Variétés algébriques non rationnelles privées de variété canonique

par LUCIEN GODEAUX (Liége)

A l'Ami Mauro Picone, affectueusement.

RIASSUNTO - *Costruzione di varietà algebriche di dimensione pari, non razionali, prive di varietà canonica.*

Introduction.

Dans des travaux récents ([1]), nous avons ramené la détermination des surfaces de genres $p_a=p_g=0$ possédant un système bicanonique irréductible à celle de surfaces possédant une involution du second ordre privée de points unis, qu'un hyperplan touche le long d'une courbe dont la série canonique est celle de ses sections hyperplanes. Réciproquement, l'involution d'ordre deux, privée de points unis appartenant à une surface qu'un hyperplan touche suivant une courbe dont la série canonique coincide avec la série des sections hyperplanes, a pour image une surface de genres $p_a=p_g=0$ dont le système bicanonique est irréductible .

Cette seconde partie du théorème peut-elle être étendue aux variétés algébriques? Ici, la parité de la dimension de la variété joue un

([1]) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41).

Surfaces privées de courbe canonique possédant un système bicanonique irréductible, (Convegno di Geometria a celebrazione del centenario della nascita di Federigo Enriques, Milano, 1971, pp. 101-107).

rôle comme dans bien d'autres questions. Nous établissons le théorème suivant:

Si une variété algébrique à un nombre pair de dimensions est transformée en soi par une homographie harmonique dont les axes ont la même dimension et si elle possède un hyperplan qui la touche suivant une variété dont le système canonique est celui des sections hyperplanes, l'image de l'involution engendrée sur la variété par l'homographie est une variété privée de variété canonique ayant un système bicanonique irréductible.

Lorsque la dimension de la variété est impaire, la variété image de l'involution possède une variété canonique

Nous terminons cette note par l'exposé d'un exemple.

§ 1. Soit, dans un espace S_{2r+1} *à* $2r+1$ dimensions, W une variété algébrique d'ordre pair $2n$ à n dimensions. Nous ferons les hypothèses suivantes:

1⁰) La variété W est transformée en soi par une homographie harmonique H ayant deux axes σ_1, σ_2 à r dimensions. La variété ne rencontre pas ces axes et l'involution d'ordre deux engendrée par H sur W est privée de points unis. On a $n \leq r$.

2⁰) Il existe un et un seul hyperplan S_{2r} touchant la variété W en tout point d'intersection dont le lieu est une variété dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes.

Désignons par V_1 la variété à $n-1$ dimensions le long de laquelle un hyperplan touche la variété W. Si nous désignons par V_2 les sections hyperplanes de W, nous avons $V_2 \equiv 2\, V_1$.

D'autre part les sections hyperplanes de la variété V_1 dans l'espace S_{2r} contenant V_1 sont déterminées par les hyperplans de S_{2r+1} et on a donc $V_1' \equiv V_2$.

On en déduit $V'_2 \equiv V_1 + V_1' \equiv V_1 + V_2$, d'où $V_2' - V_2 \equiv V_1$.

La variété V_1 est donc une variété canonique de W et est unique.

Le système $|V_2|$ est le système bicanonique de W et cette variété étant régulière, a les genres $P_a = P_g = 0$, $P_2 = 2r+2$.

§ 2. Désignons par Ω une variété à n dimensions image de l'involution I déterminée par H sur W. Soit Ω_1 la variété qui correspond à V_1 sur Ω.

Dans l'hypothèse faite sur cette variété, H determine dans l'espace S_{2r} contenant V_1 une homographie ayant comme axes l'espace σ_1 à r dimensions et un espace σ_2' à $r-1$ dimensions, contenu dans σ_2.

Désignons par $\overline{V}_2$ les variétés découpées sur W par les hyperplans passant par σ_1 et par V_2^+ celles qui sont découpées par les hyperplans passant par σ_2. Comme V_1 appartient à un hyperplan passant par σ_1, une des variétés $\overline{V}_2$ est la variété $2\,V_1$.

Le système canonique de V_1 est découpé par les variétés V_2 et dans le système canonique $|(V_1, V_2)|$, il existe deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, $|(V_1, \overline{V}_2)|$, découpé par les variétés $\overline{V}_2$, a la dimension $r-1$, l'autre, $|(V_1, V_2^+)|$, découpé par les variétés V_2^+, a la dimension r.

Si la variété Ω a une variété canonique, ce ne peut être que Ω_1. Dans ce cas, nous avons démontré ([2]) que le transformé du système canonique de Ω_1 était celui des systèmes précédents ayant la dimension minimum si la dimension $n-1$ de la variété V_1 était paire, celui ayant la dimension maximum si $n-1$ est impair.

Appelons Ω_2 les variétés qui correspondent sur Ω aux variété $\overline{V}_2$ et Ω_2^+ celles qui correspondent aux variétés V^+_2.

Supposons $n-1$ pair. Alors au système canonique éventuel de Ω_1 correspond celui des systèmes précédents qui a la dimension minimum, c'est-à-dire le système $|(V_1, \overline{V}_2)|$. On a donc $\Omega_1' \equiv \Omega_2$.

Mais on a également $\Omega_2 \equiv 2\Omega_1$, d'où $\Omega_2' \equiv \Omega_1 + \Omega_1' \equiv \Omega_1 + \Omega_2$ et $\Omega_2' - \Omega_2 \equiv \Omega_1$.

Si $n-1$ est pair, la variété Ω possède une variété canonique Ω_1.

