SUR UNE SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE POSSÉDANT SIX POINTS DOUBLES BIPLANAIRES SINGULIERS

Dans une note récente (*), nous avons rencontré une surface du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique. Cette surface appartient à un faisceau déterminé par une surface formée des quatre faces d'un tétraèdre et par une surface formée d'un cinquième plan compté quatre fois. Nous nous proposons de montrer que cette surface représente une involution du seizième ordre appartenant à une surface du quatrième ordre; cette involution est engendrée sur cette dernière surface par un groupe d'homographies de période quatre et ne possède qu'un nombre fini de points unis. La surface support de l'involution et la surface qui en est l'image sont toutes deux de genres un $(p_a = P_4 = 1)$.

1. Considérons la surface F, du quatrième ordre, d'équation

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^4 - x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \qquad [1]$$

Cette surface possède six points doubles biplanaires situés aux intersections des arêtes du tétraèdre de référence et du plan α d'équation

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Désignons par O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre de référence, O_i étant le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i, et par A_{ik} le point double de la surface F situé sur l'arête $O_i O_k$.

Le cône tangent à la surface F au point double A_{12} $(a_2, -a_1, O, o)$ a pour équation $x_3 . x_4 = 0$ et ce point est donc bien biplanaire. La surface F a un contact du troisième ordre avec les faces du tetraèdre de référence le long des droites suivant lesquelles le plan α coupe ces faces. Il en résulte que la droite $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ coupe la surface F en quatre points confondus en A_{12} et que, par conséquent, le point infiniment voisin de A_{12} sur cette droite est double

(*) «Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un», *Bulletins de l'Acad, Roy. de Belgique*, 1935.

pour la surface F. Nous allons montrer que ce point double infiniment voisin est conique.

Dans ce but, opérons la transformation quadratique

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a_x^2 : x_1 a_x : x_1 x_3 : x_1 x_4 ,$$

dont l'inverse a pour équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_2 y_2^2 : y_1 y_2 - a_2 y_2^2 - y_1 (a_3 y_3 + a_4 y_4) : a_2 y_1 y_3 : a_2 y_1 y_4 .$$

A la surface F correspond la surface d'équation

$$a_2 y_1^2 y_2^2 - y_3 y_4 (y_1 y_2 - a_2 y_2^2 - a_3 y_1 y_3 - a_4 y_1 y_4) = 0. \qquad [2]$$

Au domaine du point A_{12} correspond le plan ponctuel $y_1 = 0$ et au point infiniment voisin de A_{12} sur la droite $x_3 = x_4 = 0$ correspond le poind (0, 1, 0, 0). La surface [2] a un point double en ce point, le cône tangent ayant pour équation

$$y_1^2 + y_3 y_4 = 0.$$

Ce cône est irréductible, ce qui démontre notre assertion.

Les autres points doubles de F se comportent évidemment de la même manière que A_{12}; on voit donc que

La surface F *possède six points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique.*

2. La surface F peut être considérée de trois manières comme l'enveloppe d'un système simplement infini, d'indice deux, de quadriques; à savoir des familles

$$\lambda^2 x_1 x_2 + 2 \lambda a_x + x_3 x_4 = 0, \qquad [3]$$

$$\mu^2 x_1 x_3 + 2 \mu a_x + x_2 x_4 = 0, \qquad [4]$$

$$\nu^2 x_1 x_4 + 2 \nu a_x + x_2 x_3 = 0. \qquad [5]$$

Les quadriques de chacune de ces familles touchent la surface suivant des biquadratiques gauches en général irréductibles. Les quadriques [3] passent par les points A_{24}, A_{23}, A_{14}, A_{13} et par les points doubles infiniment voisins; les quadriques [4] passent par les points doubles A_{34}, A_{23}, A_{14}, A_{12} et par les points doubles infiniment voisins; les quadriques [5] passent par les points doubles A_{34}, A_{24}, A_{13}, A_{12} et par les points doubles infiniment voisins.

Envisageons la surface Φ d'équation

$$(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2)^2 - y_1 y_2 y_3 y_4 = 0. \qquad [6]$$

La surface Φ est transformée en elle-même par les trois homographies biaxiales harmoniques

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = y_1 : y_2 : -y_3 : -y_4 \,, \qquad H_1$$
$$y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = y_1 : -y_2 : y_3 : -y_4 \,, \qquad H_2$$
$$y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = y_1 : -y_2 : -y_3 : y_4 \,. \qquad H_3$$

Chacune de ces homographies engendre sur la surface Φ une involution du second ordre ayant huit points unis. Les groupes de ces involutions ayant un point en commun constituent un groupe de quatre points transformé en lui-même par les trois homographies. Celles-ci engendrent donc sur Φ une involution du quatrième ordre ayant 24 points unis.

