ETUDE D'UNE INVOLUTION CYCLIQUE APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÊBRIQUE

par

LUCIEN GODEAUX

Dans une note récente [1]), nous avons indiqué la construction de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis de même espèce. Nous nous proposons, dans ce nouveau travail, d'utiliser cette construction dans un cas déterminé, de manière à montrer la portée exacte de nos développements.

1. Considérons, dans un espace linéaire $S_{\nu+4}$ à $\nu+4$ dimensions, une homographie H, de période $p=2\nu+1$, d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0}=\frac{x'_1}{x_1}=\ldots=\frac{x'_{\nu+2}}{x'_{\nu+2}}=\frac{x'_{\nu+3}}{\varepsilon x_{\nu+3}}=\frac{x'_{\nu+4}}{\varepsilon^2 x_{\nu+4}},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Nous supposerons, pour plus de simplicité, p premier.

Désignons par φ_i une forme algébrique de degré i et par ψ_p une forme algébrique de degré p, par rapport aux variables $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$ et considérons la surface algébrique F d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} x_{\nu+3}\, x_{\nu+4}^{\nu}=\varphi_{\nu+1}\,,\ x_{\nu+3}^{3}\, x_{\nu+4}^{\nu-1}=\varphi_{\nu+2}\,, \ldots,\ x_{\nu+3}^{2i+1}\, x_{\nu+4}^{\nu-i}\varphi_{\nu+i+1}\,, \\ \ldots,\ x_{\nu+3}^{p}=\varphi_p\,, x_{\nu+4}^{p}=\psi_p\,. \end{cases}$$

La surface F est d'ordre np, où nous posons

$$n=(\nu+1)\,(\nu+2)\,\ldots\,(2\nu)\,p\,.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie H et, sur cette surface, cette homographie engendre une involution I_p, d'ordre p.

---

1) *Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (Bulletin de la Société des Sciences de Liége, 1948, sous presse). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. et indust., Nr. 270. Paris, Hermann, 1935).

Appelons O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sautt x_i. L'homographie H possède trois axes ponctuels: l'espace $O_0 O_1 \dots O_{\nu+2}$, à $\nu + 2$ dimensions, et les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$. La surface F ne passe pas par les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$, mais elle rencontre l'espace $O_0 O_1 \dots O_{\nu+2}$ aux np points représentés par

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \quad \varphi_{\nu+2} = 0, \dots, \varphi_p = 0 \quad \psi_p = 0.$$

L'involution I_p possède donc np points unis isolés.

Pour obtenir une surface Φ, image de l'involution I_p, il suffit de projeter la surface F de la droite $O_{\nu+3} O_{\nu+4}$ sur l'espace

$$S_{\nu+2} = O_0 O_1 \dots O_{\nu+2}.$$

On obtient ainsi la surface d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{\nu+1} & \varphi_{\nu+2} & \dots & \varphi_{2\nu-1} & \varphi_{2\nu} & \psi_p \\ \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu+3} & \dots & \varphi_{2\nu} & \varphi_p & \varphi_{\nu+1}^2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

C'est une surface d'ordre n et les points de diramation occupent la même position que les points unis de I_p sur F.

2. Les np points unis de I_p sur F d'une part, et les np points de diramation de Φ d'autre part, sont évidemment de même nature, Pour étudier la structure de ces points, nous supposerons que l'un d'eux coïncide avec O_0. Il suffira de supposer que les hypersurfaces (1) passent simplement par ce point.

Nous indiquerons par α_i la forme linéaire en $x_1, x_2, \dots, x_{\nu+2}$, coefficient de x_0^{i-1} dans φ_i et par β_p la forme linéaire coefficient de x_0^{p-1} dans ψ_p.

Le plan tangent à la surface F en O_0 coïncide avec le plan $O_0 O_{\nu+3} O_{\nu+4}$. Dans ce plan, l'homographie H détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_{\nu+3} : x'_{\nu+4} = x_0 : \varepsilon x_{\nu+3} : \varepsilon^2 x_{\nu+4}$$

et par conséquent, le point infiniment voisin de O_0 sur la droite $O_0 O_{\nu+3}$ est uni parfait pour l'involution I_p. Il existe une suite de ν points infiniment voisins successifs de O_0, le premier étant sur la droite $O_0 O_{\nu+4}$, le dernier étant uni parfait et les autres unis non parfaits pour l'involution [1]).

