à mon cher collègue M. A. Delgleize
Hommage cordial

MAT: GMT: ALG: GOD: 837

2.14.11.41.

Cours de

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

par

Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liége.

Fascicule IV.

Introduction
à la
Géométrie sur une courbe algébrique.

Liége,
Librairie BOURGUIGNON
16, rue des Dominicains,
1941.

Institut de Mathématique
BIBLIOTHEQUE
Sart Tilman - Bât. B 37
4000 LIEGE 1

Du même auteur.

Leçons élémentaires sur les équations différentielles et le Calcul des variations. Bruxelles, École militaire, 1926.
Les transformations birationnelles du plan. Paris, Gauthier-Villars, 1927.
La Géométrie. Liège, Thone, 1931.
Leçons de Géométrie projective. Liège, Thone et Paris, Hermann, 1933.
Leçons de Géométrie supérieure. Liège, Bourguignon, 1933.
Questions non résolues de Géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions. Paris, Hermann, 1933.
Leçons de géométrie infinitésimale. Liège, Tholien, 1933.
La théorie des surfaces et l'espace réglé. Paris, Hermann, 1934.
Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Paris, Hermann, 1934.
Les transformations birationnelles de l'espace. Paris, Gauthier-Villars, 1934.
Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Paris, Hermann, 1935.
Les Géométries, Paris, Colin, 1937.
Cours de Géométrie analytique à trois dimensions. Liège, Tholien, 1937.
Cours de Géométrie supérieure. Fasc. I. Points singuliers des courbes et des surfaces algébriques. Fasc. II. Correspondances rationnelles. Liège, Bourguignon, 1937. Fasc. III. Transformations birationnelles de l'espace. Exemples. Liège, Bourguignon, 1940.
Introduction à la Géométrie projective hyperspatiale. Liège, Bourguignon, 1939.
Correspondances entre deux courbes algébriques. Paris, Gauthier-Villars (sous presse).

<u>Préliminaires</u>. — Considérons un espace linéaire S_r à r dimensions et le groupe G formé par toutes les transformations birationnelles de cet espace en soi. Dans la géométrie de l'espace S_r qui a pour groupe principal le groupe G, deux variétés algébriques et en particulier deux courbes algébriques sont considérées comme équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation du groupe G. Ce point de vue peut être généralisé. Considérons deux variétés algébriques V, V' ayant la même dimension et appartenant à des espaces linéaires quelconques, distincts ou non. Supposons qu'il soit possible de passer de V à V' par une transformation birationnelle qui ne s'étende pas nécessairement, en tant que transformation birationnelle, aux espaces ambiants. On conviendra de dire que les variétés V, V' sont birationnellement équivalentes et la recherche des propriétés d'une variété algébrique permettant de décider si deux variétés sont birationnellement équivalentes se présente naturellement à l'esprit. C'est cette recherche qui constitue la géométrie sur une variété algébrique.

On appelle classe de variétés algébriques l'ensemble des variétés algébriques deux-à-deux birationnellement équivalentes. La géométrie sur une variété algébrique consiste donc dans la recherche des propriétés qui permettent de décider si deux variétés appartiennent à la même classe ou non.

Une courbe algébrique gauche et sa projection sur un plan à partir d'un point sont deux courbes appartenant à la même classe. Si l'on considère dans un plan ϖ une involution I_2 d'ordre deux représentée par un plan ϖ', à une courbe C de ϖ n'appartenant pas à l'involution correspond dans ϖ' une courbe C'; les courbes C et C' appartiennent à la même classe.

On peut aller plus loin et considérer une variété algébrique simplement infinie d'éléments quelconques (droites, plans, coniques, etc); une telle variété est appelée "être algébrique simplement infini". Deux êtres algébriques simplement infini appartiennent à la même classe lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle entre leurs éléments. Ainsi, une surface réglée algébrique (considérée comme lieu de droites) et une de ses sections planes sont deux êtres algébriques appartenant à la même classe. Sous ce point de vue, la géométrie sur une courbe algébrique devrait s'appeler géométrie sur un être algébrique simplement infini.

2. Bibliographie. — Les ouvrages récents, dans lesquels on trouvera développée la géométrie sur une courbe algébrique, sont :

Picard et Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1906. (voir les chapitres I et II).
Severi, Lezioni di geometria algebrica, Padova, Draghi, 1908.
Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie (trad. Löffler), Leipzig, Teubner, 1921.
Enriques et Chisini, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, tome III, Bologne, Zanichelli, 1924.
Brill, Ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen, Braunschweig, Vieweg, 1925.
Severi, Trattato di geometria algebrica, Bologne, Zanichelli, 1926.
Enriques, Courbes et fonctions algébriques d'une variable (trad. Legaut), Paris, Gauthier-Villars, 1927.

§ 1. Séries linéaires de groupes de points sur une courbe.

3. Séries linéaires de dimension un sur une courbe plane.

Considérons une courbe algébrique plane irréductible C, d'équation

$$f(x, y) = 0$$

et un faisceau de courbes algébriques

$$\varphi(x, y) + \lambda \psi(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Si toutes les courbes du faisceau (1) rencontrent la courbe C en des points fixes, la courbe C fait partie d'une courbe du faisceau. Si au contraire la courbe C ne fait pas partie d'une courbe du faisceau, chacune des courbes de celui-ci rencontre C en n points variables avec la courbe. L'ensemble des groupes de n points variables découpés sur C par les courbes (1) est appelé série linéaire d'ordre n et de dimension un, et est représenté par le symbole g_n^1.

Une série g_n^1 possède les propriétés suivantes :
a) Ses groupes forment une variété rationnelle ∞^1;
b) Par un point de C passe un seul groupe de la série.

Ces propriétés sont caracteristiques. En effet, si un ensemble ∞^1 de groupes de points sur C satisfait à la propriété a), il y a une correspondance birationnelle entre ces groupes de points et les points d'une droite, c'est-à-dire avec les valeurs d'un paramètre λ. Par la propriété b), λ doit être une fonction rationnelle des coordonnées x, y d'un point de C.

Les propriétés a), b) ne sont pas altérés si l'on remplace une courbe C par une courbe C' qui lui est birationnellement équivalente, c'est-à-dire qu'à une série linéaire g_n^1 d'une courbe C correspond une série linéaire g_n^1 sur toute courbe de la même classe.

<u>Remarque I.</u> — Si la courbe C est rationnelle, la propriété a) est une conséquence de la propriété b), d'après le théorème de Lüroth.

<u>Remarque II.</u> — Considérons, sur la courbe C, un ensemble de ∞^1 groupes de n points satisfaisant à la propriété b). Cet ensemble constitue un être géométrique simplement infini et on peut donc le considérer comme une courbe algébrique C'. A un point de C' correspondent n points de C formant un groupe de l'ensemble, tandis qu'à un point de C correspond un point de C'.

Si la courbe C' est rationnelle, elle est birationnellement équivalente à une droite et l'ensemble est une série g_n^1. Si la courbe C' n'est pas rationnelle, l'ensemble est appelé série irrationnelle et est représenté par la notation γ_n.

4. <u>Séries linéaires quelconques sur une courbe plane.</u>

Considérons le système linéaire de courbes planes, de dimension r,

$$\lambda_0 \varphi_0(x,y) + \lambda_1 \varphi_1(x,y) + \dots + \lambda_r \varphi_r(x,y) = 0 \qquad (2)$$

et supposons qu'aucune courbe de ce système ne contienne la courbe C comme partie. Chacune des courbes du système (2) rencontre la courbe C en un certain nombre de points variables avec la courbe. Soit n le nombre de ces points. L'ensemble de ces ∞^r groupes de n points constitue une série linéaire d'ordre n et de dimension r, représentée par la notation g_n^r.

Une série linéaire g_n^r possède les propriétés suivantes :

a) Les groupes de la série peuvent être représentés par les points d'un espace linéaire à r dimensions.

b) Par r points de la courbe passe au moins un groupe de la série et en général un seul.

A une série linéaire g_n^r de la courbe C correspond une série linéaire g_n^r sur toute courbe de la classe de C.

Remarque I. Aux groupes de la série linéaire g_n^r, on peut adjoindre un certain nombre $m-n$ de points fixes de la courbe. On obtient ainsi une série linéaire g_m^r.

Remarque II. Par extension, un groupe de n points fixes peut être considéré comme une série linéaire g_n^0 de dimension zéro.

5. Séries linéaires sur une courbe quelconque.

Considérons maintenant une courbe algébrique C irréductible appartenant à un espace S_R, d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} \rho x_i = f_i(y_1, y_2, y_3), & (i = 0, 1, 2, \dots, R) \\ f(y_1, y_2, y_3) = 0. & \end{array}\right\} \quad (1)$$

où $f_0, f_1, \dots, f_R$ sont des polynômes entiers, rationnels et homogènes de même degré et f un polynôme de même nature, irréductible.

Soit en outre un système linéaire d'hypersurfaces algébriques

$$\lambda_0 \varphi_0(x_0, x_1, \dots, x_R) + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0, \quad (2)$$

de dimension r, dont aucune hypersurface ne contient la courbe C. Les hypersurfaces (2) rencontrent la courbe C en des groupes de n points variables dont l'ensemble constitue une série linéaire g_n^r.

Cette série possède les mêmes propriétés que la série g_n^r définie dans le cas d'une courbe plane.

6. Image projective d'une série linéaire. Reprenons la courbe C représentée par les équations (1) et la série g_n^r découpée sur cette courbe par les hypersurfaces (2).

Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions en posant par exemple

$$\rho X_i = \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_R), \qquad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

A la courbe C correspond la courbe algébrique C' d'équations

$$\rho X_i = \varphi_i(f_0, f_1, \ldots, f_R), \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1°) Un point X de C' provient d'un seul point de C ; les courbes C, C' appartiennent à la même classe et les groupes de g_n^r passant par un point de C ne passent pas en conséquence par d'autres points de la courbe. Sur la courbe C', la série g_n^r est découpée par les hyperplans et est donc d'ordre n. On dit que la courbe C' est une image projective de la série g_n^r et que la série g_n^r est simple.

2°) Un point X de C' correspond à ν ($\nu \geq 2$) points de C. Les groupes de ν points de C qui correspondent aux points de C' forment une série γ_ν et les groupes de g_n^r passant par un point de C passent en conséquence par les $\nu - 1$ points qui, avec le point considéré, forment un groupe de γ_ν. On dit que la série g_n^r est composée au moyen de la série γ_ν. La courbe C' est d'ordre $\frac{n}{\nu}$.

