# Revue scientifique

# MOUVEMENT SCIENTIFIQUE

## LES SURFACES ALGÉBRIQUES IRRÉGULIÈRES

Par Lucien GODEAUX

La théorie des surfaces algébriques, envisagée dans le groupe des transformations birationnelles, a été, au début de ce siècle, l'objet de travaux importants. Les méthodes d'investigation utilisées dans cette théorie peuvent se ranger en deux catégories : la méthode transcendante, dont le plus illustre représentant fut sans conteste Émile Picard ; la méthode algébrico-géométrique des géomètres italiens Castelnuovo, Enriques et Severi.

De 1900 à 1905 surtout, les résultats obtenus par ces deux méthodes furent confrontés, et l'on put établir ainsi que les surfaces possédant des intégrales de Picard de première espèce n'étaient autres que les surfaces contenant des systèmes continus non linéaires de courbes algébriques. L'étude de ces surfaces, appelées surfaces irrégulières, mériterait d'être poursuivie. C'est ce qui nous a amené à écrire ce mémoire, où nous indiquons quels sont les résultats acquis et certains problèmes dont l'étude pourrait être abordée. Il en est de cette théorie comme de bien d'autres ; certains cas particuliers, étudiés de façon approfondie, pourraient mettre sur la voie de résultats généraux [1].

**1.** Commençons par rappeler l'objet de la Géométrie sur une variété algébrique.

Les variétés algébriques de dimension $k$ sont réparties en classes. Appartiennent à une même classe deux variétés telles que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Cela signifie qu'entre deux variétés d'une même classe existe une correspondance généralement biunivoque, telle que les coordonnées d'un point de chacune des variétés s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue de l'autre. Cette correspondance ne s'étend pas nécessairement aux points des espaces qui contiennent les variétés et qui peuvent du reste avoir des dimensions différentes. Ainsi une courbe algébrique gauche et sa projection sur un plan appartiennent à une même classe.

Les propriétés étudiées sont les propriétés communes aux variétés d'une même classe, et le problème principal est la détermination des caractères d'une classe.

Dans chaque classe de variétés, on peut fixer une variété représentative satisfaisant à certaines données projectives. Ainsi, dans chaque classe de courbes algébriques, il existe une courbe gauche dépourvue de points multiples effectifs et une courbe plane n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes. Dans chaque classe de surfaces algébriques il existe une surface dépourvue de points multiples, appartenant à un espace ayant au moins cinq dimensions, et une surface de l'espace ordinaire ayant comme seules singularités une courbe double à plans tangents distincts et un certain nombre de points triples, à la fois pour la surface et la courbe double.

**2.** Le genre $p$ d'une courbe algébrique C peut s'introduire de plusieurs manières.

Supposons, pour fixer les idées, que la courbe C soit une courbe plane d'ordre $m$ possédant $d$ points doubles ordinaires. Le genre $p$ de la courbe C est :

1) le nombre de courbes adjointes (c'est-à-dire passant simplement par les $d$ points doubles) d'ordre $m-3$ linéairement indépendantes ;

2) le nombre

$$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - d;$$

3) le nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes attachées à la courbe.

Prenons, pour image projective d'une classe de surfaces algébriques, une surface F d'ordre $m$ de l'espace ordinaire, possédant une courbe double ordinaire D et $\tau$ points triples à la fois pour F et pour D.

L'extension des propriétés procédentes conduit à considérer :

1) le nombre $\alpha_1$ des surfaces adjointes (c'est-à-dire passant simplement par la courbe double D) d'ordre $m-4$ linéairement indépendantes ;

2) le nombre $\alpha_2$ des surfaces adjointes d'ordre $m-4$ *calculé* comme si toutes les conditions imposées à ces surfaces par le passage par la courbe D étaient indépendantes ;

3) le nombre $\alpha_3$ des intégrales doubles de première espèce linéairement indépendantes attachées à la surface F ;

4) le nombre $\alpha_4$ des intégrales de différentielles totales (intégrales de Picard) de première espèce, attachées à la surface F.

