ordre six passant par $a_1, a_2, \dots, a_6$, par C et trois fois par K. Cette surface ne rencontre plus F en dehors de ces courbes ; il lui correspond dans ϖ une cubique plane Γ_3 passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$. Inversement, à une cubique de ϖ passant par ces points correspond une surface du sixième ordre passant triplement par K et simplement par $a_1, a_2, \dots, a_6$. Cette surface rencontre encore F suivant une cubique C qui est nécessairement une section plane de F, car les ∞^3 courbes Γ_3 passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$ proviennent des ∞^3 sections planes de F, une courbe Γ_3 ne pouvant provenir que d'une section plane.

Aux sections de F par les plans d'un faisceau correspondent les courbes Γ_3 d'un faisceau ; il y a donc une projectivité entre les plans de l'espace et les courbes Γ_3 du système linéaire $|\Gamma_3|$, ∞^3, ayant pour points-base $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Les courbes Γ_3 sont les images des sections planes dans la représentation de F sur ϖ.

174.- <u>Etude des points fondamentaux</u>.- D'après leur construction, les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sont distincts. Ils ne peuvent se trouver sur une conique, car alors, dans $|\Gamma_3|$, on aurait un réseau formé de cette conique et des droites du plan. A ce réseau correspondrait une gerbe de plan de sommet M; comme deux courbes du réseau ont un point en commun, une droite passant par M ne rencontrerait plus F qu'en un point et M serait double pour F, contrairement à l'hypothèse.

Trois des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne peuvent appartenir à une droite, car le sommet de la gerbe homologue du réseau de $|\Gamma_3|$ formé par cette droite et les coniques passant par les trois autres points fondamentaux, serait double pour F.

Cela étant, soit r une droite de ϖ passant par A_1. Les cubiques Γ_3 touchant r en A_1 forment un réseau; il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R. Deux cubiques du réseau considéré ne se rencontrent plus qu'en deux points variables, donc une droite passant par R ne rencontre plus F qu'en deux points variables. Le point R est donc un point simple de F. Dans le réseau envisagé, se trouve la courbe Γ formée de r et de la conique β_1 passant par $A_2, \ldots, A_6$. Cette conique β_1 n'étant rencontrée qu'en un point variable par les courbes Γ_3, il lui correspond sur F une droite b_1; cette droite s'appuie sur $a_2, a_3, \ldots, a_6$, mais non sur a_1. A la droite r correspond sur F une conique ρ située dans un plan passant par b_1 et s'appuyant sur la droite a_1. Le plan de la section de F formée par b_1 et ρ passe par R. Ce point R appartient à la conique ρ, car les courbes Γ_3 touchant r en A_1 ne rencontrent plus cette droite qu'en un seul point variable. Ces cubiques rencontrent β_1 en un point variable, donc R n'appartient pas à b_1.

Voir errata

Supposons que le point R n'appartienne pas à a_1 et soit R' le point d'appui de ρ sur a_1. Aux sections de F par les plans passant par RR' correspondent des courbes Γ_3 ne rencontrant plus r en un point variable, formant un faisceau comprenant la courbe formée de r et de β_1. Ces courbes devraient toucher r en A_1 et passer par les deux points de rencontre de r et de β_1 ; or il n'existe qu'une courbe Γ_3 satisfaisant à ces conditions. Il en résulte que R doit appartenir à a_1.

Nous conviendrons d'exprimer cette propriété en disant qu'au point infiniment voisin de A_1 sur r correspond le point R de a_1.

Observons que le faisceau de rayons (A_1, ϖ) et le faisceau de plans d'axe b_1 sont projectifs, donc il y a une projectivité entre les points infiniment voisins de A_1 dans ϖ et les points de a_1.

A une courbe Γ_3 ayant un point double en A_1 correspond une conique située dans un plan passant par a_1.

Les points de rencontre de cette conique et de a_1 correspondent aux points de la cubique infiniment voisins de A_1.

On arrive à des conclusions analogues pour les autres points fondamentaux.

175.- Théorème.- Tout système linéaire de cubiques planes, ayant six points-base distincts non situés sur une conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite, représente le système des sections planes d'une surface cubique.

Soient $|\Gamma_3|$ le système considéré dans un plan ϖ, $A_1, A_2, \ldots, A_6$ les points-base. Rapportons projectivement les courbes Γ_3 aux plans de l'espace. Aux courbes Γ_3 passant par un point P' de ϖ correspondent les plans d'une gerbe de sommet P. Le lieu du point P est une surface algébrique F dont l'ordre est égal au nombre de points variables communs à deux courbes Γ_3. F est donc une surface cubique.

Considérons une droite r du plan ϖ passant par A_1 et les courbes Γ_3 touchant r en A_1 ; elles forment un réseau et le sommet R de la gerbe correspondante appartient à F. Comme une courbe Γ_3 a en général un point simple en A_1, le lieu de R, lorsque r varie, est une droite a_1. De même, aux points $A_2, \ldots, A_6$ correspondent des droites $a_2, \ldots, a_6$ de F. De plus, deux des six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ ne peuvent se rencontrer.

Il nous reste à prouver que F ne peut posséder de point double. L'existence d'un tel point entraîne celle d'un réseau de courbes Γ_3 dont deux courbes se coupent en un seul point variable. D'après les hypothèses faites sur la position des points-base, un tel réseau doit être constitué par des courbes Γ_3 ayant un point double fixe O. Si O coïncidait avec A_1, par exemple, il existerait un faisceau de courbes Γ_3 formées de la droite fixe $A_1 A_2$ et d'une conique variable passant par $A_1, A_3, \ldots, A_6$, ce qui est impossible. Si O était distinct de $A_1, \ldots, A_6$, on prouverait de même que les points $O, A_2, \ldots, A_6$ doivent se trouver sur ∞^1 coniques, ce qui est absurde.

176.- Les 27 droites de la surface F.- Toute courbe du plan ϖ rencontrée en un seul point variable par les courbes Γ_3 a pour homologue une droite de F. On retrouve ainsi les 27 droites de cette surface. Appelons β_i les coniques de ϖ passant par les cinq points fondamentaux distincts de A_i. Les 27 droites de F correspondent :

a) les six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ aux points fondamentaux $A_1, A_2, \ldots, A_6$;

b) les six droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$ aux six coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$;

c) les quinze droites a_{ik} aux quinze droites $A_i A_k$.

On peut étudier la configuration formée par les 27 droites d'une surface cubique. Bornons-nous à observer que les droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$ ne se rencontrent pas deux à deux, de même que les droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Ces groupes de 6 droites sont appelés sixains. Les deux sixains qui viennent d'être rencontrés sont tels qu'une droite de l'un en rencontre cinq de l'autre. Ce groupe de 12 droites est appelé double-sixain.