Passons à l'examen du point de diramation O_0 sur la surface Φ. Le cône tangent en ce point à la surface a pour équations

1) L. Godeaux, *Sur les homographies planes cycliques* (Mémoires de la Société des Sciences de Liége, 1929); *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies planes cycliques* (Idem., 1930).

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \ldots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} & \beta_p \\ \alpha_{\nu+2} & \alpha_{\nu+3} & \ldots & \alpha_{2\nu} & \alpha_p & 0 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Il se compose d'un cône d'ordre ν,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{\nu+2} & \alpha_{\nu+3} & \ldots & \alpha_p \end{matrix} \right\| = 0, \ \beta_p = 0$$

et d'un plan

$$\alpha_{\nu+2} = 0, \quad \alpha_{\nu+3} = 0, \ldots, \quad \alpha_{2\nu} = 0, \quad \alpha_p = 0.$$

Ce cône et ce plan ont en commun la droite

$$\alpha_{\nu+2} = 0, \quad \alpha_{\nu+3} = 0, \ldots, \quad \alpha_p = 0, \quad \beta_p = 0.$$

On voit donc que *la surface Φ, d'ordre n, possède np points de diramation qui sont des points multiples d'ordre $\nu+1$; le cône tangent en chacun de ces points se compose d'un cône d'ordre ν et d'un plan, se rencontrant suivant une droite.*

3. Désignons par C les sections hyperplanes de la surface F. Le système linéaire $|C|$ comprend trois systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p. L'un, que nous désignerons par $|C_0|$, est le transformé du système des sections hyperplanes $|\Gamma|$ de la surface Φ. Les deux autres sont formés de courbures isolées: la courbe $C_{\nu+3}$, découpée sur F par l'hyperplan $x_{\nu+3} = 0$ et la courbe $C_{\nu+4}$, découpée sur F par l'hyperplan $x_{\nu+4} = 0$.

Aux courbes $C_{\nu+3}$, $C_{\nu+4}$ correspondent sur Φ des courbes d'ordre n que nous désignerons par $\Gamma_{\nu+3}$, $\Gamma_{\nu+4}$. La courbe $\Gamma_{\nu+3}$ a pour équations

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \quad \varphi_{\nu+2} = 0, \ldots, \quad \varphi_{2\nu} = 0, \quad \varphi_p = 0$$

et la courbe $\Gamma_{\nu+4}$,

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \quad \varphi_{\nu+2} = 0, \ldots, \quad \varphi_{2\nu} = 0, \quad \psi_p = 0.$$

Si π est le genre des courbes Γ, les courbes C_0 et par conséquent les courbes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$. Les courbes $C_{\nu+3}$, $C_{\nu+4}$ passent par les np points unis de I_p, par conséquent les courbes $\Gamma_{\nu+3}$, $\Gamma_{\nu+4}$ ont le genre $\pi - n\nu$.

4. Considérons le système linéaire $|pC|$, découpé sur la surface F par les hypersurfaces d'ordre p de $S_{\nu+4}$. Ce système contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p et que nous

désignerons par $|(pC)_0|, |(pC)_1|, \dots, |(pC)_{p-1}|$. Le système $|(pC)_i|$ est découpé par les hypersurfaces d'ordre p dont l'équation, lorsque l'on applique l'homographie H, se reproduit multipliée par ε^i.

Dans la formation de l'équation de chacun de ces systèmes d'hypersurfaces, nous devons tenir compte des équations de F. Il en résulte que le système $|(pC)_0|$ est découpé sur F par les hypersurfaces

$$\alpha_p(x_0, x_1, \dots, x_{\nu+2}) = 0,$$

où α_p désigne une forme algébrique de degré p, à coefficients variables. Ce système a donc pour homologue, sur la surface Φ, le système $|p\Gamma|$.