**3.** Occupons-nous en premier lieu des nombres $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

Lorsque l'on considère les conditions imposées à une surface d'ordre $l$, par son passage par la courbe D, l'on démontre que pour $l$ suffisamment élevé, ces conditions sont indépendantes. On peut alors calculer la dimension du système des surfaces d'ordre $l$ adjointes à F, et cette dimension *calculée* est égale à la dimension *effective* de ce système (observons en passant que les adjointes à F ont des points doubles aux $\tau$ points triples de la surface). Mais il peut se faire que, pour les petites valeurs de $l$, cette particularité ne se présente pas. La dimension calculée, appelée dimension virtuelle, peut, pour $l = m-4$, être inférieure à la dimension effective. On peut donc avoir $\alpha_2 < \alpha_1$, et en tout cas on a $\alpha_2 \leqq \alpha_1$.

Le nombre $\alpha_1$ est appelé *genre géométrique* $p_g$ de la surface F. Le nombre $\alpha_2$ en est le *genre arithmétique* $p_a$ (ou genre numérique $p_n = p_a$). On a $p_g \geqq p_a$. Si $p_g > p_a$, la surface F est appelée *surface irrégulière* ; si $p_g = p_a$, c'est une *surface régulière*.

Le nombre $\alpha_3$ est toujours égal au genre géométrique $p_g$ de la surface.

Ces considérations remontent à Cayley, Clebsch, Zeuthen et Noether.

**4.** Passons maintenant au quatrième nombre $\alpha_4$. Comme on le sait, les intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique ont été introduites par Émile Picard dans ses recherches sur les variétés abéliennes ; elles sont pour cette raison appelées intégrales de PICARD. Les intégrales de PICARD de première espèce sont celles qui restent finies en tout point de la surface. Une surface réglée de genre $p$ possède $p$ intégrales de PICARD de première espèce linéairement indépendantes ; une surface hyperelliptique en possède deux. Mais PICARD a fait remarquer que les surfaces qui possèdent des intégrales de PICARD de première espèce sont en quelque sorte exceptionnelles. Ainsi une surface d'ordre $m$, la plus générale de son ordre, en est dépourvue.

Le nombre $\alpha_1 = q$ des intégrales de PICARD de première espèce linéairement indépendantes, attachées à une surface algébrique F, est appelé *irrégularité* de la surface.

Les nombres $p_g$, $p_a$, $q$ sont des invariants d'une surface : ils sont les mêmes pour toutes les surfaces d'une même classe. On a d'ailleurs

$$q = p_g - p_a ;$$

c'est là le Théorème de CASTELNUOVO, ENRIQUES & SEVERI, dont nous allons exposer la genèse.

**5.** Il convient de rappeler tout d'abord une propriété des courbes algébriques, et de voir quelle peut être son extension aux surfaces.

Considérons, sur une courbe algébrique C de genre $p$, les groupes de $n$ points, et supposons, pour plus de simplicité, $n > 2p - 2$. Ces groupes sont en nombre $\infty^n$ et se distribuent en $\infty^p$ séries linéaires de dimension $n - p$. Ces $\infty^p$ séries linéaires forment évidemment un système continu. Si l'on représente les groupes de $n$ points de C par les points d'une variété à $n$ dimensions, celle-ci est engendrée par $\infty^p$ espaces linéaires à $n - p$ dimensions. L'ensemble de ces $\infty^p$ espaces, c'est-à-dire l'ensemble des séries linéaires d'ordre $n$ appartenant à C, constitue une variété $V_p$, à $p$ dimensions, appelée variété de JACOBI. Cette variété possède $p$ intégrales de PICARD de première espèce linéairement indépendantes et a d'ailleurs été introduite, par JACOBI, dans l'étude de l'inversion des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe C.

Considérons maintenant une surface algébrique F. Au lieu des groupes de $n$ points situés sur C, nous considérerons les courbes tracées sur la surface F, et nous fixerons l'ordre $n$ et le genre $\pi$ de ces courbes. L'extension de la propriété envisagée sur la courbe C serait la suivante :

Les courbes d'ordre $n$ et le genre $\pi$ tracées sur une surface algébrique F se distribuent en $\infty^\rho$ systèmes linéaires de dimension $r$, formant un système algébrique continu.

