LUCIEN GODEAUX

# SUR LES SURFACES REPRESENTANT LES TANGENTES ASYMPTOTIQUES DE LA SURFACE DE STEINER

(presentata dal Prof. Togliatti nell'adunanza del 26 aprile 1958)

**Sommario** — Le superficie che rappresentano le asintotiche della superficie de Steiner soddisfano ad equazioni di Laplace e si corrispondono in una omografia biassiale.

**Sommaire** — Les surfaces représentant les asymptotiques de la surface de Steiner satisfont à des équations de Laplace et se correspondent dans une homographie biaxiale.

Dans plusieurs mémoires, M. Togliatti s'est occupé de surfaces algébriques représentant des équations de Laplace ([1]). Nous voudrions considérer ici les surfaces qui représentent, sur l'hyperquadrique de Klein, les tangentes aux asymptotiques de la surface de Steiner. On obtient ainsi deux surfaces du quinzième ordre, rationnelles, satisfaisant à des équations de Laplace.

On sait que les points de l'hyperquadrique de Klein qui représentent les tangentes aux asymptotiques d'une surface sont consécutifs dans une suite de Laplace et on associe ainsi à une surface de $S_3$ une suite de Laplace de $S_5$. Lorsque nous avons les étudié les propriétés de

---

([1]) Togliatti, *Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano equazioni di Laplace* (Comm. Math. Helvetici, 1929, pp. 255-272), *Alcune osservazioni sulle superficie razionali che rappresentano equazioni di Laplace* (Annali di Matematica, 1946, (4), XXV, pp. 325-339), *Superficie algebriche ed equazioni di Laplace* (Atti dell'Accademia Ligure, 1952, pp. 1-19).

cttee suite [2], nous avons voulu en faire une application à la surface de Steiner [3], mais les équations se compliquent rapidement. Nous voudrions cependant revenir sur cette question. En designant par $u$, $v$ les asymptotiques d'une surface de Steiner $(x)$ et par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein qui représentent les tangentes aux asymptotiques $u$ (sur lesquelles $u$ varie) et $v$, on constate qu'il existe une homographie biaxiale harmonique H qui fait passer de la surface (U) à la surface (V). De plus, si l'on désigne par $U_1, U_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des $v$, par $V_1, V_2, \ldots$ ceux de V dans le sens des $u$, on constate que H fait se correspondre lse surfaces $(U_1)$ et $(V_1)$, $(U_2)$ et $(V_2), \ldots$. Cette propriété nous a paru suffisamment intéressante pour être signalée.

1. Les asymptotiques de la surface de Steiner ont été déterminées par Clebsch et Cremona; elles sont des quartiques gauches rationnelles de seconde espèc [4]. Les équations paramétriques de la surface de Steiner, rapportée à ses asymptotiques $u, v$, s'écrivent [5]

$$\varrho x_1 = (uv+1)^4,\ \varrho x_2 (uv-1)^4,\ \varrho x_3 = (u+v)^4,\ \varrho x_4 = (u-v)^4. \quad (1)$$

Si nous interprétons $u, v$ comme les coordonnées d'un plan, aux sections planes de la surface de Steiner $(x)$ correspondent les courbes du huitième ordre

$$\lambda_1 (uv+1)^4 + \lambda_2 (uv-1)^4 + \lambda_3 (u+v)^4 + \lambda_4 (u-v)^4 = 0, \quad (2)$$

qui ont des points quadruples à tangentes variables aux points impropres des axes des $u$ et des $v$. Le système (2) est donc de degré 32.

Observons que chacune des courbes (2) est transformée en ellemême par les trois transformations involutives

$$u' = -u,\ v' = -v, \quad (3)$$

$$u' = 1 : u,\ v' = 1 : v, \quad (4)$$

$$u' = v,\ v' = u. \quad (5)$$

---

[2] Voir notre exposé sur *La Théorie surfaces et l'espace réglé* (Actualités scient., N. 138, Paris, Hermann, 1934).

[3] *Sur les asymptotiques de la surface de Steiner* (Bull. Soc. roy. de Liége, 1932, pp. 85-87).

