Sur les surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est supérieur à l'unité.

LUCIEN GODEAUX (Liège)

A Beniamino SEGRE,
en témoignage d'affectueuse estime.

Sunto. – *Si dimostra un teorema di Andreotti: Una superficie algebrica di divisore di Severi è l'immagine di una involuzione appartenente ad una superficie algebrica e le due superficie hanno la stessa varietà di Picard.*

Lorsque Severi a créé la division sur une surface algébrique et introduit le diviseur σ, on connaissait deux types de surfaces ayant un diviseur supérieur à l'unité et précisément égal à deux [1]. C'étaient des surfaces dépourvues de courbe canonique et ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro, notamment la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Le double des sections planes de cette surface et le double des courbes découpées par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre appartiennent au système découpé par les surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre, surfaces qui peuvent être formées des faces du tétraèdre et des quadriques. ENRIQUES a démontré que cette surface était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ [2].

Profitant de cette remarque, nous avons construit des exemples de surfaces ayant un diviseur quelconque. If suffit de construire une surface contenant une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, ce qui est facile. L'image de cette involution est une surface de diviseur $\sigma = p$ [3]. Notre but était de prouver l'existence de surfaces ayant un diviseur quelconque, mais non d'obtenir par ce procédé toutes les surfaces possédant cette propriété. Comme COMESSATTI [4] et M. LEFSCHETZ [5] l'ont montré, le fait qu'une surface a un diviseur supérieur à l'unité entraîne l'existence de torsions sur la variété riemannienne à quatre dimensions associée à la surface.

Plus récemment, M. ANDREOTTI [6] a repris la question et a démontré que:

Si Φ est une surface algébrique de diviseur de Severi supérieur à l'unité, elle est l'image d'une involution d'ordre égal au diviseur, dépourvue de points unis, apparte-

(*) Entrata in Redazione il 20 settembre 1972.

nant à une surface algébrique F, de diviseur égal à l'unité et ces surfaces ont même variété de Picard.

Notre but dans ce travail est de donner une démonstration assez simple du théorème de M. Andreotti et en même temps, de donner une construction de la surface F en partant de la surface Φ.

1. – Soit Φ une surface algébrique normale de diviseur $\sigma = p > 1$ (et non de diviseur supérieur à p). Supposons que $|\Gamma_1|$ étant le système des sections hyperplanes de Φ, il existe $p-1$ systèmes $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \dots, |\Gamma_p|$ tels que l'on ait

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 \equiv \dots \equiv p\Gamma_p$$

ces systèmes ayant les mêmes caractères que $|\Gamma_1|$.

On peut supposer, en évoquant un théorème classique de Beppo Levi, que la surface Φ, située dans un espace S_r à r dimensions, est dépourvue de points singuliers.

Dans ces conditions, il existe dans S_r, une hypersurface d'ordre p ayant un contact d'ordre $p-1$ avec Φ le long de chacune des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$.

Observons que l'on peut remplacer la surface Φ par une surface Φ' obtenue en rapportant projectivement les courbes d'un système $|k\Gamma_1|$ aux hyperplans d'un espace à un nombre convenable de dimensions. Si n est l'ordre de la surface Φ, la surface Φ' a l'ordre k^2n. It en résulte que l'ordre de la surface Φ, l'ordre des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$ peut être supposé aussi grand qu'on le veut.

2. – Considérons un espace $S_{p(r+1)-1}$ à $p(r+1)-1$ dimensions, contenant p espaces linéaires $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ à r dimensions, ne se rencontrant pas deux à deux. En rapportant les sections hyperplanes Γ_1 de Φ aux hyperplans de l'espace σ_1, on obtient une surface Φ_1 possédant les mêmes propriétés que Φ. De même, en rapportant les courbes Γ_2 aux hyperplans de l'espace σ_2, on obtient une surface Φ_2 possédant les mêmes propriétés que Φ. Et ainsi de suite. On obtient finalement p surfaces Φ_1 dans σ_1, Φ_2 dans $\sigma_2, \dots, \Phi_p$ dans σ_p. Ces surfaces sont birationnellement identiques à Φ (mais cela n'implique pas une correspondance birationnelle entre deux des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$).

Nous désignerons par ξ les espaces déterminés par les points de Φ_1 et les points homologues sur $\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_p$.

Soit H l'homographie de période p, de l'espace $S_{p(r+1)-1}$ ayant pour axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$. Un espace ξ est transformé en lui-même par H et cette homographie détermine dans cet espace une homographie ayant p points unis isolés, donc ξ est un espace à $p-1$ dimensions.

