Sur une variété algébrique à trois dimensions à sections hyperplanes bicanoniques

Lucien Godeaux

On sait que M. F. Enriques a considéré la surface d'équation

$$f_2(x_1x_2x_3,\ x_2x_3x_0,\ x_3x_0x_1,\ x_0x_1x_2) + x_0x_1x_2x_3\ \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où f_2 et φ_2 sont des formes algébriques quadratiques quaternaires, comme exemple d'une surface dépourvue de courbe canonique, mais possédant une courbe bicanonique (d'ordre zéro) (1). Il est intéressant de se demander si l'on peut construire de même une variété algébrique à trois dimensions dépourvue de surface canonique mais ayant des surfaces bicanoniques. La réponse est affirmative et dans cette note, nous démontrons précisément que *la variété algébrique* à *trois dimensions d'équation*

$$f_2(x_1x_2x_3x_4,\ x_2x_3x_4x_0,\ x_3x_4x_0x_1,\ x_4x_0x_1x_2,\ x_0x_1x_2x_3) +$$

$$+\ x_0x_1x_2x_3x_4\ \varphi_3(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où f_2 *et* φ_3 *sont des formes algebriques à cinq variables, la première quadratique, la seconde cubique, est dépourvue de surface canonique mais possède des surfaces bicanoniques qui sont ses sections hyperplanes.*

1. Soient x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes des points d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions,

f_2 et φ_3 des formes algébriques à cinq variables, la première quadratique, la seconde cubique. Considérons l'hypersurface V, du huitième ordre, d'équation

$$f_2\,(x_1x_2x_3x_4,\ x_2x_3x_4x_0,\ x_3x_4x_0x_1,\ x_4x_0x_1x_2,\ x_0x_1x_2x_3)\ +$$

$$+\ x_0x_1x_2x_3x_4\,\varphi_3\ (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)\ =\ 0\,.$$

Si nous désignons par $0_00_10_20_30_4$ la figure de référence, la face opposée au point 0_i ayant pour équation $x_i = 0$, l'hypersurface V passe doublement par les dix plans $0_i0_k0_e$, triplement par les dix droites 0_i0_k et quadruplement par les cinq points 0_0, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4.

Le système canonique éventuel de V est découpé par les hypersurfaces cubiques passant par les dix plans doubles de V ; de telles hypersurfaces cubiques n'existent pas et par suite V est dépourvue de surfaces canoniques. Les biadjointes de V sont des hypersurfaces du sixième ordre passant doublement par les plans doubles de V; ces biadjointes se décomposent donc dans les cinq faces de la figure de référence et en un hyperplan variable. Le système bicanonique de V est par suite le système $|F|$ de ses sections hyperplanes.

Le système adjoint $|F'|$ de $|F|$ est découpé sur V par les hypersurfaces adjointes du quatrième ordre, c'est-à-dire par les hypersurfaces d'équation

$$\lambda_0x_1x_2x_3x_4\ +\ \lambda_1x_2x_3x_4x_0\ +\ \ldots.\ +\ \lambda_4x_0x_1x_2x_3\ =\ 0$$

Ce système $|F|$ est donc le système tricanonique de V. D'ailleurs, les triadjointes de V sont les hypersurfaces du neuvième ordre, (ne contenant pas V comme partie) passant triplement par les dix plans doubles de V; ces hypersurfaces sont formées des cinq faces de la figure de référence et d'une hypersurface adjointe du quatrième ordre.

Le système $|F' - F|$ n'existe pas, mais le système bicanonique $|2F' - 2F|$ existe et coïncide avec le système $|F|$; on a donc la relation fonctionnelle

$$|2F'| = |3F|.$$

Les 4-adjointes de V sont des hypersurfaces d'ordre douze, passant quadruplement par les dix plans doubles de V (et ne contenant pas V comme partie). Ces hypersurfaces sont formées par les cinq faces de la figure de référence comptées chacune deux fois et par une hyperquadrique variable. Le système 4-canonique $|2F|$ de V est donc découpé par les hyperquadriques.

Les genres de la variété V sont

$$P_g = 0, \; P_2 = 5, \; P_3 = 5, \; P_4 = 15, \ldots$$

2. Une surface bicanonique F de V a comme adjoint le système $|F|$ et puisque le système $|F' - F|$ n'existe pas, le genre géométrique de F est $p_g = 5$.

Le système bicanonique d'une surface F est découpé sur celle-ci par le système $|2F'|$, c'est-à-dire par le système $|3F|$. Il en résulte que la section d'une surface F par une hypersurface cubique est une courbe bicanonique de cette surface; le degré du système bicanonique d'une surface F est donc égal à 9.8 et par suite le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 19$.

