BULLETIN MATHÉMATIQUE

Des FACULTÉS DES SCIENCES et des GRANDES ÉCOLES

N° 5 **Mai 1939**

La représentation plane de la surface cubique et la théorie des courbes planes du sixième ordre (1)

par L. GODEAUX,
professeur à la Faculté des Sciences de Liège.

Nous nous proposons d'indiquer comment la représentation plane de la surface cubique permet d'obtenir sans difficulté certaines propriétés des courbes planes du sixième ordre ayant six points doubles.

1. *Représentation plane de la surface cubique.* — On sait que la surface cubique est le lieu des points communs aux plans homologues de trois gerbes deux à deux homographiques. Soient

$$\left.\begin{aligned} &y_1\varphi_{11}(x_1, x_2, x_3, x_4) + y_2\varphi_{12} + y_3\varphi_{13} = 0, \\ &y_1\varphi_{21} + y_2\varphi_{22} + y_3\varphi_{23} = 0, \\ &y_1\varphi_{31} + y_2\varphi_{32} + y_3\varphi_{33} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

les équations des plans de trois gerbes deux à deux homographiques, y_1, y_2, y_3 étant des paramètres et $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{33}$ étant linéaires et homogènes par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 des

(1) Conférence faite à la Faculté des Sciences de Marseille le 1er mai 1939.

points de l'espace. La surface cubique F engendrée par les points communs aux plans homologues de ces trois gerbes a pour équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

A un point de la surface cubique F correspond un et un seul système de valeurs de y_1, y_2, y_3, et inversement. Par conséquent, si nous interprétons y_1, y_2, y_3 comme coordonnées homogènes des points d'un plan π, nous obtenons une représentation birationnelle de la surface F sur ce plan.

Ecrivons les équations (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &x_1\psi_{11}(y_1, y_2, y_3) + x_2\psi_{12} + x_3\psi_{13} + x_4\psi_{14} = 0, \\ &x_1\psi_{21} + x_2\psi_{22} + x_3\psi_{23} + x_4\psi_{24} = 0, \\ &x_1\psi_{31} + x_2\psi_{32} + x_3\psi_{33} + x_4\psi_{34} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

où les ψ sont linéaires et homogènes en y_1, y_2, y_3,.

A la section C de F par le plan

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0,$$

correspond dans le plan π la cubique Γ d'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \end{vmatrix} = 0.$$

Les ∞^3 cubiques Γ ainsi obtenues passent par les six points fixes représentés par les équations

$$\begin{Vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \end{Vmatrix} = 0.$$

Il existe une homographie entre les plans de l'espace et les cubiques Γ du système linéaire $\infty^3 \mid \Gamma \mid$, en ce sens qu'à un faisceau de plans correspond un faisceau de cubiques et à une gerbe de plans, un réseau de cubiques.

Aux points d'une droite

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0$$

du plan ω correspondent sur F les points d'une cubique gauche K d'équations

$$\left\|\begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{matrix}\right\| = 0.$$

Les cubiques gauches K forment sur la surface F un réseau de degré un, c'est-à-dire que deux courbes du réseau se rencontrent en un seul point.

2. Inversement, considérons dans un plan π les cubiques Γ passant par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Nous supposerons que ces six points ne sont pas sur une même conique et que trois d'entre eux ne sont jamais en ligne droite. Soit

$$\lambda_1 f_1(y_1, y_2, y_3) + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

l'équation des courbes Γ. Etablissons une homographie entre les courbes Γ du système linéaire $\infty^3 \mid \Gamma \mid$ et les plans de l'espace, en posant par exemple

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4.$$

Aux points du plan π correspondent les points d'une surface F en correspondance birationnelle avec le plan. Considérons en effet les courbes Γ passant par un point y; elles forment un réseau et il leur correspond dans l'espace les plans d'une gerbe de sommet x. Lorsque le point y décrit le plan π, le point x décrit la surface F Un point x ne provient d'ailleurs que d'un seul point y, car les courbes Γ passant par y, ne passent pas en conséquence par un point distinct de $A_1, A_2, \ldots, A_6, y$.

Considérons maintenant une droite r passant par le point A_1 et les courbes Γ tangentes à r en ce point. Elles forment un réseau et il leur correspond dans l'espace les plans d'une gerbe de sommet A', appartenant à la surface F. Nous conviendrons de dire qu'au point infiniment voisin de A_1 sur la droite r correspond le point A'. Lorsque la droite r tourne autour de A_1, le point A' varie et décrit une courbe a_1 tracée sur la surface F. Parmi les courbes Γ tangentes en A_1 à une droite r quelconque, se trouvent les ∞^1 courbes Γ ayant en A_1 un point double. Ces courbes forment un faisceau et il leur correspond dans l'espace des plans contenant la courbe a_1 et formant un faisceau. Il en résulte que a_1 est une droite.