Supposons maintenant $n-1$ impair. Au système canonique de Ω_1 correspond sur V_1 le système $|(V_1, V_2^+)|$ et on a $\Omega_1' \equiv \Omega_2^+$.

Si Ω_1 était la variété canonique de Ω, on aurait $\Omega_1' - \Omega_1 \equiv \Omega_1$, d'où $\Omega_1' \equiv 2\,\Omega_1$, $\Omega_2^+ \equiv 2\Omega_1$, ce qui est absurde.

Dans ce cas la variété Ω est donc dépourvue de variété canonique. Si le nombre n est pair et seulement dans ce cas, la variété Ω est dépourvue de variété canonique.

§ 3. Nous supposerons dorénavant n pair. Nous avons alors $|\Omega_1'| = |\Omega_2^+|$.

Puisque l'adjoint $|\Omega_2^+|$ à Ω_1 ne contient pas cette variété, il ne peut être le système bicanonique de Ω. D'autre part, aux courbes bicanoniques de Ω correspondent sur W des courbes bicanoniques. On en conclut que le système bicanonique de Ω est le système $|\Omega_2|$.

([2]) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

Le système tricanonique de Ω est $|\Omega_3| = |\Omega'_2| = |(2\,\Omega_1)'| = |\Omega_1 + \Omega_2^+|$, et le système tétracanonique $|\Omega_4| = |\Omega_3'| = |2\Omega_2^+|$.

D'autre part ce système est le double du système bicanonique $|\Omega_2|$, on a donc $|\Omega_4| = |2\,\Omega_2| = |2\,\Omega_2^+| = |4\,\Omega_1|$.

La variété Ω a donc le diviseur de Severi $\sigma=2$.

On peut voir que le système double du système $|3\Omega_4|$ est équivalent au double du système tricanonique. On a effet $6\,\Omega_1 \equiv 2\,\Omega_2 + 2\,\Omega_2^+$.

Le système $2n$-canonique est donné par $|\Omega_{2n}| = |2n\,\Omega_1|$ et le système $(2n+1)$-canonique par $|\Omega_{2n+1}| = |\Omega'_{2n}| = |(2n-1)\,\Omega + \Omega_2^+|$ et le système $(2n+2)$-canonique par $|\Omega_{2n+2}| = |\Omega'_{2n+1}| = |(2n-2)\cdot\Omega_1 + \Omega_2^+|$. Les systèmes $|\Omega_{2n}^+|, |\Omega_{2n+1}^+|, \ldots$, donnés par $|\Omega_{2n}^+| = |(2n-2)\,\Omega_1 + \Omega_2^+|$, $|\Omega_{2n+1}^+| = |(2n+1)\,\Omega_1|$, donnent lieu aux relations fonctionnelles $|2\,\Omega_{2n}| = |2\Omega_{2n}^+|$, $|2\,\Omega_{2n+1}| = |2\,\Omega_{2n+1}^+|$.

§ 4 Dès que l'on connait dans un espace linéaire une variété à un nombre impair de dimensions dont les sections hyperplanes constituent le système canonique, on peut construire une variété dépourvue de variété canonique mais possédant un système bicanonique. Nous prendrons par exemple pour variété V_1 l'intersection de cinq hyperquadriques linéairement indépendantes d'un espace S_8 à huit dimensions. C'est une variété à trois dimensions dont le système canonique est celui des sections hyperplanes.

Considérons dans un espace S_9 à neuf dimensions, dont les coordonnées ponctuelles sont y_i, z_i $(i=1, 2,3, 4)$, l'homographie harmonique H d'équations

$$\varrho\, y'_i = y_i\,,\quad \varrho\, z'_i = -z_i\,,\qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dant les axes sont σ_1 $(z_i=0)$ et σ_2 $(y_i=0)$.

Considérons ensuite la variété W dont les équations sont

$$\varphi_k(y) + \psi_k(z) = 0,\quad (k = 1, 2, 3, 4),$$
$$y_0\,[f_3(y_1, y_2, y_3, y_4) + f_{1,2}(y\,;\,z)] + [\varphi_5(y) + \psi_5(z)]^2 = 0,$$

où les φ et les ψ sont des formes quadratiques de leurs arguments, f_3 une forme cubique de ses arguments et $f_{1,2}$ une forme linéaire en y_1, y_2, y_3, y_4 dont les coefficients sont des formes quadratiques en z.

Cette variété W est d'ordre 32 et a quatre dimensions. L'hyperplan $y_0=0$ la touche suivant la variété V_1 intersection des cinq hyperquadriques $\varphi_k(y) + \psi(z)=0$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$.

Les sections hyperplanes V_2 de W satisfont aux conditions $V_2 \equiv \equiv 2\, V_1$, $V_1' \equiv V_2$.

Soient comme plus haut $\overline{V}_2$ les sections de W par les hyperplans passant par σ_1 et V_2^+ les sections par les hyperplans passant par σ_2.

Désignons encore par Ω la variété image de l'involution engendrée sur W par l'homographie H et par $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_2^+$ les variétés qui correspondent sur Ω aux variétés $V_1, \overline{V}_2, V_2^+$. Au système canonique de Ω_1 correspond sur V_1 le système $|(V_1, \overline{V}_2)|$ et on a $|\Omega_2| = |2\, \Omega_1|$, $\Omega_1' | = | \Omega_2^+ |$.

La variété Ω a les genres $P_a = P_g = 0$, $P_2 = 5$.

Pervenuto in Redazione il giorno 11 settembre 1974.