Supposons que F soit une surface d'ordre $m$ de l'espace ordinaire, dépourvue de points singuliers. On constate que, sur cette surface, les courbes d'ordre et de genre donnés se distribuent en un nombre fini de systèmes linéaires, ce que l'on peut faire rentrer dans l'énoncé précédent en supposant $\rho = 0$.

Mais si la surface F se trouve être une réglée de genre $p$ (ou une surface de la classe des réglées), les génératrices rectilignes forment un système continu $\infty^1$ de systèmes linéaires de dimension $r = 0$.

Indiquons tout de suite le résultat précis qui généralise la propriété envisagée sur les courbes :

*Sur une surface algébrique F, les courbes d'ordre donné se distribuent en un nombre fini de systèmes continus algébriques formés de $\infty^q$ systèmes linéaires.*

On obtient ainsi un caractère géométrique de l'irrégularité $q$ de la surface.

**6.** Dès le début de leurs recherches sur les surfaces algébriques, G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES furent conduits à penser qu'il y avait identité entre les surfaces algébriques irrégulières ($p_g > p_a$) et les surfaces possédant des intégrales de PICARD de première espèce. Ces géomètres avaient d'ailleurs établi que les systèmes complets de courbes tracées sur une surface algébrique régulière ($p_g = p_a$) étaient linéaires. En d'autres termes, s'il existe, sur une surface régulière, un système continu non linéaire de courbes, il est formé de courbes extraites d'un système linéaire.

Une première contribution à la question fut apportée par G. HUMBERT [2], qui démontra que si une surface contient un système linéaire continu de courbes n'appartenant pas à un système linéaire, elle possède des intégrales de PICARD de première espèce.

Quelques années plus tard, F. ENRIQUES [3] parvint à démontrer la propriété inverse, c'est-à-dire qu'une surface possédant des intégrales de PICARD de première espèce, contient des systèmes continus de courbes n'appartenant pas à un système linéaire. Ce théorème fut précisé plus tard par SEVERI [4].

On avait ainsi une réponse qualitative à la question posée par CASTELNUOVO et par ENRIQUES. Il importait d'en obtenir une réponse quantitative et cette réponse fut donnée par le Théorème de CASTELNUOVO, ENRIQUES & SEVERI énoncé plus haut. Avant d'en venir à ce Théorème, il nous paraît utile de donner quelques exemples de surfaces irrégulières.

**7.** L'exemple le plus simple de surface irrégulière est la réglée de genre $p$, pour laquelle on a $p_g = 0$ et $p_a = -p$. Une généralisation immédiate est obtenue en considérant une surface contenant un faisceau non linéaire de courbes algébriques.

Une surface réglée de genre $p$ peut être considérée comme représentant les couples de points d'une droite et d'une courbe de genre $p$. Envisagée sous cette forme, la réglée admet une généralisation plus intéressante. Considérons deux courbes algébriques $C_1$, de genre $p_1$, et $C_2$, de genre $p_2$. La surface qui représente les couples de points de ces courbes a été considérée par DE FRANCHIS [5], MARONI [6] et SEVERI [7]. Ses genres ont pour valeurs :

$$p_g = p_1 p_2, \qquad p_a = p_1 p_2 - p_1 - p_2.$$

L'irrégularité de la surface est $q = p_1 + p_2$, et c'est aussi le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes attachées à cette surface. Celle-ci contient deux faisceaux non linéaires de courbes algébriques unisécantes.

Un autre exemple considéré par les mêmes auteurs, a également été imaginé en partant des surfaces réglées. Une surface réglée elliptique (de genre $p = 1$) peut être considérée comme représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre un. Cela étant, on peut considérer la surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe C de genre $p$ ; cette surface a les genres

$$p_g = \frac{1}{2} p(p-1), \qquad p_a = \frac{1}{2} p(p-1) - p.$$

Cette surface a l'irrégularité $q = p$, et SEVERI a montré qu'elle possède $p$ intégrales de PICARD de première espèce linéairement indépendantes [8].

