Cours de

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

par

Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liége.

Fascicule III.

Transformations birationnelles de l'espace, Exemples.

Liége,
Librairie BOURGUIGNON,
16, rue des Dominicains,
1940.

Du même auteur

Leçons élémentaires sur les équations différentielles et le calcul des variations. Bruxelles, Ecole militaire, 1926.

Les transformations birationnelles du plan. Paris, Gauthier-Villars, 1927.

La géométrie, Liège, Thone, 1931.

Leçons de Géométrie projective, Liège, Thone, 1933.

Leçons de Géométrie supérieure. Liège, Bourguignon, 1933.

Questions non résolues de Géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions. Paris, Hermann, 1933.

Leçons de Géométrie infinitésimale. Liège, Pholien, 1933.

La théorie des surfaces et l'espace réglé. Paris, Hermann, 1934.

Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Paris, Hermann, 1934.

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Paris, Hermann, 1935.

Les Géométries. Paris, Colin, 1937.

Cours de Géométrie analytique à trois dimensions. Liège, Pholien, 1937.

Cours de Géométrie supérieure. Fasc. I. Points singuliers des courbes et des surfaces algébriques. Fasc. II, Correspondances rationnelles. Liège, Bourguignon, 1937.

Introduction à la géométrie projective hyperspatiale. Liège, Bourguignon, 1939.

Géométrie classique et géométrie moderne. Encyclopédie Française, Tome I, Troisième partie. Paris, 1937.

§1.– La transformation (2,3)

1. Définition. Considérons les quadriques F passant par une droite a et par trois points A_1, A_2, A_3 non en ligne droite, dont le plan α ne passe pas par a. Ces quadriques forment un système linéaire ∞^3. Deux quadriques F ont en commun, en dehors de a, une cubique gauche C, passant par A_1, A_2, A_3 et ayant a comme bisécante. Une troisième quadrique F, ne passant pas par C, coupe cette courbe en un seul point en dehors de A_1, A_2, A_3 et a. Par conséquent, les quadriques F forment un système homaloïdal $|F|$.

Une droite passant par A_1 et s'appuyant sur a est fondamentale pour le système $|F|$; elle engendre un plan fondamental $\alpha_1 = A_1 a$. De même, les plans $\alpha_2 = A_2 a$, $\alpha_3 = A_3 a$ sont fondamentaux.

Une conique du plan $\alpha = A_1 A_2 A_3$, passant par les points $A_1, A_2, A_3, a\alpha$, est fondamentale pour $|F|$. Le plan α est donc fondamental.

La jacobienne du système $|F|$ est du quatrième ordre et formée des plans $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Désignons par S l'espace contenant le système $|F|$ et rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un second espace S'. Nous obtenons ainsi, entre S et S', une transformation birationnelle T.

2. Système homaloïdal du second espace.– Les surfaces F', qui correspondent dans S' aux plans de S, sont du troisième ordre et l'intersection variable de deux surfaces F' est une conique C'.

Les quadriques F passant par une droite du faisceau (A_1, α_1) forment un réseau et il leur correspond, dans S', les plans passant par un point A'_1. Lorsque la droite décrit le faisceau, le point A'_1 décrit une droite a'_1, car une quadrique F contient une et une seule droite du faisceau (A_1, α_1). De plus, la droite a'_1 est simple pour les surfaces F', puisqu'aux points infiniment voisins d'un point de a'_1 correspondent les points d'une droite.

Les faisceaux de droites (A_2, α_2), (A_3, α_3) conduisent de même à deux droites a'_2, a'_3 appartenant simplement aux surfaces F'. Deux quelconques des faisceaux (A_1, α_1), (A_2, α_2),

(A_3, α_3) n'ayant aucune droite commune, les droites a'_1, a'_2, a'_3 sont deux-à-deux gauches.

Les quadriques F passant par une conique γ du plan α contenant les points A_1, A_2, A_3 et (a, α) forment un réseau ; il leur correspond les plans passant par un point A' dont le lieu, lorsque γ varie, est une droite a'. Cette droite est double pour les surfaces F', puisqu'aux points infiniment voisins d'un point de a' correspondent les points d'une conique.

Parmi les coniques γ se trouve une conique formée de la droite $A_2 A_3$ et de la droite passant par les points A_1 et $a\alpha$; cette droite appartient au faisceau (A_1, α_1), donc les droites a' et a'_1 se rencontrent. De même, la droite a' rencontre les droites a'_2, a'_3.

A une droite de l'espace S correspond dans S' une conique C' s'appuyant sur les quatre droites a', a'_1, a'_2, a'_3.

Les surfaces F' passent doublement par la droite a', simplement par les droites a'_1, a'_2, a'_3 ; on vérifie aisément que ces surfaces forment bien un système homaloïdal $|F'|$.

3.- <u>Eléments fondamentaux</u>.- A un plan passant par a'_1 doit correspondre une quadrique F contenant toutes les droites du faisceau (A_1, α_1) et par conséquent dégénérée en deux plans : le plan α_1 et un plan passant par $A_2 A_3$. Il existe une correspondance projective entre les faisceaux de plans d'axes a'_1 et $A_2 A_3$.

De même, à un plan passant par a'_2 correspond une quadrique F formée du plan α_2 et d'un plan passant par la droite $A_3 A_1$; à un plan passant par a'_3 correspond une quadrique F formée du plan α_3 et d'un plan passant par $A_1 A_2$. Les faisceaux de plans d'axes a'_2, a'_3 sont respectivement projectifs aux faisceaux de plans d'axes $A_3 A_1, A_1 A_2$.

A un plan passant par la droite a' correspond une quadrique qui doit contenir toutes les coniques γ du plan α ; cette quadrique dégénère donc en le plan α et un plan passant par a. Les faisceaux de plans d'axes a, a' sont projectifs.

Les quadriques F tangentes en A_1 à une droite r forment un réseau ; il leur correspond dans S' les plans passant par un point R'. Lorsque la droite r décrit la gerbe de sommet A_1, le point R' décrit un plan ρ', puisque A_1 est simple pour les cubiques gauches C, homologues des droites de S'.

Lorsque la droite r décrit un plan ρ, le point R' décrit une droite r'. Parmi les positions de r, se trouve une droite du faisceau (A_1, α_1), donc la droite r' s'appuie sur a'_1. D'autre part, il existe une conique γ tangente en A_1 au plan ρ, donc la droite r' s'appuie sur a'. Il en résulte que le plan ρ' coïncide avec le plan $a'a'_1$. Aux points infiniment voisins de A_1 correspondent les points du plan $\alpha'_1 = a'a'_1$.

De même, aux points infiniment voisins correspondent respectivement les points des plans $\alpha'_2 = a'a'_2$, $\alpha'_3 = a'a'_3$.

Considérons maintenant un point R de a et un plan ρ passant par cette droite. Les quadriques F touchant en R le plan ρ forment un réseau et il leur correspond dans S' les plans passant par un point R'. Lorsque le plan ρ varie, le point R' décrit une droite r', puisque R est simple pour les surfaces F. Parmi les positions de ρ, se trouvent $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Les quadriques F tangentes à α_1 en R contiennent la droite A_1R et par suite r' s'appuie sur a'_1. De même, r' s'appuie sur a'_2, a'_3. Aux points infiniment voisins d'un point de la droite a, correspondent les points d'une droite s'appuyant sur a'_1, a'_2, a'_3. Par conséquent, aux points infiniment voisins de la droite a correspondent les points de la quadrique Q' passant par a'_1, a'_2, a'_3.

