Revue scientifique

UN PROBLÈME SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

PAR

LUCIEN GODEAUX

Il est bien connu qu'une courbe rationnelle est de genre zéro et Clebsch a démontré que, réciproquement, une courbe de genre zéro est rationnelle. Une surface rationnelle a de même les genres arithmétique et géométrique égaux à zéro, mais la réciproque n'est plus vraie. M. Castelnuovo a en effet démontré (1894) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit rationnelle est que son genre arithmétique p_a et son bigenre P_2 soient nuls, montrant ainsi en particulier la fécondité de la notion de plurigenre introduite peu auparavant par M. Enriques. Une des raisons qui ont amené M. Castelnuovo à considérer le bigenre fut la construction, par M. Enriques, d'une surface dont le genre arithmétique est nul et le bigenre égal à l'unité.

Considérons une surface F du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre T (et triplement par les sommets). Le genre géométrique de F est égal au nombre de quadriques linéairement indépendantes passant par les arêtes du tétraèdre T, c'est-à-dire à zéro. Le bigenre P_2 est égal au nombre de surfaces du quatrième ordre linéairement indépendantes passant doublement par les arêtes du tétraèdre T ; il y a une seule de ces surfaces, formée des quatre faces du tétraèdre, donc $P_2 = 1$. Les sections planes de la surface sont des courbes d'ordre six et de genre quatre ; sur une de ces courbes, la série canonique complète est découpée par les ∞^3 surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre T ; il en résulte que le genre arithmétique de F est égal à son genre géométrique : $p_a = p_g = 0$.

L'existence de la surface d'Enriques suggère deux problèmes : On peut en premier lieu se proposer la construction de surfaces algébriques de genre $p_a = 0$ et de bigenre $P_2 > 1$. Une surface pour laquelle on a $P_2 = 2$ et dont les courbes bicanoniques sont elliptiques, a été construite il y a longtemps par M. Castelnuovo. Plus récemment, des surfaces (plans doubles) de bigenre $P_2 = 2$ ou 3 ont été construites par M. Campedelli et enfin, nous avons construit une surface du septième ordre, dont les sections planes sont les courbes tricanoniques, pour laquelle $P_2 = 2$. Nous avons en outre montré que si l'on a $p_a = p_g = 0$, alors $P_2 \leq 10$ (1).

Un second problème consiste dans la recherche de variétés algébriques à plus de deux dimensions, dont le genre géométrique est nul, mais dont certains plurigenres sont égaux à l'unité. C'est de ce second problème que nous voudrions nous occuper ici, mais nous rappellerons tout d'abord quelques propriétés de la surface d'Enriques.

Appelons $|C_1|$ le système des sections planes de F ; ce système a le genre quatre, le degré six et la dimension trois. Le système adjoint à $|C_1|$, c'est-à-dire le système de courbes découpant sur chaque courbe C_1 la série canonique g_6^3 de celle-ci, est découpé sur F par les surfaces cubiques circonscrites à T. Ce système $|C_2|$ a également le genre quatre, le degré six et la dimension trois. La série canonique d'une courbe C_2 est découpée par les plans de l'espace, de sorte que l'adjoint de $|C_2|$ est à son tour $|C_1|$. Cette propriété est générale. D'une manière précise, tout système linéaire $|C_1|$ de courbes de genre π, tracé sur F, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$; son adjoint $|C_2|$ présente les mêmes caractères et $|C_1|$ est à son tour l'adjoint de $|C_2|$. Si donc nous désignons par $|C'|$, $|C''|$ les systèmes adjoint et biadjoint à un système $|C|$, nous avons

$$|C'_1| = |C_2|, \ |C''_1| = |C'_2| = |C_1|.$$

La courbe canonique $|C'_1 - C_1| = |C_2 - C_1|$ n'existe pas, mais la courbe bicanonique $|C''_1 - C_1| = |C_1 - C_1|$ existe et est d'ordre zéro. La raison profonde de cette

(1) On trouvera un exposé des résultats obtenus dans cette question et la bibliographie dans notre note sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Actualités scient.*, Paris, Hermann, 1934). Voir aussi Burniat : *Recherches sur les surfaces de bigenre un* (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1936).

propriété des systèmes linéaires tracés sur F tient au fait, établi par M. ENRIQUES, que cette surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), c'est-à-dire à une surface sur laquelle tout système linéaire est son propre adjoint.

