SUR LES SURFACES CIRCONSCRITES À UNE SURFACE CUBIQUE

PAR

LUCIEN GODEAUX

Nous nous proposons, dans cette note, de déterminer les surfaces d'ordre nécessairemente pair $2n$, circonscrites à une surface cubique non réglée.

Si l'on désigne par Φ la surface cubique et par F la surface d'ordre $2n$, une solution du problème apparaît immédiatement. Si F' est une surface d'ordre n et Ψ une surface quelconque d'ordre $2n-3$, la surface générale du faisceau déterminé par les surfaces $2F'$ et $\Phi+\Psi$ touche la surface Φ le long de la courbe intersection de cette surface et de F'. Nous laisserons de côté cette solution triviale et rechercherons les surfaces F d'ordre $2n$ touchant une surface cubique Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$, cette courbe n'appartenant pas à une surface d'ordre n.

Nous établirons le théorème suivant:

Si une surface d'ordre 2n *touche une surface cubique non réglée le long d'nne courbe d'ordre* 3n *n'appartennant pas à une surface d'ordre* n:

a) *La surface cubique possède quatre points doubles coniques;*

b) *La surface d'ordre* 2n *passe un nombre impair de fois par chacun de ces points doubles et possède en outre*

$$3\mathrm{n}\,(2\mathrm{n}-3)-4\mathrm{n}_2+4$$

points doubles coniques sur la courbe de contact, n_2 *étant la somme des carrés des quotients de la division par* 2 *des multiplicités de la surface aux points doubles de la surface cubique.*

Nous démontrons ensuite *l'existence de la surface d'ordre* $2n$ satisfaisant aux conditions précédentes.

Enfin, nous établissons dans quelles conditions la courbe de contact est la courbe double d'une surface irréductible d'ordre $2n$.

1. Soit Φ une surface cubique non réglée et F_0 une surface d'ordre $2n$ touchant Φ le long d'une courbe C, d'ordre $3n$, n'appartenant pas à une surface d'ordre n.

Représentons la surface Φ point par point sur un plan σ de manière qu'á ses sections planes correspondent les cubiques γ_3 passant par six points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Nous supposerons que ces six points n'appartiennent pas à une même conique, mais la présence de points doubles coniques de la surface Φ implique que certains groupes de trois de ces points sont alignés.

D'une manière précise,

a) Si Φ possède un point double conique P, trois des six points, par exemple A_1, A_2, A_3 appartiennent à une droite p, fondamentale pour le système $|\gamma_3|$. Aux points de la droite p correspondent les points de infiniment voisins de P.

b) Si Φ possède deux points doubles coniques P_1, P_2, le système $|\gamma_3|$ possède deux droites fondamentales p_1, p_2. Le point $p_1 p_2$ est un des six points-base de $|\gamma_3|$, par exemple A_1. Deux points A_2, A_3 appartiennent à p_1; deux autres points A_4, A_5 appartiennent à p_2. Aux points de p_1 correspondent sur Φ les points infiniment voisins de P_1 et à ceux de p_2, les points infiniment voisins de P_2.

c) Si Φ possède trois points doubles coniques $P_1, P_2 . P_3$, le système $|\gamma_3|$ possède trois droites fondamentales p_1, p_2, p_3 formant un triangle dont les sommets $A_1 = p_2 p_3$, $A_2 = p_3 p_1$, $A_3 = p_1 p_2$ sont trois des six points-base. Les trois autres points-base appartiennent aux côtés du triangle; pour fixer les idées, A_4 appartient à p_1, A_5 à p_2, A_6 à p_3. De plus, ces trois points ne sont pas en ligne droite. Aux points des droites p_1, p_2, p_3 correspondent respectivement sur Φ les points infiniment voisins de P_1, P_2, P_3.

d) Si Φ possède quatre points doubles coniques P_1, P_2, P_3, P_4, le système $|\gamma_3|$ possède quatre droites fondamentales p_1, p_2, p_3, p_4, formant un quadrilatère complet dont les sommets sont les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Aux points des droites p_1, p_2, p_3, p_4 correspondent respectivement sur Φ les points infiniment voisins de P_1, P_2, P_3, P_4.

Dans ce dernier cas, nous changerons nos notations et désignerons par A_{ik} le sommet du quadrilatère commun aux droites p_i, p_k.

