Bollettino U. M. I.
(4) **11**, Suppl. fasc. 3 (1975), 110-114

Construction de deux suites de congruences W.

LUCIEN GODEAUX (Liège)

Sunto. – *Si costruiscono due successioni di congruenze W tali che due congruenze successive di una successione hanno in comune una falda focale Si utilizza la rappresentazione delle superfici dello spazio ordinario mediante le successioni di Laplace dello spazio a cinque dimensioni.*

Dans une note récente [1], nous avons construit dans un espace à cinq dimensions un groupe de trois suites de Laplace dont deux sont inscrites dans la troisième, qui est à son tour inscrite dans les deux premières. Ces suites de Laplace sont associées à des surfaces de l'espace ordinaire et cela nous a permis de construire des suites de congruences W telles que deux congruences consécutives d'une des suites ont une nappe focale commune [2]. Nous voudrions reprendre ici ces questions pour leur donner plus d'unité et pour modifier également quelques démonstrations.

1. – Soit (x) une surface de l'espace ordinaire, non réglée, dont les asymptotiques sont les courbes u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les droites xx_u, xx_v. On sait que les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre (Bompiani, Tzitzeica) et appartiennent à une suite de Laplace L:

$$(L) \qquad \ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots,$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Nous supposerons cette suite illimitée dans les deux sens.

Rappelons [3] que les points U^1, V^1 ne peuvent appartenir à Q et que les plans $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ et $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q. Les sections de Q par ces plans représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_{n-1}. On obtient ainsi une suite de quadriques

$$\Phi_1 \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1} \ldots$$

dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points.

Nous allons supposer qu'en dehors des points U, V, *seul le point* U^n *de la suite* L *appartient à* Q.

Dans ces conditions, le plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ coupe Q suivant deux droites r_1, r_2 passant par U^n. Ces deux droites représentent deux faisceaux de rayons (R^1, ϱ^1), (R^2, ϱ^2) dont les sommets appartiennent à la droite r correspondant au point U^n. La quadrique Φ_{n-1}, considérée comme quadrique-lieu, dégénère dans les plans ϱ^1, ϱ^2. Considérée comme quadrique-enveloppe, elle dégénère dans les gerbes de sommets R^1, R^2.

La section de Q par le plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ se compose de deux droites passant par le point U^n, qui appartient à ce plan. Ces droites représentent les faisceaux de rayons (R^1, ϱ^2), (R^2, ϱ^1) qui forment une dégénerescence de la quadrique Φ_{n-1}.

2. – Le point U^n appartient au plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ et la droite $U^n U^n_v$ coupe le plan $V^{n-2} V^{n-1} V^n$ au point U^{n-1}. Plus généralement, le point U^{n+k} appartient au plan $V^{n-k-1} V^{n-k} V^{n-k+1}$.

De même, le point U^{n-1} appartient au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$, le point U^{n-k} appartient au plan $V^{n+k-1} V^{n+k} V^{n+k+1}$, à condition de remplacer U^{n-k} par V^{k-n-1} lorsque $k > n$. Nous avons donné une démonstration élémentaire de ces points dans la première note citée au début.

Appelons L_1 la ligne brisée dont les sommets sont les points de la suite L et L_2 le polyèdre dont les faces sont les plans déterminés par trois points consécutifs de la suite L. On voit que:

La ligne brisée L_1 *est inscrite dans le polyèdre à faces planes* L_2.

3. – Désignons par X, X' les points de rencontre avec Q de la droite $V^n V^{n+1}$ et par Y, Y' ceux de la droite $V^{n-1} V^n$. La section de Q par le plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ se compose des droites XY et $X' Y'$. Chacune de ces droites représente un des faisceaux (R^1, ϱ^2), (R^2, ϱ^1). Pour fixer les idées, nous supposerons que la droite XY représente le faisceau (R^1, ϱ^2).

Faisons varier u. La droite YY_u recontre la droite $V^n V^{n+1}$. L'hyperplan tangent à Q en Y contient la droite YY_u et le point U^n, donc la droite XY qui passe par U^n. Cet hyperplan rencontre le plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ suivant une seule droite donc les droites YY_u et XY coïncident et la droite YY_u passe par le point X.

On démontrerait de même que la droite XX_v passe par le point Y.

Les points X, Y sont donc les transformés de Laplace l'un de l'autre et satisfont à des équations de Laplace. Ils représentent les tangentes $R^1R^1_u$ et $R^1R^1_v$ à la surface (R^1) dont les asymptotiques sont les courbes u, v.

On démontre de même que la surface (R^2) a pour asymptotiques les courbes u, v et que les points X', Y' sont les transformés de Laplace l'un de l'autre. Le point Y' représente la droite $R^2R^2_v$ et le point X' la droite $R^2R^2_u$.

Les points X, Y déterminent une suite de Laplace inscrite dans la suite L.

Changeons de notation en posant $U_1 = Y$, $V_1 = X$. Ces points appartiennent à une suite de Laplace M_1 que nous écrirons

$$(M_1) \qquad \ldots, U_1^n, \ldots, U_1^1, U_1, V_1, V_1^1, \ldots, V_1^n, \ldots$$

Le point U_1^1 appartient à la droite $V^{n-1}V^{n-2}$. Plus généralement, le point U_1^h appartient à la droite $V^{n-k-1}V^{n-k-2}$. Le point V_1^1 appartient à la droite $V^{n+1}V^{n+2}$.

Posons de même $U_2 = Y'$, $V_2 = X'$. Ces points appartiennent à une suite de Laplace M_2 que nous écrirons

$$(M_2) \qquad \ldots, U_1^n, \ldots, U_2^1, U_2, V_2, V_2^1, \ldots, V_2^n, \ldots$$

Dans les suites M_1, M_2 chaque point est le transformé de Laplace du précédant dans le sens des u.

