BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
TOMUL XX (XXIV), fasc. 1—2, 1974
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

C.D. 513.7

SURFACES ALGÉBRIQUES AYANT UNE COURBE CANONIQUE ISOLÉE

PAR

LUCIEN GODEAUX

Membre honoraire de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Nous avons démontré qu'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$ ayant un système bicanonique irréductible, était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique ayant une courbe canonique isolée [1]. Nous avons ensuite donné une autre démonstration de ce théorème par une voie plus simple [2]. Dans cette Note nous reprenons cette démonstration en simplifiant encore certains points et nous considérons les hyperquadriques circonscrites aux surfaces en question.

Après avoir rappelé les propriétés des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$ qui nous sont utiles, nous construisons la surface contenant l'involution d'ordre deux. Il est probable que la considération des hyperquadriques circonscrites aux surfaces considérées conduira à une démonstration géométrique d'un théorème que nous avons établi autrefois en utilisant une formule de Picard, à savoir que le bigenre de la surface de genres $p_a = p_g = 0$ est au plus égal à dix [3].

1. Soit Φ une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)}$ supérieur à deux, dont le système bicanonique est irréductible. Pour abréger, nous poserons $P_2 = \pi$. Nous avons démontré qu'il existe sur la surface Φ une courbe algébrique Γ isolée, de genre π et de degré virtuel $\pi - 1$. Le système bicanonique est $|2\Gamma|$, bien que la courbe Γ ne soit pas une courbe canonique. Le système $|2\Gamma|$ découpe sur la courbe Γ une série paracanonique.

Les systèmes pluricanoniques sont

$$|\Gamma_{2n-1}| = |(2n-3)\Gamma + \Gamma'|, \quad |\Gamma_{2n}| = |2n\Gamma|.$$

Le genre et le degré du système $|\Gamma_n|$ sont respectivement $\frac{1}{2}n(n+1)(\pi-1)+1$, $n^2(\pi-1)$. Le n-genre est donné par $P_n = \frac{1}{2}n(n-1)(\pi-1)+1$.

On a $2\Gamma' \equiv 4\Gamma$ et le diviseur de Severi de la surface Φ est $\sigma = 2$.

Il existe sur Φ des systèmes linéaires

$$|\overline{\Gamma}_{2n-1}| = |(2n-1)\Gamma|, \quad |\overline{\Gamma}_{2n}| = |(2n-2)\Gamma + \Gamma'|$$

et on a $2\Gamma_{2n-1} \equiv 2\overline{\Gamma}_{2n-1}$, $2\Gamma_{2n} \equiv 2\overline{\Gamma}_{2n}$.

Les systèmes $|\Gamma_{2n-1}|$ et $|\overline{\Gamma}_{2n-1}|$ d'une part, les systèmes $|\Gamma_{2n}|$ et $|\overline{\Gamma}_{2n}|$ d'autre part, ont les mêmes caractères (degré, genre, dimension).

Pour abréger, nous poserons $\nu = \pi - 1$.

2. Considérons dans un espace Σ à $2n(2n-1)\nu+1$ dimensions, deux espace σ, $\overline{\sigma}$ à $n(2n-1)\nu$ dimensions, ne se rencontrant pas.

Dans le premier σ de ces espaces, nous considérons une surface Φ, d'ordre $4n^2\nu$, dont les sections hyperplanes sont les courbes $2n$-canoniques Γ_{2n} et dans le second, $\overline{\sigma}$, une transformée birationnelle de Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes $\overline{\Gamma}_{2n}$. Soit $\overline{\Phi}$ cette surface.

Nous désignerons par le même symbole les courbes qui se correspondent sur les surfaces Φ et $\overline{\Phi}$.

Appelons T la correspondance birationnelle qui fait passer de Φ à $\overline{\Phi}$ et soit V_3 la variété lieu des droites joignant les points homologues de ces surfaces.

Considérons une courbe Γ_{2n} de Φ. Un hyperplan de Σ passant par cette courbe rencontre la courbe homologue de la surface $\overline{\Phi}$ en $4n^2\nu$ points. L'hyperplan contient donc $4n^2\nu$ droites de la variété V_2 lieu des droites joignant les points homologues de deux courbes Γ_{2n}. Un hyperplan passant par σ coupe V_2 suivant ces droites et passe simplement par la courbe Γ_{2n}. La variété V_2 est donc d'ordre $8n^2\nu$. Observons que la variété V_2 se trouve dans un hyperplan passant par $\overline{\sigma}$.

De même, la variété $\overline{V}_2$ lieu des droites s'appuyant sur deux courbes $\overline{\Gamma}_{2n}$ homologues des surfaces Φ, $\overline{\Phi}$ est d'ordre $8n^2\nu$ et est située dans un hyperplan passant par σ.

