SUR UNE QUADRIQUE DOUBLE DE GENRES UN.

Par

Lucien Godeaux
Professeur à l'Université de Liège.

Reçue le 5 Avril 1932.

Dans cette note, nous considérons une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) dont un modèle projectif est constitué par une quadrique double dont la courbe de diramation est du huitième ordre et possède six points doubles ordinaires. Nous montrons que cette surface possède un groupe trirectangle de transformations birationnelles en elle-même, deux des transformations engendrant des involutions rationnelles et la dernière une involution de genre un.

1. — Soient Q_0 une quadrique, K une cubique gauche rencontrant cette quadrique en six points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_6$ Il existe ∞^3 quadriques Q passant par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et ces quadriques forment un système linéaire $|Q|$ de degré deux. Nous désignerons par I_2 l'involution formée par les couples de points communs aux groupes de trois quadriques Q n'appartenant pas à un même faisceau.

Rapportons projectivement les quadriques Q aux plans de l'espace. Nous obtenons ainsi une correspondance (1,2) entre les points de l'espace. Précisément les points de l'espace et les couples de l'involution I_2 se correspondent birationnellement. Cette correspondance a été étudiée par Reye (1) et de Paolis (2). La surface unie est la jacobienne du système $|Q|$; c'est la surface de Weddle, lieu des sommets des cônes du second ordre passant par les six points $A_1, A_2 \ldots, A_6$. La surface de diramation de la correspondance est une surface de Kümmer.

Aux ∞^2 quadriques Q passant par la cubique gauche K correspondent les plans d'une gerbe dont le sommet A' est un point double de la surface de diramation. En particulier, aux cônes projetant la cubique K

(1) Ueber Strahlensysteme zweiter Classe und die Kümmer'sche Fläche vierter Ordung mit zechzehn Knotenpunkten (Journal de Crelle, 1879, t LXXXVI).

(2) Alcune proprietà della superficie di Kümmer (Rend. R. Accad. Lincei, juillet 1890).

de ses différents points correspondent les plans tangents à un cône du second ordre ayant le point A' pour sommet. Les plans qui correspondent aux cônes projetant K des points A_1, $A_2, \ldots, A_6$ touchent la surface de diramation chacun suivant une conique passant par le point A'.

Nous désignerons par ϖ_0 le plan qui correspond à la quadrique Q_0.

Aux quadriques de l'espace correspondent des surfaces du quatrième ordre ayant des points doubles en général coniques en A_1, $A_2, \ldots, A_6$. Les surfaces du quatrième ordre ayant des points doubles en ces points forment un système linéaire $|F|$, ∞^{10} au moins. Désignons par T la transformation birationnelle involutive de l'espace faisant se correspondre les points des couples de l'involution I_2. La transformation T fait correspondre à une surface F du système $|F|$ une surface du même système. Dans le système $|F|$, il y a deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2; l'un est formé des ∞^9 surfaces transformées des quadriques de l'espace dans la correspondance (1,2); l'autre se compose de la surface de Weddle, jacobienne du système $|Q|$. Il en résulte que le système $|F|$ a la dimension dix.

Les surfaces F découpent, sur la quadrique Q_0, ∞^6 courbes du huitième ordre ayant des points doubles en A_1, $A_2, \ldots, A_6$. Parmi celles-ci se trouvent ∞^5 courbes transformées en elles-mêmes par T; elles correspondent, dans la transformation (1,2) aux ∞^5 coniques du plan ϖ_0.

2. — Soient δ une conique du plan ϖ_0, D la courbe du huitième ordre qui lui correspond sur Q_0.

La quadrique double Q_0, ayant comme courbe de diramation la courbe D, est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (3). Désignons par Φ cette surface de genres un, par θ la transformation birationnelle involutive de cette surface en elle-même qui fait se correspondre deux points superposés à un même point de Q_0.

Entre le plan ϖ_0 et la surface Φ, nous avons une correspondance (1,4). La courbe de diramation pour cette correspondance, dans le plan ϖ_0, se compose de la conique δ et d'une quartique γ section par le plan ϖ_0 de la surface de Kümmer dont il a été question plus haut.