On sait que les points P_1, P_2, P_3, P_4 sont les sommets d'un tétraèdre et qu'à l'arête $P_i P_k$ de celui-ci correspond dans σ le domaine du point A_{ik}.

2. Considérons les surfaces F d'ordre $2n$ passant un certain nombre de fois par les points doubles éventuels de Φ. Aux sections de Φ par ces surfaces correspondent dans σ des courbes d'ordre $6n$ passant $2n$ fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Ces courbes d'ordre $6n$ comprennent comme parties fixes les droites fondamentales homologues des points doubles de Φ appertenant aux surfaces F considérées, chaque droite fondamentale étant comptée avec la multiplicité du point correspondant pour les surfaces F. Ces droites défalquées, il reste un système linéaire $|\gamma|$. Si, parmi les surfaces F, il en est une, F_0, qui touche Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$, il correspond à cette courbe dans le plan σ une courbe γ' dont le double doit appartenir totalement à $|\gamma|$. Il en résulte que les courbes γ doivent être d'ordre pair et passer un nombre pair de fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

De plus, la courbe γ' ne doit pas appartenir à un des systèmes linéaires de σ qui correspond aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant éventuellement par les points doubles de Φ.

En appliquant ces remarques, nous verrons que Φ doit posséder quatre points doubles coniques sur la courbe C.

Supposons en premier lieu que Φ soit dépourvue de point double. Alors, trois quelconques des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne sont jamais en ligne droite. Le système $|\gamma|$ est constitué par les courbes d'ordre $6n$ passant $2n$ fois par chacun des points A. Par conséquent, la courbe γ' est d'ordre $3n$ et passe n fois par chacun des points A.

Mais aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n correspondent dans σ des courbes d'ordre $3n$ passant n fois par chacun des points A. La courbe γ' se trouve donc parmi ces courbes et la courbe C correspondante appartient à une surface d'ordre n.

La surface Φ doit donc posséder au moins un point double sur la courbe C.

3. Supposons que Φ possède un point double P. La courbe γ devant être d'ordre pair, la droite p doit être défalquée un nombre pair de fois des courbes d'ordre $6n$ qui correspondent aux sections de Φ par les surfaces F, c'est-à-dire que ces surfaces doivent avoir en P une multiplicité paire, soit 2ν.

Les courbes γ sont alors d'ordre $6n - 2\nu$, passent $2n - 2\nu$ fois par A_1, A_2, A_3 et $2n$ fois par A_4, A_5, A_6. La courbe γ' est donc d'ordre $3n - \nu$, passe $n - \nu$ fois par A_1, A_2, A_3 et n fois par A_4, A_5, A_6. Elle appartient au système des courbes de σ homologues des sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant ν fois par P, contrairement à la condition imposée à C.

Supposons que Φ possède deux points doubles coniques P_1, P_2. Les surfaces F doivent passer un nombre pair de fois par P_1, P_2, par exemple $2\nu_1$ fois par P_1, $2\nu_2$ fois par P_2, pour que les courbes γ passent un nombre pair de fois par A_2, A_3, A_4, A_5.

Les courbes γ sont d'ordre $6n - 2\nu_1 - 2\nu_2$ et passent $2n - 2\nu_1 - 2\nu_2$ fois par A_1, $2n - 2\nu_1$, fois par A_2 et A_3, $2n - 2\nu_2$ fois par A_4, A_5, $2n$ fois par A_6. La courbe γ' est d'ordre $3n - \nu_1 - \nu_2$, passe $n - \nu_1 - \nu_2$ fois par A_1, $n - \nu_1$ fois par A_2, A_3, $n - \nu_2$ fois par A_4, A_5, n fois par A_6. Elle appartient par conséquent au système des courbes de σ qui correspondent aux sections de σ par les surfaces d'ordre n passant ν_1 fois par P_1, ν_2 fois par P_2.

Supposons maintenant que Φ possède trois points doubles coniques P_1, P_2, P_3. Les courbes γ devant passer un nombre pair de fois par A_4, A_5, A_6, les surfaces F doivent avoir des multiplicités paires, respectivement $2\nu_1, 2\nu_2, 2\nu_3$ aux points P_1, P_2, P_3.

