à Monsieur A. Delgleize,
Hommage cordial,
Lucien Godeaux

Cours de

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

par

Lucien GODEAUX
Professeur à l'Université de Liége,
Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Fascicule II.

Correspondances rationnelles.

Liége,
Librairie BOURGUIGNON,
16, rue des Dominicains,
1937.

Du même auteur

Leçons élémentaires sur les équations différentielles et le calcul des variations. Bruxelles, École Militaire, 1926.

Les transformations birationnelles du plan. Paris, Gauthier-Villars, 1926.

La Géométrie. Liège, Thone, 1931.

Leçons de Géométrie projective. Liège, Thone, 1933.

Leçons de Géométrie supérieure. Liège, Bourguignon, 1933.

Questions non résolues de Géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions. Paris, Hermann, 1933.

Leçons de Géométrie infinitésimale. Liège, Pholien, 1933.

La théorie des surfaces et l'espace réglé. Paris, Hermann, 1934.

Les transformations birationnelles de l'espace. Paris, Gauthier-Villars, 1934.

Les surfaces algébriques non rationnelles de genre arithmétique et géométrique nuls. Paris, Hermann, 1934.

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Paris, Hermann, 1935.

Les Géométries. Paris, Colin, 1937.

Cours de Géométrie analytique à trois dimensions. Liège, Pholien, 1937.

Cours de Géométrie supérieure. Fasc. I. Points singuliers des courbes et des surfaces algébriques. Liège, Bourguignon, 1937.

Chapitre I

Correspondances rationnelles entre deux plans

§1. Propriétés générales.

1. Définition. – Considérons, dans un plan σ, un réseau $|C|$ de courbes C d'ordre m, sans partie fixe et non composé au moyen d'un faisceau. Soit

$$\lambda_0 \varphi_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation des courbes C. Rapportons projectivement les courbes de $|C|$ aux droites d'un plan σ' en posant

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 . \qquad (1)$$

Par ces relations, à un point x de σ correspond dans σ' un point x' en général unique et bien déterminé.

Soit n le degré du réseau $|C|$. Les courbes C passant par un point passent en conséquence par $n-1$ autres points et on obtient ainsi dans le plan σ une double infinité de groupes de n points tel qu'un groupe soit complètement déterminé par un quelconque de ses points. Cet ensemble de ∞^2 groupes de n points constitue une involution I_n d'ordre n.

Aux droites d'un faisceau du plan σ' correspondent les courbes d'un faisceau de $|C|$ et le sommet du faisceau de droites est l'homologue de chacun des n points du groupe de I_n commun aux courbes du faisceau. Les équations (1) établissent donc une correspondance $(n, 1)$ entre les plans σ, σ'.

2. Eléments fondamentaux du plan σ. – Soient O un point-base du réseau $|C|$ et P un point du plan σ. Aux courbes C passant par P correspondent dans σ' les droites passant par un point P'. Lorsque le point P tend vers O sur la droite $OP = p$, le faisceau des courbes C passant par P a une certaine limite et il en est de même du point P'. Nous distinguerons deux cas:

1°) Les courbes C ont des tangentes variables en O (en dehors éventuellement de quelques tangentes fixes). Le faisceau des courbes C passant par P a pour limite, lorsque P tend vers O sur la droite p, le faisceau des courbes C tangentes à p en O. A ce faisceau correspond dans σ' un faisceau de droites bien déterminé dont le sommet P'_0 est la limite du point P'. Le point P'_0 est l'homologue du point infiniment voisin de O sur la droite p.

Lorsque la droite p tourne autour de O, le point P'_0 décrit une courbe ω', rationnelle puisque ses points correspondent aux directions issues de O.

Le point O et la courbe ω' sont des <u>éléments fondamentaux</u> associés.

Les groupes de I_n homologues des points de la courbes ω' décrivent en général une courbe. Pour nous placer dans le cas le plus général, supposons que les courbes C tangentes en O à la droite p soient tangentes en O à $\nu-1$ autres droites (variables avec p), en un second point base O_1 de $|C|$ à ν_1 droites (variables avec p), ... Les groupes de I_n homologues des points de ω' ont ν de leurs points infiniment voisins de O, ν_1 points infiniment voisins de O_1, ..., les $n-\nu-\nu_1$.. .... points éventuellement restants décrivant une courbe.

2°) Les courbes C ont des tangentes fixes en O. Lorsque P tend vers O sur la droite p, le faisceau des courbes C passant par P a pour limite le faisceau des courbes C ayant la multiplicité $s+1$ au moins en O, s étant la multiplicité de ce point pour les courbes C. A ce faisceau correspond dans σ' un faisceau de droites dont le sommet O' est la limite du point P'. Le point O' reste fixe lorsque la droite p tourne autour de O. Les points O, O' sont des <u>points fondamentaux</u> associés.

<u>3. Points fondamentaux du plan σ'</u>.- Considérons un point O'_1 du plan σ'. En général, le groupe I_n correspondant à ce point est bien déterminé, mais il peut se faire qu'un certains nombre de points de ce groupe soient indéterminés sur une courbe ω_1. Dans ce cas, aux droites passant par O'_1 correspondent des courbes C comprenant une partie fixe ω_1 et une partie C_1 variable dans un faisceau $|C_1|$. Soit $n-\nu$ le nombre des points-base du faisceau $|C_1|$ en dehors des points-base de $|C|$. Le groupe formé par ces points, joint à ν points (variables) de la courbe ω_1, forme un groupe de I_n.

Une courbe générique de $|C|$ ne rencontre pas la courbe ω_1 en dehors des points-base du réseau, car alors cette courbe contiendrait un des groupes de I_n homologue de O'_1 et il lui correspondrait, dans σ', une droite passant par ce point, ce qui est absurde. La courbe ω_1 est donc une courbe fondamentale du réseau. Le point O'_1 est le <u>point fondamental</u> associé à la courbe fondamentale ω_1.

Soient p' une droite passant par O'_1, P' un point de p', A le groupe de I_n homologue de P', C^*_1 la courbe qui, avec ω_1, correspond à p'. Le groupe A appartient à la courbe C_1^* et aucun de ses points n'appartient à ω_1. Lorsque P' tend vers O'_1 sur p', le groupe A tend vers un groupe ayant ν de ses points sur ω_1, sans cesser d'appartenir à la courbe C_1^* ; il en résulte que ces ν points sont communs aux courbes C_1^* et ω_1. Si donc nous désignons par A_1 le groupe des $n-\nu$ points communs aux courbes C_1 en dehors de la base de $|C|$, nous voyons qu'au point infiniment voisin de O'_1 sur p' correspond un groupe de I_n formé de A_1 et les ν points de rencontre (variables) de la courbe ω_1 et de la courbe C_1^*.

4. Points unis et points de diramation. – Un point P de σ est appelé *point uni* de l'involution I_n si les courbes C passant par P ont au moins deux de leurs n points d'intersection réunis en P. En d'autres termes, le point P compte pour deux au moins parmi les points du groupe de I_n qui le contient. Le point P' de σ' qui représente ce groupe est appelé *point de diramation.*

En général, les courbes C passant par un point uni P ont même tangente en ce point et il y a par conséquent une de ces courbes qui a un point double en P ; le point P appartient à la jacobienne de $|C|$.

Soit inversement P un point de la jacobienne J de $|C|$. Les courbes C passant par P ont même tangente en ce point ; si P n'appartient pas à une courbe fondamentale du réseau, c'est donc un point uni de l'involution I_n.

En général, une involution possède une infinité de points unis formant une courbe D appelée courbe unie et à laquelle correspond, dans σ', une courbe de diramation D'. Mais une involution peut ne posséder qu'un nombre fini de points unis.

La jacobienne du réseau $|C|$ est formée de la courbe unie et des courbes fondamentales du réseau.

5. Propriétés de la courbe de diramation. – Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) L'involution I_n possède une infinité de points unis et les courbes C passant par un de ces points y ont en général un contact ordinaire.

b) A un point de la courbe de diramation D' correspond en général un seul point de la courbe unie D.

Supposons que le point $O_0\,(1,0,0)$ soit un point ordinaire de la jacobienne J et n'appartienne pas à une courbe fondamentale du réseau. Celui-ci peut être défini par trois courbes dont l'une a un point double en O_0, la seconde un point simple en O_0, la troisième ne passant pas par ce point. Soient

$$\varphi_0 \equiv x_0^{m-2}\alpha_2(x_1,x_2) + x_0^{m-3}\alpha_3(x_1,x_2) + \cdots + \alpha_m(x_1,x_2) = 0,$$

$$\varphi_1 \equiv x_0^{m-1}\beta_1(x_1,x_2) + x_0^{m-2}\beta_2 + \cdots + \beta_m = 0,$$

$$\varphi_2 \equiv x_0^{m}\gamma_0 + x_0^{m-1}\gamma_1(x_1,x_2) + \cdots + \gamma_m = 0,$$

les équations de ces courbes.

Formons l'équation de la jacobienne J et ordonnons la par rapport aux puissances décroissantes de x_0. La jacobienne est une courbe d'ordre $3m-3$ et le coefficient de la plus haute puissance, $3m-4$, de x_0, égalé à zéro, donne l'équation de la tangente à J en O_0. On trouve

$$\gamma_0\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Cette droite est en général distincte des tangentes $\beta_1 = 0$ aux courbes C passant par O_0 et $\alpha_2 = 0$ à la courbe $\varphi_0 = 0$, ces deux dernières étant supposées différentes.

Soit μ l'ordre de la courbe de diramation D'. Considérons un point P' de D' et le point homologue P de D, supposé simple pour cette courbe. A une droite passant par P' correspond une courbe C passant par P et rencontrant encore D en $\mu-1$ points (variables). A la tangente à D' en P' correspond une courbe C ne rencontrant plus D qu'en $\mu-2$ points en dehors de P. Mais nous venons de voir que les courbes C ne touchent pas D en P, donc la courbe C envisagée est celle qui a un point double en P.

<u>Les tangentes à la courbe de diramation correspondent aux courbes du réseau |C| ayant un point double.</u>

Recherchons maintenant dans quelles conditions la jacobienne a, en un point simple O_0, même tangente que les courbes C passant par ce point. Nous pouvons poser $\beta_1 = x_2$ et on doit donc avoir

$$\gamma_0\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1} \equiv x_2 = 0,$$

d'où $\alpha_2(1,0) = 0$, ou $\alpha_2 \equiv x_2\alpha_1(x_1,x_2)$. Les courbes C, tangentes à J en O_0, ont entre elles un contact du second ordre en ce point.

Désignons par O' le point de la courbe D' homologue de O_0. Les courbes C passant par O_0 ne rencontrent plus D qu'en $\mu-2$ points (variables) en dehors de O_0, donc les droites passant par O' ne rencontrent plus D' qu'en $\mu-2$ points en dehors de O' et ce point est double pour D'. La courbe C ayant un point double en O_0 touche D en ce point et rencontre encore cette courbe en $\mu-3$ points ; c'est d'autre part l'unique courbe C passant par O_0 possédant cette propriété. Il existe donc une seule tangente en O' à D' et ce point de rebroussement pour cette courbe.

