Zvláštní otisk z Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, čís. 1, roč. 75.

BIRACIONÁLNÍ TRANSFORMACE A JEJICH ZOBRAZENÍ.

LUCIEN GODEAUX, profesor university v Liège (Belgie).

Z francouzštiny přeložil Dr Josef Metelka.

Souhrn z přednášek, čtených p. Lucienem Godeaux, profesorem na universitě v Liège, v květnu 1948 na Karlově universitě v Praze.

Tento článek jest propracováním jisté poznámky, kterou jsem uveřejnil v roce 1942 a kde jsem zobrazil páry bodů, odpovídajících si rovinnou biracionální transformací, na body jisté plochy [2].*)

*) Čísla v závorkách odkazují na seznam literatury, uvedený na konci.

Udal jsem potom v náznaku rozšíření tohoto zobrazení pro biracionální transformace v prostoru [3]. Tuto otázku převzala moje žákyně sl. D. Calvo [4]. Fano rozvinul obdobnou myšlenku v jedné poznámce, s níž jsem se seznámil až po uveřejnění svých vlastních výsledků, v poznámce [1], ve které však neužívá zobrazení na plochu nebo varietu. Zobrazení, jichž užívám, se mi zdají vhodné k zjednodušení studia prostorových biracionálních transformací a zdá se mi též, že si toto studium udanými prostředky zaslouží, aby mu byla věnována pozornost.

I. Biracionální transformace v rovině.

1. Budiž T biracionální transformace mezi dvěma rovinami σ, σ', různými nebo soumístnými. Budeme předpokládat, že přímkám a roviny σ odpovídají v σ' křivky A' stupně n. Přímkám a' roviny σ' odpovídají v σ křivky A stupně n.

Uvažujme v rovině σ úplnou lineární soustavu křivek

$$|D| = |a + A|,$$

t. j. úplnou lineární soustavu křivek stupně $n + 1$, které se chovají v bodech base soustavy $|A|$ jako křivky této soustavy.

Nechť je r rozměr soustavy $|D|$. Uvažujme libovolnou přímku a; křivky D ji protínají v $n + 1$ bodech. Aby nějaká křivka D obsahovala přímku, je nutno jí předepsat, že má jít $n + 2$ body této přímky. Křivky D obsahující přímku a závisí tedy na $r - (n + 2)$ parametrech; tyto křivky jsou doplněny křivkami A, které tvoří homaloidní síť, takže máme

$$r - (n + 2) = 2,$$
$$r = n + 4.$$

Přiřaďme křivky D projektivně nadrovinám lineárního prostoru S_{n+4} o $n + 4$ rozměrech. Bodům roviny σ odpovídají body nějaké plochy F, jejíž stupeň je rovný počtu bodů společných dvěma křivkám D mimo body base.

Označme $[XY]$ počet bodů společných dvěma křivkám X, Y. Máme

$$[DD] = [aa] + 2[aA] + [AA].$$

Avšak platí $[aa] = 1$, $[aA] = n$, $[AA] = 1$, takže stupeň křivky F jest $2n + 2$.

Bodům přímky a odpovídají na F body racionální křivky C. Stupeň křivky C se rovná počtu průsečíků přímky s křivkou D, t. j. $n + 1$. Na ploše F máme ∞^2 křivek C, které tvoří homaloidní síť $|C|$.

Existuje ∞^2 nadrovin, obsahujících nějakou křivku C, protože existuje ∞^2 křivek D, obsahujících odpovídající přímku. Z toho plyne, že nadroviny, které obsahují jednu křivku C, se protínají v lineárním prostoru o $n + 1$ rozměrech, obsahujícím tuto křivku. Křivky C jsou tedy racionální normální křivky.

Bodům křivky A odpovídají na F body racionální křivky C'. Na ploše F existuje homaloidní síť křivek $|C'|$. Obecná křivka C a obecná křivka C' skládají dohromady nadrovinový průsek plochy F, jsou tudíž křivky C' stupně $n + 1$.

Křivky D obsahující křivku A jsou doplněny přímkami a; uzavíráme z toho, že obecná křivka C' patří do lineárního prostoru o $n + 1$ rozměrech a že je normální.

Dvě křivky C, C' se protínají v n bodech, které patří do lineárního prostoru o $n — 1$ rozměrech, neboť prostory o $n + 1$ rozměrech, obsahující křivky C, C', náleží do prostoru o $n + 3$ rozměrech (do nadroviny prostoru S_{n+4}).

2. Uvažujme také v rovině σ' úplnou lineární soustavu křivek

$$|D'| = |a' + A'|.$$

Provedeme-li s touto soustavou totéž, co jsme provedli s $|D|$, přiřadíme rovině σ' plochu F' stupně $2n + 2$, patřící do lineárního prostoru S_{n+4}' o $n + 4$ rozměrech.

Nadrovině v S_{n+4} odpovídá křivka D roviny σ. Této křivce přiřazuje transformace T křivku D' roviny σ' a této odpovídá nadrovina v S_{n+4}'.

Nadrovinám v S_{n+4}, které jdou jedním bodem P, odpovídají křivky D, tvořící lineární systém o rozměru $n + 3$. Tomuto systému přiřazuje transformace T lineární soustavu křivek D', která je rovněž rozměru $n + 3$. Křivkám této soustavy odpovídají nadroviny v S_{n+4}', jdoucí jedním bodem P'.

Z toho plyne, že si body P, P' odpovídají v kolineaci H mezi prostory S_{n+4}, S_{n+4}'. A leží-li při tom bod P na F, leží P' na F' a páru P, P' odpovídá v rovinách resp. σ, σ' pár bodů, odpovídajících si transformací T.

Lze předpokládat, že prostory S_{n+4}, S_{n+4}' jsou soumístné. Dále lze volit projektivity mezi soustavou $|D|$ a nadrovinami prostoru S_{n+4} a mezi systémem $|D'|$ a nadrovinami prostoru S_{n+4}' tak, že kolineace H přejde v identitu a že tudíž F' splyne s F.

Konstruovali jsme tedy *plochu F stupně $2n + 2$ v prostoru S_{n+4}, jejíž body zobrazují páry bodů v rovinách σ, σ', jež si odpovídají transformací T.*

3. Budiž O hlavní bod transformace T v rovině σ, který je s-násobný pro křivky homaloidní sítě $|A|$. Budeme předpokládat, že každá z s tečen nějaké křivky A v O jest proměnlivá s touto křivkou. Za těchto podmínek odpovídají transformací T bodům nekonečně blízkým k bodu O body hlavní křivky Ω' v rovině σ', která jest stupně s a neprotíná křivky A' mimo hlavní body base homaloidní sítě $|A'|$.[1])

Křivky D mají v O s-násobný bod s proměnlivými tečnami.

---

[1]) O těchto otázkách srv. mé pojednání: „*Les transformations birationnelles du plan*“ (Mémorial des Sciences mathématiques, svazek XXII, 1927): Viz číslo 16 a násl.

Křivky D, dotýkající se v O přímky p, tvoří lineární soustavu o rozměru $n + 3$; v S_{n+4} jim odpovídají nadroviny, jdoucí bodem P plochy F. Otáčí-li se přímka p kolem bodu O, opisuje bod P racionální křivku G, položenou na F. Ježto křivka D obsahuje s bodů soumezných s bodem O, protíná nadrovina prostoru S_{n+4} křivku G v s bodech a křivka G je tedy stupně s.