Les courbes γ sont d'ordre $6n - 2\nu_1 - 2\nu_2 - 2\nu_3$, passent $2n - 2\nu_2 - 2\nu_3$ fois par A_1, $2n - 2\nu_3 - 2\nu_1$ fois par A_2, $2n - 2\nu_1 - 2\nu_2$ fois par A_3, $2n - 2\nu_1$ fois par A_4, $2n - 2\nu_2$ fois par A_5, $2n - 2\nu_3$ fois par A_6. La courbe γ' est d'ordre $3n - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3$, passe respectivement $n - \nu_2 - \nu_3$ fois, $n - \nu_3 - \nu_1$ fois, $n - \nu_1 - \nu_2$ fois par A_1, A_2, A_3, $n - \nu_1$ fois, $n - \nu_2$ fois, $n - \nu_3$ fois par A_4, A_5, A_6. Elle appartient par conséquent au systeme linéaire formé par les courbes de σ qui correspondent aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant ν_1 fois par P_1, ν_2 fois par P_2, ν_3 fois par P_3.

On voit donc que s'il existe une surface F_0 d'ordre $2n$ touchant Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$, n'appartenant pas à une surface d'ordre n, la surface Φ doit posséder quatre points doubles coniques sur la courbe C.

4. Supposons donc que la surface Φ possède quatre pointes doubles coniques P_1, P_2, P_3, P_4. Considérons les surfaces F ayant les multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ en P_1, P_2, P_3, P_4. Les courbes γ sont d'ordre $6n-\nu_1-\nu_2-\nu_3-\nu_4$ et passent $2n-\nu_i-\nu_k$ fois par le point A_{ik}. Cette multiplicité doit être paire, donc ν_i, ν_k ont la même parité. Nous voyons donc que les quatre nombres $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ doivent avoir la même parité; dans ces conditions, les courbes γ sont d'ordre pair.

Supposons en premier lieu que les quatre nombres en question soient tous pairs et posons

$$\nu_1 = 2\nu'_1, \nu_2 = 2\nu'_2, \nu_3 = 2\nu'_3, \nu_4 = 2\nu'_4.$$

La courbe γ' est d'ordre $3n-\nu'_1-\nu'_2-\nu'_3-\nu'_4$ et passe $n-\nu'_i-\nu'_k$ fois par A_{ik}. Mais alors, elle appartient au système des courbes de σ homologues des sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant ν'_1 fois par P_1, ν'_2 fois par P_2, ν'_3 fois par P_3, ν'_4 fois par P_4. Il faut donc, pour notre objet, que $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ soient impairs.

Posons

$$\nu_1 = 2\nu'_1 + 1, \nu_2 = 2\nu'_2 + 1, \nu_3 = 2\nu'_3 + 1, \nu_4 = 2\nu'_4 + 1.$$

Les courbes γ sont d'ordre $6n-2(\nu'_1+\nu'_2+\nu'_3+\nu'_4)-4$ et passent $2n-2\nu'_i-2\nu'_k-2$ fois par le point A_{ik}.

La courbe γ' est d'ordre $3n-\nu'_1-\nu'_2-\nu'_3-\nu'_4-2$ et passe $n-\nu'_i-\nu'_k-1$ fois par A_{ik}. Elle rencontre la droite p_1 en $2\nu'_1+1$ points en dehors de A_{12}, A_{13}, A_{14} et par conséquent la courbe C a la multiplicité $2\nu'_1+1$ en P_1. De même, C a la multiplicité $2\nu'_i+1$ en P_i.

Si la courbe C appartenait à une surface d'ordre n, celle-ci devrait passer ν'_i+1 fois par P_i. A la section de Φ par une telle surface correspondrait dans σ, en dehors des droites p_1, p_2, p_3, p_4, une courbe d'ordre $3n-\nu'_1-\nu'_2-\nu'_3-\nu'_4-4$, passant $n-\nu'_i-\nu'_k-2$ fois par A_{ik}. Le système formé par ces courbes ne peut contenir γ'.

Nous voyons donc que s'il existe une surface F_0 d'ordre $2n$ touchant Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$ n'appartenant pas à une surface d'ordre n, la surface Φ

possède quatre points doubles coniques et la surface F_0 passe un nombre impair de fois par ces points.