On démontre de même qu'aux points infiniment voisins des points $A_2, A_3, \ldots, A_6$ correspondent respectivement sur la surface F les points des droites $a_2, a_3, \ldots, a_6$.

Deux quelconques des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, sont gauches, car si par exemple les droites a_1, a_2 se rencontraient, il existerait une cubique Γ (dégénérée) ayant des points doubles en A_1, A_2, ce qui est impossible.

Deux courbes Γ ont en commun trois points en dehors de $A_1, A_2, \ldots, A_6$, par conséquent deux sections planes de la surface F ont en commun trois points et la surface est du troisième ordre.

3. *Remarque.* — Si on laisse tomber les restrictions imposées à la position des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, la surface F acquiert un ou plusieurs points doubles. Ainsi, si, par exemple, ces six points sont situés sur une conique, la surface F possède un point double conique par lequel passent les six droites $a_1, a_2, \ldots a_6$.

4. *Les vingt-sept droites de la surface cubique.* — Aux points d'une courbe d'ordre n du plan π, ayant les multiplicités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_6$ respectivement en $A_1, A_2, \ldots, A_6$, correspondent sur la surface F les points d'une courbe d'ordre $3n - \gamma_1 - \gamma_2 - \cdots - \gamma_6$, rencontrant respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_6$ en $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_6$ points. Les droites de la surface F correspondent donc aux courbes du plan π rencontrant les courbes Γ en un point variable.

Outre les droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, la surface F contient donc :

1) Six droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$ correspondant respectivement aux coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$ passant, la première par les points $A_2, A_3, \ldots A_6$; la seconde par les points $A_3, A_4, \ldots, A_1; \ldots$; la dernière par les points $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

2) Quinze droites c_{ik} correspondant aux droites

$$A_i A_k (i, k = 1, \ldots, 6).$$

On obtient ainsi les vingt-sept droites de la surface cubique. On observera qu'une droite b rencontre les cinq droites a d'indices différents et que les droites b ne se rencontrent pas deux à deux.

5. *Courbes planes du sixième ordre ayant six points doubles.* — A la section de la surface F par une surface d'ordre n, correspond dans le plan π une courbe d'ordre $3n$ ayant la multiplicité n en chacun des points A_1, A_2, ..., A_6. En particulier, à la section C_6 de F et d'une quadrique Q correspond dans π une courbe Γ_6 du sixième ordre ayant des points doubles en A_1, A_2, ..., A_6. Toutes les courbes planes du sixième ordre ayant cette propriété sont obtenues par ce procédé.

Les courbes planes du sixième ordre dépendent, en effet, de 27 paramètres. L'imposition d'un point double en un point déterminé du plan équivaut à trois conditions. Les courbes planes du sixième ordre ayant des points doubles en A_1, A_2, ..., A_6 dépendent donc de $r \geqslant 9$ paramètres. Ces courbes rencontrent la conique β_1 en deux points variables, par conséquent celles de ces courbes qui passent par trois points de β_1 distincts des points A contiennent cette conique comme partie et sont complétées par ∞^{r-3} quartiques ayant un point double en A_1 et passant simplement par les points A_2, A_3, ..., A_6. Ces quartiques sont en nombre ∞^6 et on a donc $r = 9$. A toute courbe Γ_6 d'ordre six ayant des points doubles en A_1, A_2, ..., A_6 correspond donc sur F une courbe C_6 section de cette surface par une quadrique Q.

6. *Faisceaux de Halphen.* — En général, il existe une seule courbe plane du sixième ordre ayant neuf points doubles donnés. Halphen a montré que ces neuf points pouvaient cependant être choisis de telle sorte qu'il existe une infinité de courbes du sixième ordre, formant un faisceau, passant doublement par ces points (2). Nous allons établir le théorème de Halphen (3).

Choisissons dans le plan π deux points A_7, A_8, distincts des points A_1, A_2, ..., A_6 et une courbe Γ, sans point double, passant

(2) *Halphen, Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1881-82 ; *Œuvres*, Tome II, p. 547.