Aby křivka D měla s libovolnou přímkou (jdoucí bodem O) v bodě O průsečík $s + 1$-násobný, jest nutno, aby měla bod O za $s + 1$-násobný. Takovéto křivky D dostaneme, předepíšeme-li jim, že mají mít v bodě O $s + 1$ různých tečen; tyto křivky tedy tvoří lineární soustavu o rozměru $n + 3 - s$. Nadroviny, které jim odpovídají, mají společný lineární prostor o s rozměrech, jenž obsahuje křivku G. Ta jest tedy racionální normální křivka.

Přímka v rovině σ neprochází obecně bodem O, křivka C tedy obecně neprotíná křivku G. Naproti tomu křivka C' protíná křivku G v s bodech.

Přímka v rovině σ, jdoucí bodem O, tvoří dohromady s kteroukoli křivkou A křivku D, mající v bodě O násobnost $s + 1$. Této křivce odpovídá nadrovina, která obsahuje G. Průsek plochy F s touto nadrovinou je tvořen kteroukoli křivkou C' a křivkou C, jež má obsahovat G jako součást. Odtud: Křivka C, jdoucí jedním bodem křivky G, obsahuje tuto křivku.

Křivka G zobrazuje páry bodů v σ, σ', tvořené bodem nekonečně blízkým k O a odpovídajícím bodem křivky Ω'.

Stejně tak odpovídá hlavnímu bodu O' roviny σ', s'-násobnému, s proměnlivými tečnami pro křivky A', racionální normální křivka G' stupně s' na ploše F. Křivky C protínají G' v s bodech, křivky C' je neprotínají. Křivka C', jdoucí jedním bodem křivky G', obsahuje úplně tuto křivku.

4. Předpokládejme, že transformace T má:

a) V rovině σ celkem ν hlavních bodů $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, které mají na křivkách homaloidní sítě $|A|$ respektive násobnosti $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$.

b) V rovině σ' celkem ν' hlavních bodů $O_1', O_2', \ldots, O_{\nu'}'$, které mají na křivkách homaloidní sítě $|A'|$ násobnosti respektive $s_1', s_2', \ldots, s_{\nu'}'$.

Předpokládejme dále, že křivky A a A' mají v hlavních bodech vesměs proměnné tečny. Za těchto podmínek odpovídají hlavním bodům $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ racionální normální křivky $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ stupně resp. $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ na ploše F. Tyto křivky se mezi sebou neprotínají, ježto jsou body $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ různé. Právě tak odpovídají bodům $O_1', O_2', \ldots, O_{\nu'}'$ racionální normální křivky $G_1', G_2', \ldots, G_{\nu'}'$, stupně resp. $s_1', s_2', \ldots, s_{\nu'}'$, na ploše F, jež se mezi sebou neprotínají.

Označme α_{ik} počet průsečíků křivek G_i, G_k'. Jednomu z těchto průsečíků odpovídá pár, tvořený bodem P soumezným s O_i v σ a bodem P' soumezným s O_k' v σ'. Tyto body si odpovídají transformací T. Hlavní křivka Ω_i', která odpovídá v σ' bodu O_i, má obsahovat P', t. j. dotýkat se v O_k' přímky $O_k'P'$. A stejně má hlavní křivka Ω_k, která odpovídá bodu O_k', obsahovat bod P. Uzavíráme z toho, že násobnost bodu O_k' na Ω_i' a násobnost bodu O_i na Ω_k jsou stejné a rovny α_{ik}.

5. Uvažujme nějakou křivku A v rovině σ. Lze se na ni dívat, jako na křivku n, patřící do lineární soustavy $|n \,.\, a|$, tvořené těmito křivkami. Na ploše F jí odpovídá křivka lineární soustavy $|n \,.\, C|$.

S druhé strany však odpovídá křivce A na ploše F křivka C'. Díváme-li se však na křivku A s tohoto hlediska, musíme vzít v úvahu, že prochází s_1-krát bodem O_1, s_2-krát bodem O_2, ..., s_ν-krát bodem O_ν a že jí tudíž odpovídá na ploše F křivka

$$C' + s_1G_1 + s_2G_2 + \ldots + s_\nu G_\nu.$$

Budeme tedy psát symbolicky

$$n \,.\, C = C' + s_1G_1 + s_2G_2 + \ldots + s_\nu G_\nu.$$

Tato rovnice značí, že mezi křivkami soustavy $|n \,.\, C|$ existují křivky, které obsahují s_1-krát G_1, s_2-krát G_2, ..., s_ν-krát G_ν a které jsou doplněny nějakou křivkou C'.

Uvažujme právě tak hlavní křivku Ω_1 stupně s_1', odpovídající bodu O_1', která jde α_{11}-krát bodem O_1, α_{21}-krát bodem O_2, ... $\alpha_{\nu 1}$-krát bodem O_ν. Odpovídá jí jednak křivka soustavy $|s_1' \,.\, C|$ a jednak křivka

$$G_1' + \alpha_{11}G_1 + \alpha_{21}G_2 + \ldots + \alpha_{\nu 1}G_\nu.$$

Budeme tedy psát symbolicky

$$s_1' \,.\, C = G_1' + \alpha_{11}G_1 + \alpha_{21}G_2 + \ldots + \alpha_{\nu 1}G_\nu.$$

A stejně pro ostatní hlavní křivky v rovině σ. Dostaneme tak $\nu' + 1$ symbolických rovnic, které napíšeme ve tvaru

$$\begin{array}{l} C' = nC - s_1G_1 - s_2G_2 - \ldots - s_\nu G_\nu \\ G_1' = s_1'C - \alpha_{11}G_1 - \alpha_{21}G_2 - \ldots - \alpha_{\nu 1}G_\nu, \\ G_2' = s_2'C - \alpha_{12}G_1 - \alpha_{22}G_2 - \ldots - \alpha_{\nu 2}G_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{\nu'}' = s_{\nu'}'C - \alpha_{1\nu'}G_1 - \alpha_{2\nu'}G_2 - \ldots - \alpha_{\nu\nu'}G_\nu. \end{array} \tag{I}$$

6. Vyjdeme-li od roviny σ', obdržíme stejným způsobem $\nu + 1$ symbolických rovnic:

$$\begin{array}{l} C = nC' - s_1'G_1' - s_2'G_2' - \ldots - s_{\nu'}G_{\nu'}' \\ G_1 = s_1C' - \alpha_{11}G_1' - \alpha_{12}G_2' - \ldots - \alpha_{1\nu'}G_{\nu'}' \\ G_2 = s_2C' - \alpha_{21}G_1' - \alpha_{22}G_2' - \ldots - \alpha_{2\nu'}G_{\nu'}' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_\nu = s_\nu C' - \alpha_{\nu 1}G_1' - \alpha_{\nu 2}G_2' - \ldots - \alpha_{\nu\nu'}G_{\nu'}'. \end{array} \tag{II}$$

Známe-li homaloidní síť $|A|$ v rovině σ, známe transformaci a tudíž i síť $|A'|$. Z toho plyne, že rovnice (II) mají být důsledkem vzorců (I) a obráceně. Jinými slovy, nahradí-li se v rovnicích (II) C', G_1', G_2', ..., $G_{\nu'}'$ příslušnými výrazy (I), mají vzniknout identity.