Soit Φ une surface de genres un ; tout système linéaire $|C|$, tracé sur Φ et formé de courbes C de genre π, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π. Supposons que Φ admette une transformation birationnelle involutive Θ en soi, engendrant une involution I_2 privée de points unis. Soit F une surface image de cette involution. Il est aisé de construire sur Φ un système linéaire transformé en lui-même par Θ ; soit $|C|$ un tel système. Il contient deux systèmes linéaires partiels $|\overline{C}_1|$, $|\overline{C}_2|$ appartenant à l'involution I_2, c'est-à-dire dont toute courbe contient ∞^1 couples de cette involution. Aux systèmes $|\overline{C}_1|$, $|\overline{C}_2|$ correspondent sur F deux systèmes linéaires complets $|C_1|$, $|C_2|$. Entre le genre π de C et le genre π_1 de C_1, on a, d'après la formule de ZEUTHEN, la relation $\pi = 2\pi_1 - 1$. Pour la même raison, π_1 est aussi le genre des courbes C_2. Une courbe $\overline{C}_2$ découpe, sur une courbe $\overline{C}_1$, un groupe de la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ de cette dernière ; il en résulte qu'une courbe C_2 découpe, sur une courbe C_1, soit un groupe de la série canonique $g_{2\pi_1-2}^{\pi_1-1}$ de C_1, soit un groupe d'une série paracanonique $g_{2\pi_1-2}^{\pi_1-2}$ de C_1. Dans le premier cas, $|C_2|$ a la dimension $\pi_1 - 1$, dans le second, la dimension $\pi_1 - 2$. Dans ce dernier cas, la dimension de $|C_1|$ est, d'après la théorie des homographies, égale à $\pi_1 + 1$ et alors, les courbes C_1 découpent, sur une courbe C_2 de genre π_1, une série linéaire d'ordre $2\pi_1 - 2$ et de dimension $\pi_1 + 1$, ce qui est absurde. Il en résulte que $|C_2|$ est l'adjoint de $|C_1|$ et que $|C_1|$ est à son tour l'adjoint de $|C_2|$. On obtient donc bien une surface F d'ENRIQUES.

La démonstration de M. ENRIQUES, établissant que la surface F est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, fait appel à des notions assez délicates. En voici une plus simple.

Considérons un système linéaire $|Q|$ triplement infini de quadriques, dépourvu de points-base. Il existe ∞^2 droites appartenant chacune à ∞^1 quadriques de $|Q|$; ces droites forment une congruence G d'ordre sept et de classe trois, appelée par REYE congruence des rayons principaux de $|Q|$. M. FANO a démontré que la surface d'ordre dix, qui représente la congruence G sur l'hyperquadrique de KLEIN, est une transformée birationnelle de la surface d'ENRIQUES. Cela étant, considérons un rayon p de G et soient Q_1, Q_2 deux quadriques de $|Q|$ passant par p, Q_3, Q_4 deux quadriques du même système ne passant pas par p et déterminant un faisceau dont aucune quadrique ne contient p. Les couples de points de p conjugués par rapport aux quadriques Q_3, Q_4 forment deux involutions qui ont un couple commun P_1, P_2. Les plans polaires de P_1 (ou de P_2) par rapport à toutes les quadriques de $|Q|$ passent par P_2 (ou par P_1). Il en résulte que toutes les quadriques de $|Q|$ passant par P_1 (ou par P_2) sont tangentes en ce point à la droite p. Par conséquent, les points P_1, P_2 appartiennent à la jacobienne du système $|Q|$, c'est-à-dire à la surface de WEDDLE, du quatrième ordre, lieu des sommets des cônes appartenant à $|Q|$. Les couples P_1, P_2 forment une involution sur la surface de WEDDLE et celle-ci est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). D'autre part, cette involution est représentée par la congruence G, transformée birationnelle de la surface d'ENRIQUES. On peut voir d'ailleurs que P_1 ne peut jamais coïncider avec P_2, car un tel point appartiendrait à toutes les quadriques Q, contrairement à l'hypothèse.