Pour obtenir une surface image de cette involution, rapportons projectivement aux plans de l'espace les quadriques du système

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2 = 0 \,,$$

transformé en lui-même par les trois homographies, en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2^2 : y_3^2 : y_4^2. \qquad [7]$$

A la surface Φ correspond précisément la surface F, qui est donc l'image de l'involution considérée. Et aux points unis de l'involution correspondent les points doubles de la surface F.

Considérons le système de quadriques

$$y_3 y_4 + \lambda y_1 y_2 = 0 \,,$$

transformées en elles-mêmes par les homographies H. En éliminant les y entre cette équation et les équations [6] et [7], on obtient l'équation [3]. Par conséquent, aux courbes découpées sur la surfaces Φ par les quadriques considérées, correspondent sur F les biquadratiques suivant lesquelles les quadriques [3] touchent la surface F.

De même, aux faisceaux de courbes découpées sur Φ par les quadriques

$$y_2 y_4 + \mu y_1 y_3 = 0 \,, \qquad y_2 y_3 + \nu y_1 y_4 = 0$$

correspondent sur F les faisceaux de biquadratiques suivant lesquelles les quadriques [4], [5] touchent respectivement cette surface.

3. Nous allons examiner de plus près la correspondance entre les points unis des homographies H sur Φ et les points doubles de la surface F.

La surface Φ possède 12 points doubles situés sur les arêtes du tétraèdre de référence et touche chacune des faces de ce tétraèdre suivant une conique.

L'homographie H_1, par exemple, a pour axes les droites

$$y_1 = y_2 = 0, \qquad y_3 = y_4 = 0.$$

Envisageons la première de ces droites; elle coupe Φ suivant deux points doubles

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2 = 0.$$

Chacun de ces points est double conique pour la surface Φ. Désignons les par P_1, P_2. Chacun d'eux est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2. Chacune de ces courbes est transformée en elle-même par l'homographie H_1 (de même que chacun des cônes tangents à la surface Φ en P_1, P_2) et par conséquent sur chacune de ces courbes se trouvent deux points unis de l'involution I_2, d'ordre deux, engendrée sur Φ par H_1. Les points P_1, P_2 sont échangés entre eux par les homographies H_2, H_3 et à ces deux points, qui sont donc équivalents à quatre points unis de l'involution I_2, correspond sur F le point double A_{34}.

Aux 24 points unis de l'involution du quatrième ordre engendrée sur Φ par les homographies H, points unis qui se répartissent par couples dans le voisinage des 12 points doubles de Φ, correspondent donc les six points doubles de F.

4. La surface Φ possédant 12 points doubles coniques et touchant les faces du tétraèdre de référence suivant des coniques, est, comme nous l'avons montré autrefois (*), l'image d'une involution du quatrième ordre appartenant à la surface Ψ d'équation

$$a_1 z_1^4 + a_2 z_2^4 + a_3 z_3^4 + a_4 z_4^4 - z_1 z_2 z_3 z_4 = 0. \qquad [8]$$

Cette involution est engendrée sur Ψ par les trois homographies biaxiales harmoniques

$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : z_2 : -z_3 : -z_4, \qquad T_1$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : -z_2 : z_3 : -z_4, \qquad T_2$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : -z_2 : -z_3 : z_4. \qquad T_3$$

(*) «Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques», *Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique*, 1920.

Le passage de la surface Ψ à la surface Φ se fait au moyen des formules

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = z_1^2 : z_2^2 : z_3^2 : z_4^2 .$$

Chacune des homographies T_1, T_2, T_3 possède huit points unis sur la surface Ψ et à ces 24 points unis correspondent les 12 points doubles de la surface Φ.

Aux faisceaux de courbes découpées sur Ψ par les faisceaux de quadriques

$$z_3 z_4 + \lambda z_1 z_2 = 0, \qquad z_2 z_4 + \mu z_1 z_3 = 0, \qquad z_2 z_3 + \nu z_1 z_4 = 0$$

correspondent respectivement sur Φ les faisceaux de biquadratiques gauches suivant lesquelles cette surface est touchée par les quadriques des systèmes simplement infinis d'indice 2

$$\lambda^2 y_1 y_2 + 2 \lambda (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2) + y_3 y_4 = 0,$$
$$\mu^2 y_1 y_3 + 2 \mu (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2) + y_2 y_4 = 0,$$
$$\nu^2 y_1 y_4 + 2 \nu (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2) + y_2 y_3 = 0.$$

5. Entre les surfaces F et Ψ existe, d'après ce qui précède, une correspondance (1,16). L'involution I_{16}, d'ordre seize, appartenant à la surface Ψ et don F est l'image, est engendrée par les homographies