První rovnice (II) dává

$$s_1'^2 + s_2'^2 + \ldots + s_{\nu'}'^2 = n^2 - 1$$
$$s_1 n - s_1'\alpha_{11} - s_2'\alpha_{12} - \ldots - s_{\nu'}'\alpha_{1\nu'} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_\nu n - s_1'\alpha_{\nu 1} - s_2'\alpha_{\nu 2} - \ldots - s_{\nu'}'\alpha_{\nu\nu'} = 0.$$

Položíme-li rovny nule koeficienty u $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$, dostaneme podobně další vztahy

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \ldots + \alpha_{1\nu'}^2 = s_1^2 - 1$$
$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{2\nu'}^2 = s_2^2 - 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\nu 1}^2 + \alpha_{\nu 2}^2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu'}^2 = s_\nu^2 - 1.$$

Sečtěme tyto vzorce a použijme vztahu, který lze odvodit

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1.$$

Dostaneme

$$\sum_i \sum_k \alpha_{ik}^2 = n^2 - \nu - 1$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu;\ k = 1, 2, \ldots, \nu').$$

Stejně odvodíme, že platí také

$$\sum_i \sum_k \alpha_{ik}^2 = n^2 - \nu' - 1$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu;\ k = 1, 2, \ldots, \nu').$$

Z toho odvodíme $\nu = \nu'$. *Počet hlavních bodů v obou rovinách je týž.*

Vzorce, které jsme dostali, se dají odvodit také vyšetřováním průsečíků hlavních křivek v obou rovinách σ, σ_1.

7. Viděli jsme, že přímce p roviny σ, která jde některým hlavním bodem, na př. bodem O_1, odpovídá na ploše F křivka C, obsahující křivku G_1 jako součást. Nazveme C_1 křivku, která skládá spolu s G_1 vyšetřovanou křivku C. Ježto přímka p obsahuje jen jediný nekonečně blízký bod k bodu O_1, protíná křivka C_1 křivku G_1 jen v jediném bodě. Otáčí-li se přímka p kolem bodu O_1, vytváří křivka C_1 na ploše F svazek bez bodů base.

Pišme

$$C = G_1 + C_1.$$

Máme

$$[CG_1] = 0 = [G_1G_1] + [G_1C_1],$$

odkudž $[G_1G_1] = 1$. S hlediska theorie průsečíků křivek se musí křivka G_1 považovat za křivku, vytvářející lineární soustavu o rozměru nula a řádu -1.

A stejné platí zřejmě též o křivkách $G_2, \ldots, G_\nu, G_1', G_2', \ldots, G_\nu'$.

8. Označme znakem C_j Jakobián sítě $|C|$ a znakem C_j' Jakobián

sítě $|C'|$. Je známo, že platí

$$C_j = G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu$$
$$C_j' = G_1' + G_2' + \ldots + G_\nu'.$$

S druhé strany platí též[1])

$$C_j + 3C' = C_j' + 3C,$$

to jest

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu + 3C' = G_1' + G_2' + \ldots + G_\nu' + 3C.$$

Počet průsečíků těchto dvou křivek s křivkou C' je stejný, takže máme

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1).$$

Srovnáváme-li počet průsečíků s křivkami $G_1', G_2', \ldots, G_\nu'$, máme dále

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{\nu 1} = 3s_1' - 1$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{\nu 2} = 3s_2' - 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{1\nu} + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu} = 3s_\nu' - 1.$$

Vyměníme-li úlohy křivek C, G a C', G', dostaneme další obdobné vztahy

$$s_1' + s_2' + \ldots + s_\nu' = 3(n-1)$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1\nu} = 3s_1 - 1, \ldots$$

Jinak je snadné nahlédnout, že rozřešením na př. rovnic (II) podle $C', G_1', G_2', \ldots, G_\nu'$, jako kdyby to byly algebraické rovnice, dostaneme rovnice (I).

II. Biracionální transformace v prostoru.

9. Uvažujme teď biracionální transformaci T mezi dvěma trojrozměrnými lineárními prostory Σ, Σ'. Rovinám α prostoru Σ v ní odpovídají plochy A' stupně n' prostoru Σ' a rovinám α' prostoru Σ' plochy A stupně n prostoru Σ. Soustavy $|A|, |A'|$ jsou homaloidní.

Všimněme si blíže úplné lineární soustavy ploch D stupně $n + 1$

$$|D| = |\alpha + A|.$$

Plochy tohoto systému se chovají v hlavních bodech base a podél hlavních křivek base homaloidní soustavy $|A|$ jako plochy A.

Budiž r rozměr soustavy $|D|$. Plochy D vytínají na rovině α křivky stupně $n + 1$, jež mají v průsečících roviny α s hlavními křivkami base soustavy $|A|$ tutéž násobnost jako plochy A. Můžeme pouze stanovit dolní hranici ϱ rozměru tohoto systému a máme pak dolní hranici rozměru $r = \varrho + 4$ soustavy $|D|$.

[1]) *Les transformations birationnelles du plan,* číslo 34.

Přiřaďme plochy D projektivně nadrovinám lineárního prostoru S_r o r rozměrech. Bodům prostoru Σ odpovídají body trojrozměrné variety V.

Označme $[X, Y, Z]$ počet průsečíků tří ploch X, Y, Z, které jsou proměnlivé s těmito plochami. Stupeň variety V se rovná

$$[\alpha + A, \alpha + A, \alpha + A] = [\alpha, \alpha, \alpha] + 3[\alpha, \alpha, A] + 3[\alpha, A, A] + \\ + [A, A, A],$$

t. j.

$$3(n + n') + 2.$$

Bodům nějaké roviny α prostoru Σ odpovídají na V body jisté plochy F, jejíž stupeň se rovná

$$[\alpha, \alpha + A, \alpha + A] = [\alpha, \alpha, \alpha] + 2[\alpha, \alpha, A] + [\alpha, A, A],$$

t. j.

$$2n + n' + 1.$$

Plochy F tvoří na V homaloidní lineární soustavu $|F|$. Dvě plochy F se protínají v křivce C, která je racionální, stupně $n + 1$ a jejíž body odpovídají bodům nějaké přímky ze Σ.

Bodům nějaké plochy A odpovídají na V body plochy F', jejíž stupeň se rovná

$$[A, \alpha + A, \alpha + A] = [\alpha, \alpha, A] + 2[\alpha, A, A] + [A, A, A],$$

t. j.

$$2n' + n + 1.$$

Plochy F' tvoří na V homaloidní lineární soustavu $|F'|$ a dvě plochy F' se protínají v racionální křivce C' stupně

$$[A, A, \alpha + A] = n' + 1.$$

Jistá plocha F má s plochou F' společnou křivku stupně $n + n'$, která nemusí být racionální.

Každá plocha F tvoří s každou plochou F' jeden nadrovinový průsek variety V.

Právě tak můžeme uvažovat úplnou lineární soustavu $|\alpha' + A'|$, tvořenou v Σ' plochami stupně $n' + 1$, a konstruovat odpovídající varietu V' obdobnou varietě V. Dokáže se jako v případě rovinné transformace, že V a V' si odpovídají v kolineaci, a lze vždy zařídit poměry tak, že tato kolineace se redukuje na identitu.