177.- Courbes tracées sur F.- A une courbe C_n, d'ordre n, tracée sur F et rencontrant $a_1, a_2, \ldots, a_6$ respectivement en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ points, correspond dans ϖ une courbe d'ordre n', ayant en $A_1, \ldots, A_6$ les multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, rencontrée en n

points variables par les courbes Γ_3. On a donc

$$3n' = n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 .$$

Aux droites du plan ϖ correspondent des cubiques gauches ne rencontrant pas les droites $a_1, a_2, \dots, a_6$ mais s'appuyant en deux points sur chacune des droites $b_1, b_2, \dots, b_6$. Aux courbes du cinquième ordre de ϖ, ayant des points doubles en $A_1, \dots, A_6$, correspondent des cubiques gauches ayant $a_1, a_2, \dots, a_6$ comme bisécantes, mais ne rencontrant pas $b_1, b_2, \dots, b_6$. On obtient ainsi deux familles de cubiques gauches; les courbes d'une famille se rencontrent en un point ; deux courbes de familles différentes se rencontrent en cinq points et appartiennent à une quadrique. Il existe d'ailleurs d'autres cubiques gauches sur F.

Aux coniques du plan ϖ correspondent des courbes du sixième ordre possédant les six droites $b_1, b_2, \dots, b_6$ comme quadrisécantes. Aux courbes du 10e ordre, ayant $A_1, A_2, \dots, A_6$ comme points quadruples, correspondent sur F des courbes du sixième ordre ayant $a_1, a_2, \dots, a_6$ comme quadrisécantes.

Si une courbe C_n, tracée sur F, possède la multiplicité s en un point n'appartenant pas à l'une des droites $a_1, a_2, \dots, a_6$, la courbe correspondante dans ϖ possède un point s-uple au point correspondant (distinct de $A_1, \dots, A_6$) et réciproquement.

178.- <u>Faisceaux de Halphen</u>.- Halphen a démontré l'existence de faisceaux de courbes planes du sixième ordre ayant neuf points doubles. Nous établirons ce théorème en utilisant la représentation plane de la surface cubique.

Une quadrique Q de l'espace coupe F suivant une courbe C_6 du sixième ordre à laquelle correspond sur ϖ une sextique Γ_6 ayant des points doubles en $A_1, A_2, \dots, A_6$. Comme il y a ∞^9 quadriques, il y aura ∞^9 courbes C_6. Nous aurons établi que toute sextique passant doublement par $A_1, A_2, \dots, A_6$ correspond à une courbe C_6 si nous démontrons que ces sextiques sont en nombre ∞^9 également. Supposons qu'elles soient en nombre ∞^{10}. Il y a ∞^7 de ces courbes passant par trois points de la conique β_1 ; elles comprennent cette courbe comme partie et par suite il y a ∞^7 quartiques ayant un point double en A_1 et passant simplement par $A_2, \dots, A_6$. Il y a ∞^3 de ces quartiques comprenant la conique β_1 comme partie et complétée par ∞^3 couples de droites passant par A_1, ce qui est absurde. Toutes les sextiques envisagées correspondent donc à des courbes C_6.

Fixons l'attention sur une cubique Γ_3' et soit α le plan qui lui correspond dans l'espace, C' la courbe (F, α). Considérons une conique γ du plan α, irréductible, tangente en trois points A_7', A_8', A_9' à la cubique C. Soient $\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ les plans tangents à F en ces points ; ces plans ne peuvent avoir une droite en commun et se rencontrent en un point O. Il existe un faisceau de quadriques passant par γ et touchant, le long de cette courbe, le cône projetant γ de O. Ces quadriques coupent F suivant des courbes C_6 ayant des points doubles en A_7', A_8', A_9'. En effet, les quadriques en question touchent la surface F en ces points. A ces courbes C_6 correspondent, sur ϖ, des sextiques Γ_6 ayant des points doubles en $A_1, A_2, \dots, A_6$ et aux points A_7, A_8, A_9 qui correspondent à A'_7, A'_8, A'_9. Ces sextiques forment un faisceau de Halphen, dont l'existence est ainsi démontrée. Le faisceau contient la courbe Γ'_3 comptée deux fois.

On observera que les points A_7, A_8 et la courbe Γ'_3 passant par ces points peuvent être choisis arbitrairement. Les tangentiels de A'_7, A'_8, A'_9 sur C' étant en ligne droite, le point A'_9 et par suite le point A_9 est déterminé. Il peut occuper trois positions.

La démonstration précédente est due à R. Sturm (Geometrischen Verwandschaften, t. IV, 1909). Voir aussi deux notes que nous avons publiées dans Mathesis, 1925, 1932. Il existe des faisceaux de Halphen de courbes planes d'ordre $3n$ ayant 9 points n-uples ; la démonstration de leur existence, par une généralisation de la démonstration de Sturm, a été faite par B. Gambier (Mathesis, 1926).

§ 3.- Surfaces cubiques ayant un nombre fini de points doubles.

179.- Théorème I.- La surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques planes irréductibles passant par cinq points et tangentes en un de ces points à une droite donnée, possède un point double.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_5$ cinq points d'un plan ϖ dont trois ne sont jamais en ligne droite et a_1 une droite passant par A_1, non tangente à la conique déterminée par les cinq points donnés. Désignons par Γ_3 les cubiques planes passant par les cinq points et tangentes à a_1 en A_1. En rapportant projectivement les courbes Γ_3 aux plans de l'espace, il correspond aux points du plan ϖ les points d'une surface cubique F. La démonstration est la même que dans le cas de la surface sans point double (n° 175).

Les courbes Γ_3 assujetties à toucher en A_1 une droite distincte de a_1 ont un point double en A_1 et forment un réseau. A ce réseau correspond une gerbe de sommet O. Deux courbes du réseau ne se rencontrant qu'en un point variable, le point O est double pour F.

Soit r une droite passant par A_1 et distincte de a_1, située dans ϖ. Il existe un faisceau de courbes Γ_3 ayant un point double en A_1, une des tangentes étant r et ce sont les seules courbes Γ_3 coupant r en trois points confondus en A_1. A ces courbes correspondent des plans passant par une droite r' issue de O. Si r' n'était pas tangente à F en O, elle couperait encore cette surface en un point R' et le point R de ϖ correspondant appartiendrait aux courbes Γ_3 d'un réseau comprenant le faisceau considéré, ce qui est impossible. La droite r' est donc tangente à F en O. Au point de F, infiniment voisin de O sur r', correspond le point de ϖ infiniment voisin de A_1 sur r. Cette correspondance est biunivoque et par suite projective. Le point O est double conique pour F.

Si la droite a_1 ne contient aucun des points A_2, A_3, A_4, A_5, il lui correspond sur F une droite a'_1 passant par O. Aux droites $A_1A_2, \ldots, A_1A_5$ et à la conique β_1 passant par les cinq points donnés, correspondent sur F cinq droites $a_{12}, \ldots, a_{15}$, b_1 passant par O. Les six droites ainsi obtenues forment l'intersection de F et de son cône tangent en O.