5. La quadrique polaire d'un point quelconque M par rapport à Φ passe par les points P_1, P_2, P_3, P_4 et coupe encore C en $6n - 2n_1 - 4$ points, où nous posons

$$n_1 = \nu'_1 + \nu'_2 + \nu'_3 + \nu'_4.$$

Il en résulte que la développable engendrée par les plans tangents à Φ et à F_0 aux points de C est de classe $6n - 2n_1 - 4$.

La surface polaire d'ordre $2n - 1$ de M par rapport à F_0 a les multiplicités $2\nu'_1, 2\nu'_2, 2\nu'_3, 2\nu'_4$ en P_1, P_2, P_3, P_4, donc elle rencontre encore C, en dehors de ces points, en $6n^2 - 3n - 4n_2 - 2n_1$ points, en posant

$$n_2 = \nu'^2_1 + \nu'^2_2 + \nu'^2_3 + \nu'^2_4.$$

Parmi ces points, se trouvent les points de contact des plans tangents à Φ et à F_0 passant par M. En un autre de ces points, le plan tangent à F_0 ne peut être déterminé, car alors il serait aussi tangent à Φ et passerait par M, ce qui est impossible. Il en résulte qu'un tel point est double pour la surface F_0 et en général double conique.

La surface F_0 possède

$$N = 3n(2n - 3) - 4n_2 + 4$$

points doubles sur la courbe C.

6. Nous allons maintenant supposer, pour plus de généralité, que la surface F_0 passe une fois par les points $P_1, \ldots, P_k, 2\nu'_i + 1$ fois par P_i, pour $i = k+1, \ldots, 4$. De plus, pour simplifier les notations, aucune confusion n'étant plus possible, nous écrirons ν_i au lieu de ν'_i.

Considérons une surface Ψ d'ordre $2n - 3$, ne passant pas par $P_1, \ldots, P_k$, mais passant $2\nu_i - 1$ fois par le point $P_i \, (i = k+1, \ldots, 4)$. Si $k = 0$, on supposera de plus que Ψ ne contient pas la courbe C. La surface Ψ rencontre encore la courbe C, en dehors des points doubles de Φ, en $N - k$ points, et nous pouvons supposer, si $k = 0$, que ces points ne sont pas des points doubles de F_0.

La surface $\Phi+\Psi$ peut être considérée comme une surface d'ordre $2n$ touchant Φ le long de la courbe C. Elle possède bien N points doubles sur cette courbe.

Il en résulte que les surfaces F_0 et $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau de surfaces d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de la courbe C. Chaque surface du faisceau passe $2\nu_i+1$ fois par $P_i (i=k+1,\ldots,4)$ et possède N points doubles sur la courbe C.

Soit R un point de C qui ne soit pas multiple pour F_0 et qui n'appartienne pas à Ψ. Il existe une et une seule surface du faisceau touchant en R une droite non tangente en ce point à Φ. Cette surface possède un point double en R et ce point est un des N points doubles de cette surface situés sur la courbe C. En effet, s'il en était autrement, la surface considérée aurait $N+1$ points doubles sur la courbe C et passerait doublement par cette courbe. Mais alors, toutes les surfaces du faisceau auraient N points doubles fixes sur C et la surface Ψ passerait par les points doubles de F_0, contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, les groupes de N points doubles des surfaces du faisceau forment sur C une série d'indice un. Cette série est rationnele, puisqu'en correspondance biunivoque avec les surfaces du faisceau, c'est donc une série linéaire.

On en conclut que le groupe de N points doubles de F_0 sur C appartient à la série linéaire somme de la série linéaire découpée sur C par les surfaces Ψ en dehors de $P_{k+1},\ldots,P_4$, et du groupe $P_1+\ldots+P_k$.

7. Supposons qu'il existe une surface F_1, d'ordre $2n$, ayant la courbe C comme courbe double. Les surfaces F_0 et F_1 déterminent un faisceau de surfaces d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de C et toutes les surfaces de ce faisceau ont N points doubles fixes sur cette courbe.

Il existe une surface du faisceau comprenant Φ comme partie; elle est complétée par une surface Ψ, d'ordre $2n-3$, qui a la multiplicité $2\nu_i-1$ en $P_i (i=k+1,\ldots,4)$ et par les N points doubles de F_0 sur C.