[4] CLEBSCH, *Ueber die Steinersche Fläche* (Journal de Crelle, 1867, Bd. 67, pp. 1-22), CREMONA, *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano* (Rend. Istituto Lomb., 1867, pp. 15-32; Opere Matematiche, tomo II, pp. 389-397).

[5] Voir par exemple CIANI, *Introduzione alla Geometria algebrica* (Padova, 1931), pp. 366 et suiv.

Ces tranformations engendrent dans le plan des $u, v$ une involution du huitième ordre au moyen de laquelle le système (2) est compose. La surface de Steiner représente les groupes de cette involution.

2. Repésentons pour abreger par $\varphi^{ik}$ la dérivée de la fonction $\varphi(u, v)$ prise i fois par rapport à $u$ et $k$ fois par rapport à $v$. On vérifie aisément que les coordonnées des points $x$ de la surface $(x)$ satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement integrable

$$\left.\begin{aligned} &(u^2-\nu^2)(1-u^2\nu^2)x^{20}+3u(2u^2\nu^2-1-\nu^4)x^{10} \\ &\qquad +3\nu(1-\nu^4)x^{01}-12\nu^2(u^2-v^2)x=0, \\ &(\nu^2-u^2)(1-u^2v^2)x^{02}+3\nu(2u^2\nu^2-1-u^4)x^{01} \\ &\qquad +3u(1-u^4)x^{10}-12u^2(v^2-u^2)x=0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Si nous adoptons pour le point $x$ les coordonnées normales $\bar{x}$ de Wilcynski, nous devons poser

$$x=[(u^2-\nu^2)(1-u^2v^2)]^{\frac{3}{4}}\bar{x}.$$

Les équations (6) prennent alors la forme

$$(u^2-\nu^2)(1-u^2\nu^2)\bar{x}^{20}+3\nu(1-\nu^4)\bar{x}^{01}+c_1\bar{x}=0,$$

$$(\nu^2-u^2)(1-u^2\nu^2)\bar{x}^{02}+3u(1-u^4)\bar{x}^{10}+c_2\bar{x}=0,$$

où $c_1$, $c_2$ sont des fonctions de $u, v$ qu'il importe peu d'ecrire explicitement.

Sur l'hyperquadrique Q de Klein de l'expace $S_5$, désignons par $\overline{U}$ le point qui représente la tangente $\bar{x}\bar{x}^{10}$ à l'asymptotique $u$ (sur laquelle $u$ varie) de la surface $(\bar{x})$ et par $\overline{V}$ le point représentant la tangente $\bar{x}\bar{x}^{01}$ à l'asymptotique $v$. Nous avons

$$(u^2-v^2)(1-u^2v^2)\overline{U}^{10}+2v(1-v^4)\overline{V}=0,$$

$$(v^2-u^2)(1-u^2v^2)\overline{V}^{01}+2u(1-u^4)\overline{U}=0.$$

Les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace et satisfont à des équations de Laplace

$$\overline{U}^{11}-\overline{U}^{10}(\log b)^{01}-4ab\,\overline{U}=0, \quad \overline{V}^{11}-\overline{V}^{01}(\log. a)^{10}-4ab\,\overline{V}=0,$$

moyennant

$$(u^2-v^2)(1-u^2v^2)\,b=v(1-v^4),$$

$$(v^2-u^2)(1-u^2v^2)\,a=u(1-u^4),$$

3. Les coordonnées du point U s'écrivent, en retournant aux coordonnées $x$ primitives,

$$\left.\begin{aligned}
U_{12} &= 2v\,(u^2 v^2 - 1)^2 \\
U_{13} &- (uv + 1)^3\,(u + v)^3\,(1 - v^2), \\
U_{14} &= (uv + 1)^3\,(u - v)^2\,(1 + v^2), \\
U_{23} &= -\,(uv - 1)^3\,(u + v)^3\,(1 + v^2), \\
U_{42} &= (uv - 1)^3\,(u - v)^3\,(1 - v^2), \\
U_{34} &= 2\,v\,(u^2 - v^2)^3.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

En interprétant $u, v$ comme coordonnées des points d'un plan et en passant aux coordonnées homogènes $u, v, w$, aux section hyperplanes de la surface (U), lieu du point U, correspondent les courbes du treizième ordre

