# CONSTRUCTION D'UNE SURFACE DONT LE SYSTÈME CANONIQUE POSSÈDE DES COMPOSANTES FIXES

par **Lucien Godeaux** (Liège)

On sait que Noether avait cru que le système canonique d'une surface algébrique de genre $p^{(1)} > 1$ était nécessairement irréductible. Il n'en est cependant rien et Enriques (1), puis M. Pompilj (2), ont construit des surfaces de genre $p^{(1)} > 1$ dont le système canonique contient des parties fixes non exceptionnelles. C'est à la construction d'une surface possédant la même propriété qu'est consacrée cette note.

Nous construisons précisément *une surface algébrique de genres*

$$p_a = p_g = \nu, \; p^{(1)} = 3\,\nu - 5, \; P_2 = 4\,\nu - 5$$

*dont le système canonique possède comme partie fixe trois courbes rationnelles de degré virtuel* $-(\nu + 1)$ *ne se rencontrant pas deux à deux et comme partie variable* $\nu - 1$ *courbes elliptiques d'un faisceau linéaire, et dont le système bicanonique est irréductible.*

Nous obtenons cette surface comme image d'une involution d'ordre premier $p = 9\,\nu^2 - 3\nu + 1$, n'ayant que trois points unis, appartenant à une surface algébrique. Nous utilisons les résultats que nous avons obtenus sur les involutions de cette nature dans nos travaux antérieurs (3).

---

(1) *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949). Voir pp. 156 - 158.

(2) *Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere.* (Rend. Accad. Naz. Lincei, 1er sem. 1948, pp. 539 - 544).

(3) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scientifiques, n. 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Mém. in 8° de l'Acad. Roy. de Belgique, 1938, pp. 1-44); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales Scient. de l'Ecole Normale Sup., 1938, pp. 193-222); *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Idem, 1938, pp. 189-210); *Détermination des singularités d'une surface multiple*

**1.** — Soit $F$ la surface d'équation

$$a_1 x_1^{3\nu} x_2 + a_2 x_2^{3\nu} x_3 + a_3 x_3^{3\nu} x_1 + a_4 x_4^{3\nu+1} = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie $H$ d'équations

$$\rho x_1' = x_1 ,$$
$$\rho x_2' = \varepsilon x_2 ,$$
$$\rho x_3' = \varepsilon^{9\nu^2-6\nu+2} x_3 ,$$
$$\rho x_2' = \varepsilon^{3\nu^2-2\nu+1} x_4 ,$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive de l'unité d'ordre

$$p = 9 \nu^2 - 3 \nu + 1.$$

Nous supposerons dans la suite que $\nu$ a été choisi de telle sorte que $p$ soit un nombre premier.

Sur $F$, l'homographie $H$ engendre une involution $I$ d'ordre $p$ ne présentant que trois points unis: les sommets $O_1$ $(1, 0, 0, 0)$ , $O_2$ $(0, 1, 0, 0)$ et $O_3$ $(0, 0, 1, 0)$ du tétraèdre de référence. Ces points sont simples pour la surface $F$.

Pour construire une image de l'involution, nous pouvons procéder de la manière suivante: Dans le système linéaire formé par les surfaces d'ordre $p$, il existe un système linéaire partiel appartenant à l'involution engendrée dans l'espace par l'homographie $H$ et dépourvu de points-base. Soit $r$ la dimension de ce système. Rapportons projectivement ses surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire $S_r$ à $r$ dimensions. Aux groupes de l'involution appartenant à la surface $F$ correspondent dans $S_r$ les points d'une surface normale $\Phi$, image de l'involution. Aux points $O_1$ , $O_2$ , $O_3$ correspondent sur $\Phi$ des points isolés que nous désignerons respectivement par $O'_1$ , $O'_2$ , $O'_3$.

Notre but est de déterminer les systèmes canonique et bicanonique de la surface $\Phi$ et à cet effet, nous devons déterminer la singularité de la surface $\Phi$ aux points $O'_1$ , $O'_2$ , $O'_3$. À cause de la symétrie de l'équation de $F$ par rapport aux coordonnées $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , il suffira de déterminer la singularité de $\Phi$ en l'un de ces points, par exemple en $O'_1$.