Dans les deux cas, la courbe C' ne peut évidemment appartenir à un espace linéaire de dimension inférieure à r.

7. Théorème I. – Étant donnée, sur une courbe algébrique irréductible C, une série simple g_n^r, les groupes de la série passant par k points généraux de la courbe ($k < r$), ne peuvent passer par d'autres points variables avec les premiers.

Nous pouvons supposer que la courbe C est une courbe d'ordre n, de S_r, sur laquelle la série g_n^r est découpée par les hyperplans. Le théorème revient à celui-ci : Les espaces S_{k-1} passant par k points de la courbe ne passent pas en général par d'autres points de celle-ci.

Le théorème est évident si la courbe est plane : $r = 2$, $k = 1$.

Supposons $r > 2$ et $k = 2$. Si toute corde de C rencontrait cette courbe en un troisième point, la courbe posséderait ∞^2 trisécantes et les trisécantes passant par un point M formeraient un cône. Le plan tangent à ce cône le long d'une génératrice contiendrait les tangentes à la courbe aux points d'appui sur celle-ci, en dehors de M, de la génératrice. Par conséquent, les tangentes à la courbe C se couperaient deux-à-deux. Ces droites seraient alors contenues dans un plan ou passeraient par un même point. Dans le premier cas, la courbe serait plane, contrairement à l'hypothèse. Dans le second, elle serait projetée sur un plan à partir d'un espace S_{r-3} ne passant pas par le point commun à toutes les tangentes, suivant une courbe dont toutes les tangentes passeraient par un même point, ce qui est absurde.

Supposons le théorème établi pour la valeur $k-1$ de k, mais que les espaces S_{k-1} passant par k points de C passent en conséquence par un ou plusieurs autres points de C. En projetant C d'un de ses points O sur un hyperplan ne passant pas par O, on obtient une courbe C' telle que les espaces S_{k-2} passant par $k-1$ points de la courbe rencontrent encore celle-ci en un point au moins, contrairement à l'hypothèse.

Donc, si le théorème est vrai pour $k-1$, il est vrai pour k; or, il est vrai pour $k=2$, donc, il est démontré pour toute valeur de k.

8.- Théorème II.- Sur une courbe C irréductible d'ordre n de S_r, une série d'indice un, ∞^1, de groupes de n points appartenant à la série g_n^r découpée par les hyperplans, est une série g_n^1 découpée par les hyperplans d'un faisceau.

Désignons par Σ le système ∞^1 d'hyperplans découpant sur C la série d'indice un en question. Si Σ n'est pas un faisceau, ce système a une enveloppe sur laquelle C est tracée. Mais alors, les hyperplans de Σ découpent, sur C, des groupes de $n-1$ points au plus, contrairement à l'hypothèse. Le théorème est donc démontré.

9. Théorème III.- Si, sur une courbe algébrique irréductible C, deux séries linéaires de même ordre n ont un groupe en commun, elles sont contenues totalement dans une même série linéaire d'ordre n.

Soient deux séries linéaires g_n^r, g_n^s, d'ordre n, découpées sur C respectivement par les systèmes

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0, \quad \mu_0\psi_0 + \mu_1\psi_1 + \cdots + \mu_s\psi_s = 0.$$

Supposons que le groupe G commun à ces deux séries par hypothèse, soit donné par $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$.

Si les séries données ont des points fixes communs, supprimons les provisoirement et formons le système

$$\lambda\varphi_0\psi_0 + \psi_0(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r) + \varphi_0(\mu_1\psi_1 + \mu_2\psi_2 + \dots + \mu_s\psi_s) = 0 . \quad (1)$$

Désignons par H le groupe des points de C communs à $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 0, \dots, \varphi_r = 0$ et par K le groupe des points communs à $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0, \dots, \psi_s = 0$. En dehors des groupes fixes G, H, K, le système (1) découpe sur C une série linéaire contenant tous les groupes de g_n^r, g_n^s, diminués des points fixes communs à ces deux séries. En ajoutant ces points fixes à la série considérée, on obtient une série linéaire d'ordre n contenant tous les groupes de g_n^r et de g_n^s, ce qui démontre le théorème.

10. Théorème IV. — Sur une courbe algébrique irréductible C, un ensemble de ∞^r groupes de n points représentable biunivoquement sur les points d'un espace linéaire à r dimensions et tel que r points de la courbe appartiennent à un seul groupe, est une série linéaire g_n^r.

Le théorème est vrai pour $r = 1$; supposons le démontré pour la valeur $r-1$ de r.

Soit S_r l'espace linéaire par les points duquel sont représentés les groupes de l'ensemble donné. Considérons une droite s de S_r et soit G le groupe de n points de C homologue d'un point P de s. Les groupes de n points passant par un point de G qui n'est pas un point fixe de l'ensemble forment par hypothèse une série linéaire g_n^{r-1}, représentée par un hyperplan de S_r coupant la droite s au seul point P. Par conséquent, les ∞^1 groupes de n points de C qui correspondent aux points de la droite s forment une série d'indice un, donc linéaire.

Une série linéaire g_n^{r-1} représentée par un hyperplan de S_r et une série linéaire g_n^1 représentée par une droite de S_r n'appartenant pas à cet hyperplan, ont un groupe commun et appartiennent à une série linéaire g_n^r qui coïncide nécessairement avec l'ensemble donné.

Le théorème est donc démontré.

11. — Séries complètes et courbes normales. — On appelle série linéaire complète sur une courbe irréductible C une série linéaire g_n^r d'ordre n et de dimension r qui

n'appartient pas à une série linéaire de même ordre et de dimension supérieure à r.

Une série linéaire appartient à une seule série linéaire complète, car si une série linéaire g_n^r appartenait à deux séries linéaires complètes $g_n^{r'}$, $g_n^{r''}$ distinctes, ces deux séries linéaires ayant des groupes communs, appartiendraient à une même série linéaire plus ample, d'ordre n.

Si g_n^r est une série linéaire complète, on a $r \leq n$. Si $r = n$, la courbe C est d'ailleurs rationnelle.

On appelle courbe normale dans un espace S_r une courbe qui n'est pas la projection d'une courbe de même ordre, appartenant à un espace linéaire de dimension supérieure à r.

La série linéaire découpée sur une courbe normale de S_r par les hyperplans de cet espace est complète.

§ 2.-. Opérations sur les séries linéaires.

12.- Groupes équivalents.-. Deux groupes de n points G_n, G_n' sur une courbe irréductible C, sont dits équivalents s'ils appartiennent à une même série linéaire d'ordre n. On écrit

$$G_n \equiv G_n'.$$

Deux groupes G_n', G_n'', équivalents à un même troisième G_n, sont équivalents. En effet, les séries linéaires d'ordre n contenant G_n et G_n', G_n et G_n'', ont un groupe commun G_n ; elles appartiennent donc à une même série linéaire d'ordre n.

L'ensemble des groupes équivalents à un groupe G est une série linéaire complète. Celle-ci est représentée par le symbole $|G|$.

13. Addition et soustraction des séries linéaires.

Considérons, sur la courbe irréductible C, une série linéaire complète g_n^r et un groupe G de m ($m < n$) points appartenant au moins à quelques groupes de la série. Les groupes de la série g_n^r contenant G constituent une série linéaire de dimension au plus égale à r. Faisons abstraction des points de G ; il reste une série linéaire g_{n-m}^s. Cette série est complète, car autrement, en lui adjoignant G, on trouverait des groupes équivalents à ceux de g_n^r, n'appartenant pas à cette série, complète par hypothèse.

La série complète g^s_{n-m} est appelée reste du groupe G par rapport à la série complète g^r_n.

Le nombre des conditions imposées à un groupe de g^r_n pour contenir G est égal à $r - s \leq m$.

Considérons deux séries linéaires complètes $|L|$, $|M|$ et appelons somme $L + M$ de deux groupes L, M de ces séries le groupe formé par les points de ces deux groupes. Si L, L' sont deux groupes de $|L|$ et M, M' deux groupes de $|M|$, on a

$$L + M \equiv L + M', \qquad L + M' \equiv L' + M',$$

d'où

$$L + M \equiv L' + M'.$$

La série $|L+M|$, complète (et complétée s'il le faut), est appelée somme des séries $|L|$, $|M|$.

Si $N \equiv L + M$, la série $|L| = |N - M|$ est appelée différence des séries $|N|$, $|M|$.

Si les séries $|L|$, $|M|$ sont découpées sur C respectivement par les systèmes linéaires

$$\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = 0, \quad \mu_0 \psi_0 + \mu_1 \psi_1 + \cdots + \mu_s \psi_s = 0,$$

le système linéaire

$$\nu_{00} \varphi_0 \psi_0 + \nu_{01} \varphi_0 \psi_1 + \cdots + \nu_{ik} \varphi_i \psi_k + \cdots + \nu_{rs} \varphi_r \psi_s = 0$$

découpe sur C des groupes de la série $|L + M|$ (mais pas nécessairement tous les groupes de cette série).

14. <u>Théorème du reste</u>. – <u>Les restes d'un groupe de points par rapport à une série linéaire complète, quand ils existent, coïncident avec les restes d'un groupe équivalent par rapport à la même série.</u>

Soient $|G|$ une série linéaire complète, H et H_1 deux groupes d'une série linéaire $|H|$. Supposons que les restes $G - H$, $G - H_1$ existent et soient

$$K \equiv G - H, \quad K_1 \equiv G - H_1.$$

On a $\quad G \equiv K + H \equiv K + H_1, \quad G \equiv K_1 + H_1 \equiv K_1 + H,$

d'où $\quad K + H_1 \equiv K_1 + H_1 \quad$ et $\quad K \equiv K_1$.

Ce théorème est dû à Brill et Noether.

15. – <u>Multiples d'une série linéaire</u>. – Si $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_k|$ sont k séries linéaires, on définit de proche en proche la série somme $|G_1 + G_2 + \cdots + G_k|$. Si les k séries données coïncident en une même série $|G|$, la série somme devient la série $|kG|$, multiple d'ordre k de la série $|G|$.

Si la série $|G|$ est découpée sur C par le système linéaire

$$\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\dots\dots+\lambda_r\varphi_r=0,$$

le système linéaire

$$\sum \mu_{i_1 i_2 \dots i_k}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\dots\varphi_{i_k}=0 \qquad (i_1,i_2,\dots,i_k=1,2,\dots,k)$$

découpe sur C des groupes de la série $|kG|$, mais non pas en général tous ces groupes.