Désignons par a_1', $a_2', \ldots, a_6'$ les droites du plan ϖ_0 découpées sur ce plan par les plans qui correspondent aux cônes projetant K à partir des points A_1, $A_2, \ldots, A_6$. Ces droites sont des bitangentes de la courbe γ.

A une droite quelconque du plan ϖ_0 correspond sur la quadrique Q_0 une biquadratique C passant par les points A_1, $A_2, \ldots, A_6$. En

(3) ENRIQUES, Sui piani doppi di genere uno (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, 1896).

particulier, aux tangentes à la conique δ correspondent des quartiques C bitangentes à la courbe D.

A la droite a_i' correspond une biquadratrique C_i' section de Q_0 par le cône projetant K de A_i; la courbe C_i a donc un point double en A_i. Aux points de contact de la droite a'_i avec la courbe γ correspondent les points infiniment voisins de A_i sur la courbe C_i, points qui sont unis pour l'involution I_2.

3. — Pour passer du plan ϖ_0 à la surface Φ, on peut passer de ϖ_0 à Q_0 au moyen de la correspondance (1,2) ayant pour courbe de diramation γ, puis passer de Q_0 à Φ. Mais on peut également procéder autrement.

Désignons par R la quadrique représentée sur le plan double ϖ_0, la courbe de diramation étant la conique δ. D'une manière précise, si

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

est l'équation de δ, l'quation de la quadrique R s'ecrira

$$x_4^2 = f(x_1, x_2, x_3).$$

A la courbe γ correspond sur R une courbe du huitième ordre Γ.

Aux tangentes à la courbe δ correspondent sur R des couples de génératrices rectilignes g', g'' découpées par les plans tangents à R aux points de δ et rencontrant chacune la courbe Γ en quatre points.

Aux droites a_1', a_2', ..., a_6' correspondent sur R des coniques que nous désignerons respectivement par G_1, G_2, ..., G_6. Ces coniques touchent la courbe Γ chacune en quatre poin's.

Entre la quadrique R et la surface Φ, nous avons une correspondance (1,2), la courbe de diramation étant la courbe Γ. En d'autres termes, la surface Φ peut être considérée comme une quadrique double de courbe de diramation Γ. Nous désignerons par θ_1 la transformation birationnelle involutive de Φ en elle-même qui fait se correspondre deux points superposés de la quadrique double R.

4. — Sur la surface Φ, les transformations θ, θ_1 engendrent une involution d'ordre quatre, par suite ces transformations doivent être permutables. La transformation $\theta_1\ \theta$ engendre une involution du second ordre. Les points unis de cette involution sont les points qui sont unis à la fois pour θ, θ_1 ou bien les points auxquels θ, θ_1 font correspondre un même point.

Supposons qu'il existe un point P de Φ auquel θ, θ_1 font correspondre un même point P′, distinct de P. Au couple P, P′ correspond sur Q_0 un point qui doit être uni pour I_2. De même, à ce couple doit correspondre sur R un point qui doit appartenir à la courbe δ. Les points P, P' doivent donc être unis à la fois pour θ, θ_1, contrairement à l'hypothèse.

Les points communs aux courbes de Φ unies pour θ et pour θ_1 sont au nombre de huit, ils correspondent aux huit points communs aux courbes δ, γ. Ce sont les seuls points unis de l'involution engendrée par $\theta_1\,\theta$ et par suite cette involution est de genres un (4). Une surface Ψ, image de cette involution, est constituée par le plan double ϖ_0 ayant comme courbe de diramation la courbe $\delta+\gamma$ (5).

La surface Φ possède un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives en elle-même; deux de ces transformations engendrent des involutions rationnelles, la troisième une involution de genres un.