La jacobienne du système $|F'|$ est du huitième ordre et se compose des plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ comptés chacun deux fois, et de la quadrique Q'.

4. Cas particulier. Un cas particulier de la transformation précédente s'obtient en supposant que le point A_3 appartient à la droite a, les quadriques F touchent en A_3 un plan α_3 ne passant ni par A_1, ni par A_2. Les cubiques gauches C touchent en A_3 le plan α_3.

En répétant les raisonnements faits dans le cas général, on trouve encore qu'aux droites des faisceaux (A_1, α_1), (A_2, α_2), (A_3, α_3) correspondent respectivement les points de trois droites a'_1, a'_2, a'_3, simples pour les surfaces cubiques F'. Aux coniques γ du plan $\alpha = A_1A_2A_3$, passant par A_1, A_2, A_3 et touchant le plan α_3 en ce dernier point, correspondent les points d'une droite a', double pour les surfaces F'.

Les coniques γ dégénérées sont la conique formée de la droite A_1A_2 et de la droite $\alpha\alpha_3$; la conique formée des droites

$A_1 A_3$ et $A_2 A_3$. A la première correspond un point commun aux droites a et a'_3 ; à la seconde correspond un point A' commun aux droites a', a'_1 et a'_2.

La quadrique Q' dégénère en deux plans : le plan $\alpha'_3 \equiv A'a'_3$ et le plan $\alpha' \equiv a'_1 a'_2$. Observons que les quadriques F tangentes au plan α_3 en un point de a distinct de A_3 sont des cônes et forment un réseau ; il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet A'_3. Ce point appartient à la droite a'_3, car les cônes considérés rencontrent le plan α_3 suivant la droite a comptée deux fois.

Considérons un point R de a, distinct de A_3 et un plan ρ passant par a. Les quadriques F tangentes à ρ en R forment un réseau et il leur correspond dans S' les plans d'une gerbe de sommet R'. Lorsque le plan ρ varie, le point R' décrit une droite r'. Le plan ρ coïncide successivement avec α_1, α_2, α_3 et par suite la droite r' s'appuie sur a'_1, a'_2 (en des points variables avec R) et passe par A'_3. Ce point est donc l'intersection du plan α' avec la droite a'_3.

On établit, comme dans le cas général, qu'aux points infiniment voisins de A_1, A_2, A_3 correspondent respectivement les points des plans $\alpha'_1 = a'a'_1$, $\alpha'_2 = a'a'_2$, $\alpha'_3 = a'a'_3$.

§2... La transformation (2, 4)

5... **Définition**.– Considérons, dans un espace S, les quadriques F passant par quatre points A, A_1, A_2, A_3 non situés dans un même plan et touchant en A un plan α ne contenant aucun des points A_1, A_2, A_3. Elles forment un système linéaire $|F|$ de dimension trois. Deux quadriques F ont en commun une courbe C du quatrième ordre, passant par A, A_1, A_2, A_3 et ayant en A un point double, les tangentes appartenant au plan α. Une troisième quadrique F, ne contenant pas C, coupe cette courbe en un seul point en dehors de A, A_1, A_2, A_3. Le système $|F|$ est donc homaloïdal.

Rapportons projectivement les surfaces F aux plans d'un espace S'. Nous obtenons entre S et S' une transformation birationnelle T.

6. Système homaloïdal du second espace. Aux plans de l'espace S correspondent dans S' des surfaces F' du

quatrième ordre et aux droites, des coniques C'.

Les quadriques F coupent le plan $\alpha_1 = AA_2A_3$ suivant les coniques γ passant par A_2, A_3 et touchant α en A; ces coniques forment un faisceau et sont fondamentales. Aux ∞^2 quadriques F passant par une conique γ correspondent dans S' les plans passant par un point R'. Lorsque γ varie, le point R' décrit une droite a'_1, puisque toute quadrique F contient une seule conique γ. La droite a'_1 est double pour les surfaces F', puisqu'aux points infiniment voisins d'un point de cette droite, correspondent les points d'une conique.

En considérant de même les faisceaux de coniques découpés par les quadriques F sur les plans $\alpha_2 = AA_3A_1$, $\alpha_3 = AA_1A_2$, on obtient deux droites a'_2, a'_3 doubles pour les surfaces F'.

Les quadriques F touchant en A une droite non située dans le plan α sont des cônes de sommet A; elles forment un réseau auquel correspond dans S' une gerbe de plans de sommet A'. Les cônes considérés coupent α_1 suivant les droites AA_2, AA_3, formant une conique γ dégénérée. Le point A' appartient donc à la droite a'_1. Il appartient de même aux droites a'_2, a'_3.

Deux cônes F de sommet A ont en commun une droite variable r; les plans qui leur correspondent dans S' ont en commun une droite r' passant par A'. Il y a donc une correspondance birationnelle entre les droites des gerbes de sommets A, A'. Une droite r par A rencontre un plan quelconque de S en un point, donc son homologue r' doit rencontrer la surface F' correspondante en un point en dehors de A'. Les surfaces F' ont donc un point triple en A'. Les droites a'_1, a'_2, a'_3 passant par A', sont évidemment les arêtes d'un trièdre proprement dit, de sommet A' et les surfaces F' sont des surfaces de Steiner.

Soit maintenant r une droite de faisceau (A, α), tangente en A aux quadriques F. Les quadriques F passant par r forment un réseau et il leur correspond, dans S', les plans d'une gerbe de sommet R'. Lorsque r varie dans le faisceau (A, α), le point R' décrit une courbe Γ', simple pour les surfaces F'. La courbe Γ' est une conique, car une quadrique F contient deux droites du faisceau (A, α).

Parmi les coniques γ du plan α_1 se trouve une conique formée de la droite $A_2 A_3$ et de la droite $\alpha\alpha_1$; la conique Γ' s'appuie donc sur la droite a'_1. Elle s'appuie de même sur les droites a'_2, a'_3.

A une droite de S correspond dans S' une conique C' s'appuyant sur les droites a'_1, a'_2, a'_3 et sur la conique Γ'.

7. <u>Eléments fondamentaux</u>. — Les quadriques F tangentes en A_1 à une droite r forment un réseau et il leur correspond, dans S', les plans passant par un point R'. Lorsque la droite r décrit un faisceau de rayons de plan ρ, le point R' décrit une droite r', car une quadrique F possède en général une seule tangente dans le plan ρ en A_1. Il existe, dans le plan $\alpha_2 = A A_3 A_1$, une conique passant par A_3, tangente à α en A et à ρ en A_1. Les quadriques F passant par cette conique forment un réseau auquel correspond dans S' une gerbe dont le sommet appartient à r' et à a'_2. De même, la droite r' s'appuie sur a'_3. Aux points infiniment voisins de A_1 correspondent donc les points du plan $\alpha'_1 = a'_2 a'_3$.

Aux points infiniment voisins de A_2, A_3 correspondent de même respectivement les points des plans $\alpha'_2 = a'_3 a'_1$, $\alpha'_3 = a'_1 a'_2$.

Nous avons vu qu'aux quadriques F qui sont des cônes de sommet A correspondent les plans passant par A'. Les surfaces F' ont en A' un point triple triplanaire, les plans tangents étant les plans α'_1, α'_2, α'_3. Par conséquent, les surfaces F' assujetties à toucher en A' une droite r' n'appartenant à aucun des plans précédents, sont des cônes de sommet A'. Ces cônes dégénèrent en le cône fixe Γ'_0 projetant de A' la conique Γ' et en un cône du second ordre Φ', variable, passant par les droites a'_1, a'_2, a'_3. On voit donc qu'entre les gerbes réglées de sommets A, A', on a une correspondance birationnelle quadrique, les droites fondamentales étant, dans la première gerbe : AA_1, AA_2 et AA_3, dans la seconde gerbe : a'_1, a'_2, a'_3.