16.-- <u>Remarque</u>. Le concept de série linéaire est invariant vis-à-vis des transformations birationnelles de la courbe; il en est de même des concepts de séries linéaires complètes, de groupes équivalents, de somme, de différence et de multiple de séries linéaires.

§3.-- <u>Les théorèmes fondamentaux de la géométrie sur une courbe algébrique</u>.

17. <u>Remarque préliminaire</u>. Il existe plusieurs méthodes pour établir les théorèmes fondamentaux de la géométrie sur une courbe algébrique. La méthode que nous utilisons ici, qui semble être la plus rapide, est due à M. Severi (Atti del R. Istituto Veneto, 1920, t. 79).

18. <u>Lemme</u>. <u>Sur une courbe algébrique irréductible C, il est toujours possible de trouver un entier positif minimum ν tel que tout groupe de $m \geq \nu$ points génériques appartiennent à une série linéaire au moins simplement infinie.</u>

Prenons pour modèle projectif de C une courbe plane d'ordre n et soit G un groupe de $n^2+\lambda$ points de cette courbe ($\lambda \geq 0$). Soit φ une courbe d'ordre $l \geq n$ passant par les points de G; désignons par H le groupe des $ln-n^2-\lambda$ points de rencontre ultérieure de φ et de C.

Les courbes φ, d'ordre l, passant par H, dépendent de ρ paramètres, où

$$\rho \geq +\frac{1}{2}l(l+3)-ln+n^2+\lambda.$$

La série découpée sur C par ces courbes φ a la dimension

$$\rho-\frac{1}{2}(l-n)(l-n+3)-1 \geq \frac{1}{2}n(n+3)+\lambda-1 \geq 1.$$

On a donc $\nu \leq n^2$.

19. <u>Genre d'une courbe</u>. Posons $\nu=p+1$. Le nombre p ($p\geq 0$) est appelé genre de la courbe C.

Le nombre ν et par conséquent p est un invariant vis-à-vis des transformations birationnelles, c'est-à-dire que toutes les courbes d'une même classe ont le même genre.

Les courbes rationnelles sont de genre $p = 0$ ($\nu = 1$) et réciproquement.

20. Séries linéaires spéciales et non spéciales.

Un groupe de $p+1$ points génériques de C ne peut appartenir à une série linéaire g^2_{p+1}, car autrement le reste d'un point quelconque par rapport à cette série serait une série g^1_p et on aurait $\nu < p+1$.

Plus généralement, un groupe de n points génériques de C, supérieur à p, ne peut appartenir à une série linéaire complète de dimension supérieure à $n-p$, car le reste de $n-p$ points génériques par rapport à cette série serait une série d'ordre p, de dimension supérieure à zéro et on aurait $\nu < p+1$.

Une série linéaire générique g^r_n, d'ordre $n \geqslant p$, complète, a la dimension $r = n-p$. Les ∞^n groupes de n points de C se distribuent en ∞^p séries linéaires complètes distinctes.

Il peut cependant exister sur C des séries linéaires complètes particulières, d'ordre n et de dimension $r > n-p$. De telles séries sont dites spéciales. Une série complète g^{n-p}_n, d'ordre $n \geqslant p$, est appelée non spéciale.

Considérons une série linéaire complète d'ordre n variable dans un système continu ∞^p. On a $n \geqslant p$, car les séries linéaires complètes d'ordre $n \leqslant p-1$ ne dépendent que de $p-1$ paramètres et ne peuvent donc appartenir à un système ∞^p. On en déduit qu'une série linéaire complète variable dans un système ∞^p est en général non spéciale et a l'ordre au moins égal à p.

21. Théorème I. Une série linéaire d'ordre n supérieur à $2p-2$, est certainement non spéciale.

Supposons qu'il puisse exister sur C une série spéciale d'ordre $2p-1+h$ ($h \geqslant 0$) et dont la dimension est par conséquent au moins égale à $2p-1+h-p+1 = p+h$. Le reste d'un groupe quelconque de p points de C par rapport à la série considérée sera une série, toujours spéciale, dépendant de p paramètres. Ceci est en contradiction avec le théorème précédent.

22. Théorème II. Une série linéaire de dimension supérieure à $p-1$ est toujours non spéciale et a l'ordre au moins égal à $2p$.

Soit une série complète $g_n^{p+\lambda}$ $(\lambda \geq 0)$. Le reste d'un groupe de p points de C par rapport à cette série est une série g_{n-p}^{λ} variable dans un système continu ∞^p. On a donc $n-p \geq p$, c'est-à-dire $n \geq 2p$. La série est donc non spéciale en vertu du théorème précédent et on a $\lambda = n-2p$.

23. Transformation d'une courbe en une courbe privée de points singuliers. — Considérons, sur C, une série g_n^{n-p} complète d'ordre $n > 2p$. Cette série est dépourvue de points fixes, car si elle possédait k points fixes, en supprimant ces points, on obtiendrait une série g_{n-k}^{n-p} de dimension $n-p > p$, donc non spéciale. On devrait donc avoir $n-p = n-k-p$, d'où $k=0$.

La série g_n^{n-p} ne peut être composée au moyen d'une série irrationnelle γ_m, car le reste d'un groupe de γ_m par rapport à g_n^{n-p} serait une série g_{n-m}^{n-p-1}, de dimension $n-p-1 > p-1$, donc non spéciale. On aurait donc $n-p-1 = n-m-p$, d'où $m=1$.

La série g_n^{n-p} étant simple, en rapportant projectivement ses groupes aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n-p}, il correspond à C une courbe C' normale d'ordre n de cet espace, birationnellement identique à C.

Supposons que la courbe C' possède un point P multiple d'ordre s. Les hyperplans passant par P découpent sur C' une série g_{n-s}^{n-p-1}, de dimension $n-p-1 > p-1$, donc non spéciale. On a donc $n-p-1 = n-s-p$, d'où $s=1$. La courbe C' est dépourvue de points multiples.

24. Théorème III (Castelnuovo). Considérons, sur une courbe C, une série linéaire complète et non spéciale g_n^{n-p} $(n > 2p-2)$ et une série d'ordre m contenue partiellement dans la première, telles que la différence des deux séries soit non spéciale. La série de dimension minimum, contenant les groupes des deux series, est complète et non spéciale.

La série g_{n+m}^{r}, somme des deux séries données g_n^{n-p}, g_m, est d'ordre $n+m > 2p-2$ et certainement non spéciale. Considérons la série formée des groupes composés d'un groupe de g_n^{n-p} et d'un groupe de g_m, série appelée somme minimum des deux séries ; cette série a la dimension $n+m-p-\delta$ $(\delta \geq 0)$. Les groupes de g_{n+m}^{r} comprenant un groupe G_m de g_m, donnent la série g_n^{n-p} et par conséquent le passage des groupes de g^r_{n+m} par G_m équivaut à $m-\delta$ conditions. Mais alors, ce groupe impose au plus $m-\delta$ conditions aux groupes de g^{n-p}_n qui doivent le contenir ; la série reste aura donc une dimension au moins égale à $n-p-(m-\delta)$. Par hypothèse, cette série, d'ordre $n-m$, est non spéciale et a donc la dimension $n-m-p$. On a donc $\delta=0$, ce qui démontre le théorème.

25. <u>Courbes adjointes à une courbe plane</u>. Reprenons la courbe C' d'ordre n, de S_{n-p}, obtenue plus haut et appartenant à la classe de C. Projetons cette courbe à partir d'un espace S_{n-p-3} occupant une position générale par rapport à la courbe, sur un plan. Il y aura un nombre fini de cordes de C' s'appuyant sur S_{n-p-3} et la projection sera une courbe d'ordre n possédant comme seules singularités des points doubles ordinaires. Nous prendrons cette courbe plane comme modèle projectif de C et nous désignerons par d le nombre des points doubles.

On appelle courbe adjointe d'ordre l à C une courbe d'ordre l passant par les points doubles de C.

Pour l suffisamment grand, le passage d'une courbe d'ordre l par les d points doubles de C donne d conditions indépendantes. Posons

$$n_l = nl - 2d \quad , \quad p' = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d .$$

Pour l assez grand, les adjointes d'ordre l découpent sur C une série $g^{n_l - p'}_{n_l}$. Nous allons démontrer que $p' = p$.

Nous aurons à considérer les séries g^2_n découpée sur C par les droites du plan, g^5_{2n} découpée sur C par les coniques du plan, etc ; nous conviendrons de représenter par $k.g^2_n$ la série d'ordre kn découpée sur C par les courbes d'ordre k du plan.

Soit G_q un groupe de $q > 2p-2$ points génériques de C. La série $|G_q|$ est non spéciale. La série g^r_{n+q}, somme de $|G_q|$ et de g^2_n est non spéciale. La somme minimum des séries g^r_{n+q} et de g^2_n, c'est-à-dire la série formée des groupes contenant un groupe de la série complète g^r_{n+q} et un groupe de g^2_n, est complète et non spéciale d'après le théorème de Castelnuovo. De même, la somme minimum des séries g^r_{n+q} et $2g^2_n$ est complète et non spéciale. Plus généralement, il est de même de la somme minimum des séries g^r_{n+q} et kg^2_n.

Soit Σ le système linéaire de courbes planes découpant sur C, en dehors d'un groupe H de h points fixes, la série complète g^r_{n+q}. On peut supposer que Σ est formé d'adjointes, en ajoutant éventuellement aux courbes de Σ une adjointe fixe. Soit alors l l'ordre des adjointes composant Σ. Les adjointes d'ordre $l+k$ découpent sur C, en dehors de H, la série complète non spéciale, somme minimum des séries g^r_{n+q}, $k\,g^2_n$. Cette série a la dimension $q+(k+1)\,n-p$.

Prenons k suffisamment grand pour que H présente h conditions indépendantes aux adjointes d'ordre $l+k$ qui doivent les contenir. La série découpée sur C par les adjointes d'ordre $l+k$ a la dimension $q+(k+1)\,n+h-p = n_{l+k}-p$; elle est complète et non spéciale. On a donc $p'=p$ et les adjointes d'ordre suffisamment élevé découpent sur C une série linéaire complète et non spéciale.