---

*en certains points de diramation* (Idem, 1950, pp. 1-13); *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Annali di Matematica, 1929, 4e s., t. 28, pp. 89-106); *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840); *Sur le calcul des invariants d'une surface multiple ayant un nombre fini de points de diramation* (Idem, 1950, pp. 170-179).

**2.** — Dans le plan tangent $x_2 = 0$ au point $O_1$ à la surface $F$, l'homographie $H$ détermine une homographie que l'on peut représenter soit par

$$\begin{pmatrix} x_1 & \eta\, x_3 & \eta^{\alpha} x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

en posant

$$\eta = 9\,\nu^2 - 6\,\nu + 2 \quad , \quad \alpha = 6\,\nu^2 - \nu + 1,$$

soit par

$$\begin{pmatrix} x_1 & \zeta^{\beta} x_3 & \zeta\, x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

en posant

$$\zeta = 3\,\nu^2 - 2\,\nu + 1 \;,\; \beta = 9\,\nu^2 - 6\,\nu + 3.$$

Le point $O_1$ est donc uni de seconde espèce pour l'involution $I$.

Désignons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de $\Phi$, par $|C|$ le système de courbes qui lui correspond sur $F$ (et qui est donc découpé sur cette surface par les surfaces d'ordre $p$ transformées en elles-mêmes par $H$ et formant un système linéaire sans points-base), par $C'$ les courbes $C$ assujetties à la seule condition de passer par $O_1$. D'après la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique que nous avons développée dans nos travaux cités plus haut, les courbes $C'$ ont en $O_1$ la multiplicité $\lambda + \mu$, $\lambda$ tangentes en ce point étant confondues avec $O_1\,O_4$, $\mu$ avec la droite $O_1\,O_3$, ces entiers positifs satisfaisant aux congruances

$$\lambda + \alpha\,\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\,\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

et $\lambda + \mu$ étant le plus petit possible.

Actuellement, on a

$$\lambda = 1, \; \mu = 3\,\nu - 2.$$

Les courbes $C'$ passent simplement par une suite de $\beta - 1$ points fixes $O_{11}$ , $O_{12}$ , ... , $O_{1,\beta-1}$ infiniment voisins successifs de $O_1$. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution $I$, sauf le dernier qui est uni de première espèce.

Les courbes $C'$ passent en outre par une suite de $\alpha - 1$ points fixes $O_{21}$, $O_{22}$ , ... , $O_{2,\alpha-1}$ infiniment voisins successifs de $O_1$. Les $\nu - 1$ premiers de ces points $O_{21}$ , $O_{22}$ , ... , $O_{2,\nu-1}$ sont multiples d'ordre $3\,\nu - 2$ pour les courbes $C'$, le point $O_{2,\nu}$ est multiple d'ordre $\nu$ et les points $O_{2,\nu+1}$ , ... , $O_{2,\alpha-1}$ sont simples. Les courbes $C'$ passent en outre $\nu - 1$ fois par deux points fixes $O_{2,\nu,1}$ , $O_{2,\nu,2}$ infiniment voisins successifs de $O_{2,\nu}$. Tous ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution $I$ sauf les points $O_{1,\alpha-1}$, $O_{2,\nu,2}$ qui sont unis de première espèce.

Sur une courbe $C'$, le point $O_1$ est l'origine de deux branches linéaires passant l'une par les points $O_{11}$, $O_{12}$, ..., $O_{1,\beta-1}$, l'autre par les points $O_{21}$, $O_{22}$, ..., $O_{2,\alpha-1}$ et de $\nu - 1$ branches superlinéaires passant par les points $O_{21}$, $O_{22}$, ..., $O_{2,\nu}$, $O_{2,\nu,1}$, $O_{2,\nu,2}$.

La surface $\Phi$ est d'ordre $n = p\,(3\nu + 1)$, donc le système $|C|$ a le degré $p^2\,(3\nu + 1)$. Parmi les points de rencontre de deux courbes $C'$, le point $O_1$ absorbe $p\,(\nu + 1)$ points, donc le système $|C'|$ a le degré effectif $pn - p\,(\nu + 1)$. Il en résulte que le point $O'_1$ est multiple d'ordre $\nu + 1$ pour la surface $\Phi$.

**3.** — Pour étudier de plus près la singularité de la surface $\Phi$ au point $O'_1$, projetons cette surface de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant (ne passant pas par $O'_1$). Nous obtenons une surface $\Phi_1$, d'ordre $n - \nu - 1$ dont les sections hyperplanes $\Gamma'$ correspondent aux courbes $C'$.