(3) Nous avons démontré l'existence des faisceaux de sextiques de Halphen en utilisant la représentation plane de la surface cubique dans *Mathesis*, 1935, p. 154. Nous avons constaté après coup que ce procédé avait déjà été utilisé par R. Sturm (*Geometrischen Verwandtschaften*, t. IV, Leipzig, 1909, p. 278). M. B. Gambier a établi, par le même procédé, l'existence de faisceaux de Halphen de courbes d'ordre $3n$, ayant neuf points multiples d'ordre n (*Mathesis*, 1926).

par ces deux points. Soient Γ' cette courbe, C' la section plane de F qui lui correspond, A'_7 et A'_8 les points de C' homologues de A_7, A_8.

La courbe C' est dépourvue de point double. La droite joignant les tangentiels A''_7, A''_8 de A'_7, A'_8 coupe encore C' en un point A''_9 par lequel on peut mener quatre tangentes à C'. Le point de contact d'une de ces tangentes est situé sur la droite $A'_7 A'_8$. Soit A'_9 le point de contact d'une des trois autres tangentes. Il existe une conique λ_2 tangente à C' en A'_7, A'_8, A'_9. Les plans tangents α_7, α_8, α_9 à la surface F en A'_7, A'_8, A'_9 ne peuvent passer par une même droite; ils se rencontrent en un point O. Le cône projetant la conique γ_2 du point O et le plan de la courbe C' compté deux fois déterminent un faisceau de quadriques Q touchant la surface F en A'_7, A'_8, A_8. Les sections C_6 de F par ces quadriques ont donc des points doubles en ces points. A ces courbes C_6, correspondent dans le plan des courbes planes du sixième ordre ayant des points doubles en A_1, A_2, ..., A_6, A_7, A_8, A_9, ce dernier point étant l'homologue du point A'_9. Ces courbes forment un faisceau de Halphen.

On observera que la courbe Γ', comptée deux fois, est une courbe du faisceau. D'autre part, la courbe Γ' et les points A_7, A_8 étant choisis, il existe, sur la courbe Γ', trois positions possibles du point A_9. On peut les obtenir en transportant, dans le plan ω, la construction du point A'_9 rappelée plus haut.

7. *Courbes planes du sixième ordre ayant six points de rebroussement.* — Il est aisé d'écrire l'équation d'une courbe plane du sixième ordre ayant des points de rebroussement en six points d'une conique. Si

$$\varphi_2(J_1, J_2, J_3) = 0, \qquad \varphi_3(J_1, J_2, J_3) = 0,$$

sont les équations d'une conique et d'une cubique, la courbe

$$\varphi_2^3 + \lambda\varphi_3^2 = 0,$$

satisfait à la condition imposée. Nous allons montrer l'existence de courbes planes du sixième ordre ayant des points de rebroussement en six points non situés sur une conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite.

Supposons qu'il existe une courbe plane Γ_6 du sixième ordre ayant des points de rebroussement en A_1, A_2, ..., A_6. Il lui correspond, sur F, la section C_6 de cette surface par une quadrique Q tangente aux droites a_1, a_2, ..., a_6. La question revient donc à prouver l'existence de quadriques tangentes à six droites deux à deux gauches.

Soient B_1, B_2, B_3 trois points non en ligne droite pris respectivement sur les droites a_1, a_2, a_3. Les quadriques Q tangentes à a_1 en B_1, à a_2 en B_2, à a_3 en B_3, forment un système linéaire triplement infini $|Q|$. Trois quadriques de ce système, n'appartenant pas à un même faisceau, se rencontrent en deux points en dehors de B_1, B_2, B_3.

Considérons le cône du second ordre de sommet B_1, passant par a_1, touchant le plan B_1a_2 le long de la droite B_1B_2 et le plan B_1a_3 le long de la droite B_1B_3. Considérons de même le cône du second ordre de sommet B_2, passant par a_2, touchant le plan B_2a_1 le long de la droite B_2B_1 et le plan B_2a_3 le long de la droite B_2B_3. Ces deux cônes ont en commun la droite B_1B_2 et une cubique gauche G tangente à a_1, a_2, a_3 respectivement en B_1, B_2, B_3. Les quadriques Q_0 passant par G appartiennent donc au système $|Q|$.

Les quadriques Q passant par un point P_1 forment un réseau et ont encore en commun, en dehors des points B_1, B_2, B_3, un point P_2. Parmi les quadriques Q passant par P_1, se trouvent ∞^1 quadriques Q_0, formant un faisceau, passant par G; ces quadriques ont en commun, en dehors de G, la bisécante de cette courbe passant par P_1. Le point P_2 se trouve sur cette bisécante.