Pour former l'équation des hypersurfaces découpant sur F le système $|(pC)_1|$, observons tout d'abord que nous rencontrerons, dans cette équation, les termes

$$x_{\nu+3}\,\alpha_{p-1}, \quad x_{\nu+4}^{\nu+1}\,\beta_\nu,$$

où α_{p-1}, β_ν sont des formes en $x_0, x_1, \dots, x_{\nu+2}$ de degrés respectifs $p-1, \nu$.

Les autres termes sont de la forme

$$x_{\nu+3}^{2i+2}\, x_{\nu+4}^{\nu-i}\, \alpha_{\nu-i-1}, \quad (i = 0, 1, \dots, \nu-1),$$

où $\alpha_{\nu-i-1}$ est une forme algébrique de degré $\nu - i - 1$ en $x_0, x_1, \dots, x_{\nu+2}$. En tenant compte des équations de F, ces termes peuvent être remplacés par

$$x_{\nu+3}\quad \alpha_{\nu-i-1}\quad \varphi_{\nu+i+1}$$

et rentrent donc dans le terme $x_{\nu+3}\,\alpha_{p-1}$. Il en résulte que le système $|(pC)_1|$ est découpé sur F par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}\,\alpha_{p-1} + x_{\nu+4}^{\nu+1}\,\beta_\nu = 0,$$

où les coefficients des formes α_{p-1}, β_ν sont supposés variables.

Le même raisonnement peut être appliqué à la recherche des équations des hypersurfaces découpant, sur F, les systèmes $|(pC)_2|$, $|(pC)_3|, \dots, |(pC)_{p-1}|$. On trouvera ainsi que le système $|(pC)_{2k+1}|$ est découpé sur F par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}^{2k+1}\,\alpha_{p-2k-1} + x_{\nu+4}^{\nu+k+1}\,\beta_{\nu-k} = 0$$

et le système $|(pC)_{2k}|$ par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}^{2k}\,\alpha_{p-2k} + x_{\nu+4}^{k}\,\beta_{p-k} = 0,$$

où α_i, β_i sont des formes de degré i en $x_0, x_1, \dots, x_{\nu+2}$, à coefficients variables. L'entier k prend les valeurs $0, 1, \ldots, \nu - 1$ dans la première équation et les valeurs $1, 2, \ldots, \nu$ dans la seconde.

Aux systèmes $|(pC)_1|, |(pC)_2|, \ldots, |(pC)_{p-1}|$ correspondent sur Φ, des systèmes linéaires complets $|(p\Gamma)_1|, |(p\Gamma)_2|, \ldots, |(p\Gamma)_{p-1}|$, de courbes d'ordre pn.

Les courbes $(p\Gamma)_{2k+1}$ sout découpées sur Φ par les hypersurfaces

$$\varphi_{\nu+2}^{k} \alpha_{p-2k-1} + \varphi_{\nu+1}^{k-1} \psi_p \beta_{\nu-k} = 0$$

et les courbes $(p\Gamma)_{2k}$ par les hypersurfaces

$$\varphi_{\nu+2}^{k} \alpha_{p-2k} + \varphi_{\nu+1}^{k} \beta_{p-k} = 0,$$

mais en dehors de parties fixes.

5. Nous allons obtenir d'une autre manière les équations des courbes $(p\Gamma)_1, (p\Gamma)_2, \ldots, (p\Gamma)_{p-1}$ et en même temps, en démontrer une propriété intéressante, que nous avons déjà établie par une tout autre voie dans le cas général [1]). Pour plus de simplicité, nous raisonnerons sur le système $|(p\Gamma)_1|$, mais nos développements s'étendent, sans autre difficulté qu'un changement de notation, aux autres systèmes.