Si la droite a_1 passe par exemple par A_2, les cubiques Γ_3 passant par un point de a_1 forment un réseau dont a_1 est une partie fixe et qui comprend les coniques passant par A_3, A_4, A_5. Il en résulte qu'à la droite a_1 correspond sur F un second point double O'.

180.- Théorème V.- La surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques planes rencontrant une conique irréductible en six points fixes et distincts, possède un point double conique.

Considérons, dans un plan ϖ, une conique Γ_2 et les cubiques Γ_3 coupant Γ_2 en six points fixes distincts A_1, $A_2, \ldots, A_6$. Les courbes Γ_3 forment un système linéaire ∞^3; en les rapportant projectivement aux plans de l'espace, il correspond aux points du plan ϖ les points d'une surface cubique F.

Les courbes Γ_3 passant par un point de Γ_2, distinct de $A_1, \ldots, A_6$, forment un réseau dont Γ_2 est une partie fixe ; les courbes de ce réseau sont complétées par les droites du plan et il leur correspond les plans d'une gerbe dont le sommet O est un point double F.

Aux droites de ϖ passant par un point R de Γ_2 correspondent les sections de F par les plans passant par une droite r issue de O. Si r n'est pas tangente à F en O, elle coupe encore cette surface en un point R' et aux plans passant par R' correspondent les courbes Γ_3 d'un réseau comprenant le faisceau de droites de sommet R et distinct du réseau formé de Γ_2 et des droites de ϖ, ce qui est impossible. La droite r touche donc F en O. Aux points Γ_2 correspondent sur F les points infiniment voisins de O. Il en résulte que O est double conique pour la surface F.

Observons qu'aux points $A_1, \dots, A_6$ correspondent six droites $a_1, \dots, a_6$ passant par O. Aux points infiniment voisins de A_i dans ϖ, correspondent projectivement les points de a_i. Aux droites $A_i A_k$ correspondent 15 droites a_{ik}. Par suite, une surface cubique possédant un point double conique, contient 21 droites.

181.- Application. - Nous allons appliquer le théorème précédent à la démonstration du théorème suivant: Si une sextique possède six points doubles sur une conique, dont cinq sont des points de rebroussement, il en est de même du sixième. (Voir notre note dans Mathesis, 1924).

En conservant les notations précédentes, il s'agit de démontrer que si une sextique Γ_6 de ϖ possède cinq points de rebroussement en $A_1, \dots, A_5$ et un point double en A_6, ce point double est également un point de rebroussement. Observons qu'à la courbe C_6, section de F par une quadrique Q, correspond dans ϖ une sextique Γ_6 ayant des points doubles en $A_1, A_2, \dots, A_6$. Toute sextique de ϖ possédant cette dernière propriété provient d'une courbe C_6. En effet, s'il en était autrement, il y aurait au moins ∞^{10} de ces sextiques. Il y en aurait ∞^9 formée de Γ_2 et de quartiques passant par $A_1, \dots, A_6$. Il y aurait ∞^6 de ces quartiques formées de Γ_2 et de coniques du plan ϖ, ce qui est absurde.

Cela étant, une courbe C_6, homologue d'une courbe Γ_6 ayant des points de rebroussement en $A_1, \dots, A_5$, est découpée sur F par une quadrique Q tangente aux droites $a_1, a_2, \dots, a_5$ et ne passant pas par O. Les points de contact sont situés sur le plan polaire α de O par rapport à Q. Le cône projetant de O la conique (α, Q) contient

$a_1, a_2, \dots, a_5$ et coïncide par suite avec le cône tangent à F en O ; il contient donc a_6. Il est de plus circonscrit à Q le long de (α, Q), par conséquent Q est tangente à a_6 et le point A_6 est un cuspide de la courbe Γ_6 considérée. Le théorème est donc démontré.

Observons que les tangentes de rebroussement en $A_1, A_2, \dots, A_6$ à la courbe Γ_6 considérée touchent, en ces points, la cubique Γ_3 qui correspond au plan α.

182.- Théorème II.- La surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques planes passant par trois points en ligne droite et par trois points non en ligne droite, possède un point double conique.

Soient A_1, A_2, A_3 trois points appartenant à une droite a et A_4, A_5, A_6 trois points non en ligne droite d'un plan ϖ passant par a. Nous supposerons qu'aucun des côtés du triangle $A_4 A_5 A_6$ ne passe par un des points A_1, A_2, A_3. Les cubiques Γ_3 passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$ forment un système linéaire ∞^3 et sont irréductibles. En les rapportant projectivement aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F représentée point par point sur le plan ϖ.

Les courbes Γ_3 passant par un point de a distinct de A_1, A_2, A_3, forment un réseau dont a est une partie fixe ; les courbes de ce réseau sont complétées par les coniques Γ_2 passant par A_4, A_5, A_6. A ce réseau correspond une gerbe dont le centre O est un point double de F.

Aux coniques Γ_2 passant par un point R de a correspondent les sections de F par des plans passant par une droite r, tangente en O à F. (La démonstration est la même que dans les cas précédents). Aux points de F infiniment voisins de O correspondent les points de a et O est donc un point double conique de F.

Observons que les 21 droites de F correspondent : six aux points $A_1, \dots, A_6$; trois aux côtés du triangle A_4, A_5, A_6 ; 9 aux droites $A_i A_k$ ($i = 1, 2, 3$; $k = 4, 5, 6$) ; trois aux coniques Γ_2 passant par deux des points A_1, A_2, A_3.

183.- Théorème IV.- La surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques planes rencontrant deux droites en six points fixes distincts, possède un point double biplanaire.

Soient, dans un plan ϖ, a, b deux droites ; A_1, A_2, A_3 trois points de a ; A_4, A_5, A_6 trois points de b, ces 6 points étant distincts. Les cubiques planes Γ_3 passant par ces six points sont irréductibles et forment un système linéaire ∞^3. En les rapportant projectivement aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F représentée point par point sur le plan ϖ.

Les courbes Γ_3 contenant a forment un réseau ; elles comprennent nécessairement b et sont complétées par les droites de ϖ. A ce réseau correspond une gerbe dont le sommet O est double pour F.

Aux droites passant par un point R de a correspondent les sections de F par des plans passant par une droite r issue de O. On démontre, comme plus haut que r est tangente à F en O. Aux points de a correspondent donc sur F des points infiniment voisins de O. Lorsque R décrit a, r varie dans un plan α tangent à F en O, car une droite de ϖ ne coupe a qu'en un point. De même, aux points de b correspondent les points infiniment voisins de O, sur F, situés dans un plan β

tangent à F en O. Le point O est donc bien double biplanaire pour F.