Sur les surfaces dont il vient d'être question, il existe des systèmes continus de courbes n'appartenant pas à des systèmes linéaires.

**8.** Venons-en au Théorème de CASTELNUOVO-ENRIQUES-SEVERI. Nous venons de dire que si une surface algébrique contient un système continu de courbes non contenues dans un système linéaire, elle est irrégulière. Inversement, une surface irrégulière contient-elle nécessairement des systèmes de cette espèce ? Les exemples précédents, dont les derniers furent étudiés vers 1903, semblent faire prévoir une réponse affirmative. Il en est bien ainsi, comme l'a montré F. ENRIQUES [9].

Sur une surface algébrique F, de genre arithmétique $p_a$, il existe des systèmes de courbes $|C|$, linéaires, dits réguliers ; ils sont caractérisés par la propriété suivante :

Si $\pi$ est le genre des courbes C, $n$ le degré du système (nombre de points communs à deux courbes C), la dimension du système complet $|C|$ est

$$r = p_a + n - \pi + 1.$$

Supposons que la surface F soit irrégulière, et posons

$$q' = p_g - p_a.$$

Alors Enriques démontre que le système $|C|$ appartient à un système algébrique complet $\{C\}$, de dimension

$$p_g + n - \pi + 1 = r + q',$$

formé de $\infty^{q'}$ systèmes linéaires $|C|$.

Pour démontrer ce théorème, Enriques projette la surface F sur un plan. Il est ainsi conduit à considérer un système continu de courbes algébriques planes, possédant des points doubles variables et touchant, en un certain nombre de points, une courbe fixe. C'est l'étude de la série découpée sur une de ces courbes par les autres qui le mène au résultat. Ajoutons qu'il utilise également ce principe qu'une courbe variable ne peut dégénérer sans acquérir au moins un nouveau point double.

Une seconde démonstration, fondée sur les mêmes principes, fut donnée peu après par Severi [10].

L'étude du système continu complet $\{C\}$ allait conduire Castelnuovo [11] au résultat cherché.

Envisageons deux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_1'|$ appartenant au système $\{C\}$, et le système

$$(1) \qquad |C'| = |C + C_1' - C_1|.$$

Lorsque le système $|C|$ varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et tend vers le système $|C_1|$, le système $|C'|$ varie d'une manière continue sur F et tend vers le système $|C_1'|$. Il en résulte que le système $|C'|$ appartient au système continu complet $\{C\}$ et que l'égalité fonctionnelle (1) définit une transformation birationnelle entre les systèmes linéaires appartenant à $\{C\}$.

Représentons les systèmes linéaires appartenant à $\{C\}$ par les points d'une variété $V_{q'}$, à $q'$ dimensions. La transformation dont il vient d'être question devient une transformation birationnelle de $V_{q'}$ en soi. G. Castelnuovo établit qu'il existe $\infty^{q'}$ de ces transformations, deux à deux permutables, formant un groupe continu transitif. Or Picard [12] avait précisément étudié de telles variétés et montré qu'elles possèdent $q'$ intégrales de différentielles totales de première espèce, linéairement indépendantes. A celles-ci correspondent $q'$ intégrales de Picard de première espèce attachées à la surface F. On a donc

$$q' = q = p_g - p_a.$$

La variété $V_q$ qui vient d'être définie est la variété de Picard attachée à la surface F. Elle est analogue à la variété de Jacobi attachée à une courbe algébrique.

**9.** En même temps que G. Castelnuovo, F. Severi parvenait au même résultat par une autre voie, mais en s'appuyant également sur le Théorème d'Enriques.

A côté des intégrales de Picard de première espèce, F. Severi considère [13] les intégrales de Picard de seconde espèce, qui possèdent des singularités polaires. Si $q_0$ est le nombre des intégrales de Picard algébriquement distinctes attachées à la surface F, il démontre que l'on a

$$q_0 - q = p_g - p_a.$$

Il se propose ensuite de voir dans quelles conditions les courbes d'un système continu algébrique, tracées sur F, appartiennent totalement à un système linéaire, en utilisant des intégrales de Picard.