Observons maintenant que les adjointes d'un ordre l quelconque forment un système linéaire de dimension $r_l \geqslant \frac{1}{2}\,l(l+3)-d$. Dans le cas de l'inégalité, la série découpée sur C par ces adjointes est spéciale, de dimension supérieure à n_l-p. Pour $l > n-3$, on a $n_l > 2p-2$ et la série considérée est non spéciale. On ne peut donc avoir une série spéciale que pour $l \leqslant n-3$.

Le reste de n points en ligne droite appartenant à C, par rapport à la série complète découpée par les adjoints d'ordre $n-2$, est découpé par les adjointes d'ordre $n-3$ et forme une série nécessairement complète. On passera de même à la série découpée par les adjointes d'ordre $n-4$, et ainsi de suite.

<u>Les courbes adjointes d'ordre arbitraire à une courbe C n'ayant que des points doubles ordinaires, découpent sur C, en dehors des points doubles, une série linéaire complète.</u>

26. <u>Forme projective du théorème du reste</u>. Considérons sur la courbe plane C n'ayant que des points doubles ordinaires, une série linéaire $|G|$. Le reste d'un groupe G de cette série, par rapport à la série découpée sur C par les adjointes d'un certain ordre, est indépendant du choix du groupe G dans la série $|G|$. En d'autres termes, si G et G' sont deux groupes équivalents, les séries découpées par les adjointes d'ordre l passant par G ou par G', en dehors de ces groupes et des points doubles, coïncident.

C'est sous cette forme que Brill et Noether ont établi le théorème du reste.

27.-. <u>Série canonique</u>. Soit C une courbe plane d'ordre m et de genre p, n'ayant que des points doubles ordinaires. Le nombre de ces points est égal à $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-p$. Les courbes adjointes d'ordre $m-3$ découpent, sur C, une série d'ordre $2p-2$ appelée <u>série canonique</u>.

Si $p=0$ (courbes rationnelles), les adjointes d'ordre $m-3$ et la série canonique n'existent pas. Si $p=1$, il existe une seule adjointe d'ordre $m-3$ ne rencontrant plus la courbe en dehors des points doubles ; la série canonique est d'ordre zéro.

Supposons $p \geq 1$. Les adjointes d'ordre $m-3$ forment un système linéaire de dimension $r \geq p-1$. Supposons que l'on ait $r > p-1$. La série canonique est une série g^p_{2p-2} ou contient une telle série. Le reste d'un groupe de p points de C par rapport à cette série est une série d'ordre $p-2$ dépendant de p paramètres, ce qui est absurde. On a donc $r = p-1$.

<u>La série canonique d'une courbe de genre p a l'ordre $2p-2$ et la dimension $p-1$.</u>

28. <u>Théorème de réduction</u>. <u>Si $|G|$ est une série linéaire complète découpée sur C par des adjointes d'ordre $m-3$ (en dehors de certains points fixes) et P un point de C n'appartenant pas à toutes les adjoints d'ordre $m-3$ passant par un groupe G, la série complète $|G+P|$ a le point fixe P.</u>

Supposons que $|G|$ soit découpée sur C par les adjointes d'ordre $m-3$ passant par un groupe de points H. La série $|G|$ est complète. Soit P un point de C n'appartenant pas à toutes les adjointes d'ordre $m-3$ passant par un groupe G. Considérons une droite d passant par P et coupant encore C en un groupe D de $m-1$ points. Il existe une adjointe d'ordre $m-2$ passant par H, un groupe G, par P et par D ; elle est formée de d et d'une adjointe d'ordre $m-3$. La série $|G+P|$ est découpée sur C par les adjointes d'ordre $m-2$ passant par H et par D ; ces adjointes comprennent la droite d comme partie, donc P est fixe pour la série $|G+P|$.

29. Théorème.-. Une série linéaire spéciale appartient à la série canonique.

Soit g_n^r une série linéaire complète spéciale. On a donc $r > n-p$.

Si $r=0$, on a $n<p$ et le théorème est évident. Supposons le établi pour la valeur $r-1$ de r.

Les groupes de la série g_n^r ont pour résidu par rapport à un point P de la courbe des groupes formant une série g_{n-1}^{r-1} spéciale, donc appartenant par hypothèse à la série canonique. Si la série g_n^r n'appartient pas à la série canonique, les adjointes d'ordre $m-3$ passant par un groupe de g_{n-1}^{r-1} ne peuvent passer par P et P est donc un point fixe de g_n^r. Mais cela est absurde, car le point P peut être choisi arbitrairement. Le théorème est donc démontré pour r s'il est vrai pour $r-1$; or il est vrai pour $r=0$, donc il est démontré pour toute valeur de r.

Les groupes spéciaux appartiennent donc à la série canonique.

Corollaire.-. Si un groupe d'une série linéaire complète d'ordre n n'appartient pas à la série canonique, la série a la dimension $n-p$.

30.- Indice de spécialité. Considérons une série spéciale g_n^r et soit i le nombre de groupes canoniques linéairement indépendants passant par un groupe de g_n^r. Le reste d'un groupe de la série g_n^r par rapport à la série canonique est donc une série d'ordre $2p-2-n$ et de dimension $i-1$. Par $i-1$ points génériques de C, mais non par i points, passe une adjointe d'ordre $m-3$ contenant un groupe de la série g_n^r.

Le nombre i est appelé indice de spécialité de la série g_n^r, ou encore d'un groupe quelconque de cette série. On convient de dire qu'une série non spéciale a l'indice de spécialité zéro.

31. Théorème de Riemann-Roch.-. Une série linéaire complète d'ordre n et d'indice de spécialité i, a la dimension $n-p+i$.

Supposons $i=1$. Si G est un groupe de g_n^r et P un point générique, la série $|G+P|$ est non spéciale et P est fixe; sa dimension est d'une part r et d'autre part $n+1-p$.

On a donc $r = n - p + 1$ et le théorème est démontré pour $i = 1$.

Supposons le théorème démontré pour la valeur $i-1$ de i. Le nombre de groupes canoniques linéairement indépendants contenant un groupe de la série $|G+P|$ est $i-1$. Cette série a donc la dimension $n+1-p+i-1 = n-p+i$. D'autre part, P est fixe pour la série $|G+P|$ et celle-ci a la dimension r. On a donc $r = n-p+i$ et le théorème est démontré par récurrence.

32. Propriétés de la série canonique. Une série linéaire g_{2p-2}^{p-1} sur la courbe C est spéciale, puisque $p-1 > 2p-2-p$, donc elle appartient à la série canonique et coïncide nécessairement avec celle-ci.

La série canonique est l'unique série g_{2p-2}^{p-1} appartenant à une courbe de genre p.

Il existe, sur une courbe de genre p, ∞^p séries d'ordre $2p-2$ dont une seule, la série canonique, est spéciale. Les autres sont non spéciales et ont donc la dimension $p-2$. Les séries linéaires g_{2p-2}^{p-2} appartenant à une courbe de genre p sont appelées séries paracanoniques.

La série canonique est dépourvue de point fixe, car si elle en avait un, en le supprimant on aurait une série g_{2p-3}^{p-1} et en ajoutant un point fixe quelconque à cette série, on aurait une série g_{2p-2}^{p-1} distincte de la série canonique, ce qui est impossible.

Un groupe d'une série spéciale g_n^r, complète, impose $n-r$ conditions aux groupes canoniques qui doivent le contenir.

Si i est l'indice de spécialité de g_n^r, il existe ∞^{i-1} groupes canoniques passant par un groupe de cette série. On a $r = n-p+i$, d'où $i-1 = p-1-(n-r)$.

33. Théorème. - Si $|G|$ est une série linéaire complète d'ordre n et de dimension r, et P un point générique de la courbe C, la condition nécessaire et suffisante pour que P soit un point fixe de la série complète $|G+P|$ est que $|G|$ soit spéciale et qu'il existe au moins un groupe canonique contenant G sans contenir P.

On a $r \geq n-p$. Si P est fixe pour la série $|G+P|$, cette série a la dimension r et on a $r \geq n+1-p$, c'est-à-dire $r > n-p$. La série $|G|$ est donc spéciale.

Si tout groupe canonique passant par un groupe G contenait P, la série $|G+P|$ serait spéciale et un de ses groupes imposerait $n+1-r$ conditions aux groupes canoniques devant le contenir. D'autre part, un groupe de $|G|$ impose $n-r$ conditions aux groupes canoniques qui doivent le contenir. Ces deux nombres $n+1-r$ et $n-r$ devraient être égaux, ce qui est absurde.

La condition énoncée est donc nécessaire; elle est également suffisante (n° 28).

34. <u>Théorème de Clifford</u>. — <u>Si la série complète g_n^r est spéciale, on a $n \geq 2r$.</u>

Soit H un groupe de points dont le reste par rapport à la série canonique g_{2p-2}^{p-1} est la série g_n^r. Pour qu'un groupe canonique contienne un groupe G de g_n^r, il faut $n-r$ conditions. Pour qu'un groupe canonique contenant H contienne un groupe G de g_n^r, il faut r conditions. On a évidemment $n-r \geq r$, d'où $n \geq 2r$.

35. <u>Courbes hyperelliptiques</u>. — Proposons-nous de rechercher dans quelles conditions la série canonique d'une courbe C de genre p peut être composée au moyen d'une série γ_ν d'ordre ν.

Si une série complète g_n^r de C est composée au moyen de γ_ν, il correspond à cette série g_n^r, sur la courbe image de γ_ν, une série d'ordre $\frac{n}{\nu}$ et de dimension r. On a donc $n \geq r\nu$ et l'égalité a lieu lorsque la courbe image de γ_ν est rationnelle.

Si la série g_n^r est la série canonique, on a $n = 2p-2$, $r = p-1$, d'où $\nu \leq 2$ et $\nu = 2$. La courbe image de γ_2 est rationnelle et cette série est linéaire.

<u>Si la série canonique d'une courbe est composée, c'est au moyen d'une série linéaire g_2^1.</u>

Les courbes présentant cette particularité sont appelées <u>courbes hyperelliptiques.</u>

Une courbe rationnelle ($p=0$) contient ∞^2 séries g_2^1; une courbe elliptique ($p=1$) en contient ∞^1, évidemment non spéciales.

<u>Si une courbe de genre $p>1$ contient une série linéaire g_2^1, elle est hyperelliptique.</u>

En effet, la série g_2^1 a l'indice de spécialité $p-1$; un de ses groupes présente une seule condition aux groupes canoniques qui doivent le contenir. En d'autres termes, si G est un groupe de g_2^1, les groupes canoniques contenant un point de G contiennent l'autre.