Un hyperplan passant par σ rencontre la variété V_3 suivant une variété $\overline{V}_2$ et passe simplement par Φ. La variété V_3 est donc d'ordre $12n^2$.

3. Les hyperquadriques de σ découpent sur la surface Φ des courbes du système $|4\Gamma|$ et $|4\overline{\Gamma}|$. De même, les hyperquadriques de l'espace $\overline{\sigma}$ découpent sur Φ des courbes des systèmes $|4\overline{\Gamma}|$ et $|4\Gamma|$. On peut donc imaginer une hyperquadrique $\varphi_2 = 0$ de σ découpant sur Φ une courbe 4Γ à laquelle correspond sur $\overline{\Phi}$ une courbe du système $|4\Gamma|$ découpée par une

hyperquadrique $\bar{\varphi}_2 = 0$ de σ. Les droites s'appuyant sur ces courbes en des points homologues dans T engendrent une réglée V_2' d'ordre $16n^2\nu$.

Cela étant, considérons dans Σ l'hyperquadrique $\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 = 0$. Cette hyperquadrique coupe la variété V_3 suivant la variété V_2' d'ordre $16n^2\nu$ et suivant une surface F d'ordfe $8n^2\nu$.

Désignons par H l'homographie biaxiale harmonique de Σ ayant pour axes les espaces σ et $\bar{\sigma}$. Cette homographie transforme la surface F en elle-même et détermine sur cette surface une involution I d'ordre deux. Un couple de points de cette involution détermine une droite rencontrant les surfaces Φ et $\bar{\Phi}$ en des points homologues dans T.

Les hyperplans passant par les espaces σ ou $\bar{\sigma}$ déterminent sur F les courbes qui correspondent aux courbes $\bar{\Gamma}_{2n}$ de $\bar{\Phi}$ et Γ_{2n} de Φ. Ces courbes sont en général irréductibles, donc la surface F est irréductible.

Si l'involution I possédait une courbe unie, les droites de V_3 passant par les points de cette courbe appartiendraient à la surface F, qui serait réductible. Donc la surface F contient une involution I ayant au plus un nombre fini de points unis.

Appelons C_{2n} les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ_{2n} et $\bar{C}_{2n}$ celles qui correspondent aux courbes $\bar{\Gamma}_{2n}$. Ces courbes appartinent au système $|C_{2n}|$ des sections hyperplanes de F.

La surface Φ est une image de l'involution I. Considérons sur Φ une courbe Γ_{2n-1} ne passant par auncun des points de diramation éventuels de Φ. Il lui correspond sur la surface F une courbe C_{2n-1}. Les courbes C_{2n} découpent sur la courbe C_{2n-1} la série canonique complète, car la courbe C_{2n-1} est de genre $2n(2n-1)\nu + 1$ et la dimension de $|C_{2n}|$ est égale à $2n(2n-1)\nu+1$. Il en résulte, d'après un théorème classique de Castelnuovo, que la surface F est régulière $(p_a = p_g)$.

De plus, il existe une courbe C_{2n} contenant comme partie une courbe C_{2n-1} et la surface F possède une courbe canonique C_1, unique. On a donc, pour la surface F, $p_a = p_g = 1$.

Supposons maintenant que l'involution I possède x points unis. Entre le genre arithmétique $p_a = 1$ de F et celui, $p_a' = 0$ de Φ, on a la relation [4]

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 4x,$$

d'où $x = 0$.

La surface F est régulière, possède une courbe canonique isolée et contient une involution du second ordre privée de points unis.

4. Le raisonnement précédent montre que le système canonique d'une courbe C_{2n-1} transformée d'une courbe $\bar{\Gamma}_{2n-1}$ est découpé par les courbes $\bar{C}_{2n} = C_{2n}$. On a donc

$$|C_{2n-1}| = |C_{2n}|, \qquad |C_{2n-1}'| = |C_{2n}|,$$

d'où

$$C_{2n} \equiv C_{2n-1} + C_1, \qquad C_{2n} \equiv \bar{C}_{2n-1} + C_1.$$

On en déduit que les courbes C_{2n-1} et $\overline{C}_{2n-1}$ appartiennent à un même système linéaire $|C_{2n-1}|$.