Observons qu'aux points A_1, A_2, A_3 correspondent trois droites de F situées dans α et aux points A_4, A_5, A_6, trois droites de F situées dans β. Les droites $A_i A_k$ ($i = 1, 2, 3$; $k = 4, 5, 6$) donnent 9 nouvelles droites de F. <u>Une surface cubique possédant un point double biplanaire contient 15 droites.</u>

184.- <u>Théorème V.</u>- <u>La surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques irréductibles ayant des tangentes fixes en trois points fixes distincts en ligne droite, possède un point double uniplanaire.</u>

Soient, dans un plan ϖ, a une droite, A_1, A_2, A_3 trois points fixes de cette droite, a_1, a_2, a_3 trois droites distinctes de a passant respectivement par A_1, A_2, A_3. Les cubiques Γ_3, touchant respectivement a_1, a_2, a_3 en A_1, A_2, A_3, sont irréductibles et forment un système linéaire ∞^3. En les rapportant projectivement aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F représentée point par point sur le plan ϖ.

Les courbes Γ_3 passant par un point de a sont composées de la droite a comptée deux fois et des droites du plan ; elles forment un réseau auquel correspond une gerbe dont le sommet O est double pour F.

Aux droites de ϖ passant par un point R de a correspondent les sections de F par les plans passant par une droite r nécessairement tangente à F en O. Les points de a correspondent donc aux points de F infiniment voisins de O. Comme une droite de ϖ ne coupe a qu'en un point, la section plane correspondante doit avoir un point de rebroussement en O et ce point est double uniplanaire pour F.

Observons qu'aux points A_1, A_2, A_3 correspondent trois droites de F, a'_1, a'_2, a'_3, passant par O. D'autre part, aux droites a_1, a_2, a_3 correspondent des droites a''_1, a''_2, a''_3 de F, ne passant pas par O et s'appuyant respectivement sur a'_1, a'_2, a'_3. Comme l'ensemble des droites a_1, a_2, a_3 forme une courbe Γ_3, les droites a''_1, a''_2, a''_3 sont coplanaires. <u>Une surface cubique possédant un point double uniplanaire, contient six droites</u>.

Si les droites a_1, a_2, a_3 concourent en un point P, les droites a''_1, a''_2, a''_3 concourent en un point P' et les sections de F par des plans passant par P' ont un point d'inflexion en P', la tangente d'inflexion appartenant au plan des droites a''_1, a''_2, a''_3.

185.- <u>Théorème VI</u>.- <u>Une surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques planes circonscrites à un quadrilatère complet, possède quatre points doubles coniques</u>.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les côtés d'un quadrilatère complet dans un plan ϖ. Posons $A_{ik} = a_i a_k$. Les cubiques planes Γ_3 passant par les points A_{ik} sont irréductibles et forment un système linéaire ∞^3. En rapportant projectivement les courbes Γ_3 aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F représentée biunivoquement sur ϖ.

En reprenant la démonstration du théorème III, on voit qu'à chacune des droites a_1, a_2, a_3, a_4 correspondent des points doubles A_1, A_2, A_3, A_4 de F. Les sections de F par les plans passant par A_1 correspondent aux coniques passant par les points A_{34}, A_{42}, A_{23}; comme aux points de a_1 correspondent les points de F infiniment voisins de A_1 et que ces coniques coupent a_1 en deux points distincts, A_1 est double conique pour F. Il en est de même de A_2, A_3, A_4.

Les points A_1, A_2, A_3, A_4 ne peuvent se trouver dans un même plan, car à la section de F par ce plan correspondrait une cubique Γ_3 formée des droites a_1, a_2, a_3, a_4, ce qui est absurde.

Observons qu'au point A_{ik} correspond sur F la droite $A_i A_k$. D'autre part, aux diagonales du quadrilatère complet correspondent des droites de F. Donc <u>La surface cubique ayant des points doubles coniques aux sommets d'un tétraèdre, contient neuf droites.</u>

186.- <u>Théorème VI</u>.- <u>La surface cubique dont les sections planes sont représentées par les cubiques planes irréductibles inscrites et circonscrites à un triangle, possède trois points doubles biplanaires.</u>

Soient, dans un plan ϖ, A_1, A_2, A_3 les sommets d'un triangle. Les cubiques Γ_3 circonscrites à ce triangle et tangentes en A_1 à la droite A_1A_2, en A_2 à A_2A_3 et en A_3 à A_3A_1 sont irréductibles et forment un système linéaire ∞^3. En rapportant projectivement ces courbes aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F représentée point par point sur le plan ϖ.

Les cubiques Γ_3 assujetties à toucher en A_1 une droite distincte de A_1A_2, forment un réseau; elles ont un point double en A_1 et comprennent comme partie la droite A_1A_3; elles sont complétées par les coniques Γ_2 tangentes en A_2 à A_2A_3 et passant par A_1. Il en résulte qu'à ce réseau correspond une gerbe de plans dont le sommet O_1 est double pour F.

A un point infiniment voisin de A_1 correspond un point infiniment voisin de O_1 sur F, et à un point de $A_1 A_3$, correspond également un point de F infiniment voisin de O_1. Il suffit, pour le démontrer, de reprendre le raisonnement déjà fait plusieurs fois. Le point O_1 est donc biplanaire pour F. Aux points infiniment voisins de O_1 dans un des plans tangents α_1 correspondent les points de ϖ infiniment voisins de A_1, et aux points analogues du second plan tangent β_1, correspondent les points de $A_1 A_3$. On arrive à des conclusions analogues pour A_2, A_3. On obtient ainsi deux points doubles biplanaires O_2, O_3 de F et on définira les plans tangents α_2, β_2 en O_2, α_3, β_3 en O_3 par permutation tournante.

Considérons une courbe Γ_3, soit Γ'_3, irréductible, déterminée. Les courbes Γ_3 osculant Γ'_3 en A_1 forment un réseau dont deux courbes se rencontrent en deux points variables. A ce réseau correspond donc une gerbe de plans dont le sommet R appartient à F. Lorsque Γ'_3 varie, le lieu de R est une droite r, car toute cubique Γ_3 ne fait partie que d'un réseau analogue à celui qui vient d'être considéré. Mais parmi les réseaux analogues, se trouvent les réseaux formés des courbes Γ_3 ayant un point double en A_1 ou en A_2 ; par suite r est la droite $O_1 O_2$. On trouve de même les droites $O_2 O_3$, $O_3 O_1$.

Aux sections de F par les plans passant par $O_1 O_2$ correspondent des courbes Γ_3 ayant des points doubles en A_1, A_2 et par suite formées des droites $A_1 A_3$, $A_1 A_2$ et d'une droite (variable) passant par A_2. Cette droite contient un point infiniment voisin de A_2 et un point de A_1A_3, par suite la conique correspondante sur F est tangente à α_2 en O_2 et à β_1 en O_1. Il en résulte que les plans α_1, β_2 passent par O_1O_2. De même, les plans α_2, β_3 passent par O_2O_3 et les plans α_3, β_1 par O_3O_1.