On connaît le Théorème d'Abel sur une courbe algébrique :

*La condition nécessaire et suffisante pour que les groupes de n points d'une série continue appartiennent à une série linéaire, est que la somme des valeurs prises par chacune des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe, aux points d'un groupe de la série, demeure constante lorsque le groupe varie.*

Sur une surface algébrique, F. Severi étend ce théorème de la manière suivante [14] :

*La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes d'un système continu appartiennent totalement à un système linéaire, est que la somme des valeurs prises par chacune des intégrales de* Picard *de première espèce, aux points d'un groupe commun à deux courbes du système, reste constante lorsque ces courbes varient.*

C'est de ce théorème qu'il déduit

$$q = p_g - p_a, \quad q_0 = 2(p_g - p_a).$$

**10.** Un concept important de la géométrie sur une surface algébrique, est celui de série caractéristique d'un système de courbes.

Considérons, sur une surface F, un système linéaire $|C|$, complet, de degré $n$, de genre $\pi$ et de dimension $r$. Sur une courbe générale $C_0$ de ce système, les autres courbes du système découpent une série linéaire d'ordre $n$ et de dimension $r-1$, appelée série caractéristique du système. Considérée sur la courbe $C_0$, cette série, complétée s'il le faut, peut avoir une dimension $\rho$ supérieure à $r-1$. On dit alors que la série caractéristique a le défaut $\delta = \rho - (r-1)$. On doit à Castelnuovo [15] un théorème important :

*Le défaut de la série caractéristique d'un système linéaire est au plus égal à l'irrégularité q de la surface, et il existe des systèmes (les systèmes réguliers) pour lesquels cette limite est atteinte.*

Si nous désignons par $|C'|$ le système adjoint à $|C|$, et par $|K|$ le système canonique de F, nous avons

$$|C' - C| = |K|.$$

Par conséquent, sur la courbe $C_0$ nous avons

$$|(C', C_0)| = |(C, C_0) + (K, C)|,$$

et si le système canonique $|K|$ existe, la série caractéristique $|(C, C_0)|$ est comprise dans la série canonique $|(C', C_0)|$ de la courbe $C_0$, c'est-à-dire qu'elle est spéciale.

Le concept de série caractéristique a été étendu aux systèmes continus par Severi [16].

Envisageons un système algébrique continu irréductible $\{C\}$, et soit V une variété dont les points représentent les courbes de $\{C\}$. Fixons l'attention sur une courbe générale $C_0$, et soit $P_0$ le point qui la représente sur V. Traçons, sur V, une courbe $\gamma$ passant par $P_0$. A un point P de $\gamma$ correspond une courbe C ; lorsque le point P tend vers $P_0$ sur $\gamma$, la courbe C tend, dans le système $\{C\}$, vers une courbe infiniment voisine de $C_0$, et le groupe $(C, C_0)$ des points communs à C et à $C_0$ tend vers un groupe de points que l'on appelle groupe caractéristique de $C_0$. L'ensemble de ces groupes est une série linéaire que Severi appelle la série caractéristique du système continu $\{C\}$. Si le système $\{C\}$ est en particulier linéaire, on retrouve la série caractéristique de ce système.

Cela étant, le Théorème d'Enriques peut s'énoncer de la manière suivante :

*Un système continu algébrique complet, irréductible, de courbes tracées sur une surface algébrique, a la série caractéristique (au sens de* Severi*) complète.*

Un examen critique de la démonstration que Enriques a donné de son Théorème, et de celle qui est due à Severi, a conduit ce dernier à constater que ces démonstrations n'étaient valables que si la série caractéristique du système $\{C\}$ était non spéciale, c'est-à-dire que si la surface avait le genre géométrique $p_g = 0$ [17]. Cela ne remettait pas en question la validité du Théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi ($q = p_g - p_a$), car H. Poincaré [18] en avait donné une démonstration. Mais cette démonstration, fondée sur la comparaison des intégrales de Picard attachées à une surface et sur les intégrales abéliennes attachées à une courbe tracée sur cette surface, faisait surtout appel à des méthodes transcendantes. Les géomètres italiens désiraient posséder une démonstration fondée sur les méthodes algébrico-géométriques qui les ont conduits à tant de belles découvertes. Une telle démonstration a été obtenue, voici quelques années, par B. Segre [19]. Celui-ci utilise également le principe de dégénérescence des courbes dont s'était servi Enriques ; il en donne une nouvelle démonstration et le précise lorsqu'il s'agit de courbes tracées sur une surface algébrique.