Varieta V zobrazuje páry bodů z prostorů Σ, Σ', které si odpovídají transformací T.

10. Budiž O hlavní isolovaný bod base v prostoru Σ. Budeme tím rozumět bod base soustavy, který může ležeti na jedné nebo více křivkách base soustavy $|A|$, ale který má na plochách A vyšší násobnost, než mají tyto křivky base. Nazveme s násobnost bodu O pro plochy A a předpokládáme, že tečné kužele k těmto plochám v onom bodě jsou nerozložitelné a proměnlivé v lineární soustavě o rozměru 3. Budeme říkat, že bod O je

za těchto podmínek obyčejný, isolovaný hlavní bod base transformace T.*)

Uvažujme přímku d, jdoucí bodem O; plochy D, dotýkající se této přímky v bodě O, tvoří lineární soustavu o rozměru $r - 1$ a v prostoru S_r jim odpovídají nadroviny, které jdou jedním bodem P variety V. Opisuje-li přímka d trs o vrcholu O, vytváří bod P racionální plochu G, která zobrazuje body nekonečně blízké bodu O a jim odpovídající body, položené na hlavní ploše v prostoru Σ', která přísluší bodu O.

Stupeň plochy G se rovná násobnosti p bodu O na křivkách, jež odpovídají v prostoru Σ přímkám prostoru Σ'.

Obecná plocha F neprotíná plochu G. Aby ji proťala, jest nutno, aby znázorňovala rovinu, jdoucí bodem O. Avšak taková rovina, připojena ke kterékoli ploše A, dává plochu D, jejíž násobnost v O je $s + 1$ a jež odpovídá nadrovinovému průseku variety V, obsahujícímu plochu G. Plocha F' protíná G v křivce stupně p, plocha F tudíž, protíná-li plochu G, obsahuje ji celou.

11. Uvažujme v prostoru Σ hlavní křivku base γ, která budiž prvního druhu,[1]) stupně ν, s-násobná pro plochy A a tudíž též pro plochy D. Označme q počet proměnlivých průsečíků křivky γ s křivkami, které odpovídají přímkám prostoru Σ'. Budeme předpokládat, že všech s tečných rovin k některé ploše A v obecném bodě křivky γ jest proměnlivých s touto plochou (obyčejná hlavní křivka base).

Uvažujme nějaký bod P křivky γ, tečnu p této křivky v onom bodě a rovinu ω, jdoucí přímkou p. Plochy D, které se dotýkají roviny ω v bodě P, tvoří lineární soustavu o rozměru $r - 1$ a v prostoru S_r jim odpovídají nadroviny, jdoucí jedním bodem P' variety V. Otáčí-li se rovina ω okolo přímky p, opisuje bod P' racionální křivku γ' stupně s.

Probíhá-li bod P křivku γ, vytváří křivka γ' plochu H.

Abychom obdrželi stupeň plochy H, uvažujme dvě plochy D, t. j. dvě plochy $\alpha + A$. Přímka $\alpha\alpha$ křivku γ neprotíná, každá z křivek αA protíná γ v ν bodech a každému z těchto bodů odpovídá na H s bodů. Křivka AA protíná γ v q bodech. Z toho plyne, že plocha H jest stupně $2\nu s + q$.

Rovina α protíná γ v ν bodech, z nichž každému odpovídá na H křivka γ', plochy F tedy protínají plochu H podél ν křivek γ'. Z toho vyplývá, že plochy F' protínají plochu H v křivce stupně $\nu s + q$.

12. Uvažujme konečně v prostoru Σ hlavní křivku base Γ, která je druhého druhu, stupně ν a s-násobná pro plochy A. Je známo, že jí v prostoru Σ' odpovídá hlavní křivka Γ' druhého druhu, jistého stupně ν', s'-násobná pro plochy A'. Je dále známo, že platí

$$s = \lambda\nu', \; s' = \lambda\nu$$

*) Srovnej mé pojednání: „*Les transformations birationnelles de l'espace*". (Mémorial des Sciences Mathématiques, svazek LXVII, 1934), číslo 17.

[1]) *Les transformations birationnelles de l'espace*, čísla 14, 15.

a že plochy A (nebo A'), které se dotýkají v nějakém bodě P křivky Γ (nebo Γ') jedné tečné roviny této křivky, dotýkají se ještě dalších $\lambda - 1$ tečných rovin křivky Γ (nebo Γ') v tomtéž bodě.*)

Plochy D se chovají podél křivky Γ jako plochy A; v důsledku toho se dotýkají plochy D, které mají v nějakém bodě P křivky Γ tečnou rovinu ω, jdoucí tečnou přímkou p křivky Γ v bodě P, ještě dalších $\lambda - 1$ rovin, jdoucích přímkou p, a to v tomtéž bodě P. Těmto plochám odpovídají v S_r nadroviny, jdoucí jistým bodem P' variety V. Jestliže se skupina λ uvažovaných rovin otáčí okolo přímky p, opisuje bod P' racionální křivku γ. Ježto má plocha D v bodě P ν' skupin po λ tečných rovin, jest křivka γ stupně ν'.

Když bod P probíhá křivku Γ, křivka γ se mění a opisuje plochu M.

Stejná úvaha se dá provést, vyjdeme-li od křivky Γ', a tak dostaneme na ploše M racionální křivky γ' stupně ν.

Křivka γ a křivka γ' se protínají v jediném bodě, který zobrazuje pár odpovídajících si bodů v T, z nichž jeden je nekonečně blízký křivce Γ a druhý nekonečně blízký křivce Γ'.

Křivky γ a γ' tvoří na ploše M dva svazky racionálních křivek, které jsou mezi sebou unisekantní.

Ježto rovina α protíná Γ v ν bodech, protíná odpovídající plocha F plochu M v ν křivkách γ. Právě tak protíná plocha F' plochu M v ν' křivkách γ'. Z toho následuje, že plocha M je stupně $2\nu\nu'$.

13. Budeme předpokládat, že transformace T má v prostoru Σ obyčejné isolované hlavní body $O_1, O_2, \ldots, O_h$, o násobnostech resp. $r_1, r_2, \ldots, r_h$ pro plochy A;

k obyčejných hlavních křivek base prvního druhu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, o násobnostech resp. $s_1, s_2, \ldots, s_h$ pro plochy A;

l obyčejných hlavních křivek base druhého druhu $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$.

Podobně budeme předpokládat, že transformace T má v prostoru Σ' h' obyčejných isolovaných hlavních bodů base $O_1', O_2', \ldots, O_{h'}'$ o násobnosti resp. $r_1', r_2', \ldots, r_{h'}'$ pro plochy A';

k' obyčejných hlavních křivek base prvního druhu $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_{k'}'$ o násobnosti resp. $s_1', s_2', \ldots, s_{h'}'$ pro plochy A';

l obyčejných hlavních křivek base druhého druhu $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_l'$.

Bodům $O_1, O_2, \ldots, O_h$ odpovídají na varietě V plochy $G_1, G_2, \ldots, G_h$ a bodům $O_1', O_2', \ldots, O_{h'}'$ plochy $G_1', G_2', \ldots, G_{h'}'$.

Křivkám $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ odpovídají na V plochy $H_1, H_2, \ldots, H_k$ a křivkám $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_{k'}'$ plochy $H_1', H_2', \ldots, H_{k'}'$.