La section de F par le plan α_1 présente un point triple en O_1 ; il lui correspond une courbe Γ_3 ayant un point triple en A_1, c'est-à-dire la courbe Γ_3 formée de la droite A_1A_2 comptée deux fois et de la droite A_1A_3.

Puisque les courbes Γ_3 homologues des sections de F par les plans contenant O_1O_2, comprennent la droite A_1A_2, la section de F par le plan β_2 a pour homologue une courbe Γ_3 comprenant une seconde fois A_1A_2, c'est-à-dire la courbe Γ_3 qui correspond à α_1. Les plans α_1, β_2 coïncident donc ; il en est de même des plans α_2, β_3 et des plans α_3, β_1.

A la courbe Γ_3 formée des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ correspond la section de F par le plan $O_1O_2O_3$.

Une courbe Γ_3 irréductible coupe la courbe $2A_1A_2 + A_1A_3$, qui correspond à α_1, en des points fixes : 2 réunis en A_2, 2 en A_3 et 5 en A_1. On en conclut que la section de F correspondant à Γ_3 a un point d'inflexion sur la droite O_1O_2, la tangente d'inflexion appartenant à α_1. En d'autres termes, les plans $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ont un contact du second ordre avec F le long de O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1.

Observons que si l'on prend pour triangle de référence dans le plan ϖ le triangle $A_1A_2A_3$, les courbes Γ_3 ont pour équation

$$\lambda_1 x_1^2 x_3 + \lambda_2 x_2^2 x_1 + \lambda_3 x_3^2 x_2 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

En posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2 x_3 : x_2^2 x_1 : x_3^2 x_2 : x_1 x_2 x_3 ,$$

on obtient, pour équation de F,

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3 .$$

Cette surface possède des points doubles biplanaires aux sommets du tétraèdre de référence situés dans le plan $X_4 = 0$.

187.- Remarque.- Tout système linéaire ∞^3 de cubiques planes irréductibles, sans points doubles, dont deux courbes se rencontrent en trois points variables, peut être pris comme représentant les sections planes d'une surface cubique n'ayant qu'un nombre fini de points doubles. La position et la nature de ceux-ci dépendent de la position des points-base du système. Les théorèmes précédents montrent comment la surface F peut être étudiée. Le problème inverse, facile à résoudre, montre que l'on obtient les surfaces cubiques les plus générales du type considéré.

188.- Surfaces cubiques ayant un point double uniplanaire.- Une surface cubique F ayant en O_4 $(0,0,0,1)$ un point double uniplanaire, le plan tangent étant $x_3 = 0$, a pour équation

$$x_4 x_3^2 + \varphi_3 (x_1, x_2, x_3) = 0 . \qquad (1)$$

En projetant les points de F du point O_4 sur le plan $x_4 = 0$, on obtient une représentation plane de F. Les cubiques Γ_3 homologues des sections planes de F ont pour équation

$$x_3^2 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) - \lambda_4 \varphi_3 = 0 . \qquad (2)$$

Les droites de F situées dans le plan $x_3 = 0$ sont données par

$$x_3 = 0 , \varphi_3 (x_1, x_2, 0) = 0 . \qquad (3)$$

Trois cas peuvent se présenter :

1°) Les droites (3) sont distinctes. Les courbes (2) touchent la courbe $\varphi_3 = 0$ aux points de rencontre de cette courbe avec la droite $x_3 = 0$ (Cfr. n° 184).

2°) Deux des droites (3) sont confondues. On peut supposer que les droites (3) sont $x_1 = x_3 = 0$ (comptées deux fois) et $x_2 = x_3 = 0$. On a alors $\varphi_3(x_1, x_2, 0) \equiv x_1^2 x_2$ et l'équation (2) s'écrit sous la forme

$$x_3^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) - \lambda_4\left[x_1^2 x_2 + x_3 \psi_2(x_1, x_2, x_3)\right] = 0. \qquad (2')$$

Ces courbes ont même tangente en O_1 et en O_2 ; en ce dernier point, elles ont un contact du 3e ordre et la tangente est $x_3 = 0$.

3°) Les trois droites (3) sont confondues en une droite $x_2 = x_3 = 0$. L'équation (2) peut s'écrire

$$x_3^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) - \lambda_4\left[x_2^3 + x_3 \psi_2(x_1, x_2, x_3)\right] = 0. \qquad (2'')$$

Les courbes (2") ont en O_1 un point d'inflexion et un contact du cinquième ordre, la tangente d'inflexion étant $x_3 = 0$. La surface F ne contient qu'une droite.

On peut naturellement partir de ces représentations planes pour retrouver la surface F.

§4.- Générations de la surface cubique.

189.- Théorème. - Le lieu des points communs aux plans homologues de trois gerbes projectives, est une surface cubique. (Grassmann).

Les équations des plans homologues des trois gerbes projectives peuvent s'écrire

$$\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0,$$
$$\lambda_1 a'_x + \lambda_2 b'_x + \lambda_3 c'_x = 0,$$
$$\lambda_1 a''_x + \lambda_2 b''_x + \lambda_3 c''_x = 0.$$

Le lieu du point commun à ces trois plans est la surface cubique

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Cette surface passe par les sommets des trois gerbes.

190.- <u>Réciproquement, une surface cubique générale est le lieu des points communs aux plans homologues de trois gerbes projectives dont les sommets sont des points de la surface</u>.

Soient F une surface cubique générale (sans points doubles), a_1, a_2, a_3, a_4 quatre droites deux à deux gauches de F ; A_1, A_2, A_3 trois points de F n'appartenant pas à ces droites. Considérons, entre les gerbes de sommets A_2 et A_3, A_3 et A_1, A_1 et A_2, les homographies, bien déterminées.

$$\Omega_a = \begin{pmatrix} A_2a_1 & A_2a_2 & A_2a_3 & A_2a_4 \\ A_3a_1 & A_3a_2 & A_3a_3 & A_3a_4 \end{pmatrix}, \Omega_b = \begin{pmatrix} A_3a_1 & A_3a_2 & A_3a_3 & A_3a_4 \\ A_1a_1 & A_1a_2 & A_1a_3 & A_1a_4 \end{pmatrix}, \Omega_c = \begin{pmatrix} A_1a_1 & A_1a_2 & A_1a_3 & A_1a_4 \\ A_2a_1 & A_2a_2 & A_2a_3 & A_2a_4 \end{pmatrix}.$$

On a $\Omega_a \Omega_b \Omega_c = 1$ et le lieu des points communs aux plans homologues est une surface cubique F_1.