Observons que les droites U_1V_1, U_2V_2 passent par le point U^n. Nous avons donc le résultat suivant:

Les suites M_1, M_2 sont inscrites dans la suite L et celle-ci est à son tour inscrite dans M_1, M_2.

4. – Nous venons de voir que le point U_1^k appartient à la droite $V^{n-k-1}V^{n-k}$, en particulier le point U_1^n appartient à la droite $V^{-1}V$, c'est-à-dire UV, c'est-à-dire à l'hyperquadrique Q.

Le point U_1^n appartient au plan $U_1^{n-1}U_1^nU_1^{n+1}$ et on voit donc que la suite M_1 se comporte vis-à-vis de l'hyperquadrique Q comme la suite L.

Le point U_1^n appartient au plan $U_1^{n-1}U_1^nU_1^{n+1}$ donc au plan $V_1^{n-1}V_1^nV_1^{n+1}$ conjugué du précédent par rapport à Q.

Le point U^k appartient à la droite $V_1^{n-k-1}V_1^{n-k}$, par conséquent le point U appartient à la droite $V_1^{n-1}V_1^n$ et le point $V = U^{-1}$ à la droite $V_1^n V_1^{n+1}$. Soient U_3 le second point d'intersection de la droite $V_1^{n-1}V_1^n$ et V_3 celui de la droite $V: V_1^{n+1}$ avec Q. Le plan $V_1^{n-1}V_1^n V_1^{n+1}$ coupe Q suivant deux droites UV et $U_3 V_3$ qui passent toutes deux par U_1^n.

En répétant le raisonnement fait plus haut (n. 3), on voit que la droite $U_3 V_3$ représente un faisceau de rayons (y_1, η_1), le point y_1 engendrant une surface dont les asymptotiques sont les courbes u, v. La droite représentée par le point U_1^n décrit une congruence W ayant comme nappes focales les surfaces (x) et (y_1).

Les points U_3, V_3 étant les transformés de Laplace l'un de l'autre, déterminent une suite de Laplace M_{11} que nous écrirons

$$(M_{11}) \qquad \ldots, U_3^n, \ldots, U_3^1, U_3^1, V_3, V_3^1, \ldots, V_3^n, \ldots$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

En remplaçant la suite M_1 par la suite M_2, on voit que le point U_2^n appartient à la droite UV donc à l'hyperquadrique Q. Le plan $V_2^{n-1}V_2^n V_2^{n+1}$ contient le point U_2^n et rencontre Q suivant deux droites UV et $U_4 V_4$ passant par U_2^n. Les points U_4, V_4 sont les transformés de Laplace l'un de l'autre et la droite $U_4 V_4$ représente un faisceau de rayons (y_{-1}, η_{-1}), la surface (y_{-1}) ayant pour asymptotiques les courbes u, v. Les points U_4, V_4 appartiennent à une suite de Laplace M_{22} que nous écrirons sous la forme

$$(M_{22}) \qquad \ldots, U_4^n, \ldots, U_4^1, U_4, V_4^1, V_4^1, \ldots, V_4^n, \ldots$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens de u.

Le point U_2^n représente une congruence W dont les nappes focales sont les surfaces (x) et (y_{-1}). On a ainsi deux congruences W, (xy_1), (xy_{-1}) ayant une nappe focale commune (x).

5. – Le point U_3 appartient à la droite $V_1^{n-1}V_1^n$, le point U_3^k appartient à la droite $V_1^{n-k-1}V_1^{n-k}$. En particulier, le point U_3^n appartient à la droite $V_2^{-1}V_1$, c'est-à-dire à la droite $U_1 V_1$, c'est-à-dire à l'hyperquadrique Q. Vis-à-vis de celle-ci, la suite M_{11} se comporte comme la suite L.

Le point U_3^n appartient au plan $U_3^{n-1}U_3^n U_3^{1+n}$ donc également au plan conjugué par rapport à Q, $V_3^{n-1}V_3^n V_3^{n+1}$. Ce plan rencontre Q suivant deux droites $U_1 V_1$ et $U_5 V_5$, passant par U_3^n.

Comme dans les cas précédents, la droite $U_5 V_5$ représente un faisceau de rayons (x_2, η_2) et les asymptotiques de la surface (x_2) sont les courbes u, v.

La droite représentée par le point U_3^n décrit une congruence W dont les nappes focales sont les surfaces (R^1) et (x_2).

Changeons de notations et désignons par x_0 la droite r, par x_1 le point R^1, par x_{-1} le point R^2. Nous obtenons ainsi quatre surfaces (x_2), (x_1). (x_0) et (x_{-1}), deux de ces surfaces consécutives étant les nappes focales de congruence W.

6. – Les raisonnements précédents peuvent se poursuivre indéfiniment et on obtient ainsi deux suites de surfaces d'asymptotiques u, v,

$$\ldots, (x_{-n}), \ldots, (x_{-1}), (x_0), \ldots, (x_n), \ldots$$

et

$$\ldots, (y_{-n}), \ldots, (y_{-1}), (x), (y_1), \ldots, (y_n), \ldots$$

deux surfaces consécutives d'une de ces suites étant les nappes focales d'une congruence W.

On obtient ainsi *deux suites de congruences W telles que deux congruences W d'une de ces suites ont une nappe focale commune.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Godeaux, *Sur une configuration formée par trois suites de Laplace*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) **50** (1971), pp. 453-455.

[2] L. Godeaux, *Sur deux suites de congruences W*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., (1971), pp. 450-454.

[3] Voir notre mémoire sur *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in -8°, (2) **34**, 6 (1964).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 19 luglio 1974