D'autre part, si les courbes C passant par un point simple de D ont un contact du second ordre en ce point, elles sont tangentes à D. Le point en question est uni pour l'involution I_n et compte pour trois dans le groupe de cette involution auquel il appartient.

A un point uni qui compte pour trois dans le groupe de l'involution qui le contient, correspond un point de rebroussement de la courbe de diramation.

Soit P' un point d'inflexion de D'. Le point P qui lui correspond sur D est nécessairement simple pour cette courbe. A la tangente d'inflexion correspond une courbe C^* ayant trois points d'intersection avec D confondus en P. C^* a un point double en P et ce ne peut être un point double ordinaire dont l'une des tangentes serait tangente à D en P, car on retomberait sur le cas précédent ; c'est donc un point de rebroussement dont la tangente coïncide avec la tangente à D.

6. Transformation des courbes. — A une courbe Γ' de σ' correspond dans σ une courbe Γ, lieu des groupes de I_n homologues des points de Γ'. La courbe Γ peut d'ailleurs être composée de plusieurs parties $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots$, chacune desquelles étant le lieu d'un point au moins des groupes de I_n en question. Si la courbe Γ' est tangente à D', la courbe Γ a un point double au point correspondant de D.

Soit Γ_1 une courbe de σ ; supposons que les groupes de I_n ayant un point sur Γ n'aient pas en général tous leurs autres points sur cette courbe. Les points homologues dans σ' des groupes de I_n ayant un point sur Γ_1 forment une courbe Γ' dont la transformée est formée de la courbe Γ_1 et d'une courbe Γ_2 éventuellement réductible.

Supposons pour plus de simplicité qu'un groupe de I_n ayant un point sur Γ_1 n'ait pas en général d'autres points sur cette courbe. Observons qu'un groupe de I_n ayant un point sur Γ_2 (ou sur une partie de cette courbe) a au moins un point sur Γ_1. Cela étant, soit P_1 un point commun aux courbes Γ_1, Γ_2 qui ne soit ni un point fondamental, ni un point uni de I_n. Le groupe de I_n contenant P_1 possède un second point P_2 commun aux courbes Γ_1, Γ_2. Soit P' le point de σ' homologue de ce groupe. Si μ est l'ordre de la courbe Γ', une courbe C rencontre Γ_1 en μ points variables. En particulier, les courbes C passant par P_1 passent par P_2 et les droites passant par P' ne rencontrent plus Γ' qu'en $\mu - 2$ points variables. Le point P' est donc double pour Γ'. La courbe Γ_1 contient donc un certain nombre (fini) de couples de points appartenant à des groupes de I_n et les points correspondant de Γ sont doubles pour cette courbe.

7. Remarque. – Dans l'étude d'une correspondance $(1,n)$ entre deux plans σ', σ, ceux-ci, ou l'un d'eux, peuvent être remplacés par des surfaces rationnelles. Cela rend souvent plus facile l'étude de l'involution.

§ 2. Transformation quadratique involutive de première espèce.

8. Définition. – Les équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

définissent une transformation quadratique de première espèce entre deux plans. Si ceux-ci sont superposés et ont même triangle de référence, cette transformation T est involutive. Les couples de points homologues x, x' forment une involution I_2 d'ordre deux.

L'involution I_2 possède trois points fondamentaux $O_1(1,0,0)$, $O_2(0,1,0)$, $O_3(0,0,1)$ et aux points infiniment voisins de O_1 par exemple correspondent les points de la droite $x_1 = 0$. L'involution I_2 ne possède qu'un nombre fini de points unis, à savoir

$$A(1,1,1)\ ,\quad A_1(-1,1,1)\ ,\quad A_2(1,-1,1)\ ,\quad A_3(1,1,-1).$$

9. Systèmes linéaires de cubiques composés au moyen de I_2. – A une droite

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0,$$

T fait correspondre la conique

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0.$$

La courbe formée de cette droite et de cette conique contient ∞^1 groupes de I_2 ; elle appartient au système linéaire de cubiques

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1 (x_2^2 + x_3^2) + \lambda_2 x_2 (x_3^2 + x_1^2) + \lambda_3 x_3 (x_1^2 + x_2^2) = 0. \qquad (1)$$

Ces courbes passent par les sommets du triangle de référence ; chacune d'elles est transformée en elle-même par T ; le système linéaire qu'elles forment est de degré six et deux courbes du système ont en commun trois groupes de I_2. Le système (1) est donc composé au moyen de I_2.

Il existe un second système linéaire de cubiques composé au moyen de I_2. Considérons un faisceau de droites et le faisceau de coniques que T leur fait correspondre. Ces deux faisceaux sont projectifs et le lieu des intersections des éléments homologues est une cubique appartenant au réseau

$$\lambda_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + \lambda_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + \lambda_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0. \qquad (2)$$

Ce réseau a comme points-base les points $O_1, O_2, O_3, A, A_1, A_2, A_3$;

il est de degré deux et deux de ses courbes ont en commun un groupe de I_2.

10. Représentation de I_2 sur un plan. — Nous obtiendrons une représentation des groupes de I_2 par les points d'un plan en établissant une projectivité entre les courbes du réseau (2) et les droites d'un plan σ'. Posons

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1(x_2^2 - x_3^2) : x_2(x_3^2 - x_1^2) : x_3(x_1^2 - x_2^2).$$

Considérons les courbes (2) tangentes en O_1 à la droite $x_2 = \lambda x_3$; elles ont pour équation

$$\lambda_1 x_1(x_2^2 - x_3^2) + \lambda_2 \left[x_2(x_3^2 - x_1^2) + \lambda x_3(x_1^2 - x_2^2)\right] = 0. \qquad (3)$$

Ces courbes coupent la droite $x_1 = 0$ au point $(0, 1, \lambda)$ qui, avec le point infiniment voisin de O_1 sur $x_2 = \lambda x_3$, forme un groupe de I_2. Aux courbes (3) correspondent dans σ' les droites

$$\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 (x'_2 + \lambda x'_3) = 0,$$

passant par le point $(0, \lambda, -1)$. Il en résulte qu'aux groupes de I_2 ayant un point infiniment voisin de O_1, correspondent les points de la droite $x'_1 = 0$, droite fondamentale associée au point fondamental O_1. De même, à O_2, O_3 sont respectivement associées les droites $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$.

Considérons maintenant la droite

$$x_1 + \lambda x_2 - (1+\lambda) x_3 = 0, \qquad (4)$$

passant par A. Les courbes (2) tangentes à cette droite en A ont pour équation

$$(1+\lambda)\left[\lambda_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + \lambda_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2)\right] + (\lambda_1 + \lambda\lambda_2) x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0. \quad (5).$$

A ces courbes correspondent les droites

$$(1+\lambda)(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2) + (\lambda_1 + \lambda\lambda_2) x'_3 = 0,$$

passant par le point $(-1, -\lambda, 1+\lambda)$. Le lieu de ce point, lorsque λ varie, est la droite

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0, \qquad (6)$$

droite de diramation homologue du point uni A.

Observons que les courbes du faisceau (5) ont un contact du second ordre en A ; ce faisceau comprend en effet, pour $\lambda_1 = \lambda_2$, la courbe formée des droites O_1A, O_2A, O_3A. Il en résulte que le point infiniment voisin de A sur la droite (4) est uni pour I_2. Le point $(-1, -\lambda, 1+\lambda)$ est donc bien un point de diramation.

Aux points unis A_1, A_2, A_3 correspondent respectivement les droites de diramation

$$-x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0, \quad x'_1 - x'_2 + x'_3 = 0, \quad x'_1 + x'_2 - x'_3 = 0. \qquad (7).$$

Les droites (6) et (7) forment un quadrilatère complet dont le triangle diagonal est le triangle de référence. Aux sommets de ce quadrilatère correspondent les côtés du quadrangle complet de sommets A, A_1, A_2, A_3. Au point commun aux deux dernières droites (7) par exemple, correspond la droite A_2A_3, qui est d'ailleurs fondamentale pour le réseau (2).

Une courbe (2) rencontre une courbe (1), en dehors des points O_1, O_2, O_3, en trois couples de I_2, donc à une courbe (1) correspond dans σ' une cubique plane Γ'. Une courbe (1) coupe la droite A_2A_3 en dehors de O_1 en deux points formant un couple de I_2, donc les courbes Γ' passent par le point commun aux deux dernières droites (7) et par suite par les sommets du quadrilatère complet formé par les droites (6) et (7). Les courbes Γ' ont pour équation

$$\lambda_1 x'_1(x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3) + \lambda_2 x'_2(x'^2_2 - x'^2_3 - x'^2_1) + \lambda_3 x'_3(x'^2_3 - x'^2_1 - x'^2_2) + \lambda_4 x'_1 x'_2 x'_3 = 0.$$

11. <u>Représentation de I_2 sur une surface cubique.</u> – Rapportons projectivement les courbes du système (1) aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_0}{x_1x_2x_3} = \frac{X_1}{x_1(x_2^2+x_3^2)} = \frac{X_2}{x_2(x_3^2+x_1^2)} = \frac{X_3}{x_3(x_1^2+x_2^2)}.$$

En éliminant x_1, x_2, x_3 entre ces équations, on obtient

$$X_0(X_1^2+X_2^2+X_3^2) - X_1X_2X_3 - 4X_0^3 = 0,$$

c'est-à-dire une surface cubique F. Aux courbes (1) passant par un groupe de I_2 correspondent les plans passant par un point de F; il y a donc une correspondance biunivoque entre les groupes de I_2 et les points de F. La surface F est une image de l'involution I_2.

Les courbes (1) tangentes en O_1 à la droite $x_2 = \lambda x_3$ ont pour équation

$$\lambda_0 x_1x_2x_3 + \lambda_1 x_1(x_2^2+x_3^2) + \lambda_2\left[x_2(x_3^2+x_1^2) - \lambda x_3(x_1^2+x_2^2)\right] = 0.$$

Il leur correspond les plans de la gerbe de sommet $(0, 0, \lambda, 1)$, point appartenant à F. Lorsque λ varie, ce point décrit la droite $X_0 = X_1 = 0$ dont les points représentent donc les couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_1 et d'un point de la droite $x_1 = 0$.

De même, à O_2 correspond la droite $X_0 = X_2 = 0$ et à O_3, la droite $X_0 = X_3 = 0$.