Désignons par Σ l'espace contenant le système $|Q|$ et établissons une projectivité entre les quadriques de ce système et les plans d'un second espace Σ'. Aux quadriques Q passant par le point P_1 (et par le point P_2), correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet P'. A un point de Σ correspond donc un point de Σ', mais à un point de Σ' correspondent deux points de Σ. Les espaces Σ, Σ' sont liés par une correspondance (2, 1).

Aux points P_1 d'une droite a de Σ correspondent dans Σ' les points P' d'une certaine courbe γ. Les points de rencontre de cette courbe avec un plan de Σ' ont pour homologues les points de rencontre de la droite a avec la quadrique Q correspondant au plan. Si la droite a n'est pas une bisécante de la cubique gauche G, la courbe γ est donc une conique.

Cela étant, soient λ_4, λ_5, λ_6, les coniques qui correspondent dans Σ' aux droites a_4, a_5, a_6. Ces coniques appartiennent à la surface, du sixième ordre, transformée de la surface F. Il existe huit plans tangents à ces trois coniques ; ils ont pour homologues dans Σ huit quadriques Q tangentes aux droites a_4, a_5, a_6. Parmi ces quadriques, se trouve le plan $B_1B_2B_3$ compté deux fois. Il existe donc sept quadriques irréductibles tangentes aux six droites a_1, a_2, ..., a_6 les points de contact avec les trois premières droites étant fixés.

Revenons au plan π. Observons que se donner le point B_1 sur la droite a_1, par exemple, revient à fixer la tangente de rebroussement au point A_1. Nous voyons qu'il existe sept courbes irréductibles du sixième ordre ayant six points de rebroussement n'appartenant pas à une même conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite, les tangentes de rebroussement en trois de ces points étant fixées. La courbe Γ correspondant à la section de la surface F par le plan $B_1B_2B_3$, comptée deux fois, est une solution dégénérée (4).

8. *Involution de Bertini* — Soient dans le plan π huit points A_1, A_2, ..., A_8 dont six n'appartiennent jamais à une même conique ni trois à une même droite. Les courbes planes du sixième ordre ayant la multiplicité deux en ces huit points et passant par un point P_1, passent en conséquence par un point P_2. Les couples de points P_1, P_2 ainsi obtenus forment l'involution de Bertini. Nous allons montrer qu'en utilisant la représentation plane de la surface cubique, on peut aisément établir la propriété précédente et étudier l'involution de Bertini (5).

Soient A'_7, A'_8 les points qui correspondent sur F aux points A_7, A_8. Sous les hypothèses faites, la droite r passant par A'_7, A'_8 n'appartient pas à la surface F et coupe celle-ci en un troisième point B', homologue du neuvième point B du plan π appartenant aux cubiques Γ passant par A_1, A_2, ..., A_8.

---

(4) La question de l'existence des courbes du sixième ordre ayant six points de rebroussement avait été posée par M. Zariski (*American Journal of Mathematics*, 1929, pp. 305-328). Nous avons résolu cette question dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1930, pp. 576-580. La correspondance entre les espaces Σ, Σ', a été étudiée par un de nos élèves, M. Bolus, au même endroit.

(5) Voir notre note dans *Mathesis*, 1929, pp. 11-17, 49-53.

Aux courbes planes du sixième ordre Γ_6 ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_8$ correspondent sur F les sections C_6 de cette surface par les quadriques Q tangentes à F aux points A'_7, A'_8. Ces quadriques forment un système linéaire ∞^3 et par conséquent les courbes Γ_6 envisagées forment un système linéaire triplement infini. Considérons les courbes C_6 passant par un point P'_1 de F et soient α le plan rP'_1, C la section de F par le plan α. Les courbes C_6 en question sont découpées sur F par les quadriques Q passant par P'_1 et tangentes à F en A'_7, A'_8; ces quadriques passent par la conique γ_2 contenant P'_1 et touchant C en A'_7, A'_8. Cette conique coupe encore C en un point P'_2, qui appartient donc à toutes les courbes C_6 passant par P'_1. Les couples de points tels que P'_1, P'_2 forment sur la surface F une involution I transformée de l'involution de Bertini.