Par un point de l'une des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ passe un seul espace ξ. Supposons que par un point P quelconque, passent deux espaces ξ. Ces espaces doivent passer par les $p-1$ points que H fait correspondre à P et par suite ils coïncident. On en conclut que les ∞^2 espaces ξ forment une conguence d'indice un.

3. – Les espaces ξ passant par les points d'une courbe Γ_1 forment une variété à p dimensions que nous désignerons par V_1.

Un hyperplan passant par $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ coupe la courbe Γ_1 en n point, donc cet hyperplan contient n espaces ξ. D'autre part, cet hyperplan contient également le lieu des espaces à $p-2$ dimensions s'appuyant en des points homologues sur les courbes $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_1^{(3)}, \ldots, \Gamma_1^{(p)}$ qui correspondent sur les surfaces $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_p$ à la courbe Γ_1. Ces espaces forment une variété V_1' à $p-1$ dimensions.

Un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ rencontre la courbe $\Gamma_1^{(2)}$, qui est d'ordre n en n points, donc cet hyperplan rencontre V_1' suivant n de ses espaces à $p-2$ dimensions. Cet hyperplan rencontre également V_1' suivant les espaces à $p-3$ dimensions s'appuyant en des points homologues sur les courbes $\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_1^{(4)}, \ldots, \Gamma_1^{(p)}$. Un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \ldots, \sigma_p$ coupe $\Gamma_1^{(3)}$ en n points et cet hyperplan contient donc n des espaces à $p-3$ dimensions. Il contient aussi les espaces à $p-4$ dimensions s'appuyamt en des points homologues sur les courbes $\Gamma_1^{(4)}, \Gamma_1^{(5)}, \ldots p\, \Gamma_1^{(p)}$. Et ainsi de suite. On arrive finalement à la réglée lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur les courbes $\Gamma_1^{(p-1)}$, $\Gamma_1^{(p)}$; réglée qui est d'ordre $2n$. On voit ainsi que la variété V_1' est d'ordre $(p-1)n$. La variété V_1 est donc d'ordre pn.

4. – Considérons maintenant la variété V, à $p+1$ dimensions, lieu des ∞^2 espaces ξ.

Un hyperplan passant par $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ coupe Φ_1 suivant une courbe Γ_1, donc il rencontre la variété V suivant la variété V_1 relative à cette courbe Γ_1. Il rencontre encore V suivant la variété V' lieu des espaces à $p-2$ dimensions s'appuyant en des points homologues sur $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_p$.

Un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ coupe Φ_2 suivant une courbe Γ_2, donc il rencontre V' suivant une variété V_2 relative à cette courbe Γ_2 et suivant la variété V'' lieu des espaces linéaires à $p-3$ dimensions s'appuyant en des points homologues sur les surfaces $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_p$. Et ainsi de suite. On arrivera finalement au lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur les surfaces Φ_{p-1} et Φ_p. Un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-2}, \sigma_p$ coupe Φ_{p-1} suivant une courbe Γ_{p-1}, d'ordre n, formant une réglée $V^{(1)}$. Cet hyperplan coupe donc $V^{(1)}$ suivant la réglée lieu des droites s'appuyant sur la courbe Γ_{p-1} et sur les points homologues de Φ_p, réglée d'ordre $2n$, et suivant la surface Φ_p, d'ordre n. La réglée $V^{(1)}$ est donc d'ordre $3n$. En remontant de proche en proche, on voit que la variété V' est d'ordre $(p-1)n$ et enfin que la variété V est d'ordre $(2p-1)n$.

Nous avons appelé V_1 la variété lieu des espaces ξ passant par les points d'une courbe Γ_1 de Φ_1. Appelons de même V_2 la variété lieu des espaces ξ passant par les points d'une courbe $\Gamma_2, \ldots, V_p$ la variété lieu des espaces ξ passant par les points d'une courbe Γ_p. Ces variétés ont toutes p dimensions et sont d'ordre pn.

Un hyperplan passant par les espaces $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ coupe V suivant une variété V_1, un hyperplan passant par les espaces $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ coupe V suivant une variété $V_2, \ldots,$ un hyperplan passant par les espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ coupe V suivant une variété V_p. On en conclut que les variétés

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_p$$

sont des sections hyperplanes de la variété V.

On voit que si l'on applique l'opération de division au système des sections hyperplanes de V, on obtient p systèmes linéaires équivalents, donc le diviseur de Severi de la variété V est égal à l'unité.