Considérons une droite r passant par A, son homologue r' passant par A', un faisceau de plans de S dont l'axe ne rencontre pas r et le faisceau de surfaces F' homologues. Les deux faisceaux sont projectifs et découpent sur r, r' des ponctuelles projectives. Au plan passant par A correspond une surface F' ayant un point quadruple en A', donc aux points infiniment voisins de A non situés dans le plan α correspondent les points infiniment voisins de A'.

Les points infiniment voisins de A situés dans le plan α appartiennent à toutes les surfaces F et sont fondamentaux. Considérons un plan ρ passant par A, une courbe φ_0 ayant un point double en A et une courbe φ_1 du même ordre ayant un point d'inflexion en A, la tangente d'inflexion étant la droite $\alpha\rho$. Les courbes φ_0, φ_1 déterminent un faisceau de courbes φ touchant en A la droite $\alpha\rho$. Les quadriques F osculant une courbe φ en A forment un réseau auquel correspond une gerbe de sommet R'. Lorsque la courbe φ varie, le point R' décrit une droite r', car il y a une seule courbe φ osculant en A une quadrique F donnée. Lorsque la courbe φ coïncide avec φ_0, le point R' coïncide avec A' et lorsque φ coïncide avec φ_1, le point R' appartient à Γ'. Il en résulte qu'aux points du domaine du second ordre de A, infiniment voisins des points du domaine du premier ordre de ce point situés dans le plan α, correspondent les points du cône Γ'.

Dans la correspondance quadratique existant entre les gerbes de sommets A, A', au plan α correspond le cône Γ_0'.

8. <u>Equations de la transformation</u>.— Prenons les points A_1, A_2, A_3, A comme sommets du tétraèdre de référence dans l'espace S. Les équations de T s'écrivent

$$\frac{x_1'}{x_2 x_3} = \frac{x_2'}{x_3 x_1} = \frac{x_3'}{x_1 x_2} = \frac{x_4'}{x_4(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)},$$

l'équation du plan α étant

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{x_1}{x_2' x_3' \varphi} = \frac{x_2}{x_3' x_1' \varphi} = \frac{x_3}{x_1' x_2' \varphi} = \frac{x_4}{x_1' x_2' x_3' x_4'}$$

où l'on a posé

$$\varphi = a_1 x_2' x_3' + a_2 x_3' x_1' + a_3 x_1' x_2'.$$

Le cône Γ_0' a pour équation $\varphi = 0$.

La jacobienne du système de quadriques |F| est du quatrième ordre et formée des plans α, α_1, α_2, α_3.

La jacobienne du système Φ est du douzième ordre; elle est formée des plans α_1', α_2', α_3' comptés chacun deux fois et du cône Γ'_0 compté trois fois.

9. Cas particuliers. — Certains cas particuliers intéressants de la transformation précédente peuvent s'obtenir en considérant les quadriques F tangentes en A à un plan α et passant par deux points A_1, A_2, en touchant en A_1 une droite donnée, ou encore passant par un point A_1 en y osculant une courbe donnée. Ces cas particuliers ont été étudiés par M. Linsman. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1933, 1934).

§3 - La transformation (3, 3)

10. Définition. Soient, entre deux espaces S, S', trois réciprocités θ_1, θ_2, θ_3 n'appartenant pas à un même faisceau, c'est-à-dire telles que les plans qu'elles font correspondre à un point P de S ne passent pas en général par une même droite.

A un point P de S, θ_1, θ_2 et θ_3 font correspondre trois plans ϖ'_1, ϖ'_2, ϖ'_3 de S' se rencontrant en général en un seul point P'. Au point P', les réciprocités font correspondre trois plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 se rencontrant en P. Les points P, P' se correspondent dans une transformation birationnelle T entre S et S'.

11. Systèmes homaloïdaux. — Lorsque le point P décrit un plan ρ, les plans ϖ'_1, ϖ'_2, ϖ'_3 décrivent des gerbes deux-à-deux projectives et par conséquent le point P' décrit une surface cubique F'.

De même, lorsque le point P' décrit un plan ρ', le point P décrit une surface cubique F.

Lorsque le point P décrit une droite r, les plans ϖ'_1, ϖ'_2, ϖ'_3 décrivent des faisceaux deux-à-deux projectifs et le point P' décrit donc une cubique gauche C'.

De même, lorsque P' décrit une droite r', le point P décrit une cubique gauche C.

Dans l'espace S, le système homaloïdal $|F|$ est donc formé de surfaces cubiques et deux de ces surfaces ont en commun une cubique gauche variable C. Par conséquent, la base de $|F|$ est une courbe du sixième ordre Γ que nous supposerons irréductible.

Dans l'espace S', le système homaloïdal $|F'|$ est également formé de surfaces cubiques dont les intersections variables sont des cubiques gauches C'. La base de $|F'|$ est une courbe Γ' du sixième ordre ; nous verrons qu'elle est également irréductible.

12. Etude des courbes fondamentales. Soit R' un point fondamental de S', c'est-à-dire un point de Γ'. Son homologue R dans S doit être indéterminé, donc les plans ρ_1, ρ_2, ρ_3 que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ font correspondre à R' doivent passer par une même droite r.

Une surface F ne peut rencontrer la droite r en un point variable avec la surface, car les plans de S' ne passent pas tous par R'. Par conséquent, la droite r est une trisécante de Γ. Cette courbe étant par hypothèse irréductible, il en est de même de la surface lieu de ses trisécantes et par conséquent de la courbe Γ' qui représente cette surface.

On établit de même qu'à un point R de la courbe Γ correspond une trisécante r' de Γ'. Aux points de la droite r', $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ font correspondre des plans passant par R ; ces trois plans passent par une même droite chaque fois que le point de r' considéré appartient à Γ'. Par conséquent, par un point de Γ passent trois trisécantes de cette courbe.

Si nous projetons la courbe Γ sur un plan d'un de ses points, nous obtenons une courbe du cinquième ordre possédant trois points doubles et par suite de genre trois ; par conséquent la courbe Γ est de genre trois.

Un plan ρ' de S' coupe Γ' en six points, donc la surface F qui lui correspond contient six trisécantes de Γ. Soit Φ la surface lieu des trisécantes de la courbe Γ. La surface Φ ne peut être rencontrée par une surface F en dehors de la courbe Γ et des six trisécantes de cette courbe qu'elle contient ; d'autre part, la courbe Γ est triple pour la surface Φ, par conséquent cette surface est du huitième ordre.

La courbe Γ ne peut évidemment pas posséder de quadrisécante, car celle-ci appartiendrait à toutes les surfaces F.

La jacobienne du système $|F|$ est la surface Φ.

On arrive à des conclusions analogues pour la courbe Γ'.

Une droite de S coupant Φ en huit points, les cubiques gauches C' s'appuient en huit points sur Γ'. De même, les cubiques gauches C s'appuient en huit points sur Γ. D'ailleurs, le système $|F|$ étant homaloïdal, une cubique gauche C ne peut rencontrer une surface F qu'en un point en dehors de la base de $|F|$.

A une trisécante de Γ correspond une cubique gauche formée de trois trisécantes de Γ' passant par un même point de cette courbe.