Au domaine du point uni parfait $O_{1,\beta-1}$ correspond sur $\Phi'$ une droite $\sigma_{11}$. Au domaine du point uni parfait $O_{2,\alpha-1}$ correspond une droite $\sigma_{12}$ et enfin, au domaine du point uni parfait $O_{2,\alpha,2}$ correspond une courbe rationnelle $\tau_1$ d'ordre $\nu - 1$.

Une analyse plus détaillée de la singularité du point $O'_1$ montre que la droite $\sigma_{11}$ et la droite $\sigma_{12}$ ne se rencontrent pas mais rencontrent toutes deux la courbe $\tau_1$ chacune en un point. De plus, ces deux points de rencontre de $\tau_1$ avec $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$ peuvent être doubles pour la surface $\Phi_1$; cela dépend de la valeur de $\nu$. Nous ne nous étendrons pas sur ce point, qui n'est pas nécessaire pour notre objet.

Le cône tangent en $O'_1$ à la surface $\Phi$ se compose de deux plans projetant $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$ de $O'_1$ et du cône d'ordre $\nu - 1$ projetant du même point la courbe $\tau_1$.

Le point commun aux courbes $\sigma_{11}$, $\tau_1$ est équivalent à un certain nombre $t$ (qui peut être nul) de courbes rationnelles, de degré $-2$, $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_t$ dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. De plus, $\rho_1$ rencontre $\sigma_{11}$ et $\rho_t$ rencontre $\tau_1$ en un point. De même, le point commun à $\sigma_{12}$ et $\tau_1$ est équivalent à un certain nombre de courbes rationnelles, de degré $-2$, $\rho'_1$, $\rho'_2$, ..., $\rho'_{t'}$ dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. La courbe $\rho'_1$ rencontre $\tau_1$ en un point et $\rho'_{t'}$ rencontre $\sigma_{12}$ en un point.

On a par conséquent la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_{11} + \rho_1 + \ldots + \rho_t + \tau_1 + \rho'_1 + \ldots + \rho'_{t'} + \sigma_1$$

On en déduit que les droites $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$ ont le degré virtuel $-2$ et la courbe $\tau_1$, le degré virtuel $-(\nu+1)$.

En partant du point $O_2$ on obtiendra de même, sur $\Phi$, deux droites infiniment petites $\sigma_{21}$, $\sigma_{22}$ de degré $-2$ et une courbe rationnelle $\tau_2$, d'ordre $\nu-1$ et de degré virtuel $-(\nu+1)$. De même, en partant de $O_3$, on obtiendra sur $\Phi$ trois courbes $\sigma_{31}$, $\sigma_{32}$, $\tau_3$ rationnelles, de degrés virtuels respectifs $-2$, $-2$, $-(\nu+1)$.

4. — Désignons par $|\Lambda|$ le système canonique de $\Phi$. Aux courbes $\Lambda$ correspondent sur $F$ des courbes $L$ qui appartiennent au système canonique de $F$ et qui sont donc découpées sur cette surface par des adjointes d'ordre $3\nu-3$. La surface $F$ étant dépourvue de points singuliers, ces adjointes ne passeront par aucun point fixe de $F$, sauf éventuellement par les points unis $O_1$, $O_2$, $O_3$ de l'involution $I$.

Si

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

est l'équation d'une de ces adjointes, en opérant l'homographie $H$, le polynôme $\varphi$ se reproduira multiplié par une certaine puissance de $\varepsilon$.

Une courbe rationnelle de degré virtuel $-x$ est rencontrée en $x-2$ points par les courbes canoniques de la surface. Par conséquent, les courbes canoniques $\Lambda$ de la surface $\Phi$ rencontrent en $\nu-1$ points chacune des courbes $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, mais ne rencontrent pas les autres courbes rationnelles $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, ..., $\sigma_{32}$ provenant des points singuliers $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$.

Cela étant les courbes $L$, transformées des courbes $\Lambda$ sur $F$, passent $\nu-1$ fois par le point $O_{2,\nu,2}$, donc $\nu-1$ fois par les points $O_{2,\nu,1}$, $O_{2,\nu}$, $3\nu-3$ fois par les points $O_{2,\nu-1}, O_{2,\nu-2}, \dots, O_{2,1}$ et par conséquent $3\nu-3$ par $O_1$. Ainsi donc, les courbes $L$, transformées sur $F$ des courbes canoniques de $\Phi$, passent $3\nu-3$ fois par les points unis $O_1$, $O_2$, $O_3$ de $I$.