Observons que la série canonique d'une courbe de genre $p=2$ est une série g_2^1 ; cette courbe est toujours hyperelliptique.

Un groupe canonique d'une courbe hyperelliptique est formé de $p-1$ groupes de g_2^1.

Une courbe hyperelliptique (de genre $p>1$) ne peut posséder deux séries g_2^1 distinctes, car les groupes canoniques passant par un point, devraient passer par deux autres points.

36.- <u>Courbes canoniques</u>. L'image projective de la série canonique d'une courbe de genre p non hyperelliptique ($p \geq 3$) est une courbe d'ordre $2p-2$, de l'espace S_{p-1}, appelée <u>courbe canonique</u>. C'est une courbe normale.

Toute courbe de genre p, d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}, est une courbe canonique.

La courbe canonique de genre trois est la quartique plane sans point double.

Soit C_6 une courbe canonique de genre quatre; elle est d'ordre six et appartient à S_3. Les quadriques de S_3 découpent sur C_6 une série non spéciale g_{12}^8, par conséquent la quadrique passant par neuf points quelconques de C_6 contient cette courbe. Les surfaces cubiques de S_3 sont ∞^{19} et découpent sur C_6 une série non spéciale g_{18}^{14} ; il y a donc ∞^4 surfaces cubiques contenant C_6. Parmi celles-ci, il y a ∞^3 formées par la quadrique contenant C_6 et par les plans de l'espace. Donc la <u>courbe canonique de genre quatre est l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique de S_3</u>.

Soit C_8 une courbe canonique de genre cinq de S_4. Les hyperquadriques de S_4 sont en nombre ∞^{14} et découpent sur C_8 une série non spéciale g_{16}^{11}. Il y a donc ∞^2 hyperquadriques contenant C_8. Cette courbe est donc l'intersection de trois hyperquadriques ou est tracée sur une surface commune à trois hyperquadriques linéairement indépendantes. Cette surface est nécessairement une surface cubique réglée, représentable sur un plan ϖ par les coniques γ passant par un point O.

A C_8 correspond sur ϖ une courbe C' d'ordre cinq ayant un point double en O. Aux sections de la surface cubique par les hypersurfaces cubiques de S_4 correspondent dans ϖ les sextiques ayant un point triple en O. Parmi ces sextiques, se trouve la courbe formée de C' et d'une droite passant par O, donc:

<u>La courbe canonique de genre cinq est, dans S_4, l'intersection complète de trois hyperquadriques, ou l'intersection d'une surface cubique réglée et d'une hypersurface cubique passant par une génératrice de la surface.</u>

37. <u>Remarque</u>.— La notion de courbe canonique pour une courbe hyperelliptique, n'existe pas. On peut obtenir une représentation de ces courbes de la manière suivante:

Soit C une courbe hyperelliptique de genre p. Considérons le double de la série canonique de cette courbe, c'est-à-dire la série complète non spéciale g^{3p-4}_{4p-4}. Soit s la droite image de la série g^1_2 appartenant à C. Si la série g^{3p-4}_{4p-4} est composée au moyen de g^1_2, il lui correspond sur s une série g^{3p-4}_{2p-2}, ce qui est absurde si $3p-4 > 2p-2$, c'est-à-dire si $p > 2$.

Si $p > 2$, la série g^{3p-4}_{4p-4} est donc simple et l'image projective de cette série conduit à une <u>courbe d'ordre $4p-4$ de S_{3p-4}</u>.

Si $p = 2$, considérons le triple de la série canonique, c'est-à-dire la série complète g^4_6. Si cette série est composée au moyen de g^1_2, il lui correspond sur s une série g^4_3, ce qui est absurde. Donc la série g^4_6 est simple et son image projective conduit à <u>une courbe d'ordre six de S_4</u>.

§4.— <u>Construction de la série canonique d'une courbe et applications</u>

38. <u>Série jacobienne d'une série</u>. Considérons, sur une courbe algébrique irréductible C, une série linéaire g^1_n, de dimension un. Un groupe de cette série comprendra en général n points distincts, mais il y aura

exception pour un nombre fini de groupes. Ceux-ci comprendront en général $n-1$ points dont un comptera pour deux. L'ensemble de ces derniers points est le groupe jacobien de la série g_n^1. Si cette série est découpée sur C par le faisceau $\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 = 0$, il y aura un nombre fini de variétés de ce faisceau tangentes à C; le groupe jacobien est formé par les points de contact.

Considérons maintenant une série linéaire $|G|$ de dimension supérieure à l'unité. Chaque fois que l'on prend deux groupes de $|G|$, ils déterminent une série de dimension un dont nous désignerons par G_j le groupe jacobien. Nous avons ainsi une infinité de groupes jacobiens et nous allons démontrer qu'ils forment une série linéaire, dans le cas où la série $|G|$ est dépourvue de points fixes.

Extrayons de $|G|$ une série linéaire de dimension deux, dépourvue de points fixes et rapportons projectivement ses groupes aux droites d'un plan ϖ. À C correspond une courbe C' du plan ϖ. Les droites d'un faisceau de ϖ découpent, sur C', les groupes d'une série de dimension un appartenant à $|G|$. Le groupe jacobien de cette série est découpé sur C' par la polaire du sommet du faisceau. Or, les polaires des points d'un plan par rapport à une courbe forment un réseau. On en conclut que les groupes jacobiens de $|G|$ sont deux-à-deux équivalents. Ils appartiennent donc à une même série linéaire $|G_j|$ appelée <u>série jacobienne</u> de $|G|$.

39. <u>Ordre de la série jacobienne</u>.- Soient, sur la courbe C, deux séries linéaires distinctes g_m^1, g_n^1, sans points fixes et soit μ le nombre de points du groupe jacobien de g_m^1, ν celui du groupe jacobien de g_n^1.

Entre les groupes G_m de g_m^1, nous allons établir la correspondance suivante: Les m points d'un groupe G_m déterminent m groupes de g_n^1; les $m(n-1)$ points de ces groupes n'appartenant pas à G_m déterminent $m(n-1)$ groupes de g_m^1 que nous faisons correspondre à G_m. Entre les groupes de g_m^1, nous avons ainsi une correspondance symétrique $[m(n-1), m(n-1)]$. Cette correspondance présente $2m(n-1)$ coïncidences et ces coïncidences ne peuvent se présenter que dans les deux cas suivants:

1°) Le groupe G_m contient un point double d'un groupe de g_n^1. Alors, à G_m correspondent $(m-1)(n-1)+n-2$ groupes distincts et G_m est une coïncidence simple.

2°) Le groupe G_m contient deux points d'un groupe de g_n^1. A ce groupe correspondent deux groupes coïncidant avec G_m, qui compte donc pour deux coïncidences.

Si d est le nombre des couples communs à des groupes de g_m^1, g_n^1, on a donc

$$2m(n-1) = \nu + 2d$$

En intervertissant les rôles de g_m^1, g_n^1, on a de même

$$2n(m-1) = \mu + 2d$$

et par conséquent

$$2m - \mu = 2n - \nu.$$

On en conclut que l'expression $p' = \frac{1}{2}\mu - m + 1$ ne dépend pas de la série envisagée. D'autre part, ces considérations ne sont pas modifiées lorsque l'on remplace C par une autre courbe de la même classe, en particulier par une courbe plane d'ordre m possédant $d' = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - p$ points doubles ordinaires, p étant le genre de la courbe. Si l'on considère la série découpée sur cette courbe par les droites d'un faisceau, μ est la classe de la courbe et on a $\mu = 2(m+p-1)$, d'où $p' = p$.

<u>L'ordre de la série jacobienne $|G_j|$ d'une série linéaire $|G|$ d'ordre n, dépourvue de points fixes, sur une courbe de genre p, est égal à $2(n+p-1)$.</u>

On observera que si C et C' sont deux courbes birationnellement équivalentes, les séries jacobiennes de deux séries homologues, se correspondent.

<u>Remarque</u>. — Le nombre des couples communs à des groupes de deux séries g_m^1, g_n^1 est donné par

$$d = (m-1)(n-1) - p.$$

10. <u>Jacobienne de la somme de deux séries</u>. — Considérons sur C une série $|G|$ d'ordre n et de dimension un, et un point P. Supposons que la série $|G+P|$ n'ait pas le point P fixe et extrayons-en une série de dimension deux, contenant $|G|$. Rapportons projectivement les groupes de cette série aux droites d'un plan. A la courbe C correspond une courbe C' d'ordre $n+1$ et à P, un point P' de cette courbe. La polaire de P par rapport à C' touche cette courbe en P'. On en

conclut que la série jacobienne de la série $|G+P|$ contient le groupe $G_j + 2P$.

Cela étant, considérons deux séries quelconques $|G|$, $|H|$ et leur somme $|G+H|$. Parmi les séries de dimension un appartenant à $|G+H|$, se trouvent des séries formées d'un groupe H fixe et de séries de dimension un tirées de $|G|$. Le jacobien d'une telle série est $G_j + 2H$. En permutant les rôles de $|G|$ et de $|H|$, on trouve finalement la relation fondamentale

$$|(G+H)_j| = |G_j + 2H| = |H_j + 2G|.$$

41. <u>Construction de la série canonique</u>... De la relation fondamentale précédente, on déduit

$$|G_j - 2G| = |H_j - 2H|$$

et par conséquent, si la série $|K| = |G_j - 2G|$ existe, elle ne dépend pas du choix de la série $|G|$.

Si $|G|$ est d'ordre n, $|G_j|$ est d'ordre $2(n+p-1)$ et par conséquent, $|K|$ est d'ordre $2p-2$.

Prenons comme modèle projectif de la courbe C une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires et pour série $|G|$, la série découpée par les droites du plan. Alors, la série $|G_j|$ est découpée sur C par les polaires des points du plan, c'est-à-dire par les courbes d'ordre $n-1$ adjointes à C. La série $|G_j - 2G|$ sera par conséquent découpée sur C par les adjointes d'ordre $n-3$ et $|K|$ est donc la série canonique de C.

Cette construction de la série canonique, qui en montre immédiatement l'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles, est due à M. Enriques.

42. <u>Correspondances rationnelles entre deux courbes.</u>

Soient Γ et C deux courbes de genres π, p, liées par une correspondance $(1, n)$. Aux points de Γ correspondent sur C des groupes de n points formant une série γ_n. Supposons qu'il existe δ groupes de γ_n possédant un point double ; les points de Γ qui correspondent à ces groupes sont appelés points de ramation de la correspondance.