**11.** Nous avons indiqué plus haut les exemples de surfaces irrégulières connus au moment où Castelnuovo, Enriques & Severi entreprirent leurs recherches. Pour poursuivre l'étude des surfaces irrégulières, il est sans doute nécessaire que d'autres exemples soient considérés dans tous leurs détails, de manière à préparer une théorie générale de ces surfaces. Nous allons passer en revue les recherches faites dans cette direction.

Parmi les surfaces irrégulières de genre géométrique $p_g = 0$, se trouvent non-seulement les surfaces réglées, mais encore des surfaces dites elliptiques, rencontrées par Painlevé, dans ses recherches sur les équations différentielles [20], et complétement déterminées par Enriques [21]. Elles ont les genres $p_g = 0$ et $p_a = -1$ ; elles possèdent un faisceau elleptique de courbes de genre $\pi$ et un faisceau linéaire de courbes elliptiques. Elles admettent un groupe continu simplement infini de transformations birationnelles en elles-mêmes dont les trajectoires sont les courbes elliptiques du faisceau linéaire.

Signalons en passant un résultat important que Enriques a obtenu dans son étude :

*Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface appartienne à la classe des réglées (rationnelles ou non) sont* $P_4 = P_6 = 0$.

Comme nous l'avons déjà indiqué, Picard a déterminé les variétés algébriques à $n$ dimensions contenant un groupe permutable et transitif, $\infty^n$, de transformations birationnelles en soi. Lorsque $n = 2$, on obtient ainsi les surfaces de Picard, caractérisées par

$$p_a = -1, \qquad p_g = P_4 = 1.$$

Une surface de Picard représente une involution cyclique, privée de points unis, appartenant à la surface de Jacobi, représentant les couples de points d'une courbe de genre deux. Les coordonnées des points d'une surface de Picard s'expriment en fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres. Ces surfaces ont fait l'objet de recherches importantes, de G. Humbert [22], d'Enriques & Severi [23], et de Bagnera & De Franchis [24].

**12.** Les études d'Enriques & Severi et de Bagnera & De Franchis, auxquelles nous venons de faire allusion, suggèrent un procédé de constructton de surfaces irrégulières.

Considérons une courbe C de genre $p$, contenant une involution $i$ d'ordre $n > 2$, cyclique, engendrée par une transformation birationnelle $t$ de la courbe en soi. Soit F la surface qui représente les couples de points de la courbe C. On peut construire sur F deux involutions.

L'une, I, d'ordre $n$, est cyclique et est engendrée par une transformation birationnelle T de F en soi, obtenue de la manière suivante : le point $P'$ que T fait correspondre à un point P représente le couple de points de C que $t$ fait correspondre au couple de points de C image du point P.

Si d'autre part on considère deux groupes de l'involution $i$, les points de F qui représente les couples de points de C pris à raison d'un dans chaque groupe, sont au nombre de $n^2$ et engendrent sur F la seconde involution J.

L'involution I possède un nombre fini de points unis. En revanche l'involution J possède une courbe de points unis. Chaque groupe de l'involution J est formé de $n$ groupes de l'involution I.

Appelons $F_0$ une surface qui représente l'involution I, et $F'$ une surface qui représente J. A cette dernière involution correspond sur $F_0$ une involution $J'$ d'ordre $n$ représentée par la surface $F'$.

L'involution $i$, donnée sur C, a pour image une courbe $C'$ d'un certain genre $p'$, La surface $F'$ représente les couples de points de la courbe $C'$. Si $p' > 0$, cette surface est irrégulière et il en est par conséquent de même de la surface $F_0$.