Aux points unis A, A_1, A_2, A_3 correspondent respectivement les points de diramation

$$A'(1,2,2,2), \quad A'_1(-1,-2,2,2), \quad A'_2(-1,2,-2,2), \quad A'_3(-1,2,2,-2).$$

12. <u>Étude des points de diramation.</u> –

Les quatre points de diramation ne sont pas dans un même plan; nous pouvons donc prendre le tétraèdre ayant ces points pour sommets comme tétraèdre de référence, en posant

$$\left.\begin{aligned}\rho Y_0 &= 2X_0 + X_1 + X_2 + X_3,\\ \rho Y_1 &= -2X_0 - X_1 + X_2 + X_3,\\ \rho Y_2 &= -2X_0 + X_1 - X_2 + X_3,\\ \rho Y_3 &= -2X_0 + X_1 + X_2 - X_3,\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\rho' X_0 &= Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3,\\ \rho' X_1 &= 2(Y_0 - Y_1 + Y_2 + Y_3),\\ \rho' X_2 &= 2(Y_0 + Y_1 - Y_2 + Y_3),\\ \rho' X_3 &= 2(Y_0 + Y_1 + Y_2 - Y_3).\end{aligned}\right\}$$

L'équation de F devient

$$Y_1Y_2Y_3 - Y_0(Y_2Y_3 + Y_3Y_1 + Y_1Y_2) = 0.$$

Les courbes (1) passant par le point A ont pour équation

$$\lambda_1 x_1(x_2 - x_3)^2 + \lambda_2 x_2(x_3 - x_1)^2 + \lambda_3 x_3(x_1 - x_2)^2 = 0 \qquad (2)$$

Il leur correspond les plans

$$(\lambda_2 + \lambda_3)Y_1 + (\lambda_3 + \lambda_1)Y_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)Y_3 = 0,$$

passant par le point de diramation $A'(1,0,0,0)$.

Les courbes (2) ont un point double en A, l'équation quadratique des tangentes étant

$$\lambda_1(x_2 - x_3)^2 + \lambda_2(x_3 - x_1)^2 + \lambda_3(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Pour que l'une de ces tangentes soit la droite

$$x_3 - x_2 = \lambda(x_3 - x_1), \qquad (3)$$

il faut que l'on ait

$$\lambda_1\lambda^2 + \lambda_2 + \lambda_3(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Par conséquent, les courbes (1) touchant la droite (3) en A ont pour homologues les plans passant par la droite

$$Y_2 + Y_3 - \lambda^2(Y_3 + Y_1) = 0, \quad Y_1 + Y_2 - (1-\lambda)^2(Y_3 + Y_1) = 0,$$

tangente à F en A. Le lieu de cette droite, lorsque λ varie, est le cône

$$Y_2Y_3 + Y_3Y_1 + Y_1Y_2 = 0,$$

tangent à la surface F au point A', qui est double conique pour la surface.

On parvient à des conclusions analogues pour les autres points de diramation.

<u>Aux points infiniment voisins d'un point uni correspondent les points de la surface F, infiniment voisins du point de diramation correspondant, qui est double conique pour la surface.</u>

13. Système de cônes circonscrits à F. – Nous allons rechercher quelles sont les courbes qui correspondent, sur la surface F, aux courbes du réseau

$$\mu_1 x_1(x_2^2 - x_3^2) + \mu_2 x_2(x_3^2 - x_1^2) + \mu_3 x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0. \qquad (1)$$

En élevant le premier membre de cette équation au carré, on a

$$\mu_1^2(X_1^2 - 4X_0^2) + \mu_2^2(X_2^2 - 4X_0^2) + \mu_3^2(X_3^2 - 4X_0^2)$$
$$+ 2\mu_2\mu_3(2X_0X_1 - X_2X_3) + 2\mu_3\mu_1(2X_0X_2 - X_3X_1) + 2\mu_1\mu_2(2X_0X_3 - X_1X_2) = 0 \quad (3)$$

Cette équation représente un cône passant par les points de diramation, dont le sommet a pour coordonnées $\mu_1\mu_2\mu_3$, $\mu_1(\mu_2^2 + \mu_3^2)$, $\mu_2(\mu_3^2 + \mu_1^2)$, $\mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2)$.

Faisons varier μ_1 par exemple ; nous obtenons une famille de cô-nes dont l'enveloppe a pour équation

$$(\mu_2^2 X_0 - \mu_2 \mu_3 X_1 + \mu_3^2 X_0)\left[X_0(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) - X_1 X_2 X_3 - 4X_0^3\right] = 0.$$

La surface F fait donc partie de l'enveloppe et par conséquent les cônes (2) sont circonscrits à cette surface le long de cubiques gauches. Ces cubiques correspondent aux courbes (1).

<u>14. Remarque</u>. — La surface F est évidemment représentable sur le plan σ' de telle sorte qu'aux sections planes correspondent les cubiques Γ' circonscrites au quadrilatère complet formé par les droites (6) et (7). Aux cubiques gauches que l'on vient de rencontrer correspondent les droites de σ'.

<u>§3. Transformation quadratique involutive de seconde espèce.</u>

<u>15. Définition</u>. — Les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_2 : x_1^2 : x_2(x_1 - x_3)$$

définissent une transformation quadratique involutive T de seconde espèce. Les couples de points homologues forment une involution I_2 du second ordre.

L'involution I_2 possède deux points fondamentaux O_2, O_3. Aux droites du plan, T fait correspondre les coniques passant par O_2, O_3 et touchant, en O_3, la droite $x_2 = 0$.

D'après la théorie des transformations quadratiques, aux points infiniment voisins de O_2 correspondent les points de la droite x_2 ; aux points infiniment voisins de O_3 correspondent les points infiniment voisins de O_3 ; enfin, si O_{31} est le point infiniment voisin de O_3 sur $x_2 = 0$, aux points infiniment voisins de O_{31} correspondent les points de $x_1 = 0$.

Dans le faisceau de droites de sommet O_2, T détermine une involution du second ordre dont les droites unies sont

$$x_1 = 0 \quad , \; x_1 - 2x_3 = 0. \qquad (1)$$

Dans le faisceau de droites de sommet O_3, T détermine également une involution du second ordre dont les droites unies sont

$$x_1 - x_2 = 0 \; , \; x_1 + x_2 = 0. \qquad (2).$$

Les points communs aux droites (1), (2) sont des points unis de I_2. On obtient ainsi les points $A_1(2,2,1)$, $A_2(2,-2,1)$, O_3.

Dans le domaine du premier ordre de O_3, T détermine, d'après ce qui précède, une involution présentant deux points unis, l'un, A_{31}, sur la droite $x_1 - x_2 = 0$, l'autre, A_{32}, sur la droite $x_1 + x_2 = 0$.

16. Systèmes linéaires de cubiques planes composés au moyen de I_2. — Comme dans le cas de la transformation quadratique involutive de première espèce, il existe deux systèmes linéaires de cubiques planes composés au moyen de I_2, formés de la même manière. Ils ont pour équations

$$\lambda_1 x_1^2 x_2 + \lambda_2 x_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_3 x_2 x_3(x_1 - x_3) + \lambda_4[x_1x_2 + x_3(x_1^2 - x_2^2)] = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 x_1(x_1^2 - x_2^2) + \lambda_2 x_1 x_2(x_1 - 2x_3) + \lambda_3[x_1x_2^2 - x_3(x_1^2 + x_2^2)] = 0. \quad (4)$$

Le premier système a comme points-base O_2, O_3 et ses courbes touchent, en O_3, la droite $x_2 = 0$. Ce système est de degré six et deux de ses courbes ont en commun trois couples de I_2.

Le second système a comme points-base simples O_2, A_1, A_2 et comme point-base double O_3. Il est de degré deux et a comme courbes fondamentales les droites (1) et (2).

17. Représentation de I_2 sur un plan. — Rapportons projectivement les courbes du réseau (4) aux droites d'un plan σ' en posant

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1(x_1^2 - x_2^2) : x_1x_2(x_1 - 2x_3) : x_1x_2^2 - x_3(x_1^2 + x_2^2).$$

Aux couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_2 et d'un point de la droite $x_2 = 0$ correspondent dans σ' les points de la droite $x_2' = 0$.

Les tangentes en O_3 à une courbe (4) sont données par

$$2\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

elles forment un couple de l'involution déterminée par T dans le faisceau de droites de sommet O_3. Les courbes (4) tangentes en O_3 à la droite $x_2 = \lambda x_1$ forment un faisceau auquel correspond, dans σ', le faisceau de droites de sommet $(0, 2\lambda, 1 + \lambda^2)$. On en conclut qu'aux couples de points de I_2 appartenant au domaine du premier ordre de O_3 correspondent les points de la droite $x_1' = 0$. En particulier, aux points unis, qui sont donnés par $\lambda = \pm 1$, correspondent les points $(0, 1, 1)$ et $(0, -1, 1)$.

Les courbes (4) touchant en A_1 la droite

$$x_1 - 2x_3 = \lambda(x_1 - x_2)$$

sont données par

$$2\lambda_1 + \lambda\lambda_2 + \lambda_3(\lambda - 1) = 0.$$

Il leur correspond les droites de σ' passant par le point $(2, \lambda, \lambda - 1)$. Lorsque λ varie, ce point décrit la droite de diramation.

$$x_1' - 2x_2' + 2x_3' = 0.$$

De même, au point A_2, correspond la droite de diramation

$$x_1' + 2x_2' + 2x_3' = 0.$$

Ces deux droites se coupent au point $(-2, 0, 1)$ qui correspond à la droite fondamentale A_1A_2 (passant par O_2).

aux courbes (3) correspondent dans σ' des cubiques

$$\lambda_1 x_1'^2 x_2' + \lambda_2 x_1'^2 (x_1' + 2x_3') + \lambda_3 x_2' (x_2'^2 - x_1' x_3' - x_3'^2) + \lambda_4 x_1' [2(x_2'^2 - x_3'^2) - x_1' x_3'] = 0,$$

passant par le point $(0,0,1)$, par le point $(-2,0,1)$ et tangentes aux droites de diramation aux points où celles-ci rencontrent la droite $x_1' = 0$.

18. <u>Représentation de I_2 sur une surface cubique</u>. — Rapportons projectivement les courbes (3) aux plans de l'espace en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2 x_2 : x_1 (x_1^2 + x_2^2) : x_2 x_3 (x_1 - x_3) : x_1 x_2^2 + x_3 (x_1^2 - x_2^2).$$

L'élimination des x entre ces équations donne

$$X_3 (X_2^2 - 4X_1^2) + X_1 (X_1^2 + X_4^2 - X_2 X_4) = 0.$$

C'est une surface cubique F dont les points correspondent biunivoquement aux groupes de I_2.

Aux couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_2 et d'un point de $x_2 = 0$ correspondent les points de la droite $X_1 = X_3 = 0$.

Les courbes (3) données par $\lambda_4 = \alpha \lambda_3$ ont un contact de second ordre en O_3 ; il leur correspond les plans passant par le point $(0,0,\alpha,1)$, dont le lieu, lorsque α varie, est la droite $X_1 = X_2 = 0$. Les couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_{31} et d'un point de $x_1' = 0$ sont donc représentés par les points de la droite $X_1 = X_2 = 0$.

Aux points A_1, A_2 correspondent respectivement les points de diramation $A_1'(4,8,1,4)$, $A_2'(4,-8,1,-4)$. On établit, comme dans le paragraphe 2, que ces points sont doubles coniques pour la surface F.