Konečně párům křivek Γ_1 a Γ_1', Γ_2 a Γ_2', …, Γ_l a Γ_l' odpovídají plochy $M_1, M_2, \ldots, M_l$.

Uvažujme nějakou plochu A. Patří do úplné lineární soustavy ploch stupně n a na varietě V jí odpovídá nějaká plocha úplné lineární soustavy $|nF|$. S druhé strany jí však odpovídá na V plocha F', bereme-li v úvahu,

*) *Les transformations birationnelles de l'espace*, číslo 16.

že prochází hlavními body a křivkami transformace T. Ježto plocha A prochází r_1-krát bodem O_1, je třeba připočítati k F' r_1-krát plochu G_1. Právě tak nutno připočítati s_1-krát plochu H_1 k ploše F', neboť plocha A prochází s_1-krát křivkou γ_1. Konečně je třeba připojit plochy $M_1, M_2, \ldots, M_l$, z nichž každá bude počítána s určitou celistvou násobností. Máme tedy symbolickou rovnici

$$nF = F' + r_1G_1 + \ldots + r_hG_h + s_1H_1 + \ldots + s_kH_k + \tau_1M_1 + \\ + \ldots + \tau_lM_l,$$

kde $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ jsou celá čísla.

14. Uvažujme hlavní bod O_i' a budiž p_i jeho násobnost na křivkách, které odpovídají v Σ' přímkám z prostoru Σ.

Nekonečně blízkým bodům k bodu O_i' odpovídají v prostoru Σ body nějaké plochy Ω_i stupně p_i. Předpokládejme, že tato plocha prochází r_{1i}-krát bodem O_1, r_{2i}-krát bodem $O_2, \ldots, r_{hi}$-krát bodem O_h, s_{1i}-krát křivkou γ_1, s_{2i}-krát křivkou $\gamma_2, \ldots, s_{ki}$-krát křivkou γ_k. Předešlá úvaha dává pro plochu Ω_i

$$p_iF = G_i' + r_{1i}G_1 + \ldots + r_{hi}G_h + s_{1i}H_1 + \ldots + \\ + s_{ki}H_k + \tau_{1i}M_1 + \ldots + \tau_{li}M_l, \; (i = 1, 2, \ldots, h'),$$

kde $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \ldots, \tau_{li}$ jsou celá čísla.

Uvažujme teď hlavní křivku base prvního druhu γ_i'. Bodům nekonečně blízkým k této křivce odpovídají v prostoru Σ body jisté plochy Φ_i, jejíž stupeň q_i je roven počtu proměnlivých bodů, v nichž křivku γ_i' protínají křivky, odpovídající přímkám prostoru Σ.

Předpokládejme, že plocha Φ_i prochází ϱ_{ki}-krát bodem O_k a σ_{ki}-krát křivkou γ_k. Tentokrát jsme dovedeni k symbolické rovnici

$$q_iF = H_i' + \varrho_{1i}G_1 + \ldots + \varrho_{hi}G_h + \sigma_{1i}H_1 + \ldots + \sigma_{ki}H_k + t_{1i}M_1 + \ldots + \\ + t_{li}M_l, \; (i = 1, 2, \ldots, k'),$$

kde $t_{1i}, \ldots, t_{li}$ jsou celá čísla.

Obdrželi jsme tak první skupinu symbolických rovnic, které budeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} F' &= nF - r_1G_1 - \ldots - r_hG_h - s_1H_1 - \ldots - s_kH_k - \tau_1M_1 - \ldots - \tau_lM_l, \\ G_i' &= p_iF - r_{1i}G_1 - \ldots - r_{hi}G_h - s_{1i}H_1 - \ldots - s_{ki}H_k - \tau_{1i}M_1 - \ldots - \\ &\quad - \tau_{li}M_l, \; (i = 1, 2, \ldots, h'), \qquad \text{(I)} \\ H_i' &= q_iF - \varrho_{1i}G_1 - \ldots - \varrho_{hi}G_h - \sigma_{1i}H_1 - \ldots - \sigma_{ki}H_k - t_{1i}M_1 - \ldots - \\ &\quad - t_{li}M_l, \; (i = 1, 2, \ldots, k'). \end{aligned}$$

15. Zaměníme-li úlohy prostorů Σ, Σ' dostaneme druhou skupinu symbolických rovnic

$$F = n'F' - r_1'G_1' - \ldots - r'_{h'}G'_{h'} - s_1'H_1' - \ldots - s'_{k'}H'_{k'} - \tau_1'M_1 - \\ - \ldots - \tau_l'M_l,$$

$$G_i = p_i'F' - r_{1i}'G_1' - \ldots - r_{h'i}'G_{h'}' - s_{1i}'H_1' - \ldots - s_{k'i}'H_{k'}' - \\ - \tau_{1i}'M_1 - \ldots - \tau_{li}'M_l, \; (i = 1, 2, \ldots, h), \qquad \text{(II)}$$

$$H_i = q_i'F' - \varrho_{1i}'G_1' - \ldots - \varrho_{h'i}'G_{h'}' - \sigma_{1i}'H_1' - \ldots - \sigma_{k'i}'H_{k'}' -$$
$$- t_{1i}'M_1 - \ldots - t_{li}'M_l,\ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Koeficienty $n', p', q', r', s', \varrho', \sigma', \tau', t'$ jsou definovány obdobně jako koeficienty předešlé.

Známe-li homaloidní systém $|A|$, známe celou transformaci T, takže vztahy (II) mají být důsledkem vztahů (I). Neboli, nahradíme-li ve vztazích (II) F', G', H' výrazy, který plynou ze vztahů (I), musíme dostat identity.

Tak najdeme na příklad.

$$\Sigma r_i'p_i + \Sigma s_j'q_j = nn' - 1,$$
$$\Sigma r_i'r_{\alpha i} + \Sigma s_j'\varrho_{\alpha j} = n'r_\alpha,$$
$$\Sigma r_i's_{\beta i} + \Sigma s_j'\sigma_{\beta j} = n's_\beta,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, h';\ j = 1, 2, \ldots, k';\ \alpha = 1, 2, \ldots, h;\ \beta = 1, 2, \ldots, k).$$

A právě tak najdeme, zaměníme-li úlohy vzorců (I) a (II)

$$\Sigma r_i p_i' + \Sigma s_j q_j' = nn' - 1$$
$$(i = 1, 2, \ldots, h;\ j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1}$$

16. Nyní vyjdeme od vztahů dávajících G_i, H_i, nahradíme tam F', G', H' jejich výrazy (I) a budeme hledat koeficienty u G_i, H_i ve výsledku. Tyto koeficienty mají být na obou stranách stejné.

Nalezneme

$$\sum_\alpha r_{\alpha i}'r_{i\alpha} + \sum_\beta s_{\beta i}'\varrho_{i\beta} = r_i p_i' + 1, \tag{2}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, h';\ \beta = 1, 2, \ldots, k').$$

Je to h rovnic, neboť i může nabývat hodnot $1, 2, \ldots, h$.

$$\sum_\alpha \varrho_{\alpha j}'s_{j\alpha} + \sum_\beta \sigma_{\beta j}'\sigma_{j\beta} = q_j's_j + 1, \tag{3}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, h';\ \beta = 1, 2, \ldots, k').$$

To je k rovnic, protože j může nabývat hodnot $1, 2, \ldots, k$.