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_{12}\,v\,(u^2 v^2 - w^4)^3 + (u\,v + w^2)^3\,[\lambda_{12}\,(u + v)^3\,(w^2 - v^2) + \\
&+ \lambda_{14}\,(u - v)^3\,(w^2 + v^2)]\,w^2 + (u\,v - w^2)^3\,[-\lambda_{23}\,(u + v)^3\,(w^2 + v^2) + \\
&+ \lambda_{42}\,(u - v)^3\,(w^2 - v^2)]\,w^2 + \lambda_{34}\,v\,(u^2 - v^2)^3\,w^6 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Chacune des courbes (8) est transformée en soi par l'homologie (3) et la transformation quadratique (4), qui engendrent une involution du quatrième ordre représentée par la surface (U).

Les courbes (8) ont:

Au point ($u = v = 0$), un point d'inflexion, la tangente d'inflexion étant la droite $v = 0$.

Au point ($u = w = 0$), un point quintuple, trois tangentes etant confondues avec $u = 0$ et deux avec $w = 0$. Les courbes (8) ont également en commun un point simple infiniment voisin de ($u = w = 0$) sur chacune des tangentes $u = 0$, $w = 0$. Le point ($u = w = 0$) est l'origine de deux branches superlinéaires sur chacune des courbes (8) et compte pour 30 unités dans l'intersection des courbes.

Au point ($v = w = 0$), un point heptuple en lequel six tangentes sont variables, la septième étant confondue avec $v = 0$. Sur cette droite, les courbes (8) ont en commun trois points simples infiniment voisins successifs du point heptuple. Ce point absorde 52 unités dans l'intersection des courbes (8).

Les courbes (8) passent encore par les quatre points ($\pm 1$, $\pm 1$, 1) et par les quatre points ($\pm i$, $\pm i$, 1). Ces huit points sont simples pour les courbes

Coupons la courbe (8) par la droite $v = w$. Nous obtenons, après suppression du facteur $v^7$ qui correspond au point heptuple,

$$(u^2 - v^2)^3\,[\lambda_{12} + 2\,\lambda_{14} - 2\,\lambda_{23} + \lambda_{34}] = 0.$$

Il en résulte que les points $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 1)$ sont des points d'inflexion pour les courbes (8), la tangente d'inflexion étant $v = w$.

On établit de même que les points $(1, -1, 1)$ et $(-1, -1, 1)$ sont des points d'inflexion des courbes (8), la tangente d'inflexion étant $v + w = 0$.

Coupons maintenant les courbes (8) par la droite $w = iv$. Nous avons, après suppression du facteur $v^7$,

$$(u^2 - v^2)^3 \left[\lambda_{12} + 2\,\lambda_{13} + 2\,\lambda_{42} + \lambda_{34}\right] = 0.$$

Les points $(i, i, 1)$ et $(-i, i, 1)$ sont également des points d'inflexion des courbes (8), la tangente d'inflexion étant $v + iw = 0$. On démontre de même que les points $(i, -i, 1)$ et $(-i, -i, 1)$ sont des points d'inflexion des courbes (8), la tangente d'inflexion étant $v - iw = 0$.

Le degré effectif du système (8) est donc 60 et la surface rationnelle (U) est d'ordre 15.

4. Les coordonnées du point V sont

$$\left.\begin{aligned}
V_{12} &= 2\,u\,(u^2\,v^2 - 1)^3,\\
V_{13} &= (u\,v + 1)^3\,(u + v)^3\,(1 - u^2),\\
V_{14} &= -\,(u\,v + 1)^3\,(u - v)^3\,(1 + u^2),\\
V_{23} &= -\,(u\,v - 1)^3\,(u + v)^3\,(1 + u^2),\\
V_{42} &= -\,(u\,v - 1)^3\,(u - v)^3\,(1 - u^2),\\
V_{34} &= -\,2\,u\,(u^2 - v^2)^3.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

On passe des coordonnées du point U à celle du point V en échangeant $u$ et $v$, c'est-à-dire en opérant l'homologie (5). D'une manière précise, on a

$$\frac{V_{12}}{U_{12}} = \frac{V_{13}}{U_{13}} = \frac{V_{14}}{-\,U_{14}} = \frac{V_{23}}{U_{23}} = \frac{V_{42}}{-\,U_{42}} = \frac{V_{34}}{-\,U_{35}}. \qquad \text{(H)}$$

Par conséquent, on passe de la surface (U) à la surface (V), sa transformée de Laplace dans le sens des $u$, par une homographie biaxiale harmonique H.