Les courbes (3) assujetties à toucher en O_3 une droite distincte de $x_2 = 0$, sont données par $\lambda_3 = 0$ et ont un point double en O_3. Il leur correspond les plans passant par le point $O_3'(0,0,1,0)$. Ce point est double biplanaire pour la surface F, le cône tangent à celle-ci étant

$$(X_2 + 2X_1)(X_2 - 2X_1) = 0.$$

Les cubiques envisagées ($\lambda_3 = 0$) ont comme tangentes en O_3 les droites (2). La conique

$$x_3 (x_1 - x_2) - \alpha x_1^2 = 0$$

coupe ces cubiques en trois points confondus en O_3 ; celles de ces courbes qui rencontrent la conique en quatre points confondus en O_3 sont caractérisées par

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + (1 + 2\alpha)\lambda_4 = 0.$$

Elles forment un faisceau auquel correspond le faisceau des sections de F par les plans

$$\lambda (X_2 - 2X_1) + X_4 - (1 + 2\alpha) X_1 = 0.$$

On en conclut qu'aux points infiniment voisins de O_{31} correspondent les points de F infiniment voisins de O_3' dans le plan $X_2 - 2X_1 = 0$. De même, aux points infiniment voisins de O_{32}

correspondent les points de F du domaine du premier ordre de O'_3, situés dans le plan $X_2 + 2X_1 = 0$.

Enfin, aux cubiques (3) ayant un point triple en O_3 ($\lambda_3 = \lambda_4 = 0$), correspondent les sections de F par les plans passant par $X_1 = X_2 = 0$.

19. Système de cônes circonscrits à F. — Des équations (4) on déduit

$$\lambda_1^2(X_2^2 - 4X_1^2) + \lambda_2^2 X_1(X_4 - 4X_3) + \lambda_3^2(X_4^2 - 4X_1X_3)$$
$$+ 2\lambda_2\lambda_3(X_1X_4 - 2X_2X_3) + 2\lambda_3\lambda_1(2X_1^2 - X_2X_4) + 2\lambda_1\lambda_2X_1(X_2 - 2X_4) = 0,$$

par conséquent, aux courbes (4) correspondent sur F les courbes découpées par ces quadriques. Ce sont des cônes passant par les points A'_1, A'_2 et O'_3.

Lorsque λ_1 varie, l'enveloppe de ces cônes se compose de la surface F et du plan

$$(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)X_1 + 2\lambda_2\lambda_3X_2 = 0,$$

par conséquent, aux courbes (4) correspondent, sur la surface F, des cubiques gauches le long desquelles des cônes du second ordre sont circonscrits à la surface.

§ 4. Involution de Geiser.

20. Définition. — Soient, dans un plan σ, $A_1, A_2, \dots, A_7$ sept points distincts dont six n'appartiennent pas à une même conique, ni trois à une même droite. Les cubiques C passant par ces sept points sont généralement irréductibles et forment un réseau de degré deux. Les couples de points variables communs aux couples de courbes C forment l'involution de Geiser I_2.

En laissant tomber les restrictions imposées au choix des points $A_1, A_2, \dots, A_7$, on obtiendra des cas particuliers de l'involution de Geiser ; nous nous bornerons ici à l'étude du cas général.

21. Eléments fondamentaux. — Considérons une droite p passant par A_1 et les cubiques C tangentes à cette droite en ce point. Elles forment un faisceau qui comprend la cubique C_1 ayant un point double en A_1. Il en résulte que le groupe de I_2 comprenant le point infiniment voisin de A_1 sur p, appartient à la cubique C_1.

Rapportons projectivement les courbes C aux droites d'un plan σ'. A la cubique C_1 correspond une droite r_1. Le point A_1, la cubique C_1 et la droite r_1 sont des éléments fondamentaux associés.

Désignons par $C_2, C_3, \dots, C_7$ les cubiques de $|C|$ ayant un point double respectivement en $A_2, A_3, \dots, A_7$; par $r_1, r_2, \dots, r_7$ les droites correspondantes dans σ'.

Les courbes C_1, C_2 ont en commun un groupe de I_2. Les cubiques du faisceau déterminé par C_1, C_2 touchent C_2 en A_1 et C_1 en A_2. Le groupe en question est donc formé du point infiniment voisin de A_1 sur C_2 et du point infiniment voisin de A_2 sur C_1. Ce groupe a pour homologue dans σ' le point commun aux droites r_1, r_2.

22. Courbe unie et courbe de diramation. — D'après un théorème de Sylvester, les cubiques C découpent sur l'une d'entre elles $\bar{C}$ des couples de points alignés sur un point fixe de cette dernière courbe. Par ce point, on peut mener quatre tangentes à la courbe $\bar{C}$ et il y a donc quatre points de $\bar{C}$ tels que les courbes C passant par un de ces points y touchent $\bar{C}$. En d'autres termes, une courbe C contient quatre points unis de l'involution I_2, ou encore la courbe unie D rencontre, en dehors des points-base, les courbes C en quatre points. Il en résulte que la courbe de diramation D' de σ' est du quatrième ordre.

Reprenons la courbe C_1 et considérons les courbes C ayant comme tangente en A_1 une des tangentes à C_1 en ce point. Ces courbes ne se rencontrent plus en dehors des points-base, par suite les points de C_1 infiniment voisins de A_1 sont unis pour I_2 et ce sont les seuls points du domaine du premier ordre de A_1 possédant cette propriété. La courbe D possède donc un point double en A_1, ses tangentes en ce point coïncidant avec celles de C_1. On a évidemment une propriété analogue en A_2, A_3, ..., A_7 et la courbe D est par suite du sixième ordre.

Les droites r_1, r_2, ..., r_7 sont des bitangentes de la courbe D'.

Il existe 21 autres bitangentes à la courbe D', auxquelles doivent correspondre les cubiques C dégénérées ; ce sont précisément les cubiques formées d'une conique passant par cinq des points A_1, A_2, ..., A_7 et d'une droite passant par les deux autres.

23. Transformation birationnelle déterminée par I_2. — A un point P faisons correspondre le point P' qui, avec P, forme un groupe de I_2 ; nous obtenons ainsi une transformation birationnelle involutive T, génératrice de I_2.

Soient g une droite de σ, G la courbe que T lui fait correspondre. Supposons qu'une droite de σ contienne ν couples de I_2 (classe de l'involution). La courbe G rencontre g aux six points de cette droite situés sur D et aux 2ν points formant les ν couples de I_2 appartenant à g. La courbe G est donc d'ordre $2\nu + 6$.

Pour déterminer ν, observons que les courbes C découpent sur une droite g une série linéaire g_3^2 dont il s'agit de déterminer les couples neutres, c'est-à-dire les couples de points imposant une condition aux groupes de g_3^2 qui doivent les contenir. Rapportons projectivement les groupes de trois points de g aux plans de l'espace ; à la droite correspond une cubique gauche K et à la série g_3^2, la série déterminée sur K par les plans d'une gerbe de sommet O, n'appartenant pas à K. Le seul couple neutre est formé par les points d'appui de la bisécante de K passant par O. On a donc $\nu = 1$ et la courbe G est d'ordre huit.

Les points de G situés dans le domaine du premier ordre de A_1, correspondent aux points de rencontre de g et de C_1, donc aux droites du plan σ, T fait correspondre des courbes G du huitième ordre ayant des points triples en $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_7$. Les courbes G forment bien un réseau homoloïdal.

L'ensemble d'une droite g et de sa transformée G forme une courbe d'ordre neuf transformée en elle-même par T ; cette courbe appartient à un système linéaire $|\Gamma|$, composé au moyen de I_2 et formé de courbes d'ordre neuf ayant des points triples en $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_7$. Aux courbes Γ correspondent dans σ' des cubiques Γ', car une courbe C et une courbe Γ se rencontrent en trois couples de I_2 en dehors de $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_7$. $|\Gamma|$ est donc ∞^9 et de degré 18. Aux ∞^3 courbes Γ' rationnelles tangentes en six points (variables) à D', correspondent les courbes Γ formées d'une droite g et d'une courbe G ; ces courbes Γ ont un point double variable, correspondant au couple de I_2 appartenant à g.

Le faisceau de droites passant par un point A et le faisceau des courbes G correspondantes sont projectifs ; le lieu des points communs aux droites et aux courbes G homologues est une courbe d'ordre neuf, formée de la courbe D et d'une courbe C passant par O.

<u>24. Remarque</u>.__ L'étude de l'involution de Geiser peut se faire de la manière suivante :

Rapportons projectivement les cubiques passant par les six points $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_6$ aux plans de l'espace. Aux points de σ correspondent les points d'une surface cubique F. Aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ correspondent six droites (deux-à-deux gauches) $a_1, a_2, \ldots, a_6$ de F ; à A_7 correspond un point A_7' et aux courbes C, les sections de F par les plans passant par A_7'.

Aux groupes de I_2 correspondent les couples de points d'intersection

-de F par les droites passant par A'_7. La courbe unie D a pour homologue la courbe de contact de F et du cône de sommet A'_7 tangent à cette surface ; c'est l'intersection de F et de la quadrique polaire de A'_7.

En projetant F de A'_7 sur un plan σ', on retrouve facilement les propriétés établies plus haut. Les droites $r_1, r_2, \dots, r_6$ sont les projections des droites $a_1, a_2, \dots, a_6$ et r_7 l'intersection de σ' et du plan tangent à F en A'_7.

§5. Involution de Bertini.

<u>25. Définition</u>. – Soit dans un plan σ huit points distincts $A_1, A_2, \dots, A_8$ dont six ne sont pas sur une conique ni trois en ligne droite. Les cubiques planes passant par ces huit points ont en commun un neuvième point B que nous supposerons distincts des huit premiers.

Considérons les sextiques C ayant des points doubles en $A_1, A_2 \dots, A_8$; elles forment un système linéaire $|C|$, de dimension $r \geqslant 3$. Supposons $r > 3$; il reste ∞^{r-3} courbes C passant par trois points arbitraires de la droite $A_7 A_8$; ces courbes contiennent cette droite comme partie et sont complétées par des quintiques ayant six points doubles $A_1, \dots, A_6$ et deux points simples A_7, A_8. Ces ∞^{r-3} quintiques ont nécessairement une partie fixe en commun ; cela conduit à l'existence d'une droite contenant au moins trois des points $A_1, A_2, \dots, A_8$ ou d'une conique contenant au moins six de ces points. On a donc $r = 3$.

Nous démontrerons plus loin que les courbes C passant par un point P_1 passent en conséquence par un second point P_2. L'ensemble des couples de points P_1, P_2 constitue l'involution de Bertini I_2.

<u>26. L'involution de Bertini sur une surface cubique</u>. – Rapportons projectivement les cubiques passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$ aux plans de l'espace. Aux points du plan σ correspondent les points d'une surface cubique F. Aux points $A_1, A_2, \dots, A_6$ correspondent six droites deux-à-deux gauches de F ; aux points A_7, A_8 correspondent des points A'_7, A'_8 de F ; aux cubiques passant par $A_1, A_2, \dots, A_8$ correspondent les sections de F par les plans par la droite $A'_7 A'_8$. Au point B correspond donc le troisième point d'intersection B' de la droite $A'_7 A'_8$ avec F. (Cette droite ne peut évidemment appartenir à F).

Aux sextiques C correspondent sur F les sextiques C' découpées par les quadriques Q tangentes à F en A'_7 et A'_8.