5. — On peut former aisément les équations de la surface Φ. Supposons que la cubique gauche K soit représentée par

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

et la quadrique Q_0 par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

On obtiendra la correspondance entre le plan ϖ et la quadrique Q_0 en posant

$$\frac{y_1}{x_2 x_4 - x_3^2} = \frac{y_2}{x_2 x_3 - x_1 x_4} = \frac{y_3}{x_1 x_3 - x_2^2}$$

et la courbe γ aura pour équation

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_1, y_2, y_3) \equiv &- a_{11}\, a_{44}\, (y_2^2 - y_1 y_3)^2 \\ &+ [a_{23} y_1 y_3 - a_{12} y_3^2 - a_{13} y_2 y_3 - a_{24} y_1 y_2 - a_{34} y_1^2 + a_{14} (y_2^2 + y_1 y_3)]^2 \\ &- [a_{22} y_1 y_3 - 2a_{12} y_2 y_3 - 2a_{24} y_1^2 + 2a_{14} y_1 y_2]\,[a_{33} y_1 y_3 - 2a_{12} y_3^2 - 2a_{34} y_1 y_2 + 2a_{14} y_2 y_3] \\ &- a_{11} y_3 [a_{22} y_3^3 + a_{33} y_2^2 y_3 - 2a_{23} y_2 y_3^2 + 2(a_{24} y_3 - a_{34} y_2)(y_2^2 - y_1 y_3)] \\ &- a_{44} y_1 [a_{22} y_1 y_2^2 + a_{33} y_1^3 - 2a_{23} y_1^2 y_2 + 2(a_{13} y_1 - a_{12} y_3)(y_2^2 - y_1 y_3)] = 0. \end{aligned}$$

Si

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

est l'équation de la conique δ, la courbe D aura pour équation

$$\varphi = 0, \quad f(x_2 x_4 - x_3^2,\, x_2 x_3 - x_1 x_4,\, x_1 x_3 - x_2^2) = 0.$$

(4) L. GODEAUX, Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (Annales de l'Ecole normale supérieure, 1914, 1919).

(5) L. GODEAUX, Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914).

La quadrique double Q_0 a pour équations

$$\varphi(x, y, z, 1) = 0,\ u^2 = f(y - z^2,\ yz - x,\ xz - y^2),$$

et la quadrique double R,

$$z'^2 = f(x', y', 1),\ u'^2 = \varphi_1(x', y', 1)$$

6. – Aux sections planes de la quadrique Q_0 correspondent sur Φ des courbes E de genre trois formant un système linéaire ∞^3 $|E|$. Aux courbes C bitangentes à la courbe D correspondent des courbes décomposées dont nous désignerons les parties par E_1, E_2. Les courbes E_1 correspondent aux droites g' de la quadrique R, les courbes E_2 aux droites g''. Les courbes E_1, E_2 sont elliptiques et forment des faisceaux $|E_1|$, $|E_2|$.

Aux sections planes de la quadrique R correspondent sur la surface Φ des courbes de genre trois qui, d'après ce qui précède, appartiennent au système linéaire $|E_1+E_2|$. D'ailleurs, une courbe E_1 rencontre une courbe E_2 en deux points et les courbes $E_1 + E_2$ sont bien de genre trois.

En particulier, à la courbe G_i, qui touche la courbe Γ en quatre points, correspondent sur Φ deux courbes rationnelles G_{i1}, G_{i2}, telles que

$$G_{i1} + G_{i2} \equiv E_1 + E_2.$$

Les courbes G_{i1}, G_{i2} ont en commun quatre points et sont des unisécantes des courbes E_1, E_2. A l'une des courbes G_{i1}, G_{i2}, par exemple à G_{i1}, correspondent sur Q_0 les points infiniment voisins de A_i et à l'autre courbe G_{i2}, la section de Q_0 par le cône projetant K de A_i.

Chacune des courbes des systèmes $|E_1|$, $|E_2|$, $|E_1+E_2|$, est transformée en elle-même par θ_1. A une courbe E_1, θ fait correspondre une courbe E_2. Donc à une courbe du système $|E_1 + E_2|$, θ fait correspondre une courbe du même système. De plus, θ transforme en elle-même chacune des courbes G_{i1}, G_{i2}.