13. Equations de la transformation. Soient

$$\Sigma a_{ik} x_i x'_k = 0, \ \Sigma b_{ik} x_i x'_k = 0, \ \Sigma c_{ik} x_i x'_k = 0, \ (i, k = 1,2,3,4)$$

les équations des réciprocités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Les équations de la transformation sont

$$\rho x'_1 = \begin{vmatrix} \Sigma a_{i2} x_i & \Sigma a_{i3} x_i & \Sigma a_{i4} x_i \\ \Sigma b_{i2} x_i & \Sigma b_{i3} x_i & \Sigma b_{i4} x_i \\ \Sigma c_{i2} x_i & \Sigma c_{i3} x_i & \Sigma c_{i4} x_i \end{vmatrix},$$

$$\rho x'_2 = - \left| \Sigma a_{i1} x_i \quad \Sigma a_{i3} x_i \quad \Sigma a_{i4} x_i \right|,$$

$$\rho x'_3 = \left| \Sigma a_{i1} x_i \quad \Sigma a_{i2} x_i \quad \Sigma a_{i4} x_i \right|,$$

$$\rho x'_4 = - \left| \Sigma a_{i1} x_i \quad \Sigma a_{i2} x_i \quad \Sigma a_{i3} x_i \right|.$$

Les équations de la courbe Γ sont

$$\begin{Vmatrix} \Sigma a_{i1} x_i & \Sigma a_{i2} x_i & \Sigma a_{i3} x_i & \Sigma a_{i4} x_i \\ \Sigma b_{i1} x_i & . & . & \Sigma b_{i4} x_i \\ \Sigma c_{i1} x_i & . & . & \Sigma c_{i4} x_i \end{Vmatrix} = 0.$$

On obtient d'une manière analogue les équations de la transformation inverse et celles de la courbe Γ'.

14. Cas particuliers. — On peut observer que si les réciprocités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont involutives (polarités ou systèmes nuls), les espaces S, S' étant superposés, la transformation T est involutive.

On peut d'autre part obtenir des cas particuliers en abandonnant l'hypothèse que la courbe Γ est irréductible, ou en supposant les réciprocités dégénérées.

Soient par exemple a_1, a_2, a_3 trois droites de S et a'_1, a'_2, a'_3 trois droites de S'. Supposons que les couples de faisceaux de plans d'axes a_1 et a'_1, a_2 et a'_2, a_3 et a'_3 soient projectifs. Les points P et P' seront homologues dans une transformation birationnelle si les plans $P'a'_1$, $P'a'_2$, $P'a'_3$ correspondent aux plans Pa_1, Pa_2, Pa_3 dans ces projectivités. La courbe Γ se compose des droites a_1, a_2, a_3 et d'une cubique gauche dont ces droites sont des bisécantes. La courbe Γ' est analogue.

Un autre cas particulier est obtenu lorsque la courbe Γ est formée de quatre droites deux-à-deux gauches et de leurs deux quadrisécantes. La courbe Γ' est analogue.

Nous étudierons le cas où la courbe Γ est formée de six arêtes d'un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$. Les sommets de ce tétraèdre sont alors doubles pour les surfaces F et deux surfaces F ont encore en commun une cubique gauche C passant par les sommets du tétraèdre.

Les surfaces F passant par un point du plan $\alpha_1 = A_2 A_3 A_4$ contiennent ce plan et sont complétées par les cônes du second ordre passant par les droites $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$. A ces surfaces F correspondent dans S' les plans d'une gerbe de sommet A'_1, appartenant à toutes les surfaces F'. En partant des plans $\alpha_2 = A_3 A_4 A_1$, $\alpha_3 = A_4 A_1 A_2$, $\alpha_4 = A_1 A_2 A_3$, on obtient de même trois autres points A'_2, A'_3, A'_4 appartenant aux surfaces F'. Les quatre points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 ne peuvent appartenir à un même plan, car une surface F ne peut dégénérer en quatre plans $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Les surfaces F touchant en A_1 une droite r, forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R'. Lorsque la droite r varie, le point R' décrit un plan ρ', car A_1 est simple pour des cubiques gauches C. Lorsque la droite r appartient au plan α_2, les surfaces F touchant r en A_1 contiennent α_2 et le plan ρ' passe par A'_2. Il passe de même par A'_3, A'_4 et coïncide donc avec le plan $\alpha'_1 = A'_2 A'_3 A'_4$.

De même, aux points A_2, A_3, A_4 sont respectivement associés les plans $\alpha'_2 = A'_3 A'_4 A'_1$, $\alpha'_3 = A'_4 A'_1 A'_2$, $\alpha_4 = A'_1 A'_2 A'_3$.

Soient maintenant R un point de la droite $A_1 A_2$ et ρ un plan passant par cette droite. La section d'une surface F par le plan ρ se compose de la droite $A_1 A_2$ et d'une conique passant par A_1 et A_2. Si la surface touche ρ en R, cette section doit avoir un point double en R et par conséquent la conique dégénère en deux droites dont l'une se confond avec $A_1 A_2$. Il en résulte que si une surface F touche le plan ρ au point R, elle le touche tout le long de la droite $A_1 A_2$. Cela étant, les surfaces F touchant ρ le long de $A_1 A_2$ forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R'. Ce point correspond aux points infiniment voisins de $A_1 A_2$ situés dans le plan ρ. Lorsque le plan ρ varie, le point R' décrit une droite r', car la droite $A_1 A_2$ est simple pour les surfaces F. Lorsque le plan ρ coïncide avec α_3, le point R' coïncide avec A'_3, car les surfaces F comprennent alors le plan α_3 comme partie. De même, r' passe par A'_4 et coïncide donc avec la droite $A'_3 A'_4$. Les droites $A_1 A_2$, $A'_3 A'_4$ sont des droites fondamentales de seconde espèce associées.

On arrive à des conclusions analogues pour les autres arêtes des tétraèdres.

Les surfaces F' sont circonscrites au tétraèdre $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$, dont les sommets sont doubles pour les surfaces.

Aux points infiniment voisins du point A'_1 par exemple, correspondent les points du plan α_1. Aux points du domaine de A'_1 situés dans un plan correspondent, dans α_1, les points d'une conique passant par A_2, A_3, A_4. Aux points d'une droite de α_1 correspondent les points du domaine de A'_1 situés sur un cône du second ordre passant par $A'_1 A'_2$, $A'_1 A'_3$, $A'_1 A'_4$. La correspondance birationnelle entre le domaine de A'_1 et le plan α_1 est donc quadratique.

Il est facile de voir que les équations de la transformation peuvent s'écrire sous la forme

$$x_1 x'_1 = x_2 x'_2 = x_3 x'_3 = x_4 x'_4 .$$

§4. Une transformation (3,3) particulière.

15. Définition. La transformation que nous allons étudier rentre dans le type précédent, mais la courbe Γ se compose de quatre droites le long de deux desquelles il y a contact entre les surfaces F.