Les points U. V satisfont aux équations

$$2\,(u^2 - v^2)\,(1 - u^2\,v^2)\,U^{10} - 3\,[(u^2 - v^2)\,(1 - u^2\,v^2)]^{10}\,U + 6\,v\,(1 - v^4)\,V = 0,$$

$$2\,(v^2 - u^2)\,(1 - u^2\,v^2)\,V^{01} - 3\,[(v^2 - u^2)\,(1 - u^2\,v^2)]^{01}\,V + 6\,u\,(1 - u^4)\,U = 0.$$

et on passe de l'une de ces équations à l'autre en y remplaçant $u$ par $v$ et $v$ par $u$.

On remarquera que l'homographie H transforme en elle-même l'hyperquadrique de Klein Q.

5. En donnant à $v$ dans les équations (7) une valeur constante, les seconds membres sont des polynomes du sixième degre en $u$, donc, sur la surface (U), les courbes $u$ sont des sextiques rationnelles. De même, les courbes $v$ sont des courbes rationnelles du huitième ordre. Sur la surface (V), les courbes $v$ sont des sextiques rationnelles, que H fait correspondre aux courbes $u$ de (U), et les courbes $u$ sont rationnelles et du huitième ordre, elles correspondent dans H aux courbes $v$ de (U).

A une courbe $u = h$ correspondent dans le plan $(u, v, w)$ les quatre droites $u - hw = 0$, $u + hw = 0$, $w - hu = 0$, $w + hu = 0$, et à une courbe $v = k$, les quatre droites $v - kw = 0$, $v + kw = 0$, $w - kv = 0$, $w + kv = 0$. On en conclut que sur les surfaces (U) ou (V), une courbe $u$ rencontre une courbe $v$ en quatre points.

Soient $\gamma_u$ une courbe $u$ tracée sur la surface (U) et $\gamma_v$ la courbe $v$ que H lui afit correspondre sur (V). Considérons la réglée $R_u$ lieu des tangentes aux courbes $v$ aus différents points de $\gamma_u$ et la réglée $R_v$ lieu des tangentes aux courbes $u$ aux points de $\gamma_v$. Puisque les courbes $u$ et $v$ se correspondent dans H sur (U) et (V), les réglées $R_u$ et $R_v$ se correspondent également. Or ces réglées sont des développables et leurs arêtes de rebroussement se correspondent également dans H. Si nous désignons par $U_1$ le transformé de Laplace de U dans le sens des $v$ et par $V_1$ celui de V dans le sens des $u$, on conclut de ce qui précède que H fait se correspondre les surfaces $(U_1)$ et $(V_1)$. En effet, l'arête de rebroussement de la surface $R_u$ est une courbe $u$ tracée sur la surface $(U_1)$ et celle de la surface $R_v$, une courbe $v$ tracée sur la surface $(V_1)$. De plus, aux courbes $u$ de $(U_1)$ correspondent les courbes $v$ de $(V_1)$.

A la développable dont l'arête de rebroussement est une courbe $v$ de (U), correspond celle dont l'arête de rebroussement est une courbe $u$ de (V); on en conclut que les courbes $v$ de $(U_1)$ et les courbes $u$ de $(V_1)$ se correspondent également dans H.

Appelons $U_2, U_3, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de $U_1$ dans le sens des $v$ et $V_2, V_3, \ldots$ ceux de $V_1$ dans le sens des $u$. En répétant le raisonnement précedent, on voit que H fait se correspondre les points $U_2$ et $V_2$, $U_3$ et $V_3, \ldots$ et que sur deux surfaces homologues $(U_n)$ et $(V_n)$, aux courbes $u$ correspondent les courbes $v$ et aux courbes $v$, les courbes $u$.

*Liége, le 11 avril 1958.*