Considérons une série linéaire $|G|$ de Γ et sa jacobienne $|G_j|$; soient $|G'|$ la série qui correspond à $|G|$ sur C et $|G'_j|$ la transformée de $|G_j|$. Le groupe jacobien d'une série de dimension un tirée de $|G'|$ se compose d'un groupe de $|G'_j|$ et du groupe D des points doubles de γ_n, de sorte que la jacobienne de $|G'|$ est la série $|G'_j + D|$. Si donc $|K'|$ est la transformée de la série canonique de Γ sur C et $\bar{K}$ la série canonique de C, on a

$$|\bar{K}| = |K' + D|.$$

On a donc

$$2p - 2 = n(2\pi - 2) + \delta.$$

Cette formule est due à Zeuthen ; l'interprétation géométrique est due à Castelnuovo.

43. Correspondances algébriques entre deux courbes.

Soient C_1, C_2 deux courbes de genres p_1, p_2, liées par une correspondance (n_1, n_2). Nous pouvons représenter les couples de points homologues de C_1, C_2 par les points d'une courbe Γ. Nous supposerons cette courbe Γ irréductible et la correspondance sera, dans ce cas, dite irréductible.

Nous désignerons par δ_1 le nombre de points de diramation de C_1, c'est-à-dire des points de C_1 auxquels correspondent, sur C_2, des groupes de n_2 points possédant un point double, par δ_2 le nombre de points de diramation de C_2.

A un point de C_1 correspondent n_2 points de Γ et à un point de Γ, un point de C_1. Nous avons donc, en désignant par π le genre de Γ,

$$2n_2(p_1 - 1) + \delta_1 = 2(\pi - 1).$$

De même, on a

$$2n_1(p_2 - 1) + \delta_2 = 2(\pi - 1)$$

et par suite

$$2n_2(p_1 - 1) + \delta_1 = 2n_1(p_2 - 1) + \delta_2 ;$$

cette formule est également due à Zeuthen.

§5.— Application à la théorie des courbes hyperspatiales.

44. Sommes minima de séries linéaires.— Soient, sur une courbe algébrique irréductible C, de genre p, deux séries linéaires $|G_1|$, $|G_2|$, complètes ou non. La somme minimum $|G_1 + G_2|$ des séries $|G_1|$, $|G_2|$ est la série linéaire de dimension minimum comprenant tous les groupes

formés d'un groupe quelconque de $|G_1|$ et d'un groupe quelconque de $|G_2|$. La définition de somme minimum de k séries $|G_1|, |G_2|, \ldots, |G_k|$ s'introduit par voie de récurrence.

On dira que ν points de C sont indépendants par rapport à une série linéaire $|G|$ quand il existe des groupes de $|G|$ passant par $\nu-1$ quelconques de ces points, sans passer par le dernier. Ces ν points imposent donc ν conditions indépendantes aux groupes de $|G|$ qui doivent les contenir. Si n est l'ordre de $|G|$ et r sa dimension, on a évidemment $n \geqslant \nu$, $r \geqslant \nu - 1$.

Soit Γ un groupe de m points de C. Si Γ impose ν conditions aux groupes de $|G|$ qui doivent le contenir, on peut trouver dans Γ des groupes de ν points indépendants par rapport à $|G|$, mais non des groupes de $\nu+1$ points. On dira que Γ présente ν conditions par rapport à $|G|$.

On a $0 \leqslant \nu \leqslant m$ et le cas $\nu = 0$ se présente lorsque Γ est un groupe de points fixes de $|G|$.

Supposons que le groupe Γ présente μ_1 conditions par rapport à $|G_1|$ et μ_2 conditions par rapport à $|G_2|$. Si $\mu_1 + \mu_2 \leqslant m$, on peut trouver des groupes de $\mu_1 + \mu_2 - 1$ points de Γ indépendants par rapport à la somme minimum $|G_1 + G_2|$, mais non de ces groupes de $\mu_1 + \mu_2$ points, par conséquent Γ présente au moins $\mu_1 + \mu_2 - 1$ conditions indépendantes aux groupes de la somme minimum $|G_1 + G_2|$ qui doivent le contenir. Si $\mu_1 + \mu_2 > m$, les m points de Γ sont indépendants par rapport à cette série.

Plus généralement, considérons k séries $|G_1|, |G_2|, \ldots |G_k|$ et supposons que Γ présente μ_i conditions par rapport à $|G_i|$. Dans Γ, on pourra trouver des groupes de $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k - k + 1$ points indépendants par rapport à la somme minimum $|G_1 + G_2 + \ldots + G_k|$ si $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k \leqslant m + k$, ou le groupe lui-même sera indépendant par rapport à cette série si $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k > m + k$.

Il en résulte que Γ présentera au moins $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k - k$ conditions aux groupes de $|G_1 + G_2 + \ldots + G_k|$ qui doivent le contenir dans le premier cas, ou m dans le second.

15. **Multiples minima d'une série linéaire.** —

Soit $|G|$ une série linéaire, complète ou non. Par multiple minimum d'ordre k de la série $|G|$, nous entendrons la somme minimum de k séries qui coïncident avec $|G|$.

Supposons que la série $|G|$ soit simple. Alors, si r est la dimension de $|G|$, r points quelconques d'un groupe générique G de la série sont toujours indépendants par rapport à $|G|$.

Appliquons le résultat précédent en appelant n l'ordre de la série $|G|$. Le nombre ν_k des conditions qu'un groupe générique G de $|G|$ imposent aux groupes de la série multiple minimum $|kG|$ qui doivent le contenir $\nu_k \geqslant k(r-1)+1$ si $k < \frac{n-1}{r-1}$ ou $\nu_k = n$ si $k \geqslant \frac{n-1}{r-1}$.

Soit r_i la dimension du multiple minimum $|iG|$ de $|G|$. Les groupes de $|kG|$ contenant un groupe G donnent, en supprimant ce groupe, une série qui contient le multiple minimum $|(k-1)G|$, donc $r_k - \nu_k \geqslant r_{k-1}$.

On a donc $r_k - r_{k-1} \geqslant k(r-1)+1$ si $k < \frac{n-1}{r-1}$ et $r_k - r_{k-1} \geqslant n$ si $k \geqslant \frac{n-1}{r-1}$.

Envisageons le premier cas $\left(k < \frac{n-1}{r-1}\right)$ et remarquons que si nous écartons les courbes rationnelles, pour lesquelles on peut avoir $r = n$, on a $k \geqslant 1$. Nous avons

$$r_k - r_{k-1} \geqslant k(r-1)+1, \ \ldots, \ r_2 - r \geqslant 2(r-1)+1, \quad r = (r-1)+1,$$

d'où, par addition,

$$r_k \geqslant \binom{k+1}{2}(r-1)+k, \qquad k < \frac{n-1}{r-1}.$$

On obtient ainsi une limite inférieure du multiple minimum $|kG|$ de $|G|$.

16. Genre maximum d'une courbe d'ordre n de S_r.

Soit C une courbe algébrique irréductible, de genre $p > 0$ et d'ordre n de S_r. Appliquons les résultats précédents en prenant pour $|G|$ la série découpée sur C par les hyperplans. Désignons par χ l'entier tel que $\frac{n-1}{r-1} - 1 \leqslant \chi < \frac{n-1}{r-1}$. La dimension du multiple minimum $|\chi G|$ est $r_\chi \geqslant \binom{\chi+1}{2}(r-1)+\chi$. Remarquons que le multiple minimum $|kG|$ est découpé sur C par les hypersurfaces d'ordre k de S_r.

La série $|\chi G|$ est non spéciale. En effet, un groupe G présente $\nu_\chi \geqslant \chi(r-1)+1 \geqslant n-r+1$ conditions par rapport à $|\chi G|$. Or, il faut $n-r$ conditions pour qu'un groupe canonique contienne le groupe G, donc il en faudrait au plus $n-r$ pour qu'un groupe de la série spéciale $|\chi G|$ contienne G. L'hypothèse que $|\chi G|$ est spéciale conduit donc à une absurdité.

Cela étant, on a $r_\chi \leqslant \chi n - p$ d'où, en comparant à l'inégalité précédente,

$$p \leq \chi\left[n - r - \tfrac{1}{2}(\chi - 1)(r-1)\right] \qquad \left(\frac{n-1}{r-1} - 1 \leq \chi < \frac{n-1}{r-1}\right).$$

Ce résultat, et la méthode qui nous y a conduit, sont dus à M. Castelnuovo.

47. Courbes de genre maximum de S_r. Supposons que la courbe C ait le genre maximum. L'égalité

$$p = \chi\left[n - r - \tfrac{1}{2}(\chi - 1)(r-1)\right]$$

entraîne

$$r_\chi = \chi n - p = \binom{\chi+1}{2}(r-1) + \chi$$

et la série $|\chi G|$, découpée sur C par les hypersurfaces d'ordre χ de S_r est complète.

Les inégalités

$$r_\chi - r_{\chi-1} \geq \chi(r-1)+1, \ldots, r_k - r_{k-1} \geq k(r-1)+1, \ldots, r_2 - r \geq 2(r-1)+1$$

doivent devenir des égalités, donc Les hypersurfaces d'ordre k de S_r découpent sur la courbe C d'ordre n et de genre maximum, une série de dimension $r_k = \binom{k+1}{2}(r-1) + k$, pour $k \leq \chi$.

Le nombre de conditions pour qu'une de ces hypersurfaces contienne C est $r_k + 1$.

Supposons maintenant $k > \chi$, c'est-à-dire $k \geq \frac{n-1}{r-1}$. On a $r_k - r_{k-1} \geq n$ et, $|kG|$ étant certainement non spéciale, $r_k \leq kn - p$. Supposons que le multiple minimum $|(k-1)G|$ soit une série complète; on a $r_{k-1} = (k-1)n - p$, d'où $r_k \geq kn - p$ et $r_k = kn - p$. Donc, si $|(k-1)G|$ est une série complète, il en est de même de $|kG|$. Or, pour $k = \chi + 1$, $|\chi G|$ est une série complète, donc Les hypersurfaces d'ordre $k \geq \chi$ de S_r découpent sur la courbe C une série complète.

Considérons en particulier les hyperquadriques de S_r ($k=2$), qui sont en nombre $\frac{1}{2}r(r+3)$ infini. Si $\chi > 1$, on a $r_2 = 3r - 1$ et C appartient à $\binom{r-1}{2}$ hyperquadriques linéairement indépendantes. Si $\chi = 1$, on a $n \leq 2r - 1$, $p = n - r$ et C appartient à $\binom{r-1}{2} + 2r - n$ hyperquadriques linéairement indépendantes.