Le système homaloïdal $|F|$ est défini par l'équation

$$\lambda_1 x_1 x_3 x_4 + \lambda_2 x_2 x_4^2 + \lambda_3 x_3 x_4^2 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

et la transformation T est donnée par

$$\frac{x'_1}{x_1 x_3 x_4} = \frac{x'_2}{x_2 x_4^2} = \frac{x'_3}{x_3 x_4^2} = \frac{x'_4}{x_1 x_2 x_3} .$$

On en déduit

$$\frac{x_1}{x_1'^2 x'_2} = \frac{x_2}{x'_1 x'_3 x'_4} = \frac{x_3}{x_3'^2 x'_4} = \frac{x_4}{x'_1 x'_2 x'_3} .$$

Le système homaloïdal $|F'|$ a donc pour équation

$$\lambda'_1 x_1'^2 x'_2 + \lambda'_2 x'_2 x'_3 x'_4 + \lambda'_3 x_3'^2 x'_4 + \lambda'_4 x'_1 x'_2 x'_3 = 0 .$$

16. <u>Bases des systèmes homaloïdaux</u>. — La base du système homaloïdal $|F|$ se compose de

1°) La droite $x_1 = x_4 = 0$, le long de laquelle les surfaces F touchent le plan $x_1 = 0$.

2°) La droite $x_2 = x_4 = 0$.

3°) La droite $x_3 = x_4 = 0$, le long de laquelle les surfaces F touchent le plan $x_3 = 0$.

4°) La droite $x_2 = x_3 = 0$.

5°) Le point double biplanaire $A_1 (1,0,0,0)$, le cône tangent aux surfaces F étant

$$x_3 (\lambda_1 x_4 + \lambda_4 x_2) = 0 .$$

6°) Le point double $A_2 (0,1,0,0)$, conique, le cône tangent étant

$$\lambda_2 x_4^2 + \lambda_4 x_1 x_3 = 0 .$$

7°) Le point double conique $A_3 (0,0,1,0)$, le cône tangent étant

$$\lambda_1 x_1 x_4 + \lambda_3 x_4^2 + \lambda_4 x_1 x_2 = 0 .$$

La base du système $|F'|$ est constituée par

1°) La droite $x'_1 = x'_3 = 0$, le long de laquelle les surfaces F' touchent le plan $x'_3 = 0$.

2°) La droite $x'_1 = x'_4 = 0$.

3°) La droite $x'_2 = x'_3 = 0$, le long de laquelle les surfaces F' touchent le plan $x'_2 = 0$.

4°) La droite $x'_2 = x'_4 = 0$.

5°) Le point double conique $A'_2 (0,1,0,0)$, le cône tangent aux surfaces F étant

$$\lambda'_1 x_1'^2 + \lambda'_2 x'_3 x'_4 + \lambda'_4 x'_1 x'_3 = 0 .$$

6°) Le point double biplanaire $A'_4 (0,0,0,1)$, le cône tangent étant

$$x'_3 (\lambda'_2 x'_2 + \lambda'_3 x'_3) = 0 .$$

Ces éléments-base donnant les éléments fondamentaux de la transformation T ; nous les étudierons successivement en commençant par les points doubles.

17. <u>Le point fondamental</u> A_1. — Les surfaces F touchant en A_1 la droite r

$$\frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \frac{x_4}{\alpha_4}$$

sont données par

$$\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_4 \alpha_2 = 0 .$$

Il leur correspond les plans passant par le point $R'(\alpha_4, 0, 0, \alpha_2)$. Le lieu de ce point, lorsque la droite r varie, est la droite $x'_2 = x'_3 = 0$.

Considérons la conique γ d'équations paramétriques

$$\rho x_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1, \ \rho x_2 = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t, \ \rho x_3 = \alpha_3 t^2, \ \rho x_4 = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t$$

qui, pour $t = 0$, passe par le point A_1 en y touchant le plan $x_3 = 0$. Les surfaces F rencontrent γ en trois points confondus en A_1; celles qui rencontrent cette courbe en quatre points confondus en A_1 sont données par

$$\lambda_1 \alpha_3 \beta_4 \gamma_1 + \lambda_2 \beta_2 \beta_4^2 + \lambda_4 \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 = 0.$$

Elles forment un réseau et il leur correspond les plans passant par le point $(\alpha_3 \beta_4 \gamma_1, \beta_2 \beta_4^2, 0, \alpha_3 \beta_2 \gamma_1)$, dont le lieu, lorsque la conique varie, est le plan $x'_3 = 0$.

Considérons maintenant la conique γ d'équations

$$\rho x_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1, \ \rho x_2 = \alpha_2 t^2, \ \rho x_3 = \alpha_3 t^2 + \beta_3 t, \ \rho x_4 = \alpha_4 t^2,$$

qui pour $t = 0$ passe par A_1 en y touchant la droite $x_2 = x_4 = 0$. Les surfaces F rencontrant γ en quatre points confondus en A_1 forment un réseau donné par

$$\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_4 \alpha_2 = 0.$$

Il leur correspond les plans passant par le point $(\alpha_4, 0, 0, \alpha_2)$, dont le lieu, lorsque la conique γ varie, est la droite $x'_2 = x'_3 = 0$, déjà rencontrée plus haut.

Pour compléter cette étude, considérons la droite $x'_2 = x'_3 = 0$, le long de laquelle les surfaces F' touchent le plan $x'_2 = 0$. Soient $R'(y_1, 0, 0, y_4)$ un point de cette droite et ρ' un plan distinct de $x'_2 = 0$ passant par cette droite. Les surfaces F' touchant ρ' en R' sont données par $\lambda'_1 = 0$.

Elles forment un réseau auquel correspond la gerbe de sommet A'_1.

Il nous restera à examiner, plus loin, quels sont les points obtenus en considérant les surfaces F' osculant, en un point de la droite $x'_2 = x'_3 = 0$, une conique tangente au plan $x'_2 = 0$.

18. <u>Le point fondamental</u> A_2. Les surfaces F touchant en A_2 la droite r,

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \frac{x_4}{\alpha_4}$$

sont caractérisées par

$$\lambda_2 \alpha_4^2 + \lambda_4 \alpha_1 \alpha_3 = 0.$$

Ces surfaces forment un réseau auquel correspond la gerbe de plans de sommet $R'(0, \alpha_4^2, 0, \alpha_1 \alpha_3)$. Le lieu de ce point lorsque la droite r varie est la droite $x'_1 = x'_3 = 0$.

Le long de la droite précédente, les surfaces F' touchent le plan $x'_3 = 0$. Celles de ces surfaces qui touchent, en un point de cette droite un plan passant par la droite et distinct de $x'_3 = 0$, sont données par $\lambda'_2 = 0$. Ces surfaces passent doublement par la droite, forment un réseau et il leur correspond les plans passant par le point A_2.

19. <u>Le point fondamental</u> A_3. Les surfaces F touchant en A_3 la droite

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_4}{\alpha_4},$$

sont données par

$$\lambda_1 \alpha_1 \alpha_4 + \lambda_3 \alpha_4^2 + \lambda_4 \alpha_1 \alpha_2 = 0 ;$$

il leur correspond les plans passant par le point $(\alpha_1 \alpha_4, 0, \alpha_4^2, \alpha_1 \alpha_2)$. Le lieu de ce point est le plan fondamental $x'_2 = 0$.

20. <u>Le point fondamental</u> A'_2. Les surfaces F' touchant en A'_2 la droite

$$\frac{x'_1}{\alpha_1} = \frac{x'_3}{\alpha_3} = \frac{x'_4}{\alpha_4},$$

sont donnés par

$$\lambda'_1 \alpha_1^2 + \lambda'_2 \alpha_3 \alpha_4 + \lambda'_4 \alpha_1 \alpha_3 = 0 .$$

Il leur correspond les plans passant par le point $(\alpha_1^2, \alpha_3 \alpha_4, 0, \alpha_1 \alpha_3)$, dont le lieu est le plan $x_3 = 0$.