D'après cela, le système

$$|H| = |2E_1 + 2E_2|,$$

de dimension neuf, est transformé en lui-même par θ, θ_1. Il ne peut d'autre part être composé au moyen des involutions engendrées par ces transformations, ni par $\theta_1\ \theta$. En rapportant projectivement les courbes H aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, on obtiendra pour modèle projectif de la surface Φ, une surface Φ_0 d'ordre seize, à sections hyperplanes de genre neuf. Sur cette surface, θ, θ_1, $\theta_1\ \theta$ seront déterminées par des homographies harmoniques.

Observons tout d'abord que les courbes H transformées en elles-mêmes par θ_1 ont pour homologues sur R des courbes du quatrième ordre découpées par des quadriques. Ces courbes sont en nombre ∞^8 et par suite θ_1 est déterminée sur Φ_0 par une homologie harmonique. Nous désignerons le centre de cette homologie par P_1 et son hyperplan par $\tilde{\omega}_1$. La section de Φ_0 par $\tilde{\omega}_1$ a pour homologue sur R la courbe Γ et sur Q_0 la section de cette quadrique et de la surface de Weddle dont il a été question plus haut.

Aux courbes H découpées sur Φ_0 par les hyperplans passant par P_1 et qui sont transformées en elles-mêmes par θ correspondent sur Q_0, des courbes du huitième ordre passant doublement par les points A_1 $A_2, \ldots, A_6$. Ces courbes sont en nombre ∞^5 et correspondent aux coniques du plan $\tilde{\omega}_0$. Les courbes H considérées sont transformées en elles-mêmes par $\theta_1\ \theta$; elles sont découpées sur Φ_0 par les hyperplans passant par un espace linéaire ξ_3 à trois dimensions qui est un axe de l'homographie déterminant, sur Φ_0, la transformation $\theta_1\,\theta$. L'autre axe de cette homographie est un espace linéaire ξ_5 à 5 dimensions qui doit appartenir à l'hyperplan $\tilde{\omega}$.

Mais l'espace ξ_3 doit être complètement déterminé par P_1 et un des axes de l'homographie θ. De même, ξ_5 doit être l'intersection complète de $\tilde{\omega}_1$ et du second axe de θ. On en conclut que les axes de θ sont le premier un plan η_2 et le second un espace η_6 à six dimensions. Ce dernier coupe la surface Φ_0 suivant la courbe d'ordre huit et de genre trois qui correspond à la courbe D.

L'hyperplan $\tilde{\omega}_1$ contient le plan η_2 et l'espace η_6 contient le point P_1.

La surface Φ eet birationnellement équivalente á une surface d'ordre seize, de S_9, transformée en elle-même par une homologie harmonique et par une homographie harmonique ayant pour axes un plan et un espace à six dimensions, permutable avec la précédente.

7. — Les courbes H découpées sur Φ_0 par les hyperplans passant par ξ_5 sont en nombre ∞^3 et sont trasformées en elles-mêmes par $\theta_1\ \theta$ mais non en général par θ, θ_1. Rapportons projectivement ces courbes aux plans d'un espace ordinaire. A la surface Φ_0 correspond une surface Ψ du quatrième ordre, simple, image de l'involution engendrée par $\theta_1\ \theta$. Aux transformations θ, θ_1 corespond une transformation birationnelle de la surface Ψ en elle-même. Cette transformation θ' est une homographie et est précisément une homologie harmonique, car aux ∞^4 courbes H découpées par les hyperplans passant par ξ_5 et par P_1, correspondent ∞^2 sections planes de Ψ invariantes pour θ'. Soient B le centre de cette homologie, β son plan.

Les sections planes de Ψ sont de genre trois. A la courbe H découpée sur Φ_0 par l'hyperplan $\bar{\omega}_1$ correspond sur Ψ la section de cette surface par le plan d'homologie β.