Il en résulte que, parmi les courbes $L$ se trouve la section de $F$ par le plan $x_4=0$, comptée $3\nu-3$ fois. Par conséquent, lorsque l'on opère l'homographie $H$, le polynôme $\varphi$ se reproduit multiplié par

$$\varepsilon^{6\nu^2+2\nu-1}$$

Nous devons donc déterminer les polynômes $\varphi$ répondant à cette condition.

Ecrivons le terme général de $\varphi$ sous la forme

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{3t+i},$$

avec

$$i_1+i_2+i_3+3t+i=3\nu-3, \qquad (i \leq 2).$$

Nous devons avoir

$$i_2 + i_3 (9 \nu^2 - 6 \nu + 2) + (3 t + i) (3 \nu^2 - 2 \nu + 1) \equiv 6 \nu^2 + 2 \nu - 1, \pmod{p},$$

c'est-à-dire

$$i_2 - i_3 (3 \nu - 1) - t (3 \nu + 2) + i (3 \nu^2 - 2 \nu + 1) + 3 \nu^2 - 5 \nu + 2 = 0.$$

Il est facile de voir que la seule solution est

$$i_1 = i_2 = i_3 = \nu - t - 1 \ , \ i = 0.$$

Le polynôme $\varphi$ est donc de la forme

$$\sum_{t=0}^{\nu-1} r_t (x_1 \, x_2 \, x_3)^{\nu-t-1} \, x_4^{3t} = 0.$$

On en conclut que le système $|L|$ est composé au moyen du faisceau découpé sur $F$ par les surfaces

$$x_1 \, x_2 \, x_3 + \lambda \, x_4^3 = 0.$$

Nous désignerons par $K$ les courbes de ce faisceau. Le système linéaire $|L|$ coincide donc avec le système

$$|(\nu - 1) \, K|,$$

car les courbes $K$ passent par les points $O_1, O_2, O_3$.

**5.** — Pour déterminer le genre des courbes $K$, nous utiliserons le procédé suivant: Supposons $\lambda = -1$ et remarquons que la surface

$$x_1 \, x_2 \, x_3 - x_4^3 = 0$$

est représentée point par point sur un plan en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 \, y_3 : y_2^2 \, y_1 : y_3^2 \, y_2 : y_1 \, y_2 \, y_3 .$$

À la courbe $K$ située sur la surface précédente correspond la courbe d'équation

$$a_1 \, y_1^{6\nu-1} \, y_3^{3\nu-2} + a_2 \, y_2^{6\nu-1} \, y_1^{3\nu-2} + a_3 \, y_3^{6\nu-1} \, y_2^{3\nu-2} + a_4 (y_1 \, y_2 \, y_3)^{3\nu-1} = 0.$$

Cette courbe possède trois points singuliers aux sommets du triangle de référence. Chacun de ces points est multiple d'ordre $3 \nu - 2$ et la courbe possède un point multiple d'ordre $3 \nu - 2$ infiniment voisin du premier auquel font suite $\nu - 1$ points triples infiniment voisins successifs. On en conclut que la courbe et par suite les courbes $K$ sont de genre

$$\frac{1}{2} (2 7 \nu^2 - 9 \nu + 2) = \frac{1}{2} (3 p - 1).$$

Soient $K'$ les courbes qui correspondent sur $\Phi$ aux courbes $K$. Dans la correspondance entre deux courbes $K'$ et $K$ homologues, il y a trois points de diramation; en appliquant la formule de ZEUTHEN, on en conclut que les courbes $K'$ sont de genre un.

Il existe donc, sur la surface $\Phi$, un faisceau linéaire de courbes elliptiques $|K'|$ et chaque courbe canonique de la surface contient $\nu - 1$ courbes de ce faisceau. Les genres arithmétique et géométrique de $\Phi$ sont donc

$$p_a = p_g = \nu,$$

car la surface $\Phi$, comme la surface $F$, est régulière.