21. <u>Le point fondamental</u> A'_4. Les surfaces F' touchant en A'_4 la droite r',

$$\frac{x'_1}{\alpha_1} = \frac{x'_2}{\alpha_2} = \frac{x'_3}{\alpha_3}$$

sont donnés par

$$\lambda'_2 \alpha_2 + \lambda'_3 \alpha_3 = 0 ;$$

il leur correspond les plans passant par le point $R(0, \alpha_2, \alpha_3, 0)$, dont le lieu, lorsque la droite r' varie, est la droite $x_1 = x_4 = 0$.

Considérons la conique γ' d'équations paramétriques
$\rho x'_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t$, $\rho x'_2 = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t$, $\rho x'_3 = \alpha_3 t^2$, $\rho x'_4 = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t + \gamma_4$,
qui pour $t = 0$ passe par le point A'_4 en y touchant le plan $x'_3 = 0$. Les surfaces F' qui rencontrent la conique γ' en quatre points confondus en A'_4 sont données par

$$\lambda'_1 \beta_1^2 + \lambda'_2 \alpha_3 \gamma_4 = 0 .$$

Il leur correspond les plans passant par le point $(\beta_1^2, \alpha_3 \gamma_4, 0, 0)$ dont le lieu, lorsque la conique γ' varie, est la droite $x_3 = x_4 = 0$.

Considérons en second lieu la conique γ' d'équations

$$\rho x_1' = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t, \quad \rho x_2' = \alpha_2 t^2, \quad \rho x_3' = \alpha_3 t^2, \quad \rho x_4' = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t + \gamma_4,$$

passant, pour $t = 0$, par le point A_4' en y touchant la droite $x_2' = x_3' = 0$.

Les surfaces F' rencontrant la courbe γ' en cinq points confondus en A_4' sont données par

$$\lambda_1' \alpha_2 \beta_1^2 + \lambda_2' \alpha_2 \alpha_3 \gamma_4 + \lambda_3' \alpha_3^2 \gamma_4 = 0.$$

Il leur correspond les plans passant par le point $(\alpha_2 \beta_1^2, \alpha_2 \alpha_3 \gamma_4, \alpha_3^2 \gamma_4, 0)$, dont le lieu, lorsque la conique γ' varie, est le plan $x_4 = 0$.

Partons maintenant de la droite $x_1 = x_4 = 0$, le long de laquelle les surfaces F touchent le plan $x_1 = 0$. Les surfaces F touchant en un point R de cette droite un plan passant par cette droite distinct de $x_1 = 0$, ont pour équation

$$x_4 (\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_4 + \lambda_3 x_3 x_4) = 0.$$

Il leur correspond les plans passant par le point A_4'.

On arrive à la même conclusion en considérant la droite $x_3 = x_4 = 0$, le long de laquelle les surfaces F touchent le plan $x_3 = 0$.

22. <u>La droite fondamentale</u> $x_1 = x_4 = 0$. Nous venons de voir qu'aux points infiniment voisins de cette droite non situés dans le plan $x_1 = 0$, correspond le point A_4'. Les surfaces F touchant le plan $x_1 = 0$ le long de cette droite, ont en commun une droite a, infiniment voisine de la droite $x_1 = x_4 = 0$, située dans le plan $x_1 = 0$.

Considérons la conique γ d'équations paramétriques

$$\rho x_1 = \alpha_1 t^2, \quad \rho x_2 = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t + y_2, \quad \rho x_3 = \alpha_3 t^2 + \beta_3 t + y_3, \quad \rho x_4 = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t,$$

qui, pour $t = 0$, passe par le point $R\ (0, y_2, y_3, 0)$ en y touchant le plan $x_1 = 0$. Les surfaces F osculant γ en R sont données par

$$\lambda_2 \beta_4^2 y_2 + \lambda_3 \beta_4^2 y_3 + \lambda_4 \alpha_1 y_2 y_3 = 0;$$

il leur correspond les plans passant par le point $(0, \beta_4^2 y_2, \beta_4^2 y_3, \alpha_1 y_2 y_3)$, dont le lieu, lorsque R et la conique varient, est le plan fondamental $x_1' = 0$. Donc, aux points infiniment voisins de la droite a, correspondent les points du plan $x_1' = 0$.

23. <u>La droite fondamentale</u> $x_3 = x_4 = 0$. Les surfaces F touchant le plan $x_3 = 0$ le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$, ont en commun une droite a infiniment voisine de la droite considérée, dans le plan $x_3 = 0$.

Considérons la conique γ d'équations

$$\rho x_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t + y_1 \,,\ \rho x_2 = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t + y_2 \,,\ \rho x_3 = \alpha_3 t^2,\ \rho x_4 = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t,$$

touchant le plan $x_3 = 0$ au point $R(y_1, y_2, 0, 0)$ pour $t = 0$. Aux surfaces F osculant γ en R, correspondent les plans passant par le point $(0, \beta_4^2, 0, \alpha_3 y_1)$, dont le lieu, lorsque R et γ varient, est la droite $x'_1 = x'_3 = 0$.

Les surfaces F' touchent, le long de $x'_1 = x'_3 = 0$, le plan $x'_3 = 0$; elles ont donc en commun, dans ce plan, une droite a' infiniment voisine de la précédente.

Considérons la conique γ' d'équations

$$\rho x'_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t \,,\ \rho x'_2 = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t + y_2 \,,\ \rho x'_3 = \alpha_3 t^2,\ \rho x'_4 = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t + y_4,$$

touchant $x_3 = 0$ au point $R'(0, y_2, 0, y_4)$, pour $t = 0$. Aux surfaces F' osculant cette conique en R' correspondent les plans passant par le point $(\beta_1^2, \alpha_3 y_4, 0, 0)$, dont le lieu, lorsque R' et γ' varient, est la droite $x_3 = x_4 = 0$.

Les droites (fictives) a et a' sont donc fondamentales de seconde espèce associées.

24. <u>La droite fondamentale</u> $x'_2 = x'_3 = 0$. Les surfaces F' touchent le plan $x'_2 = 0$ le long de la droite $x'_2 = x'_3 = 0$; elles ont donc en commun une droite a' de $x'_3 = 0$, infiniment voisine de la droite précédente.

Considérons la conique

$$\rho x'_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t + y_1 \,,\ \rho x'_2 = \alpha_2 t^2,\ \rho x'_3 = \alpha_3 t^2 + \beta_3 t,\ \rho'_4 = \alpha_4 t^2 + \beta_4 t + y_4,$$

tangente au plan $x'_2 = 0$ au point $R'(y_1, 0, 0, y_4)$. Aux surfaces F' osculant cette courbe en R', correspondent les plans passant par le point $(\alpha_2 y_1^2, 0, \beta_3^2 y_4, 0)$. Le lieu de ce point lorsque R' et la conique varient est la droite $x_2 = x_4 = 0$.

Les surfaces F passant par le point $R(y_1, 0, y_3, 0)$ et y touchant le plan $\eta_2 x_2 + \eta_4 x_4 = 0$, sont données par

$$\lambda_1 \eta_2 - \lambda_4 \eta_4 = 0 ;$$

il leur correspond les plans passant par le point $(\eta_2, 0, 0, \eta_4)$. Lorsque R varie, ce point décrit la droite $x'_2 = x'_3 = 0$. On voit donc que la droite (fictive) a' et la droite $x_2 = x_4 = 0$ sont fondamentales de seconde espèce associées.