Une courbe d'ordre n de genre maximum de S_r appartient à $\binom{r-1}{2}$ hyperquadriques linéairement indépendantes et à un plus grand nombre si le genre est égal à $n - r$ et si $n \leq 2r - 1$).

48. Courbes de genre maximum de S_3. Une courbe de genre maximum de S_3 appartient à une quadrique Q (et à plusieurs si $n \leq 4$).

Supposons $n = 2\nu$ et que la courbe C soit rencontrée en $\nu + t$ points par les génératrices d'un mode de Q. En projetant C sur un plan d'un point de Q, on obtient une courbe de genre $(\nu-1)^2 - t^2$. Le maximum a lieu pour $t=0$ et C est de genre $(\nu-1)^2$; elle rencontre en ν points les génératrices des deux modes de Q. La courbe C ne peut appartenir à une surface non dégénérée d'ordre inférieur à ν. Les surfaces d'ordre ν dépendent de $\binom{\nu+3}{3} - 1$ paramètres et découpent sur C une série complète de dimension $\nu^2 + 2\nu - 1$. Observons que parmi les surfaces d'ordre ν passant par C, se trouvent les surfaces formées de Q et des surfaces d'ordre $\nu - 2$. On en conclut qu'il y a une surface irréductible d'ordre ν passant par C.

Supposons maintenant $n = 2\nu + 1$. Si les génératrices d'un mode de Q rencontrent C en $\nu + t$ points, cette courbe a le genre $\nu(\nu-2) - t(t-1)$. Le maximum a lieu pour $t = \frac{1}{2}$, donc on doit avoir $t = 0$ ou $t = 1$, cas équivalents au point de vue générique. En raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve que C appartient à une surface irréductible d'ordre $\nu + 1$.

Une courbe gauche d'ordre 2ν de genre maximum, est l'intersection complète d'une quadrique et d'une surface d'ordre ν.

Une courbe gauche d'ordre $2\nu+1$, de genre maximum, est l'intersection d'une quadrique et d'une surface d'ordre $\nu+1$, ayant en outre une droite commune.

§6. Correspondances entre deux courbes algébriques

19. **Préliminaires.** — Nous avons considéré plus haut des correspondances algébriques entre deux courbes algébriques et défini les correspondances irréductibles; ces deux courbes peuvent d'ailleurs appartenir à la même classe et, plus particulièrement, coïncider. C'est dans cette hypothèse que nous nous placerons et nous étudierons donc les correspondances (α, β) entre les points d'une courbe algébrique C.

L'étude de ces correspondances, commencée par Cayley, a été poursuivie par Brill par voie algébrico-géométrique, puis par Hürwitz par voie transcendante. Plus tard, M. Severi en a donné une étude géométrique, que nous utiliserons ici. Nous avons indiqué, dans un fascicule sur les Correspondances entre deux courbes algébriques du Mémorial des Sciences Mathématiques, en cours d'impression, les résultats obtenus dans la théorie de ces correspondances et quelles sont les méthodes : géométriques, transcendantes ou topologiques, qui ont permis de les établir.

50. Définitions. — Supposons qu'entre les points d'une courbe algébrique irréductible C, une opération T fasse correspondre à un point a un groupe de β points B et que l'opération inverse T^{-1} fasse correspondre à un point b, un groupe de α points A. Nous avons ainsi une correspondance (α, β) entre les points de la courbe C.

Considérons une seconde opération T_1 faisant passer d'un point a de C à un groupe B_1 de β_1 points de C, T_1^{-1} faisant passer d'un point b à un groupe A_1 de α_1 points.

Par somme $T + T_1$, nous entendrons l'opération qui fait passer du point a au groupe $B + B_1$ de $\beta + \beta_1$ points de C. L'opération inverse, $(T+T_1)^{-1} = T^{-1} + T_1^{-1}$, fait passer d'un point b au groupe $A + A_1$ de $\alpha + \alpha_1$ points de C.

A un point a, T fait correspondre β points ; à chacun de ces points, T_1 fait correspondre un groupe de β_1 points dont l'ensemble forme un groupe $\bar{B}$ de $\beta\beta_1$ points. Par produit $T.T_1$, nous entendrons l'opération qui fait passer du point a au groupe $\bar{B}$. L'opération $(TT_1)^{-1} = T_1^{-1}T^{1}$ fait passer du point b à un groupe $\bar{A}$ de $\alpha\alpha_1$ points formé des α groupes A que T^{-1} fait correspondre aux points du groupe A_1 homologue, dans T_1^{-1}, du point b.

On déduit de ces définitions la signification des symboles kT, T^k, où k est un entier positif.

51. Correspondances à valence. — Les groupes B que T fait correspondre aux différents points a de C forment une série d'indice α, c'est-à-dire qu'un point de la courbe appartient à α groupes B. En général, les groupes B ne sont pas deux-à-deux équivalents, mais il peut se présenter les circonstances suivantes : Si à

deux points quelconques a, a' de C, T fait correspondre les groupes B, B',

a) Il existe un entier positif γ tel que les groupes $\gamma a + B$, $\gamma a' + B'$ soient équivalents.

b) Il existe un entier positif γ' tel que les groupes $\gamma' a + B'$, $\gamma' a' + B$ soient équivalents.

Nous ramènerons le second cas au premier en posant $\gamma' = -\gamma$. On pourra alors dire qu'il existe un entier γ, positif ou négatif, tel que, lorsque a décrit C, le groupe $\gamma a + B$ varie dans une série linéaire. Il se peut d'ailleurs que, lorsque γ est négatif, le groupe $\gamma a + B$ ne puisse être construit, mais la signification de la phrase précédente a un sens bien précis, donné par b).

Le nombre γ est appelé <u>valence</u> (valenza, Wertigkeit) de la correspondance T. Il peut naturellement exister, sur une courbe, des correspondances sans valence.

Supposons qu'une correspondance T puisse avoir deux valences distinctes γ, γ' ($\gamma > \gamma'$). De

$$\gamma a + B \equiv \gamma a' + B' \quad , \quad \gamma' a + B \equiv \gamma' a' + B',$$

on déduit $(\gamma - \gamma') a \equiv (\gamma - \gamma') a'$. Les multiples d'ordre $\gamma - \gamma'$ de deux points quelconques de la courbe C sont donc équivalents. Soit k un entier positif, multiple de $\gamma - \gamma'$, tel que la série $|ka|$ ait la dimension r au moins égale à trois et soit simple. L'image projectrice de la série $|ka|$ nous conduit à une courbe C', d'ordre k, de S_r, birationnellement identique à C. En chaque point de C', il doit exister un seul hyperplan ayant un contact d'ordre $k-1$ avec la courbe. Par suite $r = k$ et la courbe C' est rationnelle. Donc, sur une courbe de genre $p > 0$, une correspondance ne peut avoir qu'une seule valence.

52. <u>Opérations sur les correspondances à valences.</u>

Soient T_1, T_2 deux correspondances à valences γ_1, γ_2. Appelons B_1, B_1' les groupes que T_1 fait correspondre à deux points a, a' et B_2, B_2' les groupes que T_2 fait correspondre aux mêmes points. Des relations

$$\gamma_1 a + B_1 \equiv \gamma_1 a' + B_1' \quad , \quad \gamma_2 a + B_2 \equiv \gamma_2 a' + B_2' \;,$$

on déduit

$$(\gamma_1 + \gamma_2) a + B_1 + B_2 \equiv (\gamma_1 + \gamma_2) a' + B_1' + B_2',$$

donc <u>la somme de deux correspondances à valences γ_1, γ_2 est une correspondance à valence $\gamma_1 + \gamma_2$</u>.

Appelons β le nombre de points du groupe B_1 ; $a_{11}, a_{12}, \ldots$ ..., $a_{1\beta}$ les points de ce groupe ; $a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1\beta}$ ceux du groupe B'_1 ; B_{2i} le groupe que T_2 fait correspondre à a_{1i} et B'_{2i} le groupe que T_2 fait correspondre à a'_{1i}.

Nous avons

$$\gamma_2 a_{1i} + B_{2i} \equiv \gamma_2 a'_{1i} + B'_{2i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, \beta),$$

d'où, par addition,

$$\gamma_2 B_1 + \bar{B} \equiv \gamma_2 B'_1 + \bar{B}',$$

$\bar{B}$ et $\bar{B}'$ étant les groupes que $T_1 T_2$ fait correspondre à a, a'.

On a d'autre part

$$\gamma_1 a + B_1 \equiv \gamma_1 a' + B'_1, \quad \text{d'où} \quad \gamma_1 \gamma_2 a + \gamma_2 B_1 \equiv \gamma_1 \gamma_2 a' + \gamma_2 B'_1.$$

On a donc finalement

$$-\gamma_1 \gamma_2 a + \bar{B} \equiv -\gamma_1 \gamma_2 a' + \bar{B}'.$$

<u>Le produit de deux correspondances à valences γ_1, γ_2 est une correspondance à valence $-\gamma_1 \gamma_2$.</u>

53. <u>Correspondances à valence zéro.</u> Soit T une correspondance à valence nulle sur une courbe C. Cela signifie que lorsque a décrit la courbe C, le groupe homologue B varie dans une série linéaire d'ordre β. Prenons pour modèle projectif de C une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires.

Sur cette courbe, la série linéaire d'ordre β à laquelle appartiennent les groupes B est découpée, en dehors d'un groupe H de points fixes, par un système linéaire de courbes

$$\lambda_0 \varphi_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

Les groupes B seront découpés sur C par un système algébrique ∞^1 de courbes φ et puisque à un point a correspond un seul groupe B, les coefficients λ de ce système seront des fonctions rationnelles des coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 de a. La correspondance T sera donc représentée par une équation

$$\Phi(x'_1, x'_2, x'_3; x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (1)$$

où Φ est une fonction rationnelle, entière et homogène séparément en x et en x'.