Nous avons utilisé ce mode de construction dans quelques notes récentes [25], en nous appuyant sur nos recherches antérieures sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis [26].

Dans les exemples étudiés, la surface $F_0$ a l'irrégularité $p'$ ; elle possède en général des points singuliers isolés.

**13.** Une propriété des surfaces de Picard, établie par Enriques & Severi, peut également être généralisée, de manière à fournir une construction de surfaces irrégulières. Nous avons déjà rappelé qu'une surface de Picard représentait une involution, privée de points unis, appartenant à une surface de Jacobi. Alors, inversement, la surface de Jacobi représente une involution du même ordre, cyclique, privée de points unis, appartenant à la surface de Picard considérée.

Considérons une surface F contenant une involution cyclique I, régulière, et soit $\Phi$ une surface image de cette involution. L'étude des systèmes de courbes tracées sur $\Phi$ et qui correspondent à des courbes de F appartenant à un même système continu, montre que $\Phi$ représente des involutions appartenant à certaines surfaces que l'on peut construire. Deux de ces surfaces sont liées par une correspondance, et les couples de points homologues sont représentés par une surface $F'$. Sur celle-ci existe une involution cyclique ayant pour image F, et par conséquent $F'$ est une surface irrégulière [27].

L'étude de la surface du quatrième ordre contenant 32 droites, rencontrée autrefois par E. Traynard [28], nous a de même permis de construire une surface irrégulière, en utilisant les propriétés des involutions appartenant à une surface algébrique [29].

**14.** Certains problèmes relatifs aux surfaces irrégulières doivent encore être étudiés. Ainsi que nous l'avons dit, un système continu algébrique de courbes tracées sur une surface irrégulière F est en général constitué par $\infty^q$ systèmes linéaires de courbes. Mais il peut exister des systèmes continus algébriques formés de $\infty^{q'}$ systèmes linéaires (non réguliers) de courbes, où $q' < q$. Il peut même exister des systèmes linéaires isolés. On peut tout au moins l'admettre, par comparaison avec la théorie des courbes algébriques. Les groupes de $n$ points d'une courbe algébrique se distribuent en $\infty^p$ séries linéaires, mais il se présente des exceptions.

Sur une courbe de genre six par exemple, il existe en général cinq séries linéaires isolées de groupes de quatre points, de dimension un. Il reste là de nombreuses questions à élucider.

D'un autre côté, rappelons que Picard a introduit des surfaces algébriques : les surfaces hyperfuchsiennes [30] et les surfaces hyperabéliennes [31], dont l'étude géométrique reste à faire. Seules quelques surfaces hyperabéliennes ont été rencontrées incidemment par G. Humbert[32]. Les surfaces hyperfuchsiennes et les surfaces hyperabéliennes admettent, comme les surfaces hyperelliptiques, une représentation paramétrique par des fonctions de deux variables présentant partout, à distance finie, le caractère de fonctions rationnelles. Il serait à souhaiter que l'étude en fût reprise.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Les traités consacrés à la Géométrie sur une surface algébrique sont peu nombreux ; en voici la liste :

Picard (E.) & Simart (G.) : *Traité des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Paris, Gauthier-Villars, tome I, 1897 ; Tome II, 1906.

Castelnuovo (G.) & Enriques (F.) : *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.* Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band III-2, Leipzig, Teubner, 1915.

Enriques (F.) : *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche,* recueillies par L. Campedelli. Padoue, Cedam, 1932.

Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero *(Rendiconti del Seminario Matematico di Roma,* 1934).

Zariski (O.) : *Algebraic Surfaces,* Berlin, Springer, 1935.

Severi (F.) : *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Rome, Ed. Cremonese, 1942).

[2] Humbert (G.) : Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques *(Journal de Liouville,* 1894).

[3] Enriques (F.) : Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce *(Annales de Toulouse,* 1901).

[4] Severi (F.) : Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica *(Atti di Torino,* 1904).