Soit P′ le troisième point de rencontre de la droite $P'_1 P'_2$ avec la courbe C. Considérons, dans le plan α, le faisceau de cubiques déterminé par la courbe C et par la courbe formée de la droite r comptée deux fois et de la droite $P'_1P'_2$. Les courbes de ce faisceau se touchent aux points A'_7, A'_8, B′ et passent par les points P'_1, P'_2 et P″; elles ne rencontrent la conique γ_2 qu'en des points fixes. La courbe du faisceau passant par un point de γ_2 contient cette conique comme partie et est complétée par une droite tangente à C en B′ et passant par P′. Ce point est donc le tangentiel de B′ sur la courbe C. Le point P′ appartient donc à la section (F, β) de F par le plan β tangent à F en B′.

La courbe (F, β) possède un point double en B′ et les droites $P'_1P'_2$ déterminant sur F les couples de l'involution I s'appuient sur la droite r et sur la courbe (F, β); ces droites forment, comme on sait, une congruence linéaire.

De ce qui précède, on peut déduire la construction suivante de l'involution de Bertini. Désignons par Γ' les courbes Γ passant par A_7, A_8 et par suite par B, par Γ'' la courbe Γ ayant un point double en B et qui correspond donc à la courbe (F, β). La courbe Γ' passant par un point P_1 coupe Γ'' en un point P en dehors de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et de B. Les courbes Γ passant par les points P_1 et P forment un faisceau dont le neuvième point-base est le point P_2, associé de P_1 dans l'involution de Bertini.

9. — Supposons que le point P_1 décrive une droite d; le point P,

décrit une courbe D dont l'ordre est égal au nombre des points P_2 situés sur une seconde droite d'. Aux droites d, d' correspondent sur F des cubiques gauches K, K', se rencontrant en un point, mais ne rencontrant pas en général la droite r. L'ordre de D est égal au nombre de droites s'appuyant en des points distincts sur la droite r et sur les courbes K, K', (F, β). Les droites s'appuyant sur r, K et K' forment une réglée d'ordre 17 passant huit fois par r et trois fois par chacune des courbes K, K'. Cette réglée coupe la courbe (F, β), en dehors de B et des points de K, K' situés dans le plan β, en 17 points. La courbe D est donc d'ordre 17.

Il existe une courbe Γ_6 ayant un point triple en A_1 ; il lui correspond sur F une courbe rencontrée en trois points par la droite a_1 et découpée par conséquent par la quadrique Q contenant a_1. La courbe en question est donc du cinquième ordre et, dans l'involution I, elle correspond à la droite a_1. Par conséquent, aux points infiniment voisins de A_1 sont associés, dans l'involution de Bertini, les points de la courbe Γ_6 ayant un point triple en A_1. Il en résulte que la courbe D a un point sextuple en A_1. Les points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ jouant des rôles symétriques dans la définition de l'involution de Bertini, la courbe D passe également six fois par les sept derniers de ces points. Nous voyons donc que l'involution de Bertini est engendrée par une transformation birationnelle involutive du plan π qui fait correspondre aux droites du plan des courbes D d'ordre 17, ayant huit points sextuples $A_1, A_2, \ldots, A_8$. On vérifie aisément que deux courbes D ont en commun un seul point, variable avec les courbes.

Le nombre des couples de l'involution de Bertini situés sur la droite d est égal au nombre de bisécantes de la cubique gauche K, s'appuyant sur la droite r et sur la courbe (F, β), les points d'appui étant distincts. Ce nombre est égal à quatre. Les 17 points de rencontre de la droite d et de la courbe D sont les points de ces quatre couples et des points unis de l'involution. La courbe unie U de l'involution de Bertini est donc du neuvième ordre. Les points de la courbe Γ_6 ayant un point triple en A_1, infiniment voisins de ce point, sont unis pour l'involution, par conséquent la courbe U a un point triple en A_1 et mêmes tangentes en ce point que la courbe Γ_6 en question. La courbe U a de même des points triples en $A_2, A_3, \ldots, A_8$.

Reprenons la section C de F par le plan α passant par r. Par le point P′ passent quatre tangentes à C; l'une d'elles a pour points de contact B′ et par conséquent la courbe C contient trois points unis de l'involution I, en dehors de B′. Il en résulte que la courbe U doit être rencontrée en trois points par une courbe Γ′, en dehors des points A et de B. On en conclut que la courbe U ne passe pas par B, qui est un point uni isolé de l'involution de Bertini.

10. *Observation.* — En laissant tomber quelques-unes des hypothèses faites sur la position des points A, on peut obtenir des cas particuliers de l'involution de Bertini ; on peut étudier ces cas particuliers par le même procédé.