Mais alors, si nous prenons pour x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point b de C, l'équation (1) représentera une courbe coupant C, en dehors d'un groupe de points fixes K, les α points du groupe A que T^{-1} fait correspondre à b. Lorsque b varie, la courbe (1) varie dans un système linéaire et T^{-1} est donc à valence nulle. Donc :

<u>L'inverse d'une correspondance à valence nulle est une correspondance à valence nulle.</u>

De plus, les points unis de la correspondance seront découpés sur C, en dehors des groupes H, K, par la courbe

$$\Phi(x_1, x_2, x_3 ; x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Le groupe U de ces points unis appartient donc à la série linéaire $|A+B|$, B et A étant les groupes que T et T^{-1} font correspondre à un point a de C. On en conclut que :

<u>Le nombre des points unis d'une correspondance (α, β) à valence nulle est égal à $\alpha + \beta$.</u>

54. <u>Formation de correspondances à valence</u>. — Considérons, sur C, une série g_n^1. A un point a de C, faisons correspondre le groupe B des $n-1$ points qui, avec a, forment un groupe de g_n^1. Nous obtenons ainsi une correspondance T, identique à son inverse ($T^{-1} = T$), qui a la valence $\gamma = 1$. Une telle correspondance sera appelée <u>correspondance élémentaire.</u>

Considérons γ correspondances élémentaires $T_1, T_2, \ldots, T_\gamma$. La somme de ces correspondances sera une correspondance T à valence γ. Soit encore T_0 une correspondance élémentaire distincte des précédentes ; le produit $T_0 T$ sera une correspondance à valence $-\gamma$. Il existe donc, sur la courbe C, des correspondances à valences quelconques.

Observons que les correspondances T^{-1} et $(T_0 T)^{-1}$ sont également respectivement à valences γ et $-\gamma$. Soit alors θ une correspondance quelconque à valence γ. Formons une correspondance θ_1 à valence $-\gamma$ au moyen de correspondances élémentaires. La correspondance $\theta + \theta_1$ est à valence nulle et il en est de même de la correspondance $(\theta+\theta_1)^{-1} = \theta^{-1} + \theta_1^{-1}$. Or, θ_1^{-1} est à valence $-\gamma$, donc θ doit être à valence γ.

<u>Une correspondance et son inverse ont même valence.</u>

55. <u>Groupe des points unis d'une correspondance à valence</u>. — Considérons tout d'abord une correspondance élémentaire T et soient A, B les groupes que T^{-1} et T font correspondre à un point a. Le groupe des points unis de T coïncide avec le groupe jacobien de la série g_n^1

définissant T, ce groupe est équivalent à un groupe canonique K de C, augmenté de deux groupes de la série g_n^1. Donc, si V est le groupe des points unis de T et que comme $T = T^{-1}$, les groupes $a + A$, $a + B$ coïncident en un même groupe de g_n^1, on a $V \equiv A + B + 2a + K$.

Considérons maintenant une correspondance T somme de γ correspondances élémentaires $T_1, T_2, \ldots, T_\gamma$. Si T_i et T_i^{-1} font correspondre à a respectivement les groupes B_i, A_i (qui d'ailleurs coïncident) et si V_i est le groupe des points unis de T_i, on a

$$V_i \equiv A_i + B_i + 2a + K.$$

Le groupe V des points unis de T est la somme des groupes $V_1, V_2, \ldots, V_\gamma$ et si T et T^{-1} font correspondre les groupes $B = \sum B_i$ et $A = \sum A_i$ au point a, on a donc

$$V \equiv A + B + 2\gamma a + \gamma K. \qquad (1).$$

On va démontrer que cette formule est valable pour toute correspondance à valence γ.

Soit en premier lieu une correspondance θ à valence négative $-\gamma$. Désignons par V' le groupe de ses points unis, par A', B' les groupes que θ^{-1} et θ font correspondre à a. La correspondance $T + \theta$ étant à valence nulle, on a

$$V + V' \equiv (A + A') + (B + B'),$$

d'où, par comparaison avec la relation précédente

$$V' \equiv A' + B' - 2\gamma a - \gamma K.$$

Si enfin T est une correspondance quelconque à valence positive γ, la considération de la correspondance $\theta + T_1$ à valence nulle, conduit immédiatement à la relation (1), valable pour toute correspondance.

<u>Le groupe des points unis d'une correspondance à valence γ, est équivalent au groupe $A + B + 2\gamma a + \gamma K$, où A, B sont les groupes que la correspondance et son inverse font correspondre au point a, et K un groupe canonique de la courbe.</u>

On en déduit la formule de Cayley-Brill : <u>Le nombre des points unis d'une correspondance à valence γ, sur une courbe C de genre p, est égal à $\alpha + \beta + 2\gamma p$.</u>

<u>Remarque</u>. Les théorèmes précédents ont été étendus à des correspondances plus générales par M. Severi ; nous renvoyons aux ouvrages de ce géomètre pour cette étude.

56. Application. — Comme application de la formule de Cayley-Brill, nous rechercherons le nombre de groupes de $r+1$ points communs à une série g_n^r et à une série γ_m, d'ordre m et d'indice $\nu \geq 1$, données sur une courbe C de genre p. Désignons par $Z_{r,n}$ ce nombre.

Soient P un point de C; Q un des $\nu(m-1)$ points distincts de P appartenant aux ν groupes de γ_m contenant P; R un des $n-r$ points du groupe de g_n^r contenant r points Q appartenant à un même groupe de la série γ_m.

A un point P correspondent $\nu(m-1)$ points Q et cette correspondance, que nous désignerons par S, est symétrique.

Cherchons maintenant les indices de la correspondance T entre les points P, R. A un point P correspondent ν groupes de $m-1$ points Q et chacun de ces groupes détermine $\binom{m-1}{r}$ groupes de g_n^r contenant r de ses points. A un point P correspondent donc $\nu\binom{m-1}{r}(n-r)$ points R. Inversement, le reste d'un point R par rapport à g_n^r est une série g_{n-1}^{r-1}; il y a $Z_{r-1,n-1}$ groupes de γ_m ayant r points communs avec des groupes de g_{n-1}^{r-1} et chacun d'eux contient $m-r$ points P. A un point R correspondent donc $(m-r)\,Z_{r-1,n-1}$ points P.

Les $\nu\binom{m-1}{r}$ groupes de g_n^r qui correspondent à un point P, contiennent, en dehors des points R homologues de P, les points Q comptés chacun $\binom{m-2}{r-1}$ fois. Lorsque P décrit C, ces groupes varient dans une série linéaire (multiple de g_n^r); par conséquent la correspondance $T+\binom{m-2}{r-1}S$ est à valence zéro. Les points unis de cette correspondance sont les points unis de T et ceux de S, ces derniers comptés $\binom{m-2}{r-1}$ fois. Les points unis de T donnent les groupes de $r+1$ points cherchés; ils sont donc au nombre de $(r+1)\,Z_{r,n}$. Les points unis de S sont les d points doubles de γ_m. On a donc

$$(r+1)\,Z_{r,n} + \binom{m-2}{r-1} d = (m-r)\,Z_{r-1,n-1} + \nu\binom{m-1}{r}(n+r).$$

On a $Z_{0,n-1} = \nu(n-1)$, donc $Z_{1,n} = n\,\nu(m-1) - \frac{1}{2}\,d$. On en tire $Z_{1,n-1}$ et ensuite $Z_{2,n}$. Et ainsi de suite. On obtient finalement

$$Z_{r,n} = n\,\nu\binom{m-1}{r} - \frac{1}{2}\binom{m-2}{r-1} d.$$

Cette formule est due à Schubert, le procédé utilisé ici pour l'établir est dû à M. Severi.

57. <u>Critère d'équivalence de Castelnuovo</u>. — Soit, sur la courbe C de genre p, une série γ_m d'ordre m et d'indice ν, possédant d points doubles. M. Castelnuovo a déduit de la formule de Schubert un critère permettant de voir quand les groupes de γ_m appartiennent à une même série linéaire.

<u>Le nombre des points doubles d'une série ∞^1 d'ordre m et d'indice ν, sur une courbe de genre p, est au plus égal à $2\nu(m+p-1)$; il est égal à ce nombre lorsque les groupes de la série sont équivalents et seulement dans ce cas.</u>

Considérons sur C une série non spéciale g^{m-1}_{m+p-1}, complète, ne contenant pas les groupes de γ_m ; il suffit de définir g^{m-1}_{m+p-1} par un groupe de points contenant $m-1$ points d'un groupe de γ_m, sans contenir le dernier. Le nombre z des groupes de γ_m appartenant à des groupes de g^{m-1}_{m+p-1} est fini et égal, d'après la formule de Schubert, à

$$z = \nu(m+p-1) - \frac{1}{2} d .$$

On a $z \geq 0$, donc $d \leq 2\nu(m+p-1)$.

Si l'on a $d = 2\nu(m+p-1)$, on a $z=0$ et g^{m-1}_{m+p-1} ne contient aucun groupe de γ_m. Par conséquent, s'il existe une série g^{m-1}_{m+p-1} contenant un groupe de γ_m, cette série contient tous les groupes de γ_m. Soient G un groupe de γ_m et Γ un groupe de p points génériques de C. Le groupe $G+\Gamma$ appartient à une série g^{m}_{m+p} ; le reste d'un point quelconque de Γ par rapport à cette série est une série g^{m-1}_{m+p-1} contenant G et par conséquent tous les groupes de γ_m. Les restes des groupes de γ_m par rapport à la série g^{m}_{m+p} passent donc tous par le point choisi de Γ et par conséquent par tous les points de Γ, puisque le point en question a été arbitrairement choisi. Il en résulte que les groupes de γ_m sont des groupes du reste g_m de Γ par rapport à g^{m}_{m+p}.

Inversement, si les groupes de γ_m sont équivalents, chaque série g^{m-1}_{m+p-1} contenant un groupe de γ_m, les contient tous par le théorème du reste. Si donc on prend une série g^{m-1}_{m+p-1} ne contenant pas un groupe de γ_m, cette série n'en contiendra aucun et on aura $z=0$.

De ce critère, M. Castelnuovo a déduit un théorème établi par voie transcendante par M. Severi : Si une série ∞^1 d'ordre m et d'indice ν, sur une courbe de genre p, est telle que les ν groupes passant par un point de la courbe varient dans une série linéaire (d'ordre $m\nu$), les groupes de la série sont équivalents.

Si nous considérons comme homologues deux points de la courbe appartenant à un même groupe de la série, nous avons une correspondance symétrique d'indices égaux à $\nu(m-1)$ et à valence ν. Les points unis sont les d points doubles de la série et on a donc

$$d = 2\nu(m-1) + 2\nu p = 2\nu(m+p-1).$$

Le caractère z d'une série d'ordre m et d'indice ν, a été appelé <u>défaut d'équivalence</u> de la série.

Liège, le 30 janvier 1941.