5. – Soit φ_1 une hypersurface d'ordre p de σ_1 coupant Φ_1 suivant une courbe $\bar{\Gamma}_1$ du système $|3\Gamma_1|$. Sur Φ_2, les courbes $\Gamma_1^{(2)}$ sont d'ordre n et le long d'une de ces courbes, il y a une hypersurface d'ordre p de σ_2 ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ_2. Soit φ_2 une hypersurface d'ordre p passant par la courbe $\bar{\Gamma}_1^2$ homologue de $\bar{\Gamma}_1$. Soient de même $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_p$ des hypersurfaces d'ordre p de $\sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_p$ passant par les courbes de $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_p$ homologues de $\bar{\Gamma}_1$.

Le lieu des espaces ξ passant par les points de la courbe $\bar{\Gamma}_1$ est une variété à p dimensions, V_1'', d'ordre p^2n.

Considérons l'intersection de la variété V et de l'hypersurface

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_p .$$

Elle comprend la variété V_1'' qui vient d'être rencontrée et est complétée par une variété W, à p dimensions, d'ordre $p(p-1)n$.

L'hypersurface φ est transformée en soi par H, de même que la variété V, lieu d'espaces ξ, donc la variété W est transformée en soi par l'homographie H.

Sur une espace ξ, la variété φ découpe une variété d'ordre p, à $p-2$ dimensions. Ces variétés, γ, forment sur W une congruence G d'indice un.

Entre les points de chacune des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ et les variétés γ de G, il y a une correspondance biunivoque.

Comme la variété V, la variété W a le diviseur de Severi égal à l'unité.

6. – Considérons le cas $p = 2$. Alors la variété W est une surface F et les variétés γ se réduisent à des couples de points. Sur la surface F, l'homographie H détermine donc une involution I d'ordre deux dont les surfaces Φ_1, Φ_2 sont des images.

Un point P_1 de Φ_1 et son homologue P_2 de Φ_2 sont toujours distincts, donc si l'involution I possède un point uni P, c'est que la droite P_1P_2 touche l'hyperquadrique φ en P.

Plaçons-nous dans cette hypothèse et considérons une courbe γ passant par P_1.

La projection de cette courbe à partir de P_2 est une section de F et la courbe Γ_1 a nécessairement un point double en P_1. Mais ce raisonnement peut être repris pour toutes les courbes Γ_1 (sections hyperplanes de Φ_1) et la surface Φ_1 aurait un point double en P_1, contrairement à l'hypothèse que Φ_1 est dépourve de points singuliers.

On en conclut qu'*une surface algébrique Φ de diviseur de Severi égal à deux est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface P de diviseur égal à l'unité.*

Nous avions établi ce théoreme dans une note antérieure [7].

7. – Retournons au cas $p > 2$. Coupons la variété W par une espace Σ à $pr+1$ dimensions qui ne soit pas transformé en soi par H. La section est une surface F d'ordre $p(p-1)n$ sur laquelle les variétés γ découpent des groupes de p points formant une involution I, en général non cyclique, dont chacune des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ est une image.

Cette involution possède-t-elle des points unis?

Soit P un point uni. Il compte au moins deux fois parmi les intersections avec F d'une certaine variété γ, soit γ_1. Nous supposerons que le point P est simple pour la variété γ_1. Celle-ci étant transformée en soi par H, il en est de même de l'espace qui lui est tangent en P et par suite de la droite t intersection de cet espace avec l'espace Σ. La droite t doit donc appartenir à un espace appartenant à Σ et uni pour H.

L'espace Σ rencontre chacun des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ suivant un espace à $r-p+2$ dimensions. Ces p espace appartiennent à un espace à $p(r-p+3)-1$ dimensions, uni pour H et appartenant à Σ. Soit Σ' cet espace.

Pour que l'involution I possède des points unis, il faut que la surface F rencontre l'espace Σ'. Cela exige que l'on ait

$$2 + p(r-p+3) - 1 > pr + 1,$$

ce qui n'est possible que si $p = 3$. Dans ce cas, la surface F peut rencontrer le espace Σ' en un nombre fini de points.

Nous avons supposé que le point P était simple pour la variété γ_1. S'il en étail autrement, le raisonnement précédent subsiste, la droite t étant remplacée par deux plusieurs droites, tangentes à la variété γ_1.

8. – Supposons $p = 3$. La variété W est à trois dimensions et est d'odre $6n$. Elle appartient à un espace S_{3r+2} à $3r+2$ dimensions. L'espace Σ est un hyperplan de cet espace et l'espace Σ' rencontre chacun des espaces σ_1, σ_2, σ_3 suivant un espace à $r-1$ dimensions. Les variétés γ sont des courbes.