Sečtěme všecky rovnice (2) a (3), používajíce vztahu (1). Dostaneme

$$\sum_i \sum_\alpha r_{\alpha i}'r_{i\alpha} + \sum_i \sum_\beta s_{\beta i}'\varrho_{i\beta} + \sum_j \sum_\alpha s_{j\alpha}\varrho_{\alpha j}' + \sum_j \sum_\beta \varrho_{\beta j}'\sigma_{j\beta} =$$
$$= nn' + h + k - 1.$$

Jestliže zaměníme úlohy obou skupin rovnic (I) a (II), nezmění se levá strana předešlého vztahu a na pravé straně dostaneme $nn' + h' + k' - 1$.

Máme tedy

$$h + k = h' + k'.$$

Součet počtu hlavních bodů base a hlavních křivek base je v obou dvou prostorech týž.

Je zbytečné rozlišovat v této větě mezi křivkami prvního a druhého druhu, neboť počet hlavních křivek druhého druhu je týž v obou prostorech.

17. Označme znakem F_j Jakobián soustavy $|F|$ a znakem F'_j Jakobián soustavy $|F'|$. Jakobiánu F_j odpovídá v prostoru Σ' Jakobián soustavy $|A'|$. Ten se skládá — jak je známo — z hlavních ploch, odpovídajících hlavním isolovaným bodům base transformace T v prostoru Σ, při čemž každá taková hlavní plocha je počítána dvakrát, a z hlavních ploch, odpovídajících hlavním křivkám base prvního druhu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$.*) V důsledku toho obsahuje plocha F_j plochu

$$2(G_1 + G_2 + \ldots + G_h) + H_1 + H_2 + \ldots + H_k.$$

Uvažujme nějakou plochu F, která prochází jedním bodem plochy na př. M_1. Tomuto bodu odpovídá nekonečně blízký bod křivky Γ_1 a ploše F odpovídá rovina α, jdoucí tímto bodem. Z toho plyne, že plocha F, prochází-li jedním bodem plochy M_1, obsahuje celou křivku γ_1, která jde tímto bodem. A to má za následek, že plocha M_1 je součástí Jakobiánu F_j. Stejný závěr platí též pro plochy $M_2, M_3, \ldots, M_l$ a je tedy

$$F_j = 2(G_1 + G_2 + \ldots + G_h) + H_1 + H_2 + \ldots + H_k + M_1 + \\ + M_2 + \ldots + M_l.$$

Právě tak máme

$$F_j' = 2(G_1' + G_2' + \ldots + G_{h'}') + H_1' + H_2' + \ldots + H_{k'}' + \\ + M_1 + M_2 + \ldots + M_l.$$

S druhé strany máme základní vztah**)

$$F_j + 4F' = F_j' + 4F,$$

to jest

$$2(G_1 + G_2 + \ldots + G_h) + H_1 + H_2 + \ldots + H_k + 4F' = \\ = 2(G_1' + G_2' + \ldots + G_{h'}') + H_1' + H_2' + \ldots + H_{k'}' + 4F.$$

Tato symbolická rovnice dává některé vztahy. Stupně ploch na obou stranách mají být stejné, což dává

$$2(p_1' + p_2' + \ldots + p_{h'}') + q_1' + q_2' + \ldots + q_{k'}' + \\ + 2(\nu_1' s_1' + \ldots + \nu_{k'}' s_{k'}') + 4n =$$

$$= 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_h) + q_1 + q_2 + \ldots + q_k + \\ + 2(\nu_1 s_1 + \ldots + \nu_k s_k) + 4n',$$

kde $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ jsou stupně hlavních křivek base $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h$ a ν_1', $\nu_2', \ldots, \nu_{k'}'$ stupně hlavních křivek base $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_{k'}'$.

Stupně křivek vyťatých na plochách na obou stranách rovnice obecnou plochou F mají být stejné, což dává

*) *Les transformations birationnelles de l'espace*, číslo 10.

**) *Les transformations birationnelles de l'espace*, číslo 36.

$$2(p_1' + \ldots + p_{k'}') + q_1' + \ldots + q_{k'}' + \nu_1' s_1' + \ldots + \nu_{k'}' s_{k'}' +$$
$$+ 4 = \nu_1 s_1 + \ldots + \nu_k s_k + 4n.$$

A tak dále.

Lze ještě poznamenat, že řešením rovnic (I) vzhledem k F, G_i, H_i, jakoby to byly algebraické rovnice, dostaneme rovnice (II).

III. Biracionální transformace involutorní.

18. Podíváme se, co dává předešlé zobrazení, když se nám vyskytne biracionální transformace involutorní. Budeme se zabývat případem rovinné transformace a udáme rozšíření na prostor.

Nechť tedy je T involutorní biracionální transformace mezi body roviny σ a P, Q jeden pár přidružených bodů. Představme si rovinu σ soumístnou s rovinou σ' a buďtež P', Q' body roviny σ' soumístné s body P, Q. Můžeme si představit, že T je biracionální transformace mezi rovinami σ a σ', která přiřazuje bod Q' bodu P a bod P' bodu Q. Budiž F plocha, která zobrazuje páry bodů v rovinách σ a σ', jež si odpovídají transformací T. Nazveme P_1 bod, který je obrazem páru PQ' a P_1' bod, který je obrazem páru QP'.

Označíme-li $|A|$ homaloidní síť, která odpovídá síti přímek roviny σ prostřednictvím transformace T, zobrazují nadrovinné řezy plochy F křivky soustavy

$$|D| = |a + A| \quad (a \text{ přímka}).$$

T mění $|D|$ v sebe samu, ale jednotlivá křivka D není obecně transformována v sebe samu.

Existuje involuční transformace T' plochy F v sebe samu, která přiřazuje bodu P_1' bod P_1 (a bodu P_1 bod P_1'). Podle své konstrukce vyměňuje transformace T' nadrovinové průseky plochy F mezi sebou a nadto přiřazuje nadrovinovým průsekům plochy F, které procházejí jedním bodem, nadroviny, procházející opět jedním bodem. Z toho plyne, že T' jest v prostoru S_{n+4}, obsahujícím F involuční kolineace.

19. Involuční kolineace T' má dva lineární prostory S_ν a $S_{n+3-\nu}$ samodružných bodů. Tyto prostory jsou rozměrů resp. ν a $n + 3 - \nu$ a neprotínají se v S_{n+4}. Nadroviny, jdoucí prostorem S_ν nebo $S_{n+3-\nu}$, jsou invariantní pro T' a vytínají na F nadrovinové průseky, transformované v sebe samy transformací T'. Odpovídají jim dva lineární systémy křivek D, z nichž každá je invariantní v involuci T v rovině σ. Nazveme tyto systémy $|D_0|$ a $|D_1|$. Pokusíme se je konstruovat.

Křivka D, tvořená nějakou přímkou a a odpovídající křivkou A, je transformací T měněna sama v sebe. Takové křivky tvoří systém o indexu dvě, neboť libovolnými dvěma body roviny prochází jedna přímka a jedna křivka A, které nejsou obecně jedna druhé přiřazeny transformací T. Tento systém náleží do lineární soustavy $|D_0|$, obsažené v $|D|$, o rozměru aspoň ∞^3, jehož křivky jsou transformovány samy v sebe transformací T.