Il s'agit de démontrer que F_1 coïncide avec F. Observons que la surface F_1 contient les points A_1, A_2, A_3, les droites a_1, a_2, a_3, a_4 et par suite les droites b_1, b_2 s'appuyant sur a_1, a_2, a_3, a_4. Si la surface F_1 était distincte de la surface F, les deux surfaces détermineraient un faisceau et ce faisceau découperait, sur le plan $\varpi = A_1A_2A_3$, un faisceau de cubiques planes ayant comme points-base A_1, A_2, A_3 et les sections de $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ par ϖ. Si donc on choisit le point A_3 de manière à ce que la cubique passant par $A_1, A_2, \varpi a_1, \dots, \varpi b_2$ soit unique, les surfaces F_1 et F coïncideront, car autrement, il y aurait une surface du faisceau déterminé par F, F_1 contenant ϖ comme partie et complétée par une quadrique coupant F suivant $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$, ce qui est impossible.

191. - Remarque. - On peut obtenir, par le même procédé, les surfaces cubiques possédant des points doubles. C. Segre a montré que seule la surface cubique possédant un point double uniplanaire et une seule droite, ne pouvait être engendrée par ce procédé. (Archiv der Math. und Phys. 3e série, t. X, 1905-1906).

192. - Théorème. - Le lieu du point commun à trois plans homologues de trois faisceaux en relation trilinéaire, est une surface cubique. (Grassmann)

Considérons trois faisceaux de plans

$$\lambda_1 \alpha_x + \lambda_2 \alpha'_x = 0, \quad \mu_1 \beta_x + \mu_2 \beta'_x = 0, \quad \nu_1 \gamma_x + \nu_2 \gamma'_x = 0, \qquad (2)$$

liés par la relation trilinéaire

$$\Sigma A_{ikl} \lambda_i \mu_k \nu_l = 0. \qquad (i, k, l = 1, 2). \qquad (3)$$

L'élimination des λ, μ, ν entre les équations (2) et (3) donne une surface cubique passant par les axes de trois faisceaux de plans donnés.

193. - Remarque. - Observons que si, dans l'équation (3), on annule les coefficients de λ_1, λ_2, on obtient deux couples de plans des deux derniers faisceaux pour lesquels le plan homologue du premier est indéterminé. On peut supposer que ces couples de

plans sont $\beta_x = 0$ et $\gamma'_x = 0$, $\beta'_x = 0$ et $\gamma_x = 0$. L'équation (3) s'écrit alors

$$A_{111}\lambda_1\mu_1\nu_1 + A_{122}\lambda_1\mu_2\nu_2 + A_{211}\lambda_2\mu_1\nu_1 + A_{222}\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0.$$

Si l'on annule les coefficients de ν_1, ν_2 dans cette équation, on obtient de même deux couples de plans des deux premiers faisceaux pour lesquels le plan homologue du troisième est indéterminé. Les plans du second faisceau appartenant à ces couples sont $\beta_x = 0$, $\beta'_x = 0$. On peut supposer que ces couples sont complétés par $\alpha'_x = 0$, $\alpha_x = 0$. L'équation (3) prend alors la forme

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 - \lambda_2\mu_2\nu_2 = 0.$$

La surface cubique correspondante a pour équation

$$\alpha_x\beta_x\gamma_x + \alpha'_x\beta'_x\gamma'_x = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha'_x & 0 \\ 0 & \beta_x & \beta'_x \\ \gamma'_x & 0 & \gamma_x \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant le déterminant du premier membre par un déterminant à 9 éléments, non nul, dont les éléments sont des constantes, on retrouve une équation de la forme (1) (n° 189). Ceci donne la liaison entre les deux générations.

194.- Génération de Le Paige.- Si un tétraèdre se déforme de telle manière que trois de ses faces passent par trois droites fixes a_1, a_2, a_3, tandis que les côtés de la quatrième face s'appuient sur les arêtes b_1, b_2, b_3 d'un trièdre donné, cette quatrième face enveloppant une quadrique Q tangente aux trois faces du trièdre, le quatrième sommet décrit une surface cubique passant par les droites

a_1, a_2, a_3 et par le sommet du trièdre. (Acta Mathematica, 1883, 1885).

Les trois faisceaux de plans d'axes a_1, a_2, a_3 sont en relation trilinéaire. Menons en effet par a_1, a_2 par exemple des plans α_1, α_2 ; par les points $b_1\alpha_1$, $b_2\alpha_2$ passe un seul plan α tangent à Q, distinct de la face $b_1 b_2$ du trièdre ; le plan α coupe b_3 en un point déterminant un plan α_3 passant par a_3 et le point $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ appartient au lieu cherché. La correspondance entre les plans $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant algébrique, est trilinéaire. Le lieu envisagé est donc une surface cubique F passant par a_1, a_2, a_3. Si l'on prend en particulier $\alpha_1 = a_1 O$, $\alpha_2 = a_2 O$, O étant le sommet du trièdre, le plan α_3 homologue est indéterminé, mais passe par O, qui est donc un point de F.

195.- Génération de F. Deruyts.- Si un triangle se déforme de telle manière que deux côtés s'appuient sur deux couples de droites, le plan du triangle passant par un point fixe, le sommet commun aux deux premiers côtés décrit une surface cubique.

Ce théorème a été démontré plus haut (n° 15)

196.- Deux autres générations de la surface cubique.- Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses sommets décrivent des plans α_1, α_2, tandis que des deux côtés opposés, l'un s'appuie sur deux droites, l'autre passant par un point, le troisième côté décrivant un complexe linéaire, le troisième sommet décrit une surface cubique.

Si un triangle se déforme de telle sorte que deux de ses sommets décrivent des plans α_1, α_2, l'un des côtés opposés s'appuyant sur deux droites, l'autre appartenant à un complexe linéaire et le troisième côté passant par un point fixe, le troisième sommet décrit une surface cubique.

Ces théorèmes se démontrent aisément au moyen du principe de correspondance. Voir L. Godeaux, Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut (1907) et S. Halleux, Mémoires de la Société des Sciences de Liège, 1930.

§ 5.- Surfaces cubiques réglées gauches.

197.- Généralités.- Soit F une surface cubique réglée gauche irréductible. D'après les propriétés générales des surfaces réglées, la surface F possède une courbe double a sur laquelle ses génératrices g s'appuient en un point. L'ordre de la courbe a ne peut être supérieur à l'unité, car les bisécantes de cette courbe appartiendraient à F et cette surface serait réductible si a était plane, indéterminée si a était gauche. La surface F possède donc une droite directrice a double pour la surface.

Inversement, une surface cubique possédant une droite double, est réglée, car tout plan passant par cette droite coupe encore la surface suivant une droite.