Inversement, supposons qu'il existe une surface Ψ d'ordre $2n-3$ passant $2\nu_i-1$ fois par $P_i (i=k+1,\ldots,4)$ et par les N points doubles de F_0 situés sur C. Les surfaces F_0 et $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau dont toutes les surfaces ont les mêmes singularités sur C. Il existe une surface du faisceau touchant en un point R de C une droite non tangente en ce point à Φ. Cette surface possède un point double en R et par conséquent passe doublement par la courbe C. Observons que pour que cette surface soit irréductible, il faut qu'elle ne coïncide pas avec la surface $\Phi + \Psi$, c'est-à-dire qu'il faut que la courbe C n'appartienne pas à la surface Ψ. Cela exige que l'on ait $k=0$.

Nous voyons donc que si l'on peut mener une surface Ψ par les N points doubles de F_0 sur C, ne contenant pas cette courbe, il existe une surface irréductible F_1 d'ordre $2n$ ayant C comme courbe double, k étant nul.

8. La courbe γ' et par conséquent la courbe C sont de genre

$$\pi = \frac{3}{2} n (n-1) - (n_1 + n_2).$$

On a

$$N > 2\pi - 2,$$

car la courbe C étant supposée irréductible, la surface F_0 ne peut passer par les arêtes du tétraèdre $P_1 P_2 P_3 P_4$ et on a donc

$$\nu_i + \nu_k \leq n - 1.$$

Il en résulte que sur C, la série linéaire des points doubles des surfaces touchant Φ le long de C, est non spéciale; elle a donc la dimension

$$N - \pi = \frac{3}{2} n (3n-5) - 3n_2 + n_1 + 4.$$

Les surfaces Ψ, d'ordre $2n-3$, ne comprenant pas Φ comme partie et passant $2\nu_i - 1$ fois par le point $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$, dépendent de

$$6n^2 - 15n + 9 - \frac{1}{3}(4n_3 - n_1),$$

paramètres, en posant

$$n_3 = \nu_1^3 + \nu_2^3 + \nu_3^3 + \nu_4^3.$$

Pour que l'on puisse mener une surface Ψ par les N points doubles de F_0 sur C, on doit avoir

$$6n^2 - 15n + 9 - \frac{1}{3}(4n_3 - n_1) \geq$$

$$\geq \frac{3}{2}n(3n-5) - 3n_2 + n_1 + 4,$$

c'est-à-dire

$$\frac{3}{2}n(n-5) - \frac{1}{3}(4n_3 - 9n_2 + 2n_1) + 5 \geq 0.$$

Dans ces conditions, il existe donc une surface irréductible F_1 d'ordre $2n$ ayant C comme courbe double.

9. Il reste maintenant à établir l'existence de la surface F_0. Nous commencerons par considérer le cas où cette surface passe simplement par les points doubles P_1, P_2, P_3, P_4 de la surface $\Phi\,(\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0)$.

Rapportons le plan σ au triangle diagonal du quadrilatère complet. On peut choisir le point unitaire de telle sorte que les droites p_1, p_2, p_3, p_4 aient pour équations respectivement

$$\alpha_1 \equiv x_1 - x_2 - x_3 = 0\ ,\ \ \alpha_2 \equiv -x_1 + x_2 - x_3 = 0\ ,$$

$$\alpha_3 \equiv -x_1 - x_2 + x_3 = 0\ ,\ \ \alpha_4 \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0\ .$$

Les cubiques γ_3 circonscrites au quadrilatère complet ont pour équation

$$\lambda_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 + \lambda_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1 + \lambda_3\,\alpha_4\,\alpha_1\,\alpha_2 + \lambda_4\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = 0\ .$$

Rapportons projectivement ces courbes aux plans de l'espace en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 : \alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1 : \alpha_4\,\alpha_1\,\alpha_2 : \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ .$$

Alors, aux points du plan σ correspondent les points de la surface cubique Φ d'équation

$$X_2\,X_3\,X_4 + X_3\,X_4\,X_1 + X_4\,X_1\,X_2 + X_1\,X_2\,X_3 = 0.$$

En effet, on a

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = X_2 X_3 X_4 : X_3 X_4 X_1 : X_4 X_1 X_2 : X_1 X_2 X_3$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 .$$

L'équation de la courbe γ' peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_1 \varphi_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0 ,$$

où $\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3$ sont des polynomes de degré $n-1$ en X, donc de degré $3n-3$ en x.