S druhé strany lze uvažovat svazek přímek a a křivky jim odpovídající transformací T. Tyto křivky tvoří svazek, projektivní k svazku přímek a, a průsečíky odpovídajících si elementů těchto dvou svazků vytvářejí křivku D_1 soustavy $|D|$, která je transformována sama v sebe transformací T. Tyto křivky D_1 vytvářejí lineární soustavu $|D_1|$, náležící do $|D|$, o rozměru aspoň ∞^2.

Poznamenejme, že je-li U samodružný bod involuce T, procházejí všecky křivky D_1 bodem U, který je jedním z bodů base soustavy $|D_1|$. Zvláště pak, obsahuje-li T nekonečně mnoho samodružných bodů, tvořících křivku K, jest tato křivka pevnou složkou soustavy $|D_1|$.

Nyní předpokládejme, že křivkám D_0 odpovídají nadrovinové průseky plochy F nadrovinami, jdoucími prostorem S_ν, a že tudíž křivkám D_1 odpovídají průseky plochy F nadrovinami, jdoucími prostorem $S_{n+3-\nu}$. Soustava $|D_0|$ má tedy rozměr $n + 3 - \nu$ a soustava $|D_1|$ rozměr ν.

Nějaký bod, společný ploše F a jednomu z prostorů S_ν, $S_{n+3-\nu}$ je samodružným pro T'. Může tedy pouze prostor $S_{n+3-\nu}$ protnout plochu F v konečném počtu bodů anebo v křivce.

Křivky $G_1, G_2, \ldots, G_h$ jsou transformovány involucí T' na křivky $G_1', G_2', \ldots, G_h'$. Každý bod, společný jedné z křivek G_i a její odpovídající G_i', je samodružný pro T' a patří tedy do $S_{n+3-\nu}$.

Křivkám C odpovídají involucí T' křivky C'.

Všimněme si, že, promítneme-li plochu F z prostoru S_ν na prostor $S_{n+3-\nu}$, odpovídá každému páru bodů, přiřazených k sobě transformací T', jediný bod tohoto prostoru a všecky pak vytvářejí plochu Φ, obraz involuce I_2, indukovaný na F involucí T'.

20. Předešlé úvahy se dají bez nesnází rozšířit na involuční biracionální trnasformace v prostoru. Varieta V, která zobrazuje takovou transformaci, jest transformována sama v sebe involuční kolineací T', jež má dva prostory samodružných bodů S_ν, $S_{r-\nu-1}$. Z těch může pouze druhý protnout varietu V v konečném počtu bodů nebo v křivce nebo konečně v ploše.

Plochy D_1, které odpovídají nadrovinovým průsekům variety V rovinami, jdoucími prostorem $S_{r-\nu-1}$, obsahují plochy, vytvořené protínáním rovin a svazku ploch A, které odpovídají těmto rovinám.

Nějaké ploše G nebo nějaké ploše H přiřazuje involuce T' plochu G' nebo plochu H'. Průsečné body ploch G a G' a ploch H a H' jsou samodružné a patří tudíž prostoru $S_{r-\nu-1}$. Plocha M, odpovídající páru hlavních křivek druhého druhu se transformuje sama v sebe.

Projekce variety V z prostoru S_ν na prostor $S_{r-\nu-1}$ dává varietu Ω, obraz involuce indukované involucí T'.

IV. Poznámky.

21. V předešlém jsme uvažovali biracionální transformace, jejichž homaloidní soustavy měly v každém bodě base všecky tečny proměnlivé v případě transformace rovinné nebo všecky tečné kužele v bodech base a všecky tečné roviny podél křivek base proměnlivé, když šlo o transformaci prostorovou. Vzdáme-li se těchto předpokladů, zůstává zachována konstrukce plochy F v rovinném případě nebo variety V v případě prostorovém, avšak tato plocha nebo tato varieta mohou získat singulární body. Ukážeme to na několika příkladech.

22. Vraťme se k biracionální transformaci T mezi dvěma rovinami σ, σ' a předpokládejme, že homaloidní síť $|A|$ má hlavní bod O o násobnosti s a že tečny v něm — označme je $t_1, t_2, \ldots, t_s$ jsou různé, avšak pevné.

Uvažujme křivky D, jimž uložíme, aby se dotýkaly v bodě O přímky p různé od $t_1, t_2, \ldots, t_s$. Takovéto křivky mají v O nejméně $s+1$-násobný bod. Předpokládejme, že tato násobnost je přesně $s+1$. Uvažované křivky tvoří lineární soustavu o rozměru $n+3$, řádu $2n+2-(s+1)$. V prostoru S_{n+4} jim odpovídají nadroviny jdoucí bodem P, $s+1$ násobným na ploše F.

Budiž nyní γ nějaká kuželosečka, která se dotýká v O přímky t_1. Křivky D, mající tři průsečíky s kuželosečkou γ splývající v bodě O, tvoří lineární soustavu ∞^{n+3} a v prostoru S_{n+4} jim odpovídají nadroviny, jdoucí bodem P_1 na F. Mění-li se kuželosečka γ, opisuje bod P_1 přímku G_1, jež prochází bodem P. Označíme-li O_1 nekonečně blízký bod bodu O na t_1, pevný to bod, který leží na všech křivkách A i D, odpovídají body přímky G_1 bodům nekonečně blízkým bodu O_1 (a bodům, které jim odpovídají transformací T).

Stejně tak okolí bodů $O_2, O_3, \ldots, O_s$, nekonečně blízkých bodu O na přímkách $t_2, t_3, \ldots, t_s$ odpovídají na ploše F přímky $G_2, G_3, \ldots, G_s$, které všecky procházejí bodem P.

Bodům nekonečně blízkým bodu O odpovídají na F nekonečně blízké body bodu P.

23. Předpokládejme teď, že křivky A mají v bodě O násobnost s a τ pevných tečen $t_1, t_2, \ldots, t_\tau$, kdežto ostatních $s-\tau$ tečen je proměnlivých.

Křivky D, dotýkající se v bodě O přímky p různé od $t_1, t_2, \ldots, t_\tau$, tvoří lineární soustavu ∞^{n+3}. V prostoru S_{n+4} jim odpovídají nadroviny, jdoucí jedním bodem P plochy F. Mění-li se přímka p, vytváří tento bod křivku G_0 stupně $s-\tau$, která zobrazuje nekonečně blízké body bodu O.

Buďtež $O_1, O_2, \ldots, O_\tau$ body nekonečně blízké bodu O na přímkách $t_1, t_2, \ldots, t_\tau$. Uvažujeme-li křivky D, oskulující v bodě O kuželosečky, které procházejí body $OO_1, OO_2, \ldots, OO_\tau$, vidíme, že bodům nekonečně blízkým bodům $O_1, O_2, \ldots, O_\tau$ odpovídají na F body přímek $G_1, G_2, \ldots, G_\tau$, které protínají křivku G_0.

Je vidět, že pokaždé, když τ vzroste o jednotku, zmenší se stupeň křivky G_0 o jednotku a k přímkám $G_1, G_2, \ldots, G_\tau$ se připojí nová přímka. Je-li $\tau = s$, křivka G_0 se redukuje na $s + 1$-násobný bod na F.