Les courbes $(pC)_1$ sont découpées sur F par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}\, \alpha_{p-1} + x_{\nu+4}^{\nu+1} \beta_\nu = 0.$$

En élevant les deux membres de cette équation à la puissance p et en tenant compte des équations de F, on en déduit

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\nu} \binom{p}{2i} \varphi_{2\nu-i+1} \psi_p^{i} \alpha_{p-1}^{p-2i} \beta_\nu^{2i} + \\ & + \varphi_{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{p}{2i+1} \varphi_{2\nu-i} \psi_p^{i} \alpha_{p-1}^{p-2i-1} \beta_\nu^{2i+1} = 0. \end{aligned} \right.$$

On convient de poser, dans cette équation, $\varphi_{\nu+1}\, \varphi_\nu = \psi_p$.

Dans l'espace $S_{\nu+2}$, cette équation représente une hypersurface d'ordre p^2 découpant sur Φ une courbe $(p\Gamma)_1$. Nous allons montrer que l'hypersurface (2) a précisément, le long de la courbe $(p\Gamma)_1$ qu'elle contient, un contact d'ordre $p-1$ avec Φ.

Dans α_{p-1}, β_ν, les coefficients sont supposés variables. Fixons ces coefficients sauf l'un d'eux, par exemple un des coefficients de α_{p-1} et cherchons l'enveloppe de l'hypersurface (2) lorsque ce coefficient varie.

En dérivant l'équation (2) par rapport à ce coefficient, on trouve

1) *Les involutions* . . . (loc cit.).

$$\sum_{i=0}^{\nu} \binom{p-1}{2i} \varphi_{2\nu-i+1} \psi_p^i \alpha_{p-1}^{p-2i-1} \beta_\nu^{2i} + \varphi_{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu-1} \binom{p-1}{2i+1} \varphi_{2\nu-i} \psi_p^i \alpha_{p-1}^{p-2i-2} \beta_\nu^{2i+1} = 0. \tag{3}$$

L'équation de l'enveloppe des hypersurfaces (2) s'obtiendra en éliminant le paramètre variable entre les équations (2) et (3), c'est-à-dire en éliminant α_{p-1} entre ces équations.

La dérivée d'ordre k du premier membre de l'équation (2) s'écrit, après suppression de facteurs indépendants du paramètre variable

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\nu} \binom{p-k}{2i} \varphi_{2\nu-i+1} \psi_p^i \alpha_{p-1}^{p-2i-k} \beta_\nu^{2i} + \\ & + \varphi_{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{p-k}{2i+1} \varphi_{2\nu-i} \psi_p^i \alpha_{p-1}^{p-2i-1-k} \beta_\nu^{2i+1}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

les sommations s'étendant jusqu'aux premiers termes nuls.

En particulier, la dérivée d'ordre $p-1$ s'écrit

$$\varphi_p \alpha_{p-1} + \varphi_{\nu+1} \varphi_{2\nu} \beta_\nu .$$

Posons, dans (4),

$$\alpha_{p-1} = - \frac{\varphi_{\nu+1} \varphi_{2\nu}}{\varphi_p} \beta_\nu .$$

En utilisant les équations de la surface et précisément les relations

$$\varphi_p \psi_p = \varphi_{\nu+1}^2 \varphi_{2\nu} ,$$

$$\varphi_{2\nu-i+1} \varphi_p^{i-1} = \varphi_{2\nu}^i , \quad \varphi_{2\nu-i} \varphi_p^i = \varphi_{2\nu}^{i+1} .$$

on trouve facilement que la quantité (4) est identiquement nulle. De même, dans les mêmes conditions, les relations (2) et (3) se réduisent à des identités. On en conclut qu'en un point caractéristique de l'hypersurface (2), appartenant à la surface Φ, cette hypersurface a un contact d'ordre $p-1$ avec la surface.

Observons que les courbes $(p\Gamma)_1$ passent par les points de diramation de la surface Φ.

Le raisonnement peut être repris pour les courbes $(p\Gamma)_2, \ldots,$ $(p\Gamma)_{p-1}$ et on voit que : *Il existe sur la surface Φ, $p-1$ systèmes linéaires de courbes d'ordre pn, passant par tous les points de diramation ; le long de chaque courbe de ces systèmes, il y a une hypersurface d'ordre p^2 ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface.*

(Académie des Sciences de Belgique et l'Université de Liége)

(Reçu le 20 avril 1948)