Les courbes C' passant par un point P'_1 de F sont découpées par les quadriques Q contenant la conique γ passant par P'_1, A'_7, A'_8 et touchant F en ces deux derniers points. Si α est le plan de γ, le sixième point d'intersection P'_2 de γ et de F appartient à toutes les courbes C' passant par P'_1. Aux points P'_1, P'_2 correspondent dans le plan σ deux points P_1, P_2 formant un couple de l'involution de Bertini I_2. Nous désignerons par I'_2 l'involution formée par les couples P'_1, P'_2 sur F.

Soit β le plan tangent à F en B'. Dans le plan α, les cubiques passant par A'_7, A'_8, B' en y touchant F, passant en outre par P'_1, P'_2 forment un faisceau et ont en commun un neuvième point P'_0. Ce faisceau comprend d'une part la section de F par α et d'autre part la cubique formée par γ et la droite $\alpha\beta$; il en résulte que P'_0 est le point commun aux droites $P'_1 P'_2$ et $\alpha\beta$, car la cubique formée de $P'_1 P'_2$ et la droite $A'_7 A'_8$ comptée deux fois appartient également au faisceau.

La section (F,β) de F par β possède un point double en B; les droites s'appuyant sur la droite $r = A'_7 A'_8$ et sur (F,β) forment une congruence linéaire dont les rayons coupent F suivant les couples de I'_2.

<u>37. Eléments fondamentaux.</u> — Considérons les courbes C tangentes en A_1 à une droite m; il leur correspond les courbes C' passant par un point M' de a_1. Le lieu du point homologue de M' dans I'_2 lorsque m tourne autour de A_1 est la courbe d'intersection de F et de la surface lieu des droites s'appuyant sur a_1, sur r et sur (F,β). Cette surface est du troisième ordre et a la droite r comme droite double. Il en résulte que le lieu des points formant des couples de I_2 avec les points infiniment voisins de A_1 est une courbe φ_1, d'ordre six, passant deux fois par les points $A_2, A_3, \ldots\ldots, A_8$.

Il existe trois droites s'appuyant sur a_1, r, (F,β), tangentes à F aux points d'appui sur a_1; par suite, il existe trois points infiniment voisins de A_1 unis pour I_2. Ces points appartiennent à la courbe φ_1, qui a donc un point triple en A_1.

On obtient des résultats analogues pour les courbes $\varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots, \varphi_8$ associées aux points $A_2, A_3, \ldots, A_8$.

Remarquons que la courbe φ_1 est la seule courbe C ayant un point triple en A_1.

28.. Courbe unie de I_2 .. Si P_1' est un point uni de I_2', la tangente à F en ce point s'appuyant sur r rencontre la courbe (F,β) en un point P_0' et par conséquent le point P_1' est situé sur la conique polaire γ' de P_0' par rapport à la section de F par le plan rP_0'. Le lieu de ces coniques γ' lorsque P_0' décrit la courbe (F,β) est une surface Φ du cinquième ordre, passant trois fois par r et touchant F le long de (F,β).

En effet, dans un plan passant par r se trouve une seule conique γ'. D'autre part, le nombre de coniques γ' passant par un point de r est égal au nombre d'intersections de (F,β) et du plan polaire de ce point par rapport à F, c'est-à-dire à trois. Enfin, la conique γ' relative à un point P_0' de (F,β) touche F en ce point.

A la section de F par Φ correspond dans σ une courbe d'ordre quinze comprenant comme partie la cubique homologue de (F,β) comptée deux fois et complétée par la courbe unie D de I_2. Celle-ci est donc d'ordre neuf et passe trois fois par chacun des points $A_1, A_2, \ldots, A_8$. En A_1, par exemple, elle a les mêmes tangentes que la courbe φ_1.

Observons que toutes les coniques γ' passent par B', qui est donc quadruple pour Φ. Comme la cubique de σ homologue de (F,β) a un point double en B, ce point n'appartient pas à la courbe unie D.

Les courbes C passant par B forment un réseau ; chacune de ces courbes est formée de deux cubiques passant par $A_1, A_2, \ldots, A_8, B$. D'ailleurs, les quadriques Q passant par B' sont formées de deux plans passant par r. Il en résulte que le point B est son propre homologue, c'est un point uni isolé de I_2.

29. Représentation de I_2 sur une quadrique.. Rapportons projectivement les courbes C aux plans de l'espace. Deux courbes C ayant en commun deux groupes de I_2, nous obtenons ainsi une quadrique Q', image de l'involution I_2. Aux génératrices rectilignes de Q' correspondent des cubiques de σ passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Il en résulte que la quadrique Q' est un cône dont le sommet B_0 correspond au point B.

Aux courbes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_3$ correspondent des sections planes $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_8'$ du cône Q'. La courbe de diramation D' est du sixième ordre et touche chacune des coniques $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_8'$ en trois points.

Une quintique ayant des points doubles en six des points

$A_1, A_2, \ldots, A_8$ et passant par les deux derniers, forme avec la droite joignant ceux-ci, une courbe C. Il existe 56 courbes C de ce type. Une quartique ayant des points doubles en trois des points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ et passant par les cinq autres, forme, avec la conique passant par ceux-ci, une courbe C. Il existe 56 courbes C de ce type. A ces 112 courbes C dégénérées, correspondent des sections de Q' par des plans tritangents de la courbe D'. Celle-ci possède donc 120 plans tritangents.

30. La transformation birationnelle génératrice de I_2. — Soit T la transformation birationnelle du plan σ génératrice de I_2, c'est-à-dire faisant correspondre à un point P_1 le point P_2 qui, avec P_1, forme un couple de I_2.

La transformation T ne peut posséder que les points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ comme points fondamentaux. A une droite g, T fait correspondre une courbe G d'ordre n passant six fois par chacun des points $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Les courbes G forment un réseau homaloïdal; on doit donc avoir $n^2-1 = 8{,}6^2$, d'où $n = 17$.

On en conclut qu'une droite g contient quatre groupes de I_2, l'intersection de g et de G se composant de ces quatre couples et des points communs à g et à D.

L'ensemble d'une droite g et de la courbe G qui lui correspond appartient à un système linéaire de courbes d'ordre 18, composé au moyen de I_2 et qui a pour homologue, sur Q', les courbes découpées sur ce cône par les surfaces cubiques.

Le lieu des points communs aux droites g d'un faisceau et à leurs transformées G est une courbe du 18^e ordre comprenant la courbe D comme partie. La partie variable passe par B et a pour homologue, sur le cône Q', une cubique gauche passant par le sommet B_0 de ce cône.

§ 6. Homographie plane cyclique de période trois

31. Définition. Les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 . \qquad (H)$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité, définissent une homographie cyclique H de période trois. Cette homographie engendre une involution I_3, d'ordre trois, un groupe de cette involution étant constitué par les points (x_1, x_2, x_3), $(x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^2 x_3)$, $(x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_3)$.

L'involution I_3 possède trois points unis; les sommets $O_1(1,0,0)$,

, $O_2(0,1,0)$, $O_3(0,0,1)$ du triangle de référence.

32.-. Systèmes linéaires de cubiques composés au moyen de I_3.

Il existe trois systèmes linéaires de cubiques composés au moyen de I_3. Le premier,

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0 \qquad (1)$$

est dépourvu de points-base. Les deux autres,

$$\lambda_1 x_1^2 x_2 + \lambda_2 x_2^2 x_3 + \lambda_3 x_3^2 x_1 = 0 , \qquad (2)$$

$$\lambda_1 x_1^2 x_3 + \lambda_2 x_2^2 x_1 + \lambda_3 x_3^2 x_2 = 0 , \qquad (3)$$

ont comme points-base les points unis et ont des tangentes fixes en ces points.

Le système (1) a le degré neuf, les (2) et (3) le degré trois.

33. Représentation de I_3 sur une surface cubique.-. Rapportons projectivement les courbes (1) aux plans de l'espace en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^3 : x_2^3 : x_3^3 : x_1 x_2 x_3 .$$

Nous obtenons ainsi une surface cubique F, d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3 ,$$

dont les points représentent les groupes de I_3.

Considérons le point uni O_1 ; il lui correspond, sur F, le point de diramation $O_1'(1,0,0,0)$, qui est double biplanaire pour cette surface. Pour voir comment naît cette singularité, étudions la structure du point uni O_1.

Considérons une courbe

$$x_1^{n-1}(a_2 x_2 + a_3 x_3) + x_1^{n-2}\varphi_2(x_2, x_3) + \cdots = 0$$

passant par O_1 et les courbes que H et H^2 lui font correspondre,

$$x_1^{n-1}(a_2 x_2 + a_3 \varepsilon x_3) + x_1^{n-2}\varepsilon\varphi_2(x_2, \varepsilon x_3) + \cdots = 0,$$

$$x_1^{n-1}(a_2 \varepsilon x_2 + a_3 x_3) + x_1^{n-2}\varepsilon\varphi_2(\varepsilon x_2, x_3) + \cdots = 0.$$

Si a_2, a_3 ne sont pas nuls, ces courbes ont des tangentes distinctes en O_1 ; si $a_2 = 0$, ou si $a_3 = 0$, ces courbes ont même tangente, $x_3 = 0$ ou $x_2 = 0$, en O_1. On en conclut que dans le domaine du premier ordre de O_1, H détermine une involution possédant deux points unis, sur $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Nous désignerons respectivement par O_{12}, O_{13} ces points unis, infiniment voisins de O_1.

Supposons $a_3 = 0$ dans les équations précédentes et passons aux coordonnées cartésiennes en posant $x_1 = 1$, $x_2 = y$, $x_3 = x$. Les valeurs y_0', y_0'' de y', y'' au point O_1, tirées des équations précédentes, sont les mêmes :

$$y_0' = 0, a_2 y_0'' + 2\varphi_2(0,1) = 0,$$

c'est-à-dire que les courbes s'osculent en O_1. On en conclut que les points du domaine du second ordre de O_1, infiniment voisins de O_{12}, sont unis pour I_3. On arrive à la même conclusion en en considérant O_{13}.

Cela étant, considérons les courbes (1) passant par O_1 ; elles sont données par $\lambda_1 = 0$ et ont en O_1 un point double à tangentes fixes $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. A ces courbes correspondent les sections de F par les plans passant par O'_1, courbes qui ont un point double en O'_1.

Considérons la conique

$$x_3^2 - \alpha x_1 x_2 = 0,$$

tangente en O_1 à $x_2 = 0$. Les courbes (1) passant par O_1 coupent en général cette conique en trois points réunis en O_1 ; celles qui osculent cette conique en O_1 sont représentées par

$$\lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 (x_3^3 - \alpha x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Il leur correspond les sections de F par les plans

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 (X_3 - \alpha X_4) = 0,$$

courbes qui ont en commun un point infiniment voisin de O'_1 dans le plan $X_2 = 0$. Par conséquent, aux points du domaine du second ordre de O_1, infiniment voisins de O_{12} (ou de O_{13}), correspondent les points de F infiniment voisins de O'_1, situés dans le plan $X_2 = 0$ (ou $X_3 = 0$).