$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : z_2 : i z_3 : - i z_4, \qquad T_{11}$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : i z_2 : z_3 : - i z_4, \qquad T_{12}$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : i z_2 : - i z_3 : z_4, \qquad T_{13}$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : - z_2 : i z_3 : i z_4, \qquad T_{21}$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : i z_2 : - z_3 : i z_4, \qquad T_{22}$$
$$z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = z_1 : i z_2 : i z_3 : - z_4, \qquad T_{23}$$

de période quatre toutes six. On a d'ailleurs

$$T_{11}^2 = T_{21}^2 = T_1, \quad T_{12}^2 = T_{22}^2 = T_2, \quad T_{13}^2 = T_{23}^2 = T_3.$$

L'involution du quatrième ordre engendrée par l'homographie T_{11} possède quatre points unis quadruples, situés sur la droite $z_3 = z_4 = 0$ et deux couples de points unis doubles situés sur la droite $z_1 = z_2 = 0$. L'involution engendrée par l'homographie T_{21} possède comme points unis quadruples les quatre points unis doubles de l'involution précédente et comme couples de points unis doubles les points unis quadruples de la première involution. On arrive à des résultats analogues pour les involutions engendrées par les homographies T_{12} et T_{22}, T_{13} et T_{23}.

La surface F *représente une involution d'ordre seize, appartenant à une surface du quatrième ordre* Ψ. *Cette involution est composée au moyen de six involutions cycliques du quatrième ordre, possédant chacune quatre points unis quadruples et deux couples de points unis doubles, se répartissant en 24 points de la surface* Ψ*:*

6. Nous allons maintenant construire une surface image de l'involution engendrée sur Ψ par l'homographie T_{11}. A cet effet, considérons le système linéaire de quadriques invariantes pour T_{11},

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_1 z_2 + \lambda_4 z_3 z_4 = 0 .$$

Rapportons projectivement ces quadriques aux plans de l'espace en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = z_1^2 : z_2^2 : z_1 z_2 : z_3 z_4 .$$

En éliminant les z entre les équations précédentes, on obtient l'équation dun cône du second ordre Γ,

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0 .$$

A la surface Ψ correspond donc le cône double Γ, sur lequel la courbe de diramation est découpée par la surface

$$(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - x_3 x_4)^2 - 4 a_3 a_4 x_4^4 = 0 .$$

Cette surface se décompose en deux quadriques

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - x_3 x_4 \pm 2 \sqrt{a_3 a_4}\; x_4^2 = 0 . \qquad [1]$$

La courbe de diramation du cône double image de l'involution engendrée sur Ψ par T_{11} est donc formée de deux courbes du quatrième ordre. Aux deux couples de points unis doubles de T_{11} correspond le sommet du cône Γ. Aux points unis quadruples de T_{11} correspondent les points

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0 , \qquad x_1 x_2 - x_3^2 = 0 , \qquad x_4 = 0 .$$

Observons que les deux quadriques [1] passent par les droites

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0 , \qquad x_4 = 0$$

et se raccordent le long de ces droites. Par conséquent, les deux composantes de la courbe de diramation se touchent aux quatre points considérés. Tout ceci est conforme aux conclusions auxquelles nous étions parvenu en étudiant les involutions du quatrième ordre appartenant aux surfaces de genres un (*).

Si nous projetons le cône double Γ du point (1, 1, 1, 0) sur le plan $x_3 = 0$, nous obtenons un plan double image de l'involution engendrée sur Ψ par T_{11}. Cette projection revient à poser

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2^2 : -y_1 y_2 : y_3 (y_1 + y_2) .$$

La courbe de diramation du plan double se compose donc des deux quartiques

$$a_1 y_1^4 + a_2 y_2^4 + y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2) + 2 \sqrt{a_3 a_4}\, y_3^2 (y_1 + y_2)^2 = 0 ,$$
$$a_1 y_1^4 + a_2 y_2^4 + y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2) - 2 \sqrt{a_3 a_4}\, y_3^2 (y_1 + y_2)^2 = 0 .$$

Aux homographies $T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}$ transformant la surface Ψ en elle-même correspond une unique transformation birationnelle du plan double, de période quatre, d'équations

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = y_1 (y_1 + i y_2) : i y_2 (y_1 + i y_2) : -i y_3 (y_1 + y_2) . \qquad T'$$

Le carré de cette transformation,

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = y_1 (y_1 - y_2) : -y_2 (y_1 - y_2) : -y_3 (y_1 + y_2)$$

correspond à la transformation T_{21}. La transformation T' échange entre elles les deux composantes de la courbe de diramation et le carré de cette transformation transforme en elle-même chacune de ces composantes.

La transformation T' engendre sur le plan double une involution d'ordre quatre dont l'image est évidemment la surface F.

Observons encore que la transformation T' est une transformation quadratique qui fait correspondre aux droites du plan des coniques passant par deux points $(1, i, 0)$, $(0, 0, 1)$ et ayant une tangente fixe, $y_1 + y_2 = 0$ au second de ces points.

Liége, Université, le 25 mars 1935.

(*) «Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un», *Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique*, 1923.