24. Přejděme nyní k biracionálním transformacím v prostoru a předpokládejme, že homaloidní soustava je tvořena kvadrikami, které jdou jistou kuželosečkou Γ a dotýkají se v jednom bodě této kuželosečky roviny σ (jdoucí zřejmě tečnou ke kuželosečce v bodě O).

Plochy D jsou kubické plochy, procházející kuželosečkou Γ a dotýkající se roviny σ v O. Je jich ∞^{11} a varieta V náleží do prostoru S_{11}. Dvě plochy D se protínají mimo Γ v křivce sedmého stupně, která jde jednoduše bodem O, dotýkajíc se tam roviny σ a protínajíc kuželosečku Γ ještě v pěti bodech. Třetí plocha D protíná tuto křivku ve 14 proměnlivých bodech a varieta V je tedy stupně 14.

Nazveme D_0 plochy D, kterým jsme předepsali, aby se dotýkaly v O nějaké přímky p, jež není položena v rovině σ. Tyto plochy mají dvojnásobný bod v O a dvě takové plochy se protínají mimo Γ v křivce sedmého stupně, mající v O trojnásobný bod a protínající kuželosečku Γ ještě ve třech jiných bodech. Třetí plocha D_0 protíná tuto křivku mimo O a Γ ve 12 bodech. Plochám D_0 odpovídají nadrovinové průseky variety V nadrovinami, které procházejí jistým bodem P. Lineární prostor S_8, jdoucí bodem P protíná varietu V ve 12 bodech mimo P a tento bod je tedy dvojnásobný pro varietu V. Bodům nekonečně blízkým bodu O v prostoru Σ odpovídají body variety V nekonečně blízké bodu P.

Nechť je t přímka roviny σ, jdoucí bodem O a γ nějaká kuželosečka, tečná k přímce t v bodě O. Plochy D, oskulující v bodě O kuželosečku γ, tvoří lineární soustavu ∞^{10} a v prostoru S_{11} jim odpovídají nadrovinové průseky variety V nadrovinami, jdoucími jistým bodem Q variety V. Mění-li se kuželosečka γ, zatím co přímka t zůstává pevná, opisuje bod Q přímku D, jdoucí bodem P. Mění-li se dále přímka t, vytváří přímka g plochu G. Ježto má křivka sedmého stupně, společná dvěma plochám D, jednoduchý bod v O, jest plocha G rovinou (ležící na kuželi o třech rozměrech, který je tečný k varietě V v bodě P).

Jiný příklad, který studovala sl. Calvo [4], dostaneme, vezmeme-li za A soustavu kvadrik, jež jdou čtyřmi body a dotýkají se pevné roviny v jednom z těchto bodů. V tomto případě má varieta V čtyrnásobný bod.

Liège, dne 15. června 1948.

SEZNAM LITERATURY.

1. G. FANO, Osservazioni sulla rapresentazione di corrispondenze birazionali fra varieta algebriche (Commentarii Mathematici Helvetici, 1941, str. 193-201).
2. L. GODEAUX, Sur la représentation des transformations birationnelles planes (Bulletin de la Société des Sciences de Liège, 1942, str. 268—271).
3. L. GODEAUX, Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace (Idem, 1942, str. 428—432).
4. D. CALVO, Représentation de quelques transformations birationnelles de l'espace (Idem, 1942, str. 522—547).

D. CALVO, Sur la représentation d'une transformation birationnelle de l'espace (Idem, 1943, pp. 407—415).

D. CALVO, Représentation d'une transformation birationnelle de Caporali (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1943, str. 657—665).

D. CALVO, Sur les transformations birationnelles de l'espace (Bulletin de la Société des Sciences de Liège, 1944, str. 62—73).

*

Les transformations birationnelles et leurs représentations. Résumé de leçons faites par M. Lucien Godaux, Professeur à l'Université de Liège, en mai 1948, en qualité de professeur d'échange, à l'Université „Charles IV" de Prague. Suivant des idées developpées dans les notes (2), (3), (4), l'auteur étudie des transformations birationnelles en représentant les couples de points homologues par les points d'une surface ou d'une variété à trois dimensions d'un hyperspace. Il considère d'abord, dans le cas des transformations planes, le système complet $|D| = |a + A|$ des courbes d'ordre $n + 1$ qui se comportent, aux points-base du réseau homaloïdal $|A|$, comme les courbes de ce réseau (a est une droite, n l'ordre de la transformation). Il rapporte projectivement les courbes D aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+4} et démontre qu'il existe une surface F, d'ordre $2n + 2$, de S_{n+4} dont les points représentent les couples de points homologues dans la transformation. Aux droites et aux courbes A du réseau homaloïdal du plan correspondent sur F resp. des courbes C et C', rationnelles, normales, d'ordre $n + 1$. A un point-base O de la transformation, multiple d'ordre s, aux tangentes variables avec les courbes A, corresponde sur F une courbe G, rationnelle, normale, d'ordre s. En considérant des courbes A (resp. des courbes fondamentales Ω_i), d'une part, comme appartenant au système linéaire $|n \, . \, a|$ (resp. $|s_i{}'a|$), et d'autre part, comme les transformées des droites (resp. des points infiniment voisins de O_i) et tenant compte de leur passage par les points fondamentaux, on déduit sur F des relations qui peuvent être écrites symboliquement sous la forme (I), (II). Les relations (II) étant une conséquence des formules (I), on obtient plusieurs équations entre les caractères de la transformation, équations connues de la théorie des transformations birationnelles du plan. On aura d'autres formules en étudiant la jacobienne C_j et $C_j{}'$ du réseau de courbes $|C|$ et $|C'|$.

Le procédé analogue est employé dans le cas des transformations de l'espace. Les couples de points homologues dans la transformation sont représentés par les points de la variété V à trois dimensions, d'ordre $3(n + n') + 2$, appartenant à un espace linéaire S_r (n, n' sont des ordres resp. de la transformation directe et réciproque, pour r on ne peut fixer qu'une limite inférieure). Par l'étude des surfaces G_i qui représentent sur V des points infiniment voisins de points fondamentaux isolés O_i de la transformation, des surfaces H_j correspondant sur V aux courbe fondamentales γ_j de première espèce et des surfaces M_k correspondant sur V aux courbes fondamentales Γ_k de seconde espèce, on déduit deux groupes d'égalités symboliques (I) et (II). Elles donnent des relations entre des caractères de la transformation et on aura d'autres en étudiant la jacobienne F_j et $F_j{}'$ du système homaloïdal $|F|$ et $|F'|$ de surfaces sur V, correspondant respectivement aux plans et aux surfaces homaloïdales de la transformation. Il faut ajouter qu'on suppose toujours que tous les cônes tangents aux points-base et tous les plans tangents le long des courbes-base de la transformation soient variables.

Dans le cas d'une transformation involutive du plan (et de l'espace), la surface F (la variété V) est conservée par une homographie harmonique de l'hyperspace $S_{n+4}(S_r)$. Les deux axes ponctuelles de cette homographie conduisent à deux systèmes linéaires $|D_0|$, $|D_1|$ de courbes (surfaces) appartenant à l'involution I_2 engendrée par la transformation involutive dans le plan (dans l'espace).

La construction de la surface F (de la variété V) subsiste même dans le cas, si l'on abandonne des hypothèses faites, dans ce qui précède, des points fondamentaux (des points et des courbes fondamentales), mais la surface F (la variété V) peut acquérir des points singuliers.