25. <u>La droite fondamentale</u> $x_2 = x_3 = 0$. Les surfaces F touchant au point $R(y_1, 0, 0, y_4)$ le plan $\eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0$ sont données par

$$\lambda_2 y_4 \eta_3 = \eta_2 (\lambda_1 y_1 + \lambda_3 y_4).$$

Il leur correspond les plans passant par le point $(\eta_2 y_1, -\eta_3 y_4, \eta_2 y_4, 0)$. Lorsque le point R et le plan varient, ce point décrit le plan fondamental $x'_4 = 0$.

26. <u>La droite fondamentale</u> $x'_1 = x'_4 = 0$. Aux surfaces F' touchant au point $(0, y_2, y_3, 0)$ le plan $\eta_1 x'_1 + \eta_4 x'_4 = 0$, correspondent les plans passant par le point $(0, \eta_1 y_2, \eta_1 y_3, -\eta_4 y_2)$. Le lieu de ce point est le plan fondamental $x_1 = 0$.

27. <u>La droite fondamentale</u> $x'_2 = x'_4 = 0$. Aux surfaces F' touchant le plan $\eta_2 x'_2 + \eta_4 x'_4 = 0$ au point $(y_1, 0, y_3, 0)$, correspondent les plans passant par le point $(\eta_4 y_1^2, 0, -\eta_2 y_3^2, \eta_4 y_1 y_3)$. Le lieu de ce point est le plan fondamental $x_2 = 0$.

28. <u>Jacobiennes des systèmes homaloïdaux</u>. La jacobienne du système $|F|$ est

$$x_1 x_2 x_3^2 x_4^4 = 0,$$

et celle du système $|F'|$,

$$x_1'^2 x_2'^2 x_3'^3 x'_4 = 0.$$

On retrouve ainsi les plans fondamentaux rencontrés plus haut.

La transformation précédente a fait l'objet d'une étude de M. le Lieutenant Baudet (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1938).

§5. Construction de quelques transformations birationnelles.

29. <u>Construction d'une transformation conservant deux faisceaux de plans</u>. — Considérons, dans deux espaces S, S', deux couples de faisceaux de plans projectifs, dont les supports sont gauches. On peut toujours choisir les tétraèdres de référence de telle sorte que l'on ait les équations

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2}, \quad \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4};$$

pour représenter ces homographies.

Soient $\varphi(x_1, x_2)$ et $\psi(x_3, x_4)$ deux formes binaires de même degré n. Proposons-nous de déterminer ces formes de telle sorte que les équations

$$\frac{x'_1}{x_1\psi} = \frac{x'_2}{x_2\psi} = \frac{x'_3}{x_3\varphi} = \frac{x'_4}{x_4\varphi} \qquad (1)$$

représentent une transformation birationnelle.

Posons, dans les équations (1),

$$x_1 = \rho x'_1, \quad x_2 = \rho x'_2, \quad x_3 = \sigma x'_3, \quad x_4 = \sigma x'_4.$$

Nous obtenons

$$\sigma^{n-1}\psi(x'_3, x'_4) = \rho^{n-1}\varphi(x'_1, x'_2)$$

Pour notre objet, cette relation doit être du premier degré par rapport à ρ et σ. Ceci s'obtient en posant $n = 0$ ou $n = 2$. Dans le premier cas, les équations (1) représentent une homographie entre S et S'. Dans le second, on obtient une transformation (3, 3) dont l'inverse est représentée par les mêmes formules (1). Si les espaces S, S' sont superposés, cette transformation est donc involutive.

Le système homaloïdal |F| de l'espace S a pour équation

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\psi(x_3, x_4) + (\lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4)\varphi(x_1, x_2) = 0.$$

Les surfaces F passent donc par les droites

$$x_1 = x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = x_4 = 0 \; ; \; \varphi(x_1, x_2) = \psi(x_3, x_4) = 0.$$

On obtient ainsi six droites qui sont les arêtes d'un tétraèdre et on retrouve un cas particulier de la transformation étudiée au § 3.

30. <u>Remarques sur les transformations birationnelles du plan</u>. Considérons entre deux plans σ, σ' la transformation birationnelle T d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3) : \varphi_2 : \varphi_3 \qquad (1)$$

et soient

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varphi'_1(x'_1, x'_2, x'_3) : \varphi'_2 : \varphi'_3. \quad (2)$$

Si dans les équations (1), nous remplaçons x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs (2), nous devons trouver l'identité. On doit donc avoir

$$\varphi_i(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3) \equiv x'_i\,\Phi(x'_1, x'_2, x'_3). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Si la transformation T est d'ordre n, Φ est de degré $n^2 - 1$. On a de même

$$\varphi'_i(\varphi_i, \varphi_2, \varphi_3) \equiv x_i\,\Phi'(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Φ' étant également de degré $n^2 - 1$.

31. <u>Construction d'une transformation monoïdale</u>.

Considérons les équations

$$\frac{x'_1}{\varphi_1} = \frac{x'_2}{\varphi_2} = \frac{x'_3}{\varphi_3} = \frac{x'_4}{x_4\psi}, \qquad (3)$$

où $\psi(x_1, x_2, x_3)$ est une forme de degré $n - 1$. Cherchons à déterminer cette forme de telle sorte que les équations (3) représentent une transformation birationnelle.

Posons, dans les équations (3),

$$x_1 = \rho\varphi'_1(x'_1, x'_2, x'_3), \quad x_2 = \rho\varphi'_2, \quad x_3 = \rho\varphi'_3;$$

nous obtenons

$$\frac{1}{\rho\,\Phi(x'_1, x'_2, x'_3)} = \frac{x'_4}{x_4\,\psi(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)}$$

et par conséquent

$$\frac{x_1}{\varphi_1'\psi(\varphi_1',\varphi_2',\varphi_3')} = \frac{x_2}{\varphi_2'\psi} = \frac{x_3}{\varphi_3'\psi} = \frac{x_4}{x_4'\Phi(x_1',x_2',x_3')}.$$

Quelle que soit la forme ψ, les équations (3) représentant donc une transformation birationnelle.

Dans l'espace (x), le système homaloïdal

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4 x_4\psi = 0$$

est formé de monoïdes d'ordre n, de sommet $O_4(0,0,0,1)$.

Dans l'espace (x'), le système homaloïdal

$$(\lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' + \lambda_3\varphi_3')\psi(\varphi_1',\varphi_2',\varphi_3') + \lambda_4 x_4'\Phi(x_1',x_2',x_3') = 0$$

est formé de monoïdes d'ordre n^2, de sommet $O_4'(0,0,0,1)$. Pour ces raisons la transformation (3) est appelée transformation monoïdale.

Les constructions précédentes, dans l'hyperespace, sont dues à Mlle Derwidué (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1937)

La transformation (2,4) étudiée plus haut, donne un cas particulier de la construction précédente.

32. <u>Correspondances birationnelles entre les cordes de deux cubiques gauches</u>.– Les bisécantes de la cubique gauche K,

$$\begin{Vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ d_x & f_x & g_x \end{Vmatrix} = 0$$

ont pour équations

$$\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0, \quad \lambda_1 d_x + \lambda_2 f_x + \lambda_3 g_x = 0.$$

On peut interpréter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ comme coordonnées des points d'un plan. Considérons, dans ce plan, un réseau homaloïdal de courbes d'ordre n. Les bisécantes de K qui correspondent aux points d'une courbe du réseau, forment une surface Φ, d'ordre $2n$, passant n fois par K, et passant par les bisécantes de K qui correspondent aux points-base du réseau, avec la même multiplicité que ceux-ci pour les courbes du réseau. Les surfaces Φ forment un réseau et deux surfaces de ce réseau ont en commun une seule corde de K variable avec les surfaces. Le plus simple des réseaux tels que Φ est celui des quadriques passant par K. Un second réseau est constitué par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par K et simplement par trois cordes fixes de K.