Soit P un point commun à la surface F et à l'espace Σ'. La courbe γ_1 passant par P étant transformée en soi par H, de même que Σ', cette courbe appartient donc à Σ'.

La courbe γ_1 appartient donc à l'intersection de Σ et de W. La surface F rencontre donc Σ' suivant une infinité de points alors qu'elle ne doit rencontrer cet espace qu'en un nombre fini de points. Il en résulte qu'en général, la surface F ne rencontre pas l'espace Σ'. L'involution I est donc dépourvue de points unis. Par consequent:

Une surface Φ de diviseur de Severi $\sigma > 1$ est l'image d'une involution d'ordre σ (en général non cyclique) privée de points unis, appartenant à une surface F dont le diviseur est $\sigma = 1$.

9. – Supposons que la surface Φ soit irrégulière et par conséquent également la surface F.

Si q est l'irrégularité de Φ, on peut supposer que le système continu complet $\{p\Gamma_1\}$ contient les multiples d'ordre p de $p-1$ systèmes continus complets $\{\Gamma_2\}, \{\Gamma_3\}, ..., \{\Gamma_p\}$. Les systèmes $\{p\Gamma_2\}, \{p\Gamma_3\}, ..., \{p\Gamma_p\}$ appartiennent donc au système $\{p\Gamma_1\}$. A chacun de ces systèmes correspond sur F un système continu complet et à chacun de ces système correspond un point de la variété de Picard Ω associée à la surface F. L'irrégularité q' de F est donc au moins égale à celle q de Φ.

Retournons à la variété V lieu des espaces ξ.

Aux points d'une courbe Γ_1 correspond sur V une variété V_1 lieu d'espaces ξ. Les espaces ξ passant par les points d'une courbe Γ_1 n'appartenant pas au système des sections hyperplanes de Φ_1 mais appartenant à un système linéaire tiré de $\{\Gamma_1\}$, forment une variété que nous désignerons par V_1'. On obtient ainsi ∞^q variétés appartenant à la conguence G des espaces ξ et formant un système continu $\{V_1\}$. Supposons que ce système ne soit pas complet et soit $\overline{V}_1$ une variété de ce système n'appartenant pas au système primitif. Cette variété est le lieu de ∞^1 espace ξ dont un point décrit une courbe tracée sur Φ_1. Cette courbe appartient nécessairement au sysème $\{\Gamma_1\}$. Le système $\{V_1\}$ est donc complet et ses éléments sont en correspondance biunivoque avec les systèmes linéaires de $\{\Gamma_1\}$. It en résulte que les variétés qui représentent les éléments de $\{V_1\}$ et de $\{\Gamma_1\}$ coïncident, avec la variété de Picard associée à la surface Φ_1.

Les sections des variétés de $\{V_1\}$ par l'espace Σ sont des systèmes linéaires de courbes de la surface F et on en conclut que *les surfaces Φ et F ont même variété de Picard*. Ainsi se trouve complètement démontré le théorème de M. Andreotti.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure (1908), pp. 449-468; *Opere Matematiche*, tome I, pp. 462-477.

[2] *Un'osservazione relativa alle superfice di bigenere 1*, Rendiconto della Accademia di Bologna (1907-9108), pp. 40-45); *Opere scelte*, vol. II, pp. 303-306. Voir aussi L. GODEAUX, *Sopra un teorema di F. Enriques*, Atti del Congresso della Società Italiana di Matematica,

Genova, 1963, pp. 368-370; *Une démonstration nouvelle d'un théorème de F. Enriques*, Rendiconti della Accademia Naz. dei Lincei, 2° sem. 1966, pp. 297-299.

[3] *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité*, Bulletin de l'Académie de Cracovie (1914), pp. 362-368; *Exemples de surfaces de diviseur supérieur à l'unité*, Bulletin des Sciences Mathématiques (1915), pp. 182-185.

[4] *Sulle superfici multiple cicliche*, Rendiconti del Seminario di Padova (1930), pp. 1-45.

[5] *L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique*, Paris, Gauthier-Villars, 1924; *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, Mémorial des Sciences Mathématiques (1929), fasc. XL.

[6] *Recherches sur les surfaces irrégulières*, Mémoires in-8° de l'Académie Roy. de Belgique (1952). Il s'agit du second mémoire publié sous le même titre dans le même volume,

[7] *Sur les surfaces algébriques de diviseur deux*, Revue Roumaine de Mathématiques (1967). pp. 403-405.