Les sections planes d'une surface F sont des courbes du huitième ordre possédant dix points doubles; elles sont par conséquent de genre onze. Envisageons une surface F, soit F_0, et désignons par C ses sections planes. Le système adjoint de $|C|$ est découpé sur F_0 par les surfaces adjointes d'ordre cinq. La surface F_0 possède dix droites doubles, intersections de cinq plans pris deux-à-deux; par chaque point commun à deux de ces droites en passe une troisième. Les surfaces du cinquième ordre passant par ces dix droites sont en nombre ∞^{15} ; il y a, puisque F_0 est de genre $p_g = 5$, ∞^4 de ces surfaces qui contiennent F_0 comme partie; il en résulte que le système adjoint de $|C|$, de genre 11, a la dimension dix et par suite la surface F_0 est régulière.

Les surfaces F étant régulières et ayant en commun des courbes variables irréductibles, l'irrégularité superficielle de l'hypersurface V est nulle d'après le théorème de MM. Castelnuovo et Enriques (2).

Les surfaces F' ont, comme nous l'avons vu plus haut, comme système adjoint le système des hyperquadriques de S_4, par conséquent elles ont le genre géométrique $p_g = 15$. D'autre part, ces surfaces ont des intersections variables irréductibles et l'irrégularité superficielle de V étant nulle, les surfaces F' sont régulières.

Deux hyperquadriques ont en commun une surface du quatrième ordre et d'autre part les surfaces F' sont d'ordre douze, par suite le genre linéaire des surfaces F' est $p^{(1)} = 49$.

3. La section de l'hypersurface V par un hyperplan passant par le plan $0_0 0_1 0_2$ se décompose en ce plan compté deux fois et en une surface du sixième ordre Φ dont nous allons nous occuper.

Si
$$x_4 = \lambda x_3$$
est l'équation de l'hyperplan, projetons la surface Φ à partir du point 0_4 sur l'hyperplan $x_4 = 0$; nous obtenons l'équation

$$f_2(\lambda x_1x_2x_3, \lambda x_0x_2x_3, \lambda x_0x_1x_3, \lambda x_0x_1x_2, x_0x_1x_2) +$$
$$+ \lambda x_0x_1x_2 \varphi_3 (x_0, x_1, x_2, x_3, \lambda x_3) = 0 .$$

C'est une surface du sixieme ordre passant doublement par les droites $0_3 0_0$, $0_3 0_1$, $0_3 0_2$. Le système canonique de cette surface est découpé par les cônes du second ordre passant par ces droites. La surface Φ a donc le genre géométrique $p_g = 3$ et le genre linéaire $p^{[1]} = 3$ (le point 0_3 étant triple pour la surface). D'autre part, le système adjoint des sections planes de Φ est découpé sur cette surface par les surfaces cubiques passant par les trois droites doubles; ces surfaces cubiques sont en nombre ∞^9, il y en a ∞^2 formées du plan de la section et d'un cône du second ordre passant par les droites $0_3 0_0$, $0_3 0_1$, $0_3 0_2$, donc il y en a ∞^6 découpant, sur la section plane en question, la série canonique complète. Cette courbe étant de genre sept, la surface Φ est régulière.

Sur l'hypersurface V, le système adjoint du faisceau $|\Phi|$ est découpé par les hyperquadriques passant doublement par les plans $0_3 0_4 0_0$, $0_3 0_4 0_1$, $0_3 0_4 0_2$, hyperquadriques qui ont pour équation

$$\lambda_0 x_1 x_2 + \lambda_1 x_2 x_0 + \lambda_2 x_0 x_1 = 0 .$$

les surfaces Φ' découpées sur V par ces hyperquadriques, sont d'ordre dix et forment un réseau.

4. Appliquons à la variété V la transformation birationnelle

$$x_0' x_0 = x_1' x_1 = x_2' x_2 = x_3' x_3 = x_4' x_4 .$$

Elle fait correspondre à cette variété une hypersurface V' d'équation

$$\varphi_3 (x_1 x_2 x_3 x_4,\ x_2 x_3 x_4 x_0,\ x_3 x_4 x_0 x_1,\ x_4 x_0 x_1 x_2,\ x_0 x_1 x_2 x_3) +$$

$$+ (x_0 x_1 x_2 x_3)^2 f_2 (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 , \qquad (1')$$

du douzième ordre, passant triplement par les plans communs aux faces de la figure de référence prises deux-à-deux, sextuplement par les arêtes de cette figure et pour laquelle les sommets de cette figure sont multiples d'ordre huit. La variété V' est dépourvue d'adjointes d'ordre huit, comme on le vérifie aisément.

Aux surfaces F' correspondent les sections hyperplanes de V' et aux surfaces F, les surfaces découpées sur V', en dehors des plans triples, par les hypersurfaces

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_1 x_2 x_3 x_4 x_0 + \dots + \lambda_4 x_0 x_1 x_2 x_3 = 0 . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) représentent donc l'ensemble des dix plans triples de V' et une surface d'ordre 18, à sections hyperplanes canoniques. Notons que l'on voit ainsi à nouveau que le genre linéaire de F est égal à 19.

(1) F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, 1896), *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Idem., 1906). Voir aussi notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934).

(2) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface et d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales de l'Ecole normale supérieure, 1907).