Venons-en maintenant au problème concernant les variétés algébriques. On peut se proposer de construire des variétés algébriques dont le genre géométrique P_g et les premiers plurigenres P_2, P_3, ..., P_{p-1} soient nuls, mais dont le p-genre P_p soit égal à l'unité, sans s'inquiéter de savoir si l'on obtient la variété la plus générale possédant cette propriété. C'est un premier stade dans la résolution du problème posé et c'est de cette première étape que nous voudrions nous occuper ici.

Considérons une variété algébrique V_r, à r dimensions, possédant les propriétés suivantes :

a. Tout système linéaire de variétés à $r - 1$ dimensions tracées sur V_r, est son propre adjoint.

b. Sur une variété d'un tel système linéaire, les autres variétés du système découpent un système linéaire (de variétés à $r - 2$ dimensions) complet (système caractéristique complet).

c. Sur toute variété à $r - 1$ dimensions tracées sur V_r, le système adjoint à un système linéaire de variétés à $r - 2$ dimensions, découpe un système complet sur une de ces variétés.

Dans ces conditions, la variété V_r possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro et tous ses genres et plurigenres sont égaux à l'unité.

Supposons que la variété V_r admette une transformation birationnelle Θ en soi, de période p. Pour plus de simplicité, nous supposerons d'ailleurs p premier. La transformation Θ engendre sur V_r une involution I_p, d'ordre p, dont nous désignerons par Ω_r une variété image.

Sur la variété V_r, il est aisé de construire un système linéaire complet de variétés à $r - 1$ dimensions, $|F|$, transformé en lui-même par Θ et contenant p systèmes linéaires partiels $|F_1|, |F_2|, \dots, |F_p|$ appartenant à l'involution I_p. A ces systèmes correspondent, sur Ω_r, p systèmes linéaires complets de variétés à $r-1$ dimensions $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \dots, |\Phi_p|$. Pour notre objet, il faut que $|\Phi_2|$ soit l'adjoint de $|\Phi_1|$, $|\Phi_3|$ l'adjoint de $|\Phi_2|, \dots, |\Phi_p|$ l'adjoint de $|\Phi_{p-1}|$ et enfin $|\Phi_1|$ l'adjoint de $|\Phi_p|$, c'est-à-dire que l'opération d'adjonction sur la variété Ω_r ait la période p. Dans ces conditions, le système canonique $|\Phi_2 - \Phi_1|$, le système bicanonique $|\Phi_3 - \Phi_1|, \dots$, le système $(p-1)$-canonique $|\Phi_p - \Phi_1|$ de Ω_r n'existent pas, mais le système p-canonique $|\Phi_1 - \Phi_1|$ existe et est formé d'une variété d'ordre zéro.

Supposons en premier lieu que l'involution I_p soit privée de points unis.

Désignons par $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ les dimensions des systèmes $|F_1|, |F_2|, \dots, |F_p|$ et indiquons par (F_i, F_k) la variété à $r-2$ dimensions intersection des variétés F_i, F_k. Sur une variété F_1, soit $\overline{F}_1$, nous avons p systèmes linéaires $|(\overline{F}_1, F_1)|, |(\overline{F}_1, F_2)|, \dots, |(\overline{F}_1, F_p)|$ appartenant à l'involution I_p, qui sont formés de variétés canoniques de la variété $\overline{F}_1$ et dont les dimensions sont $\rho_1 - 1, \rho_2, \dots, \rho_p$. Le second de ces systèmes doit être le transformé du système canonique de la variété $\overline{\Phi}_1$, homologue de $\overline{F}_1$. Or, nous avons démontré (¹) que si $r-1$ est impair, on a