Considérons une seconde cubique gauche K' et établissons une projectivité entre les surfaces du réseau $|\Phi|$ et les quadriques Q' circonscrites à K'. On obtient ainsi une correspondance birationnelle entre les cordes de K et de K'. Aux quadriques Q circonscrites à K, correspondent les surfaces Φ' d'ordre $2n$, passant n fois par K' et formant un réseau tel que deux surfaces n'ont en commun qu'une droite variable avec ces surfaces. Les propriétés de cette correspondance se déduisent aisément de celles des correspondances birationnelles entre deux plans.

33. <u>Construction d'une transformation birationnelle.</u>

Soient, dans un espace S, une cubique gauche K et dans un espace S' une cubique gauche K'. Soit en outre Ω une réciprocité entre S et S', θ une correspondance birationnelle entre les bisécantes de K et de K'.

Par un point R de S passe une corde r de K. A cette corde, θ fait correspondre une corde r' de K'. Le plan ρ' que Ω fait correspondre à R coupe en général r' en un point R'. Les points R et R' se correspondent dans une transformation birationnelle T.

Supposons qu'à une quadrique Q circonscrite à K, θ fasse correspondre une surface Φ' d'ordre $2n$ passant n fois par K' et que par conséquent à une quadrique Q' circonscrite à K', corresponde une surface Φ d'ordre $2n$, passant n fois par K. Soient ϖ' un plan de S', F la surface que T lui fait correspondre dans S. Pour évaluer l'ordre de F, considérons une droite s et deux ponctuelles (X), (X') ayant cette droite comme support. Par un point X passe une corde r de K; à cette corde correspond une corde r' de K'; au point où r' coupe ϖ', Ω fait correspondre un plan coupant s en un point X'. Inversement, à un point X', Ω fait correspondre un plan coupant ϖ' suivant une droite; les cordes de K' s'appuyant sur cette droite forment une surface du quatrième ordre passant doublement par K'; à cette surface, θ fait correspondre une surface d'ordre $4n$, passant $2n$ fois par K et coupant s en $4n$ points X. Les ponctuelles (X), (X') sont liées par une correspondance $(4n, 1)$; il y a $4n+1$ points unis qui sont les points de F, donc cette surface est d'ordre $4n+1$. De même, aux plans de S correspondent, dans S', des surfaces F' d'ordre $4n+1$. Aux droites de S ou de S' correspondent des courbes d'ordre $4n+1$.

Les éléments fondamentaux de la transformation T dans l'espace S sont :

1°) La cubique gauche K, multiple d'ordre $2n$ pour les surfaces F.

2°) Les cordes de K fondamentales pour la transformation θ.

3°) Une courbe Δ lieu d'un point P tel que la corde de K' que θ fait correspondre à la corde de K passant par P, appartienne au plan que Ω fait correspondre à P.

On arrive à des conclusions analogues pour l'espace S'.

Nous allons examiner le cas le plus simple ($n=1$) de la transformation T.

34. Étude d'une transformation (5,5). Supposons donc $n=1$, c'est-à-dire que la correspondance θ soit obtenue en établissant une projectivité entre les quadriques circonscrites à K et à K'. Aux plans correspondent des surfaces du cinquième ordre et aux droites, des courbes du cinquième ordre.

Les surfaces F passent doublement par la cubique gauche K et les surfaces F', doublement par la cubique gauche K'. Supposons que P soit un point fondamental de l'espace S n'appartenant pas à K. Soient p la corde de K passant par P, p' la corde de K' qui lui correspond, ϖ' le plan que Ω fait correspondre à P. L'homologue P' de P devant être indéterminé, le plan ϖ' doit contenir la droite g'. Observons qu'aux points de g', Ω fait correspondre les plans d'un faisceau dont l'axe passe par P, donc un de ces plans contient p et il existe sur p' un point fondamental P'.

Le lieu du point P est une courbe fondamentale Δ et le lieu de P' une courbe fondamentale Δ'. La surface fondamentale de S' associée à Δ est le lieu des bisécantes de K' s'appuyant sur Δ' et la surface fondamentale de S associée à Δ' est le lieu des cordes de K s'appuyant sur Δ.

Deux surfaces F ont en commun la courbe K comptée quatre fois, la courbe Δ, comptée une fois et une courbe du cinquième ordre transformée d'une droite de S'. Par conséquent Δ est du huitième ordre. Il en est de même de Δ'.

On peut retrouver ce résultat d'une autre manière. Soient ρ un plan de l'espace S et F' sa transformée dans S'. Les bisécantes de K' s'appuyant sur une section plane de F' forment une surface du huitième ordre passant quatre fois par K'. Cette surface rencontre une seconde section plane de F' en onze points en dehors de K' et de la première section plane. Il y a donc onze cordes de K' rencontrant encore F' en deux points distincts et qui, par conséquent, appartiennent à F. De ces onze droites, trois sont les transformées par θ des cordes de K appartenant à ρ ; les huit autres correspondent aux points de Δ situés dans ρ.

La transformation T fait correspondre à une corde de K' la corde de K que θ lui fait correspondre. A une quadrique de S', T fait correspondre une surface du dixième ordre passant quatre fois par K et deux fois par Δ. En particulier, à une quadrique Q' circonscrite à K', T fait correspondre une surface formée d'une quadrique Q circonscrite à K et de la surface fondamentale associée à K'. Cette surface est donc du huitième ordre, passe trois fois par K et deux fois par Δ. Observons d'ailleurs qu'aux points du domaine d'un point de K' correspond une conique s'appuyant en trois points sur K et en quatre points sur Δ. En effet, si P' est un point de K', au cône projetant K' de P' correspond une quadrique Q coupée, par le plan que Ω fait correspondre à P', suivant une conique γ', s'appuyant en trois points sur K. Cette conique étant fondamentale, ne peut rencontrer les surfaces F en des points variables, donc elle s'appuie en quatre points sur Δ.

Supposons que la surface fondamentale associée à la courbe Δ' soit d'ordre $2n$. Comme elle est formée de cordes de K, elle passe n fois par K. D'autre part, elle passe simplement par Δ. Une surface F contient huit droites de la surface et par conséquent on a $n = 4$. La surface fondamentale considérée est donc d'ordre huit, passe quatre fois par K et une fois par Δ. On en conclut que la courbe Δ s'appuie en douze points sur la cubique gauche K.

La jacobienne du système $|F|$ est une surface du seizième ordre, passant sept fois par K et deux fois par Δ ; elle est formée des surfaces fondamentales de la transformation.

On obtient des résultats analogues relatifs aux surfaces fondamentales de l'espace S'.

Aux droites de S', T fait correspondre des courbes du cinquième ordre s'appuyant en huit points sur chacune des courbes K et Δ. De même, les courbes du cinquième ordre de S', transformées des droites de S, s'appuyent en huit points sur K' et sur Δ'.

35. Remarque. — On pourrait construire des transforma-

tions analogues aux précédentes de la manière suivante :
Soient dans l'espace S une congruence linéaire de droites G, dans l'espace S' une congruence linéaire de droites G'; soit encore Ω une réciprocité entre S et S'. Supposons établie entre G et G' une correspondance birationnelle θ.

Deux points R, R' de S, S' seront dits homologues lorsqu'ils appartiennent à deux droites de G, G' homologues dans θ et qu'ils sont conjugués par rapport à Ω

Liège, le 5 septembre 1939.