Considérons ensuite les courbes (1) ayant un point triple en O_1 ; elles sont données par $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ et il leur correspond les sections de F par les plans passant par la droite commune aux plans tangents à O'_1. Les courbes considérées, $\lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0$, sont dégénérées en trois droites passant par O_1 et ces droites sont transformées les unes dans les autres par H. Les groupes de I_3 portés par ces trois droites sont représentés sur F par les points d'une cubique

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 \quad , \quad \lambda_1 X_1 X_2^2 - \lambda_3 X_4^3 = 0,$$

ayant un point de rebroussement en O'_1. On en conclut qu'aux groupes de I_3 formés de points du domaine du premier ordre de O_1 correspond le point de F infiniment voisin de O'_1 sur la droite $X_2 = X_3 = 0$.

Les autres points de diramation de F donnent lieu aux mêmes considérations.

<u>34. Systèmes de surfaces cubiques osculant F.</u> — Partons des courbes (2). En élevant les deux membres de cette équation au cube, on en déduit

$$\begin{aligned}\lambda_1^3 X_1^2 X_2 + \lambda_2^3 X_2^2 X_3 + \lambda_3^3 X_3^2 X_1 + 3 X_4 (\lambda_1^2 \lambda_2 X_1 X_2 + \lambda_2^2 \lambda_3 X_2 X_3 + \lambda_3^2 \lambda_1 X_3 X_1) \\ + 3 X_4^2 (\lambda_1^2 \lambda_3 X_1 + \lambda_2^2 \lambda_1 X_2 + \lambda_3^2 \lambda_1 X_3) + 6 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 X_4^3 = 0. \qquad (4)\end{aligned}$$

Cette surface rencontre F suivant une courbe Γ_2 homologue d'une courbe (2).

Si nous projetons Γ_2 de O'_1, de O'_2, de O'_3, nous trouvons respectivement

$$(\lambda_1 X_4^2 + \lambda_2 X_2 X_3 + \lambda_3 X_3 X_4)^3 = 0 \quad , \quad (\lambda_1 X_1 X_4 + \lambda_2 X_4^2 + \lambda_3 X_3 X_1)^3 = 0,$$
$$(\lambda_1 X_1 X_2 + \lambda_2 X_2 X_4 + \lambda_3 X_4^2)^3 = 0,$$

ce qui montre que la courbe Γ_2 est une cubique gauche le long de laquelle la surface (4) a un contact du second ordre avec F. La courbe Γ_2 passe par les points O'_1, O'_2, O'_3 en y touchant respectivement les plans $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_1 = 0$.

De même, aux courbes (3) correspondent au F des cubiques gauches Γ_3 touchant $X_3 = 0$ en O'_1, $X_1 = 0$ en O'_2, $X_2 = 0$ en O'_3. La surface

$$\lambda_1^3 X_1^2 X_3 + \lambda_2^3 X_2^3 X_1 + \lambda_3^3 X_3^2 X_2 + 3 X_4 (\lambda_1^2 \lambda_3 X_1 X_3 + \lambda_2^2 \lambda_1 X_2 X_1 + \lambda_3^2 \lambda_2 X_3 X_2)$$
$$+ 3 X_4^2 (\lambda_1^2 \lambda_2 X_1 + \lambda_2^2 \lambda_3 X_2 + \lambda_3^2 \lambda_1 X_3) + 6 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 X_4^3 = 0$$

oscule F le long d'une courbe Γ_3.

35. <u>Représentation de I_3 sur un plan</u>.— Pour obtenir la représentation de I_3 sur un plan, rapportons projectivement les courbes (2) par exemple aux droites d'un plan σ' en posant

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1^2 x_2 : x_2^2 x_3 : x_3^2 x_1.$$

Les courbes (2) rencontrent la conique $x_3^2 - \alpha x_1 x_2 = 0$ en deux points confondus en O_1 ; celles qui osculent cette conique en ce point sont données par $\lambda_1 + \alpha \lambda_3 = 0$; il leur correspond dans σ' les droites passant par le point $(\alpha, 0, 1)$. Ce point correspond au point infiniment voisin de O_{12} situé sur la conique considérée. Au domaine de O_{12} correspond donc la droite $x'_2 = 0$.

Aux groupes de I_3 situés sur la droite $x_3 = 0$ correspond le point $O'_1 (1, 0, 0)$.

Les courbes (2) touchant $x_3 = 0$ en O_1 sont données par $\lambda_1 = 0$; il leur correspond dans σ' les droites passant par O'_1, donc les points infiniment voisins de O'_1 correspondent au point O_{13}.

La courbe de diramation de σ' est formée des droites $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$.

Aux courbes (3) correspondent les courbes

$$\lambda_1 x'_1 x'_3 + \lambda_2 x'_1 x'_2 + \lambda_3 x'_2 x'_3 = 0.$$

Aux courbes (1) correspondent les courbes

$$\lambda_1 x'^2_1 x'_3 + \lambda_2 x'^2_2 x'_1 + \lambda_3 x'^2_3 x'_2 + \lambda_4 x'_1 x'_2 x'_3 = 0.$$

On sait d'ailleurs que ce système linéaire de cubiques fournit une représentation plane de la surface F.

Il nous reste à examiner ce qui correspond aux groupes de I_3 situés dans le domaine du premier ordre de O_1. Considérons la conique;

$$x'_1 x'_2 + \mu_0 x'^2_2 + \mu_1 x'_2 x'_3 + \mu_2 x'^2_3 = 0 ;$$

il lui correspond, dans σ, la courbe

$$x_1^2 (x_2^3 + \mu_2 x_3^3) + \mu_1 x_1 x_2^2 x_3 + \mu_0 x_2^4 x_3 = 0 .$$

Par conséquent, si O'_{12} est le point infiniment voisin de O'_1 sur $x'_2 = 0$, aux groupes de I_3 appartenant au domaine du premier ordre de O_1 correspondent les points infiniment voisins de O'_{12}.

On obtient une représentation analogue en partant du système (3).

Chapitre II.

Une correspondance rationnelle entre deux espaces.

§1... Correspondance de Reye.

36... Définition... Soient $A_1, A_2, \dots, A_6$ six points de l'espace ; ils dé-terminent une cubique gauche K que nous supposerons irréductible. Les quadriques passant par ces six points forment un système linéaire triplement infini $|Q|$. Trois quadriques du système $|Q|$ n'appartenant pas à un même faisceau ont encore en commun deux points P_1, P_2, variables avec les quadriques.

Rapportons projectivement les quadriques Q aux plans d'un espace Σ' et désignons par Σ l'espace contenant $|Q|$. Au couple de points P_1, P_2 commun à trois quadriques correspond le point P' commun aux trois plans homologues ; nous avons donc une correspondance (1,2) entre les espaces Σ', Σ, correspondance étudiée par Reye. Les couples de points P_1, P_2 forment dans Σ une involution I_2, d'ordre deux.

37... Surface unie et surface de diramation... Considérons un couple P_1, P_2 de I_2 et soit p la droite que ces points déterminent. Dans le système $|Q|$ se trouvent les quadriques circonscrites à K ; nous les désignerons par Q_0. Elles forment un réseau $|Q_0|$. Par P_1, P_2 passent ∞^2 quadriques Q formant un réseau et parmi ces quadriques se trouvent ∞^1 quadriques Q_0 formant un faisceau. La base de ce faisceau est constituée par K et par une droite passant par P_1, P_2 ; il en résulte que p est une bisécante de K.

Soit P un point uni de I_2. Les quadriques Q passant par P touchent en ce point la bisécante de K passant par P. Il en résulte que le point P appartient à la jacobienne Φ de $|Q|$. Inversement, si P est un point de Φ, il est le sommet d'un cône du second ordre passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$; le couple de I_2 contenant P est situé sur ce cône et sur la bisécante de K passant par P ; il est donc formé du point P compté deux fois. La surface unie de I_2 coïncide avec la jacobienne Φ de $|Q|$.

La jacobienne Φ de $|Q|$ est une surface du quatrième ordre, ayant des points doubles en $A_1, A_2, \dots, A_6$, appelée surface de Weddle. C'est le lieu des sommets des cônes du second ordre passant par

$A_1, A_2, \ldots, A_6$.

La surface Φ passe évidemment par K, puisque tout point de cette courbe est le sommet d'un cône du second ordre passant par K. La courbe K est simple pour Φ. Soit en effet p une bisécante de K, s'appuyant en R_1, R_2 sur cette courbe. Les quadriques Q dé-coupent sur p une involution du second ordre dont R_1, R_2 forment un couple. Cette involution possède deux points doubles, apparte-nant à Φ, car toutes les quadriques de $|Q|$ passant par un de ces points y touchent p (ou en particulier contiennent p). La droite p rencontre donc encore Φ en deux points en dehors de R_1, R_2.

Tout point de la droite $a_{ik} = A_i A_k$ est le sommet d'un cône du second ordre appartenant à $|Q|$; cette droite appartient donc à Φ. Le plan déterminé par trois des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et le plan dé-terminé par les trois autres forment une quadrique de $|Q|$; la droite commune à ces deux plans appartient à Φ. Ces différen-tes droites sont évidemment simples pour la surface Φ.

A une droite de Σ' correspond dans Σ une courbe du qua-trième ordre C rencontrant Φ en quatre points en dehors de A_1, $A_2, \ldots, A_6$; par conséquent la surface de diramation Φ est du quatrième ordre.

<u>38. Points et plans singuliers de la correspondance.</u> — Parmi les quadriques de $|Q|$, il en est seize présentant une particularité et qu'il importe de considérer ; ce sont les six cônes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ projetant K respectivement de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et les dix quadriques formées de deux plans passant chacun par trois des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Nous désignerons par $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_6$ les plans de Σ' qui corres-pondent respectivement aux cônes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$. Ces cônes ap-partiennent au réseau $|Q_0|$, auquel correspond dans Σ' une gerbe de plans de sommet A'_0 ; les plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_6$ passant par A'_0.

Désignons par α_{ikl} le plan passant par les points A_i, A_k, A_l. A la quadrique Q formée de ce plan et du plan passant par les trois autres points correspond dans Σ' un plan que nous dé-signerons par α'_{ikl}.

Parmi les réseaux appartenant à $|Q|$, il en est seize que nous considérerons particulièrement ; ce sont le réseau $|Q_0|$ et les quin-ze réseaux formés par les quadriques Q contenant une des droi-tes a_{ik}. Au réseau formé par les quadriques passant par a_{ik} correspond, dans Σ', une gerbe de plans dont nous désignerons le sommet par A'_{ik}.

Il est facile de voir que chacun des plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_6, \alpha'_{123}, \dots$ contient six des points $A'_0, A'_{12}, \dots, A'_{56}$ et qu'inversement, un de ces points appartient à six de ces plans. Ainsi le plan α'_1 contient les points $A'_0, A'_{12}, \dots, A'_{16}$; le plan α'_{123} les points $A'_{23}, A'_{31}, A'_{12}, A'_{56}, A'_{64}, A'_{45}$; par le point A'_{12} passent les plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_{123}, \alpha'_{124}, \alpha'_{125}$ et α'_{126}.

La configuration formée par ces seize points et ces seize plans est la configuration Kummer. Nous allons voir que la surface Φ' possède les seize points comme points doubles et touche chacun des seize plans suivant une conique.