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 + 1 = \rho_4 + 1 = \dots = \rho_p + 1,$$

tandis que si $r-1$ est pair, on a

$$\rho_1 - 1 = \rho_2 + 1 = \rho_3 = \rho_4 = \dots = \rho_p.$$

Si, au lieu de la variété $\overline{F}_1$, nous partions d'une variété $\overline{F}_2$ et de la variété homologue $\overline{\Phi}_2$, nous devrions avoir :

1) si $r-1$ est impair et p supérieur à deux,

$$\rho_1 + 1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 + 1 = \dots = \rho_p + 1,$$

ce qui est impossible;

2) si $r-1$ est impair et $p=2$,

$$\rho_1 = \rho_2;$$

3) si $r-1$ est pair,

$$\rho_1 = \rho_2 - 1 = \rho_3 + 1 = \rho_4 = \dots = \rho_p,$$

ce qui est impossible.

On voit donc que *Sur une variété algébrique de genres un ayant un nombre pair de dimensions, une involution cyclique privée de points unis est d'ordre deux et a pour image une variété dépourvue de variété canonique, mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro* (²).

(¹) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1938, pp. 291-297).

(²) *Sur la construction de variétés algébriques analogues à la surface d'Enriques* (*Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liége* 1939, pp. 2-7).

Lorsque r est impair, on peut voir que l'image de l'involution I_p, privée de points unis, est une variété de genres un. Reprenons en effet le raisonnement précédent, mais en supposant que $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \dots, |\Phi_p|$ soient chacun son propre adjoint. On doit avoir, $r-1$ étant pair,

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p,$$

de telle sorte que

Sur une variété algébrique de genres un, ayant un nombre impair de dimensions, une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, a pour image une variété de genres un (¹).

On voit ainsi que la parité du nombre r de dimensions de la variété V_r joue un rôle important.

Envisageons maintenant le cas où l'involution I_p possède un nombre fini de points unis.

On peut construire, sur la variété V_r, le système linéaire $|F|$ de telle sorte que l'un des p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p qu'il contient, soit dépourvu de points-base (²). Supposons que ce soit le système $|F_1|$. Les systèmes $|F_2|, |F_3|, \dots, |F_p|$ ont pour points-base les points unis de I_p et leurs variétés ont, en ces points, certaines multiplicités. On peut, d'autre part, supposer que le système $|\Phi_1|$ est constitué par les sections hyperplanes de la variété Ω_r; alors, aux points unis de I_p correspondent des points isolés (points de diramation) de Ω_r, points qui ont certaines multiplicités pour cette variété. Chacun d'eux est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de variétés rationnelles infiniment petites.

L'adjoint du système $|\Phi_1|$ est par hypothèse le système $|\Phi_2|$, c'est-à-dire que les variétés Φ_2 découpent sur chaque variété Φ_1 les variétés canoniques de celle-ci. Mais les variétés Φ_2 passent par les points de diramation de Ω_r, en y rencontrant certaines des composantes infiniment petites de ces points. Il est donc nécessaire d'écrire que l'adjoint de $|\Phi_1|$ est formé de $|\Phi_2|$ augmenté d'un ensemble Δ_2 de composantes infiniment petites des points de diramation. Le même raisonnement est valable pour les systèmes $|\Phi_3|, |\Phi_4|, \dots, |\Phi_p|$ et en désignant par $|\Phi'|$ l'adjoint de $|\Phi|$, nous écrirons

$$|\Phi_1'| = |\Phi_2 + \Delta_2|, \ |\Phi_2'| = |\Phi_3 + \Delta_3|,$$
$$\dots, |\Phi_{p-1}'| = |\Phi_p + \Delta_p|, \ |\Phi_p'| = |\Phi_1|,$$

$\Delta_3, \dots, \Delta_p$ étant également formées de composantes des points de diramation.

(¹) *Sur la construction*... (*loc. cit.*).

(²) La construction est analogue à celle qui correspond au cas des surfaces. Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, Paris, Hermann, 1935).