Elevons au carré les deux membres de l'équation précédente; le résultat peut s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered}(X_2 X_4 + X_3 X_4 + X_2 X_3) \varphi_1^2 + (X_3 X_4 + X_1 X_4 + X_3 X_1) \varphi_2^2 + \\ + (X_1 X_4 + X_2 X_4 + X_1 X_2) \varphi_3^2 - 2 X_1 X_4 \varphi_2 \varphi_3 - \\ - 2 X_2 X_4 \varphi_3 \varphi_1 - 2 X_3 X_4 \varphi_1 \varphi_2 = 0 .\end{gathered}$$

Cette équation représente une surface d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de la courbe C homologue de γ'.

Ainsi donc, l'existence de la surface F_0 est démontrée pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0$. On passera au cas où P_1 , P_2 , P_3 , P_4 ont des multiplicités quelconques pour F_0 en supposant que dans les polynomes $\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3$, les termes de degré le plus élevé en X_1 , X_2 , X_3 , X_4 manquent, de manière à obtenir les multiplicités voulues.

10. Nous terminerons par une remarque qui nous fournirat une vérification de certains points établis plus haut.

Les surfaces cubiques ayant des points doubles en P_1 , P_2 , P_3 , P_4, forment un système homoloïdal. En rapportant projectivement ces surfaces aux plans de l'espace, on définit une transformation birationnelle T qui fait correspondre:

a) A la surface F_0, une surface F'_0 d'ordre $6n - 2n_1 - 4$;
b) A la surface Φ, un plan φ;
c) A la surface C, une courbe C' d'ordre $3n - n_1 - 2$ le long de laquelle la surface F'_0 touche la plan φ.

La surface F'_0 doit posséder N points doubles coniques sur C'.

Pour vérifier ce point, observons que la surface F_0 coupe la droite $P_1 P_2$, par exemple, en dehors de P_1, P_2, en $2n - 2\nu_1 - 2\nu_2 - 2$ points. Cette droite appartient à Φ et F_0 touchant Φ en chaque point d'intersection, la surface F_0 touche la droite $P_1 P_2$ en $n - \nu_1 - \nu_2 - 1$ points. On sait que la droite $P_1 P_2$ est fondamentale de seconde espèce pour la transformation T. Celle-ci fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces cubiques Φ' circonscrites à un tétraèdre $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$, et la droite fondamentale de seconde espèce associée à $P_1 P_2$ est la droite $P'_3 P'_4$. La surface F'_0 passe $2n - 2\nu_1 - 2\nu_2 - 2$ fois par cette droite et elle admet $n - \nu_1 - \nu_2 - 1$ droites doubles infiniment voisines de cette droite.

Cela étant, considérons la première polaire d'un point M par rapport à F'_0. C'est une surface d'ordre $6n - 2n_1 - 5$, passant $2n - 2\nu_1 - 2\nu_2 - 3$ fois par la droite $P'_3 P'_4$ et une fois par chacune des $n - \nu_1 - \nu_2 - 1$ droites infiniment voisines de cette droite. Il en résulte que parmi les intersections de cette première polaire avec C', il y en a

$$(2n - 2\nu_1 - 2\nu_2 - 3)(n - \nu_1 - \nu_2 - 1) + 2(n - \nu_1 - \nu_2 - 1)$$

absorbées au point de rencontre de φ avec $P'_3 P'_4$. En effet, ce point est multiple d'ordre $n - \nu_1 - \nu_2 - 1$ pour C' et cette courbe s'appuie sur les droites infiniment voisines de $P' P'$.

Par conséquent, les points de rencontre de C' avec la première polaire du point M par rapport à F'_0, en dehors des points fondamentaux de T, est égal à N.

En un de ces points, le plan tangent à F'_0 est indéterminé, puisqu'il doit d'une part coïncider avec φ et d'autre part passer par M. Donc ce point est double, en général conique, pour F'_0. Cette surface possède donc bien N points doubles coniques sur la courbe C'.

Liége, le 10 Mars 1944.