Soit m un nombre positif inférieur à $2n$. Désignons par C_m, $\overline{C}_m$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ_m, $\overline{\Gamma}_m$ des surfaces Φ, $\overline{\Phi}$. Le raisonnement fait plus haut montre que si les systèmes $|C_{m+1}|$, $|\overline{C}_{m+1}|$ coïncident, ils sont les adjoints aux courbes C_m et $\overline{C}_m$. On a donc $C_{m+1} \equiv \equiv C_m + C_1$, $C_{m+1} \equiv \overline{C}_m + C_1$, d'où l'on conclut que les systèmes $|C_m|$ et $|\overline{C}_m|$ coïncident en un même système $|C_m|$.

La propriété a été démontrée pour $m = 2n - 1$, donc elle est vraie quelque soit m.

5. En particulier on a pour $m = 1$, que le système $|C_2|$ est l'adjoint à la courbe C qui correspond sur F à la courbe Γ des surfaces Φ et $\overline{\Phi}$. On a par suite $C_2 - C \equiv C \equiv C_1$. La courbe Γ est unique sur les surfaces Φ et $\overline{\Phi}$ et la courbe C_1 est unique sur la surface F. Elle est située sur la surface lieu des droites joignant les points homologues dans T des courbes Γ et $\overline{\Gamma}$ situées sur les surfaces Φ et $\overline{\Phi}$.

Les genre et degré des systèmes $|\overline{\Gamma}_m|$, $|\Gamma_m|$ sont respectivement $\frac{1}{2} m(m+1)\nu + 1$, $m^2\nu$.

Par conséquent le genre et le degré du système $|C_m|$ sont respectivement $m(m+1)\nu + 1$, $2m^2\nu$.

La dimension P'_m du système $|C_m|$ est donnéee par $P'_m - 1 = m(m - -1)\nu + 1 = 2P_m + 1$.

Si l'on désigne par π_{m-1} le genre des courbes C_{m-1}, on a $\pi_{m-1} = = m(m-1)\nu + 1 = P'_m - 1$.

Sur la surface Φ, les courbes Γ_{2n} découpent sur la courbe Γ une série linéaire d'ordre $2n\nu$. La courbe Γ étant de genre $\pi = \nu + 1$, cette série a la dimension $2n\nu - \pi = (2n-1)\nu - 1$. Il en résulte que la courbe Γ appartient à un espace à $(2n-1)\nu - 1$ dimensions. Par conséquent la courbe C_1 appartient à un espace à $2(2n-1)\nu - 1$ dimensions si, comme nous le supposerons désormais, on a $n > 1$.

Observons qu'à une courbe Γ de Φ, ou $\overline{\Gamma}$ de $\overline{\Phi}$, correspond sur F une courbe C et qu'à une courbe Γ' correspond une courbe $2C$. Le système m-canonique de la surface F est donc $|C_m| = |mC_1|$.

6. Dans l'espace σ, il existe un hyperplan ξ passant par la courbe Γ et ayant le long de cette courbe un contact d'ordre $2n-1$ avec la surface Φ. En d'autre termes, l'hyperplan ξ rencontre la surface Φ suivant la courbe Γ comptée $2n$ fois.

Les hyperquadriques de l'espace σ linéairement indépendantes sont au nombre de $\frac{1}{2}[n(2n-1)\nu + 2]\,[n(2n-1)\nu + 1]$.

Elles rencontrent la surface Φ suivant les courbes du système $|4\Gamma|$, ou suivant les courbes découpées par les hyperplans distincts de ξ quand l'hyperquadrique contient cet hyperplan, ou contiennent la surface Φ. Il en résulte que les hyperquadriques linéairement indépendantes contenant la surface Φ sont au nombre de

$$\frac{1}{2}[n^2(2n-1)^2\nu^2+3n(2n-1)\nu+2]-[2n(4n-1)\nu+1]-$$

$$-n(2n-1)\nu=\frac{1}{2}[n^2(2n-1)^2\nu^2-n(14n-3)\nu].$$

Sur la surface Φ, la courbe Γ est d'ordre $2n\nu$ et de genre $\nu+1$. Nous avons supposé $n>1$. Dans cette condition, nous avons vu que la courbe Γ appartient à un espace σ_1 de dimension $(2n-1)\nu-1$.

Les hyperquadriques de σ_1 linéairement indépendantes passant par la courbe Γ sont au nombre de $\frac{1}{2}[(2n-1)^2\nu^2-(6n-1)\nu]$.

Les hyperquadriques de σ contenant Φ découpent sur σ_1 ces hyperquadriques ou contiennent l'espace σ_1. Il existe donc

$$\frac{1}{2}[(n^2-1)(2n-1)^2\nu^2-2n(4n-1)\nu]$$

hyperquadriques linéairement indépendantes contenant à la fois la surface Φ et l'espace σ_1 de la courbe Γ.