Les systèmes canonique $|\Phi_1' - \Phi_1|$, bicanonique $|\Phi_1'' - \Phi_1|$, ..., $(p-1)$-canonique $|\Phi_1^{(p-1)} - \Phi_1|$ n'existent pas, mais le système p-canonique existe et est précisément

$$|\Phi_1^{(p)} - \Phi_1| = |\Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_p| .$$

En d'autres termes, le système p-canonique se réduit à une variété formée de composantes infiniment petites des points de diramation. Il est donc naturel de dire que cette variété p-canonique est d'ordre zéro, puisqu'elle n'est pas rencontrée par les sections hyperplanes Φ_1 de Ω_r (1).

Voici d'ailleurs quelques exemples dans le cas de variétés à trois dimensions ($r = 3$).

Si une variété algébrique à trois dimensions, de genres un, contient une involution du second ordre possédant seize points unis, on peut prendre comme image de cette involution une variété à trois dimensions possédant seize points quadruples. Cette variété est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro, formée des domaines des seize points quadruples (2).

Si une variété algébrique à trois dimensions, de genres un, contient une involution cyclique du troisième ordre possédant neuf points unis, on peut prendre pour image de cette involution une variété à trois dimensions possédant neuf points quintuples (le cône tangent en un de ces points est formé d'un cône du quatrième ordre et d'un espace à trois dimensions). Cette variété est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique d'ordre zéro, formée des domaines des neuf points quintuples (3).

Revenons maintenant au cas général. Des relations fonctionnelles définissant les adjoints des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_p|$, on déduit aisément les relations fonctionnelles

$$|p\Phi_2 + (p-1)\Delta_2 - \Delta_3 - \ldots - \Delta_p| = |p\Phi_1| ,$$
$$|p\Phi_3 + (p-2)(\Delta_2 + \Delta_3) - \Delta_4 - \ldots - \Delta_p| = |p\Phi_1| ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|p\Phi_p + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_p| = |p\Phi_1| .$$

Ces relations fonctionnelles sont de nature à nous fournir des renseignements sur la structure des points unis de l'involution I_p et sur la composition des variétés Δ_2, Δ_3, ..., Δ_p. On peut, en effet, y arriver par une autre voie.

A une variété générique F de V_r correspond sur Ω_r une certaine variété Φ. Inversement, à cette variété Φ, correspondent p variétés F, transformées les unes dans les autres par Θ. Faisons varier d'une manière continue F dans $|F|$ de manière à l'amener à coïncider avec une variété F_1; alors Φ varie d'une manière continue sur Ω_r et vient coïncider avec une variété Φ_1 comptée p fois. La variété Φ appartient donc au système $|p\Phi_1|$.

Reprenons la variété générique F et faisons-la varier d'une manière continue dans $|F|$ de manière à l'amener à coïncider avec une variété F_2. Alors Φ varie d'une manière continue dans $|p\Phi_1|$ et vient coïncider avec une variété Φ_2 comptée p fois, augmentée de composantes des points de diramation de Ω_r. Or, précisément, ces composantes doivent former la variété infiniment petite $(p-1)\Delta_2 - \Delta_3 - \ldots - \Delta_p$.

On arrivera à des conclusions analogues pour les systèmes $|\Phi_3|$, $|\Phi_4|$, ..., $|\Phi_p|$.

Au moins dans le cas $p = 3$, on pourra sans doute, en utilisant ces faits, arriver à la solution du problème posé. L'étude de la structure des points unis d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique semble, en effet, assez avancée pour le but poursuivi (1).

On aura ensuite à considérer le cas où l'involution I_p possède une infinité de points unis, formant une ou plusieurs variétés de dimensions inférieures à $r-1$.

(manuscrit reçu le 17 janvier 1942)

(1) *Observations sur les variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique* (*Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1940, pp. 2-11).

(2) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un contenant des involutions cycliques* (Conférence de la Réunion internationale des Mathématiciens, Paris, 1937).

(3) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1937, pp. 55-79); *Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1937, pp. 82-96).

(1) *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique*, 1938, pp. 1-44); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1938, pp. 193-222); *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (*Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liége*, 1940, pp. 54-79, 128-137).