**6.** — La surface $F$ étant dépourvue de points singuliers, ses courbes bicanoniques sont découpées par les surfaces d'ordre $6\nu - 6$ ne comprenant pas $F$ comme partie. Les courbes bicanoniques de $F$ transformées des courbes bicanoniques de $\Phi$ sont découpées par des surfaces d'équation

$$\psi (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

le polynôme $\psi$ se reproduisant, lorsque l'on opère l'homographie $H$, multipliée par

$$\varepsilon^{2(6\nu^2+2\nu-1)} = \varepsilon^{3\nu^2+7\nu-3}.$$

On forme aisément les polynômes $\psi$; ils sont de la forme

$$\sum_{t=0}^{\nu-3} (x_1 x_2 x_3)^{\nu-t-3} x_4^{3t+2} [r_{t1} x_1^{3\nu} x_2 + r_{t2} x_2^{3\nu} x_3 + r_{t3} x_3^{3\nu} x_1]$$

$$+ \sum_{t=0}^{2\nu-2} r_t (x_1 x_2 x_3)^{2\nu-t-2} x_4^{3t} = 0.$$

Ces surfaces ne pouvant contenir la surface $F$ comme partie, on est conduit, en tenant compte de l'équation de cette surface, à supprimer dans la dernière sommation, les termes contenant $x_4$ à une puissance supérieure à $3\nu$. Cela revient à ne donner à $t$, dans la dernière sommation, que les valeurs $0, 1, \dots, \nu$. Il en résulte que le système linéaire découpant sur $F$ les transformées des courbes bicanoniques de $\Phi$ a la dimension

$$3(\nu - 2) + \nu = 4\nu - 6.$$

Par conséquent, le bigenre de $\Phi$ est

$$P_2 = 4\nu - 5.$$

D'après la forme de l'équation des surfaces découpant sur $F$ les transformées des courbes bicanoniques de $\Phi$, ces transformées ne sont pas composées au moyen du faisceau $|K|$, donc le système bicanonique de $\Phi$ n'est pas, comme le système canonique, composé au moyen du faisceau $|K'|$. Ce système bicanonique $|2\Lambda|$ est irréductible.

Observons que sur $F$, les courbes $K$ ont l'ordre $3(3\nu+1)$ et les courbes bicanoniques, l'ordre $6(\nu-1)(3\nu+1)$. Par conséquent, sur la surface $\Phi$, les courbes $K'$ ont l'ordre $3(3\nu+1)$ et les courbes bicanoniques, l'ordre $6(\nu-1)(3\nu+1)$ également puisque, sur la surface $F$, une courbe $C$ rencontre une courbe $K$ en $3(3\nu+1)p$ points et une courbe bicanonique en $6(\nu-1)(3\nu+1)p$ points.

Une courbe canonique $\Lambda$ de $\Phi$ doit être d'ordre $3(\nu-1)(3\nu+1)$; elle comprend $\nu-1$ courbes $K'$ qui, ensemble, forment une courbe d'ordre $3(\nu-1)(3\nu+1)$. Comme le système $|2(\nu-1)K'|$ ne peut être irréductible, il faut que le système canonique $|\Lambda|$ de $\Phi$ possède des composantes fixes d'ordre zéro. Celles-ci ne peuvent provenir que des points multiples $O'_1, O'_2, O'_3$ et doivent être rencontrées par les courbes $K'$. Ce sont donc les courbes $\tau_1, \tau_2, \tau_3$. On a donc

$$|\Lambda| = |(\nu-1)K' + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3|.$$

**7.** — On a, pour la surface $\Phi$,

$$p_a = p_g = \nu \quad , \quad P_2 = 4\nu - 5$$

donc, en utilisant la formule

$$P_2 = p_a + p^{(1)},$$

on trouve pour le genre linéaire

$$p^{(1)} = 3\nu - 5.$$

Observons que sur une courbe $K$, le point $O_1$ par exemple est l'origine d'une branche superlinéaire passant simplement par le point $O_{2,\nu,2}$. Il en résulte qu'une courbe $K'$ rencontre en un point chacune des courbes $\tau_1, \tau_2, \tau_3$. Le calcul du genre d'une courbe $\Lambda$ par la formule de Noether donne bien

$$p^{(1)} = 3 \cdot 0 + (\nu-1)\cdot 1 + 3(\nu-1) - (\nu+1) = 3\nu - 5,$$

comme on l'avait trouvé par une autre voie.

Liège, le 3 janvier 1952