39. <u>La correspondance dans le domaine du point A_i.</u> Soit p une droite passant par le point A_1, non tangente à K en ce point et ne rencontrant pas une seconde fois cette courbe. Parmi les quadriques Q tangentes à p en A_1 se trouve le cône Q_1, donc à ces quadriques correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe dont le sommet P' appartient au plan α'_1. Le couple de I_2 homologue de P' est formé du point P_1 infiniment voisin de A_1 sur p et d'un second point P_2 appartenant à Q_1.

Considérons maintenant un plan ϖ passant par A_1. Les quadriques Q touchant ϖ en A_1 forment un faisceau dont fait partie Q_1 ; il leur correspond dans Σ' les plans d'un faisceau dont l'axe appartient à α'_1. Il en résulte qu'entre le domaine du premier ordre de A_1 (ou si l'on préfère entre la gerbe de droites de sommet A_1) et le plan ponctuel α'_1, il existe une homographie.

Soient r une génératrice du cône Q_1, R son second point d'appui sur K. Il ne peut exister un point de r, distinct de A_1, R, appartenant à Φ, car les ∞^2 quadriques Q touchant r en ce point contiendraient r, donc R et par suite K ; or il n'existe que ∞^1 quadriques Q satisfaisant à ces conditions. Il en résulte que le cône tangent à Φ au point double A_1 de cette surface coïncide avec Q_1. Par conséquent, les points de Q_1 infiniment voisins de A_1 sont unis pour I_2 et dans l'homographie rencontrée plus haut, à ces points correspondent dans α'_1 les points d'une conique Γ'_1 appartenant à Φ'.

De même, les plans $\alpha'_2, \alpha'_3, \dots, \alpha'_6$ contiennent des coniques $\Gamma'_2, \Gamma'_3, \dots, \Gamma'_6$ appartenant à la surface de diramation Φ'.

Le plan α'_1 ne peut contenir de point de diramation en dehors de Γ'_1. D'autre part, cette conique ne peut être double pour Φ', car il en serait de même de $\Gamma'_2, \dots, \Gamma'_6$, ce qui est absurde. Il en résulte que α'_1 touche Φ' le long de Γ'_1.

La conique Γ'_1 passe par les points $A'_{12}, A'_{13}, \ldots\ldots, A'_{16}$ et par le point A'_0 qui, dans la correspondance homographique entre le domaine de A_1 et le plan α'_1, correspond à la tangente à K en A_1.

On arrive à des conclusions analogues pour les coniques Γ'_2, $\Gamma'_3, \ldots, \Gamma'_6$.

40. Correspondance entre les plans α_{ikl} et α'_{ikl}. — Considérons le plan α'_{123} et la quadrique Q homologue, formée des plans α_{123} et α_{456}. Les quadriques Q passant par un point P_1 de α_{123} passant par un point P_2 de α_{456} et au couple P_1, P_2 correspond un point P' de α'_{123}. Les trois plans sont donc deux-à-deux liés par des correspondances birationnelles.

Aux plans passant par une droite p' de α'_{123} correspondent des quadriques Q formant un faisceau comprenant $\alpha_{123}+\alpha_{456}$ et dont la base est par suite formée d'une conique γ_1 de α_{123} et d'une conique γ_2 de α_{456}.

La conique γ_1 passe par les points A_1, A_2, A_3 et par suite entre les plans α'_{123} et α_{123}, nous avons une correspondance quadratique.

Soit a_{123} la droite commune aux plans $\alpha_{123}, \alpha_{456}$. Cette droite appartient à la surface Φ et tous ses points sont donc unis. A cette droite correspond dans α'_{123} une conique Γ'_{123} passant par les points fondamentaux $A'_{23}, A'_{31}, A'_{12}$ de la transformation quadratique existant entre α'_{123} et α_{123}.

La conique Γ'_{123} correspond aussi à la droite a_{123} dans la transformation quadratique existant entre les plans $\alpha'_{123}, \alpha_{456}$, donc elle passe par les points fondamentaux $A'_{56}, A'_{64}, A'_{45}$ de cette transformation.

La conique Γ'_{123} appartient à la surface Φ et le plan α'_{123} ne peut rencontrer cette surface en dehors de cette conique.

On démontre de même que chacun des dix plans α'_{ikl} rencontre Φ suivant une conique Γ'_{ikl}. Ces coniques ne peuvent être doubles pour Φ', donc le plan α'_{ikl} touche Φ' le long de la conique Γ'_{ikl}.

41. — Singularité du point A'_0 pour la surface Φ'. Aux plans passant par A'_0 correspondent les quadriques Q_0 passant par K, par conséquent à une droite p' passant par A'_0 correspond une bisécante p de K. Nous avons vu que p rencontre Φ en dehors de ses points d'appui R_1, R_2 sur K, donc p' rencontre Φ' en deux points en dehors de A'_0 et ce point est double pour Φ'.

Désignons par ρ'_1, ρ'_2 les plans qui correspondent dans Σ' aux cônes de sommets R_1, R_2 circonscrits à K ; ces plans se coupent suivant la droite p'. Lorsque le point R_2 décrit K, le plan ρ'_2 enveloppe un cône de seconde classe, tangent à ρ'_1. La caractéristique de ρ'_1 est la droite qui correspond à la tangente à K en R_1.

Soit p_1 la tangente à K en R_1. Les quadriques Q découpent sur p_1 une involution possédant deux points unis dont l'un est R_1. Il en résulte que la droite p'_1 qui correspond à p_1 ne coupe plus Φ' qu'en un point en dehors de A'_0 ; cette droite est donc tangente à Φ' en A'_0. Le point A'_0 est double conique pour Φ', le cône tangent correspondant à l'ensemble des tangentes à K ; ce cône est enveloppé par les plans qui correspondent aux cônes circonscrits à K ; en particulier, il touche $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_6$.

42. Singularité des points A'_{ik} pour la surface Φ. — Soit p' une droite passant par A'_{12} mais non par A'_0. Aux plans passant par p' correspondent des quadriques dont l'une, $\bar{Q}$, passe par K. La base de ce faisceau est formée de la droite a_{12} et d'une cubique gauche K_1 passant par A_3, A_4, A_5, A_6 et s'appuyant en deux points P_1, P_2 sur a_{12}.

A un point R' de p' correspondent deux points R_1, R_2 de K_1 tels que la droite R_1R_2 soit une bisécante de K. Cette droite R_1R_2 appartient donc à $\bar{Q}$. Il existe deux bisécantes de K, K_1 tangentes à K_1 ; les points de contact appartiennent à Φ et par conséquent la droite p' rencontre Φ' en deux points en dehors de A'_{12}. Ce point est double pour Φ'.

Dans le faisceau de quadriques dont il vient d'être question, se trouvent les cônes projetant K_1 de P_1, P_2. Aux cônes de $|Q|$ dont les sommets appartiennent à a_{12}, correspondent des plans passant par A'_{12} et enveloppant un cône de seconde classe γ'_{12}, car par K_1 ne passent que deux de ces cônes. Les génératrices de ce cône correspondent aux cubiques gauches K_1 tangentes à la droite a_{12}.

Soit p' une génératrice du cône γ'_{12}. La cubique gauche K_1 qui lui correspond étant tangente à a_{12}, il n'existe plus qu'une autre bisécante de K tangente à K_1 et par suite la droite p' ne rencontre plus Φ' qu'en un point en dehors de A'_{12}. Ce point est donc double conique pour Φ', le cône tangent étant γ'_{12}.

De même, les points $A'_{13}, \ldots, A'_{56}$ sont doubles coniques pour Φ'.

<u>La surface de diramation Φ' possède seize points doubles coniques et seize plans tangents la touchant chacun le long d'une conique ; chacune de ces coniques passe par six points doubles de la surface.</u>

La surface Φ' est appelée surface de Kummer.

13.-. Courbes et surfaces de Σ' homologues des droites et des plans de Σ.-. Soient p une droite de Σ et φ' la courbe qui lui correspond dans Σ'. A un plan de Σ' correspond une quadrique de Σ, donc la courbe φ' rencontre ce plan en deux points et est une conique. Au plan de cette conique correspond l'unique quadrique Q contenant p.

A la conique φ' correspond dans Σ une courbe du huitième ordre formée de la droite p et d'une courbe du septième ordre φ ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_6$. La courbe φ s'appuie sur la droite p aux quatre points de rencontre de celle-ci avec Φ. La conique φ' rencontre donc la surface Φ' en quatre points.

Soient α' le plan de la conique φ', Q^* la quadrique qui lui correspond. La droite p et la courbe φ appartiennent à cette quadrique. Considérons un point P' de φ' et les points P_1 de p et P_2 de φ qui leur correspondent. Il existe une quadrique Q, distincte de Q^*, tangente à p en P_1 et par suite tangente à φ en P_2 ; à cette quadrique correspond dans Σ' un plan coupant α' suivant la tangente à φ' en P'. Supposons maintenant que P' soit un des points de rencontre de φ' et de Φ' ; les points P_1, P_2 sont confondus en un point P commun à p, φ et à Φ. Parmi les quadriques Q tangentes à p en P, se trouve le cône ayant ce point pour sommet. Or, à ce cône correspond le plan tangent à Φ' en P', donc φ' touche Φ' en ce point.

Aux droites de Σ correspondent dans Σ' des coniques tangentes en quatre points à la surface de diramation Φ.

Soit maintenant σ un plan de Σ. A une droite de Σ' correspond dans Σ une courbe du quatrième ordre, donc à σ correspond dans Σ' une surface du quatrième ordre Ψ'. A la surface Ψ' correspond, dans Σ, une surface du huitième ordre formée du plan σ et d'une surface Ψ d'ordre sept.

A une droite passant par A'_0 correspond une bisécante de K, rencontrant σ en un seul point, donc A'_0 est un point triple de Ψ'. En particulier, il existe trois droites r'_1, r'_2, r'_3 issues de A'_0 auxquelles correspondent des bisécantes de K appartenant à σ ; ces droites appartiennent donc à Ψ'. Soit r_1 la bisécante de K homologue de r'_1. Aux plans passant par r'_1 correspondent les quadriques Q passant par K et r_1. Aux plans passant par une droite p' s'appuyant sur r'_1 correspondent les quadriques Q passant par une courbe du quatrième ordre dont r_1 est une bisécante ; il en résulte que la droite p' ne rencontre plus Ψ' qu'en deux points en dehors de r'_1, donc les droites r'_1, r'_2, r'_3 sont doubles pour Ψ' et cette surface est une surface de Steiner.

La droite a_{ik} coupe σ en un point, donc la surface Ψ' passe par le point A'_{ik}. D'autre part, la surface Ψ' contenant ∞^2 coniques ψ' tangentes à Φ', est inscrite dans cette surface.

Aux plans de Σ correspondant dans Σ' des surfaces de Steiner ayant leur point triple en A'_0, passant par les quinze points $A'_{12}, A'_{13}, \ldots, A'_{56}$ et inscrites dans la surface de diramation Φ'.

Les surfaces Ψ' touchent Φ' suivant des courbes du huitième ordre ayant un point triple en A'_0 et passant par $A'_{12}, A'_{13}, \ldots, A'_{56}$.