Un plan passant par une génératrice g de F coupe encore cette surface suivant une conique γ passant par le point ag. Il existe donc, sur la surface F, ∞^2 coniques

γ s'appuyant sur a.

Si deux génératrices de F se rencontrent, le point de rencontre appartient à a, sans quoi il existerait un plan passant par a et contenant deux génératrices de F.

Par un point A de a passent deux génératrices g_1, g_2 de F. Deux cas peuvent se présenter :

1°) Les droites g_1, g_2 sont en général distinctes de a.

2°) L'une des droites g_1, g_2 coïncide toujours avec a. En d'autres termes, a est à la fois directrice et génératrice de la surface F.

Nous trouvons donc deux catégories de surfaces cubiques réglées gauches.

198.- Surfaces de la première catégorie.- Supposons que F appartienne à la première catégorie et soient A, A' deux points de a ; g_1, g_2 les génératrices passant par A ; g'_1, g'_2 celles qui passent par A'. Les plans $\alpha = g_1 g_2$, $\alpha' = g'_1 g'_2$ ne peuvent passer par a ; ils se coupent suivant une droite $b = \alpha\alpha'$ qui rencontre les droites g_1, g_2, g'_1, g'_2 en des points distincts et qui par suite appartient à F. Lorsque le point A' varie sur a, la droite b ne peut varier, car alors le plan α ferait partie de F, ce qui est impossible. Les génératrices de F s'appuient donc sur une droite b, ne coupant pas a, et par un point de b passe une de ces génératrices. Entre les ponctuelles de supports a, b, nous avons une correspondance $(1,2)$, les points homologues appartenant à une même génératrice de F.

Inversement, si entre deux ponctuelles de supports gauches a, b, nous avons une correspondance $(1,2)$, les droites joignant les points homologues engendrent une surface réglée du troisième ordre dont a est la directrice double. Soit en effet d une troisième droite ne rencontrant ni a, ni b. Les droites s'appuyant sur a, b, d forment une demi-quadrique et déterminent, entre a et b, une correspondance projective (1,1). Le produit de cette correspondance et de la correspondance donnée fournit une correspondance (1,2) entre les points de b. Il y a trois points unis, par lesquels passent les trois seules génératrices du lieu cherché s'appuyant sur d. D'autre part, dans tout plan passant par a, se trouve une seule génératrice du lieu.

Une surface cubique réglée de la première catégorie est le lieu des droites joignant les points homologues de deux ponctuelles de supports gauches en correspondance (1,2) ; le support de la première ponctuelle est double pour la surface.

199.- Représentation plane.- Soient r, s deux génératrices gauches de F et ϖ un plan passant par a. A un point M de F nous faisons correspondre le point M' de ϖ en lequel la droite passant par M et s'appuyant sur r, s, coupe ce plan. Nous établissons ainsi entre F et ϖ une correspondance birationnelle (algébrique).

A tout point de b correspond le point $B = b\varpi$. Aux points d'une génératrice g de F correspondent les points d'une droite g' de ϖ passant par B. Les droites r, s, g, g' appartiennent à une demi-quadrique de directrices a, b.

Soit C une section plane de F ; c'est une cubique plane ayant un point double sur a. Les droites s' appuyant sur r, s et sur une droite d' de ϖ, ne passant pas par B, forment une demi-quadrique qui rencontre C en deux points en dehors de a, r, s, donc à C correspond dans ϖ une conique C'. Si d' passe par B, la demi-quadrique coupe C en un point de b, donc la conique C' passe par B.

On démontre de même qu'aux ∞^2 coniques γ tracées sur F correspondent les droites de ϖ.

Si M est un point de r, son homologue M' est situé sur la tangente à F en M s'appuyant sur s. Le lieu de cette tangente est une demi-quadrique se raccordant à F le long de r. Cette demi-quadrique coupe ϖ suivant les points d'une droite r' passant par B. De même à s correspond une droite s' passant par B.

Considérons un point A de a et les génératrices g_1, g_2 passant par A. A ces droites correspondent deux droites g'_1, g'_2 de ϖ, passant par B et par suite au point A correspondent les points ag'_1, ag'_2 du plan ϖ. Ce couple de points, lorsque A varie, engendre une involution I. Soit maintenant α un plan passant par A et coupant F suivant une cubique plane C. Les tangentes à C en A sont découpées sur le plan α par les plans ag_1, ag_2 tangents à F en A. Par suite, la conique C' qui correspond à C dans ϖ, passe par les points ag'_1, ag'_2. On voit donc qu'aux sections planes de F correspondent les coniques C' passant par B et par les couples de points de l'involution I sur a.

Inversement, soient, dans un plan ϖ, C' les coniques passant par un point B et par les couples de points d'une involution I donnée sur une droite a ne passant pas par B. Les coniques C' forment un système linéaire ∞^3, car les coniques passant par B et par trois points de ϖ découpent sur a les couples d'une involution qui a un couple commun avec I. Cela étant, rapportons projectivement les courbes C' aux plans de l'espace. Aux points de ϖ correspondent les points d'une surface cubique F, car deux coniques C' se rencontrent en trois points variables. Aux droites passant par B correspondent des droites de F, donc cette surface est réglée. Les coniques C' touchant en B une droite g' forment un réseau, dont les courbes se rencontrent en deux points variables. Aux courbes de ce réseau correspondent les plans d'une gerbe dont le sommet G est donc un point simple de F et appartient à la droite g de F homologue de g'. Lorsque g' varie, G décrit une droite b de F, car une conique C' n'ayant qu'une tangente en B, une section plane de F ne peut contenir qu'un point de b. Toutes les droites g s'appuient sur b et il y a une correspondance projective entre les points de b et les points de ϖ infiniment voisins de B.

Les coniques C' passant par un couple A'_1, A'_2 de I forment un réseau dont les courbes se rencontrent encore en un point variable. Le sommet de la gerbe correspondante est un point A double pour F et par lequel passent les droites g_1, g_2 homologues des droites $g'_1 = BA'_1$, $g'_2 = BA'_2$. Comme une conique C' ne contient qu'un couple de I, le lieu de A est un droite a, double pour F.

Les coniques d'un plan passant par un point fixe et découpant sur une droite une involution donnée, représentent les sections planes d'une surface cubique réglée de la première catégorie, et inversement.

200. - Surfaces de la seconde catégorie. - Supposons que la droite double a de F soit à la fois directrice et génératrice. Par un point A de a passent deux génératrices a et g, déterminant un plan α passant par a. Le plan α est un des deux plans tangents à F en A. L'autre plan tangent à F en A doit couper la surface F suivant trois droites confondues en a ; ce plan α' est donc tangent à F en tout point de a. Entre les points A de a et les plans tangents α à F en ces points, il y a une correspondance biunivoque, c'est-à-dire une projectivité.