[5] De Franchis (M.) : Sulle varietà delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica *(Rendiconti Circolo Matematico di Palermo,* 1903).

[6] Maroni (A.) : Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi *(Atti di Torino,* 1903).

[7] Severi (F.) : Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica *(Atti di Torino,* 1903) ; Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie *(Memorie di Torino,* 1903).

[8] Severi (F.) : Sulle superficie che rappresentano... *(Loc. cit.).*

[9] Enriques (F.) : Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari *(Rendiconti di Bologna,* 1905).

[10] Severi (F.) : Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare *(Rendiconti di Palermo,* 1905),

[11] Castelnuovo (G.) : Sugli integrali semplici appartenenti ad une superficie irregolare *(Rendiconti dei Lincei,* 1905 ; *Memorie scelte,* Bologne, 1937).

[12] Picard (É.) : Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables *(Journal de Liouville,* 1899). Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques *(Rendiconti di Palermo,* 1895).

[13] Severi (F.) : Sulla differenza fra i numeri degli integrali di Picard della prima e della seconda specie appartenenti ad una superficie algebrica *(Atti di Torino,* 1905).

[14] Severi (F.) : Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche *(Annali di Matematica,* 1905).

[15] Castelnuovo (G.) : Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica *(Annali di Matematica,* 1897 ; *Memorie scelte,* Bologne, 1937).

[16] Severi (F.) : Osservazioni sui sistemi continui... *(Loc. cit.).*

[17] Severi (F.) : Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad une superficie algebrica *(Rendiconti dei Lincei,* 1921).

[18] Poincaré (H.) : Sur les courbes tracées sur une surface algébrique *(Annales de l'École Normale,* 1910). Voir aussi une note publiée sous le même titre dans les *Sitzungsberichte der berliner math. Gesellschaft,* 1911.

[19] Segre (B.) : Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche ed il principio di spezzamento *(Annali di Matematica,* 1938).

[20] Painlevé (P.) : Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm en 1895 (Paris, Hermann, 1897).

[21] Enriques (F.) : Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero *(Rendiconti di Palermo,* 1905).

[22] Humbert (G.) : Théorie générale des surfaces hyperelliptiques *(Journal de Liouville,* 1893) ; Sur les fonctions abéliennes singulières *(Journal de Liouville,* 1899, 1900, 1901).

[23] Enriques (F.) & Severi (F.) : Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques *(Acta Mathematica,* 1903).

[24] Bagnera (G.) & De Franchis (M.) : Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti *(Memorie Società ital. delle Scienze,* 1908).

[25] Godeaux (L.) : Recherches sur la construction de surfaces algébriques irrégulières *(Bulletin de l'Acad. de Belgique,* 1947). Voir aussi, dans le même *Bulletin,* des notes parues en 1935, 1943, 1944, 1945 et 1946. Sur une surface canonique d'irrégularité un *(Bulletin des Sciences Mathématiques,* 1947).

[26] Godeaux (L.) : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Paris, Hermann, 1935).

[27] Godeaux (L.) : Sur les surfaces de Picard de diviseur deux *(Bulletin de l'Académie de Belgique,* 1927). Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux *(Idem,* 1927). Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface régulière *(Idem,* 1927). Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière *(Bulletin des Sciences Mathématiques,* 1943).

[28] Traynard (E.) : Sur les fonctions $\theta$ de deux variables et les surfaces hyperelliptiques *(Annales de l'École Normale,* 1907).

[29] Godeaux (L.) : Construction d'une surface algébrique d'irrégularité quatre *(Bulletin de l'Académie de Belgique,* 1945). Voir aussi *(C. R. Ac. Sc.,* 1939).

[30] Picard (É.) : Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires *(Acta Mathematica,* 1883). Voir aussi le tome II du Traité de Picard & Simart.

[31] Picard (É.) : Sur les fonctions hyperabéliennes *(Journal de Liouville,* 1885). Voir aussi le tome II du Traité de Picard & Simart.

[32] Humbert (G.) : Sur les fonctions hyperabéliennes *(C. R. Ac. Sc.,* 129, 1899).