Les raisonnements précédents peuvent être répétés pour la surface $\bar{\Phi}$ de $\bar{\sigma}$. Il existe dans $\bar{\sigma}$ un hyperplan $\bar{\xi}$ ayant un contact d'ordre $2n-1$ avec la surface $\bar{\Phi}$ le long de la courbe $\bar{\Gamma}$ que T fait corresponder à Γ sur la surface $\bar{\Phi}$. La courbe $\bar{\Gamma}$ appartient à un expace $\bar{\sigma}_1$ à $(2n-1)\nu-1$ dimensions.

7. Dans l'espace Σ, il existe un hyperplan ξ_0 contenant la courbe C_1 ayant un contact d'ordre $2n-1$ avec la surface F le long de cette courbe.

Les hyperquadriques de l'espace Σ linéairement indépendantes sont au nombre de $2n^2(2n-1)^2\nu^2+5(2n-1)\nu+3$. Ces hyperquadriques découpent sur la surface F les courbes du système $|4\Gamma|$ ou les sections de F par les hyperplans distincts de ξ_0 lorsque l'hyperquadrique contient cet hyperplan, ou contiennent la surface F. Les hyperquadriques de Σ qui contiennent la surface F, linéairement indépendantes, sont donc au nombre de $2n^2(2n-1)^2\nu^2-n(10n-1)\nu$.

Sur une courbe C_1, les sections hyperplanes de F découpent une série linéaire d'ordre $4n\nu$ non spéciale puisque $n>1$. Le genre de la courbe C_1 étant $2\nu+1$, cette série a la dimension $2(2n-1)\nu-1$. La courbe C_1 appartient donc à un espace Σ_1 à $2(2n-1)\nu-1$ dimensions. Cet espace contient les espaces σ_1 et $\bar{\sigma}_1$ et est complètement déterminé par eux.

Les hyperquadriques de l'espace Σ_1 linéairement indépendantes sont au nombre de $2(2n-1)^2\nu^2+(2n-1)\nu$. Elles découpent sur la courbe

C_1 une série non spéciale d'ordre $8n\nu$ et de dimension $2(2n-1)\nu-1$. Il y a donc $2(2n-1)^2\nu^2-(6n-1)\nu$ hyperquadriques de Σ_1 passant par C_1.

Les hyperquadriques de Σ contenant F rencontrent l'espace Σ_1 suivant les hyperquadriques contenant C_1 ou contiennent Σ_1. Il y a donc $2(n^2-1)(2n-1)^2$ hyperquadriques de Σ linéairement indépendantes contenant à la fois la surface F et l'espace Σ_1 .

8. La courbe C_1 se trouve sur la surface F_1 lieu des droites s'appuyant en des points homologues dans T sur les courbes Γ et $\bar{\Gamma}$. Cette surface a l'ordre $4n^2\nu$. Elle est située dans l'espace Σ_1 à $2(2n-1)\nu-1$ dimensions.

Désignons par $\psi_2=0$ l'équation d'une hyperquadrique de σ_1 passant par la courbe Γ. Dans Σ_1, cette équation représente un cone quadratique lieu des droites s'appuyant sur Γ et sur $\bar{\sigma}$ et par conséquent contenant la surface F_1.

De même, si $\bar{\psi}_2=0$ est l'équation d'une hyperquadrique de $\bar{\sigma}_1$ passant par le courbe $\bar{\Gamma}$, dans Σ_1 cette équation représente un cône quadratique passant par la surface F_1.

Il en résulte que dans Σ_1, l'équation $\psi_2+\bar{\psi}_2=0$ représente une hyperquadrique passant par la surface F_1. On obtient ainsi $\frac{1}{4}[(2n-1)^2\nu^2-(6n-1)\nu]^2$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant la surface F_1. Ce nombre est inférieur à celui des hyperquadriques de Σ contenant la surface F.

Reçue le 13 novembre 1973

Université de Liège, Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L., *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls.* J. de Mathématiques pures et appliquées, 25—41 (1964).
2. Godeaux L., *Surfaces privées de courbe canonique possédant un système bicanonique irréductible.* Convegno internazionale di Geometria a celebrazione del Centenario della nascita di Federigo Enriques, Milan, 1971 (sous presse).
3. Godeaux L., *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls.* Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1934.
4. Godeaux L., *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications.* Ed. Cremonese, Roma, 1963.

SUPRAFEŢE ALGEBRICE AVÎND O CURBĂ CANONICĂ IZOLATĂ

(Rezumat)

Continuînd seria de lucrări privitoare la studiul unor suprafeţe algebrice [1], [2], se stabilesc noi rezultate şi se consideră între altele hipercuadricele circumscrise suprafeţelor studiate.