Considérons un plan ϖ passant par a, distinct de α', et deux génératrices r, s de F non situées dans ϖ. A un point M de F faisons correspondre le point M' de ϖ où ce plan est coupé par la droite passant par M et s'appuyant sur r, s. On obtient ainsi une représentation de F sur le plan ϖ.

Soit g une génératrice de F. Les droites s'appuyant sur r, s, g forment une quadrique ayant même plan tangent que F en ga, ra, sa et par suite se raccordant à F le long de a. Cette quadrique coupe ϖ suivant a et une droite g' passant par le point P de a où ϖ touche la surface F. Aux génératrices de F correspondent donc les droites du faisceau (P, ϖ). En particulier, à la droite a correspond cette droite.

aux droites r, s correspondent également des droites du faisceau (P, ϖ), obtenues comme intersection de ϖ et de quadriques se raccordant à F le long de a et de r ou s.

Soit γ un plan coupant a en A et F suivant une cubique plane C. Comme dans le cas des surfaces de la première catégorie, on démontre que la courbe du plan ϖ qui correspond à la courbe C est une conique C'. Si g est la génératrice de F passant par A, le plan $\alpha = ag$ est tangent à C en A et par suite, la conique C' passe par P et y touche la droite g' de ϖ homologue de g. La courbe C possède un point double en A, la seconde tangente étant la droite $\alpha'\gamma$. La quadrique Q lieu des droites s'appuyant sur $\alpha'\gamma$, r, s, touche le plan ϖ en un point A' appartenant à la conique C'. Observons que le point A' ne varie pas lorsque le plan γ varie en continuant à passer par A, car toutes les quadriques Q se raccordent le long de a. D'autre part, une quadrique lieu de droites s'appuyant sur r, s et touchant ϖ en A', touche α' en A ; il y a donc une correspondance projective entre les points A, A' et par suite, une projectivité entre les points A' de a et les droites g' du faisceau (P, ϖ). On voit donc qu'aux sections planes de F correspondent dans ϖ les coniques C' passant par P et coupant a en un point A' correspondant, dans une projectivité, à la tangente à C' en P. Cette projectivité fait correspondre P à la droite a.

Inversement, donnons-nous dans ϖ le point P

la droite a passant par P et une projectivité ω entre la ponctuelle (A') de support a et le faisceau (g') des droites passant par P, ω faisant correspondre P à a. Les coniques C' passant par P et coupant a en un second point A' que ω fait correspondre à la tangente g' en P, forment un système linéaire ∞^3. En effet, considérons les coniques passant par P et par trois autres points quelconques ; les tangentes en P à ces coniques correspondent projectivement aux seconds points d'intersection A'' de ces coniques avec a. Il en résulte que les ponctuelles (A'), (A'') sont projectives ; il y a deux points unis pour cette projectivité, l'un d'eux est P. Par suite, il existe une seule conique C' passant par les trois points considérés. (Les coniques touchant a en P forment elles-mêmes un système linéaire ∞^3). En rapportant projectivement les coniques C' aux plans de l'espace, on fait correspondre aux points de ϖ les points d'une surface cubique F. Aux droites passant par P correspondent des droites de F, donc cette surface est réglée.

Les coniques C' passant par un point A' de a ont même tangente g' en P et forment un réseau dont deux courbes se rencontrent en un seul point variable ; à ces coniques correspondent donc les plans d'une gerbe dont le sommet A est double pour F. Lorsque A' varie sur a, le point A décrit une droite a_1, double pour F. Si g est la génératrice de F qui correspond à g', le plan ag est un des plans tangents à F en A. Observons d'autre part que la droite a, comptée deux fois, est une conique C' particulière ; à cette conique correspond un plan passant par a_1, tangent à F le long de cette droite et ne rencontrant plus F en dehors de cette droite.

Les surfaces de la seconde catégorie ont un plan tangent fixe le long de la droite double. Les coniques d'un plan passant par un point fixe P et rencontrant une seconde fois une droite a issue de P en un point qui correspond à la tangente à la conique en P dans une projectivité, le point P et la droite a étant homologues dans cette projectivité, représentent les sections planes d'une surface de la seconde catégorie, et inversement.

201.- Équations des surfaces cubiques réglées.- Une surface réglée ayant pour droite double la droite $x_3 = x_4 = 0$, a pour équation

$$\varphi_3(x_3, x_4) + x_3^2 \varphi_{20}(x_1, x_2) + x_3 x_4 \varphi_{11}(x_1, x_2) + x_4^2 \varphi_{02}(x_1, x_2) = 0, \quad (1)$$

où φ_3 est un polynôme du troisième degré et φ_{20}, φ_{11}, φ_{02} des polynômes du premier degré, homogènes.

Les plans tangents à la surface (1) en un point $(y_1, y_2, 0, 0)$ sont donnés par

$$x_3^2 \varphi_{20}(y_1, y_2) + x_3 x_4 \varphi_{11}(y_1, y_2) + x_4^2 \varphi_{02}(y_1, y_2) = 0. \quad (2)$$

On reconnaît aisément que si tous les points de la droite double sont des points-pinces, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\varphi_3(x_3, x_4) + \varphi_2(x_3, x_4)\, \varphi_1(x_1, x_2) = 0,$$

les φ étant des polynômes dont le degré est indiqué par l'indice. Cette surface est un cône de sommet

$$x_3 = 0, \; x_4 = 0, \; \varphi_1(x_1, x_2) = 0.$$

Reprenons la surface (1) et supposons que les plans (2) soient tous deux variables avec le point de contact (surfaces de première catégorie). Il y a deux points-pince ; on peut supposer que ce sont les points $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, les plans tangents correspondants étant respectivement $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. L'équation (1) prend la forme

$$a_1 x_1 x_3^2 + a_2 x_2 x_4^2 + b_0 x_3^3 + b_1 x_3^2 x_4 + b_2 x_3 x_4^2 + b_3 x_4^3 = 0. \quad (3)$$

Le plan contenant les génératrices de la surface (3) passant par le point $(y_1, y_2, 0, 0)$ a pour équation

$$a_1 a_2 (y_2 x_1 - y_1 x_2) + (b_0 a_2 y_2 - b_2 a_1 y_1) x_3 + (b_1 a_2 y_2 - b_3 a_1 y_1) x_4 = 0.$$

Les génératrices de (3) s'appuient donc sur la droite

$$a_1 x_1 + b_0 x_3 + b_1 x_4 = 0, \qquad a_2 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4 = 0.$$

Supposons maintenant que la surface (1) ait le plan tangent fixe $x_4 = 0$ le long de la droite double. On peut de plus supposer qu'au point $(1, 0, 0, 0)$, le plan tangent variable occupe la position $x_3 = 0$. L'équation (1) s'écrit

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2) x_3 x_4 + a_3 x_2 x_4^2 + \varphi_3(x_3, x_4) = 0.$$

Lecture 7 Avril 43