Les hyperplans de S_9 passant par ξ_5 et par P_1 contiennent l'espace η_6; ils découpent sur Φ_0 des courbes d'ordre huit et de genre trois. Deux de ces hyperplans coupent encore Φ_0, en dehors de la courbe située dans η_6, en quatre points. Par suite les droites passant par B ne rencontrent plus Ψ qu'en deux points et B est double pour cette surface. Au domaine du point B sur la surface Ψ correspond la courbe D.

Aux huit points communs à la surface Φ_0 et à l'espace ξ_5 correspondent huit droites tracées sur Ψ, passant par B, qui forment l'intersection complète de la surface Ψ et du cône tangent à cette surface au point B.

8. Aux courbes G_{i1}, G_{i2} correspondent, sur la surface Φ_0, des courbes que nous continuerons à désigner par les mêmes lettres et qui sont des quartiques rationnelles situées dans des espaces linéaires à quatre dimensions. Les deux espaces à quatre dimensions contenant ces deux courbes ont en commun un plan et appartiennent à un espace à six dimensions.

On obtient ainsi, pour $i = 1,2,\ldots, 6$ douze quartiques rationnelles normales tracées sur Φ_0 Il existe d'autres courbes analogues sur cette surface.

Considérons les plans A_1 A_2 A_3 et A_4 A_5 A_6 ; ils coupent Q_0 suivant deux coniques auxquelles correspond, sur le plan $\bar{\omega}_0$, une bitangente de la courbe γ. A cette bitangente correspond sur la quadrique R une conique touchant la courbe Γ en quatre points et à cette conique correspondent sur la surface Φ_0 deux courbes rationnelles que nous désignerons respectivement par G_{123}, G_{456}. Ces courbes sont des quartiques rationnelles normales.

En considérant tous les couples de plans contenant les six points A_1, $A_2,\ldots,$ on trouve ainsi vingt nouvelles quartiques rationnelles normales tracées sur Φ_0.

Soit t_1 une des droites de Q_0 passant par A_1. Les quadriques Q passant par t_1 forment un faisceau comprenant Q_0 et dont la base est complétée par une cubique gauche T_1 passant par A_1, $A_2,\ldots, A_6$, bisécante de t_1. A la courbe $t_1 + T_1$ correspond sur $\bar{\omega}_0$ une bitangente de la courbe γ. On voit comme plus haut qu'à cette bitangente correspond sur la surface Φ_0 un couple de quartiques rationnelles normales. La considération des six points A_1 $A_2,\ldots, A_6$ et des deux génératrices de Q_0 passant par chacun de ces points conduit à l'exitsence, sur Φ_0, de vingt- quatre nouvelles quartiques rationnelles normales.

Il est facile de voir que deux quelconques des 56 quartiques rationnelles ainsi trouvées sur Φ_0, ne provenant pas d'une même bitangente de γ, se coupent en deux points.

Il existe, sur la surface Φ_0, 28 couples de quartiques rationnelles normales. Les quartiques d'un même couple se coupent en quatre points, deux quartiques rationnelles appartenant à des couples distincts se coupent en deux points.

Les quatre points communs aux quartiques d'un même couple se trouvent d'ailleurs dans l'hyperplan ω_1. Par suite, comme les quartiques de ces couples sont échangées entre elles par θ, à ces courbes correspond sur Ψ la section de cette surface par un plan passant par B, bitangent à la surface en des points de la courbe (Ψ, β). Observons que les droites passant par B et s'appuyant sur la courbe (Ψ, β) touchent Ψ le long de cette courbe. Aux 28 couples de quartiques rationnelles de Φ correspondent donc sur Ψ les 28 sections de cette surface par les plans projetant de B les 28 bitangentes de la courbe (Ψ, β)

RÉSUMÉ.

Dans cette note, nous considérons une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) dont un modèle projectif est constitué par une quadrique double ayant une courbe de diramation du huitième ordre possédant six points doubles ordinaires. Cette surface possède un groupe trirectangle de transformations birationnelles en elle-même: deux des transformations du groupe engendrent des involutions rationnelles, la dernière une involution de genres un.