44. Relation avec l'involution de Geiser. Soit Q^* une quadrique du système $|Q|$ ne passant pas par K; elle contient ∞^2 couples de I_2 et les autres quadriques de $|Q|$ la rencontrent suivant ∞^2 courbes C du quatrième ordre passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Deux courbes C se rencontrent encore suivant un couple de I_2.

Projetons la quadrique Q^* sur un plan ϖ à partir de A_6, par exemple et soient $A'_1, A'_2, \ldots, A'_5$ les projections de $A_1, A_2, \ldots, A_5$; B_1, B_2 les intersections de ϖ avec les droites de Q^* passant par A_6. Aux courbes C correspondent, dans ϖ, des cubiques C' passant par les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_5, B_1, B_2$ et par conséquent aux couples de I_2 appartenant à Q^* correspondant dans ϖ les couples d'une involution de Geiser.

§2. La transformation birationnelle génératrice de l'involution I_2.

45. Eléments fondamentaux. Les points P_1, P_2 d'un couple de I_2 se correspondent dans une transformation birationnelle T génératrice de I_2. Nous avons vu qu'à une droite, T fait correspondre une courbe ψ du septième ordre, ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et qu'à un plan, elle fait correspondre une surface Ψ d'ordre sept. Nous commencerons par déterminer les éléments fondamentaux de T.

Aux points infiniment voisins du point A_i correspondent les points du cône Q_i, qui est donc la surface fondamentale associée à A_i.

D'après ce que nous avons vu, tout couple de points de la droite a_{ik} appartient à I_2, donc a_{ik} est fondamentale de seconde espèce.

Tout couple de points de la cubique gauche K appartient à I_2, donc K est une courbe fondamentale de seconde espèce.

La transformation T possède donc six points fondamentaux, quinze droites et une cubique gauche fondamentales de seconde espèce.

46... <u>Système homaloïdal.</u> — D'après les propriétés des courbes fondamentales de seconde espèce, aux points d'un plan σ correspondent les points d'une surface Ψ, du septième ordre, passant simplement pour les quinze droites a_{ik} et triplement par la cubique gauche K.

Aux points infiniment voisins de A_i, situés dans un plan, correspondent les points d'une biquadratique tracée sur Q_i (et ayant un point double en A_i, par conséquent les points $A_1, A_2, \dots, A_6$ sont quadruples pour la surface Ψ.

Deux surfaces Ψ ont en commun, outre K et les droites a_{ik}, une courbe φ du septième ordre passant deux fois par chacun des points $A_1, A_2, \dots, A_6$. Trois surfaces Ψ, n'appartenant pas à un même faisceau, ont en commun un seul point variable.

La jacobienne du système homaloïdal $|\Psi|$, d'ordre 24, se compose des six cônes $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ comptés chacun deux fois.

47... <u>Surfaces du huitième ordre unies.</u> — L'ensemble d'un plan et de sa transformée Ψ constitue une surface du huitième ordre appartenant à un système linéaire $|F|$. Ces surfaces F ont le même comportement que les surfaces Ψ aux éléments fondamentaux de T.

A une surface de $|F|$, T fait correspondre une surface de $|F|$ et il existe donc, dans $|F|$, deux systèmes linéaires de surfaces unies pour T. Soit F_1 une surface de $|F|$, irréductible, unie pour T. Il lui correspond, dans Σ', une surface F'_1 du quatrième ordre.

Une bisécante de K coupe encore F_1 en deux points formant un couple de I_2, donc A'_0 est triple pour la surface F'_1. Inversement, à une surface du quatrième ordre de Σ', ayant un point triple en A'_0, correspond une surface du huitième ordre, appartenant à $|F|$, et unie pour T. Les surfaces F_1 forment donc un système linéaire $|F_1|$ de dimension 24.

L'intersection d'un plan σ et de la surface Ψ homologue se compose de la section de Φ par σ et d'une cubique plane. Si le plan σ décrit un faisceau, la surface Ψ décrit un faisceau projectif et le lieu des courbes communes aux éléments homologues est une surface du huitième ordre formée de la surface Φ et d'une surface F_0 du quatrième ordre. La surface $F_0 + \Phi$ appartient au système $|F|$ et par conséquent la surface F_0 a comme courbe double la cubique gauche K. La surface F_0 est par suite réglée, lieu de bisécantes de K. Il lui correspond, dans Σ', un cône du second ordre de sommet A'_0. Les surfaces F_0 forment un système linéaire de dimension cinq et par suite le système $|F|$ a la dimension 30.

§ 3. Applications.

48. Equation de la surface de Kummer. — Pour définir le système $|Q|$, nous prendrons la cubique gauche K d'équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u^3 : u^2 : u : 1$$

et une quadrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum a_{ik} x_i x_k = 0$$

ne passant pas par K. L'équation d'une quadrique Q est alors

$$\lambda_1 (x_2 x_4 - x_3^2) + \lambda_2 (x_2 x_3 - x_1 x_4) + \lambda_3 (x_1 x_3 - x_2^2) + \lambda_4 f = 0. \quad (1)$$

Nous poserons

$$\frac{X_1}{x_2 x_4 - x_3^2} = \frac{X_2}{x_2 x_3 - x_1 x_4} = \frac{X_3}{x_1 x_3 - x_2^2} = \frac{X_4}{f}. \quad (2)$$

Une bisécante de K a pour équations

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = 0, \quad X_1 x_2 + X_2 x_3 + X_3 x_4 = 0$$

et pour avoir l'équation de la surface de Kummer Φ', il suffit d'écrire que cette bisécante est tangente à la surface (1). Cela donne, en tenant compte de (2),

$$\begin{aligned}
&\left[X_2 X_4 - 2a_{12} X_3^2 - 2a_{13} X_2 X_3 - 2a_{14} X_1 X_2 - 2a_{34} X_1^2 + 2a_{23} X_1 X_3 + 2a_{14}(X_2^2 + X_1 X_3)\right]^2 \\
&- 4\left[X_1 X_4 + a_{22} X_1 X_3 - 2a_{12} X_2 X_3 + 2a_{14} X_1 X_2 - 2a_{24} X_1^2\right]\left[X_3 X_4 + a_{33} X_1 X_3 - 2a_{13} X_3^2 + 2a_{14} X_2 X_3 - 2a_{34} X_1 X_2\right] \\
&- 4a_{11} X_3 \left[X_3^2 X_4 + a_{22} X_3^3 + a_{33} X_2^2 X_3 + 2(a_{24} X_3 - a_{34} X_2)(X_2^2 - X_1 X_3) - 2a_{23} X_2 X_3^2\right] \\
&- 4a_{44} X_1 \left[X_1^2 X_4 + a_{22} X_1 X_2^2 + a_{33} X_1^3 + 2(a_{13} X_1 - a_{12} X_2)(X_2^2 - X_1 X_3) - 2a_{23} X_1^2 X_2\right] \\
&- 4a_{11} a_{44} (X_2^2 - X_1 X_3)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation de la surface de Kummer. On peut la simplifier en supposant que $f = 0$ passe par les points $(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$; cela revient à poser $a_{11} = 0$, $a_{44} = 0$.

De plus, on peut supposer $a_{14} = 0$ ou $a_{23} = 0$.

49. Courbes tracées sur la surface de Kummer. — Soient S_1 une surface de Σ, S_2 la surface que T lui fait correspondre et que nous supposerons distincte de S_1, et S' la surface de Σ' qui correspond à $S_1 + S_2$. Les surfaces S_1, S_2 ont en commun une courbe Γ appartenant à Φ.

A un point P' de S' correspondent un point P_1 de S_1 et un point P_2 de S_2, formant un couple de I_2. Au plan tangent à S'

en P' correspond la quadrique Q tangente à S_1 et en P_1 et à S_2 en P_2. En particulier, si P_1, P_2 coïncident en un point P de la courbe Γ, cette quadrique est le cône ayant ce point pour sommet et par conséquent la surface S' touche la surface Φ' le long de la courbe Γ' homologue de Γ.

Supposons en premier lieu que S_1 soit un plan passant par A_1, A_2. A S_1, T fait correspondre une surface Ψ d'ordre sept comprenant comme parties les cônes Q_1, Q_2 et complétée par une surface cubique S_2 ayant des points doubles en A_3, A_4, A_5, A_6, passant simplement par A_1, A_2, par la cubique gauche K et par les sept droites a_{12}, a_{23}, a_{24}, ..., a_{56}. La surface Ψ' est une surface de Steiner comprenant comme partie les plans α'_1, α'_2 et complétée par une quadrique S' passant par A'_0, A'_{12}, A'_{23}, ..., A'_{56}. Cette quadrique est inscrite à Φ' le long d'une courbe Γ' du quatrième ordre, engendrant un faisceau lorsque le plan S_1 tourne autour de a_{12}. Parmi ces courbes Γ' se trouvent les couples de coniques Γ'_3 et Γ'_{123}, Γ'_4 et Γ'_{124}, Γ'_5 et Γ'_{125}, Γ'_6 et Γ'_{126}. En effet, si S_1 passe par A_3 par exemple, S_2 se compose du plan α_{456} et du cône Q_3.

Supposons en second lieu que S_1 soit un cône du second ordre de sommet A_1, passant par a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}. La surface S_2 est alors un cône du second ordre de sommet A_2, passant par a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}. La surface S' est cette fois une quadrique tangente à Φ' le long d'une courbe Γ' du quatrième ordre passant par les points A'_{13}, A'_{14}, A'_{15}, A'_{16}, A'_{23}, A'_{24}, A'_{25}, A'_{26}. La courbe Γ' varie dans un faisceau comprenant les couples de coniques Γ'_{134} et Γ'_{156}, Γ'_{135} et Γ'_{146}, Γ'_{145} et Γ'_{136}, Γ'_1 et Γ'_2.

<u>Il existe sur la surface de Kummer, 30 faisceaux de courbes du quatrième ordre le long de chacune desquelles une quadrique est inscrite à la surface. Les courbes d'un faisceau passent par huit points doubles de la surface.</u>

<u>50. Surface du quatrième ordre ayant six points doubles biplanaires.</u> — A une quadrique S' de Σ' correspond dans Σ une surface du quatrième ordre S. Cette surface ne contient K que si S' passe par A'_0. A la section de S' par α'_i correspond le domaine du premier ordre de A_i sur la surface S. En général, S' rencontre α'_i suivant une conique et A_i est un point double conique de S.

Nous avons vu que les plans α'_1, α'_2, ..., α'_6 étaient tangents à un cône du second ordre γ'_0 de sommet A'_0 ; soit S' une quadrique inscrite dans ce cône. La surface S possède des points doubles biplanaires en $A_1, A_2, \dots, A_6$, puisque S' touche les plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_6$.

Aux génératrices rectilignes de S' correspondent sur S des courbes du quatrième ordre, passant par $A_1, A_2, \dots, A_6$, formant deux faisceaux.

Les points de contact de S' avec les six plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_6$ sont situés dans un même plan, le plan polaire de A'_0 par rapport à S'. Il en résulte que les droites communes aux couples de plans tangents à S en $A_1, A_2, \dots, A_6$ sont tangentes en ces points à une même quadrique Q.

Liège, le 23 août 1937.