Bollettino U. M. I.
(4) **12**, Suppl. fasc. 3 (1975), 141-147

Sur certaines suites de quadriques considérées par Corrado Segre.

† LUCIEN GODEAUX (Liège)

Sunto. – *Costruzione di una serie di quadriche di cui due quadriche consecutive si toccano in quattro punti caratteristiche per le due quadriche.*

C. SEGRE a considéré des suites de quadriques telles que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques [1]. Il utilise dans ce but la représentation de Klein des droites de l'espace par les points d'une hyperquadrique Q de l'espace à cinq dimensions. On sait que les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique sont représentées par les points des sections de l'hyperquadrique Q par deux plans conjugués par rapport à celle-ci [2]. Notre but dans cette note est de construire une série plus générale que celles considérées par Segre et possédant la même propriété. Nous partons d'une suite de Laplace (U) de S_5 et de sa polaire (V) par rapport à Q.

La suite de quadriques que nous avons attachée à un point d'une surface en considérant, comme l'a fait jadis M. BOMPIANI, la surface comme lieu de ses tangentes, est un cas particulier de la suite précédente, comme nous le montrerons.

Un autre cas particulier que nous considérons à la fin de cette note nous conduit à une suite de Laplace qui présente un certain intérêt.

1. – Considérons dans un espace S_5 à cinq dimensions, une hyperquadrique Q dont les points représentent les droites d'un espace S_1 et une suite de Laplace (U) dont les variables sont u et v. Nous représenterons les points de cette suite par

$$\ldots, U^{-n}, \ldots, U^{-1}, U, U^1, \ldots, U^n, \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous supposerons cette suite illimitée dans les deux sens et que aucun de ses points n appartient à Q, ce qui implique que la droite $U^n U^{n+1}$ rencontre cette hyperquadrique en des points distincts.

Désignons par V^n le pôle par rapport à Q de l'hyperplan U $U^{n-2} U^{n-1} U^n U^{n+1} U^{n+2}$. Nous obtenons ainsi une suite de points

$$\ldots, V^{-n}, \ldots, V^{-1}, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots$$

formant une suite de Laplace (V) dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v. Ce théorème est connu [3]; en voici d'ailleurs une démonstration.

Soit $\Omega(p, q)$ une forme bilinéaire des coordonnées de deux points p, q de S_5. Supposons que la condition pour que les points p, q soient conjugués par rapport à Q soit $\Omega(p, q) = 0$. Nous supposerons pour abréger les notations $n = 0$. Nous avons alors

$$\Omega(U^{-1}, V) = 0, \ldots, \Omega(U^2, V) = 0 \, .$$

En dérivant les quatre premières de ces équations par rapport à u et les quatre dernières par rapport à v, on a

$$\Omega(U^{-2}, V_u) = 0, \ldots, \Omega(U^1, V_u) = 0 \, ,$$
$$\Omega(U^{-1}, V_v) = 0, \ldots, \Omega(U^2, V_v) = 0 \, .$$

On en déduit

$$\Omega(U^{-1}, V_{uv}) = 0 \, , \quad \Omega(U, V_{uv}) = 0 \, , \quad \Omega(U^1, V_{uv}) = 0 \, .$$

Les points V, V_u, V_v, V_{uv} appartiennent donc au plan conjugué du plan $U^{-1} U U^1$ et sont liés par une relation linéaire, c'est-à-dire que le point V satisfait à une équation de Laplace.

On démontre de même que le point V^1, pôle de l'hyperplan $U^{-1} U U^1 U^2 U^3$, satisfait à une équation de Laplace.

On a

$$\Omega(U^{-1}, V^1) = 0, \ldots, \Omega(U^3, V^1) = 0 \, ,$$

d'où, en dérivant par rapport à u,

$$\Omega(U^{-1}, V^1_u) = 0, \ldots, \Omega(U^2, V^1_u) = 0 \, .$$

Des équations précédentes, on déduit que les points V_v, V^1_u se trouvent sur la droite conjuguée de l'espace $U^{-1} U U^1 U^2$, c'est-à-dire sur la droite VV^1. On voit donc que la droite VV_v passe par V^1 et la droite $V^1V^1_u$ par V, donc le point V^1 est le transformé de Laplace de V dans le sens des v et V, celui de V^1 dans le sens des u.

La démonstration précédente se transporte au cas où U et V sont remplacés par U^n et V^n. Le théorème est donc démontré.

Les plans $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ et $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q. Ils coupent celle-ci suivant deux coniques γ, γ'. Aux points de γ correspondent les génératrices rectilignes d'une quadrique Φ_n et aux points de γ', les génératrices rectilignes de l'autre mode de la quadrique.

A la suite (U) *correspond une suite de quadriques* (Φ).

2. – Soient C^n, C'^n les points de rencontre avec Q de la droite U^nU^{n+1} et D^n, D'^n ceux de la droite V^nV^{n+1}. A ces points correspondent des droites que nous désignerons respectivement par c_n, c'_n, d_n, d'_n.

Les points C^n, C'^n appartiennent à la conique γ et par conséquent les droites c_n, c'_n appartiennent au premier groupe de génératrices rectilignes de Φ_n. Les points D^n, D'^n appartiennent à la conique γ' et les droites d_n, d'_n appartiennent à l'autre groupe. Sur Φ_n, on a un quadrilatère gauche c_n, c'_n, d_n, d'_n. Mais les droites c_n, c'_n, d_n, d'_n appartiennent aussi à la quadrique Φ_{n+1} et par conséquent les quadriques Φ_n, Φ_{n+1} se touchent en quatre points (c_n, d_n), (c_n, d'_n), (c'_n, d_n), (c'_n, d'_n).

Deux quadriques consécutives de la suite (Φ) *se touchent en quatre points.*

3. – Sur la surface (C^n) se trouve une courbe u. La tangente $C^nC^n_u$ à cette courbe en C^n appartient au plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et est tangente en C^n à la conique γ_1 section de Q par ce plan. Aux points de la courbe u sur la surface (C^n) correspondent les droites d'une réglée qui se raccorde à Φ_{n+1} le long de la droite c_n. Lorsque u varie, le lieu de la droite c_n fait donc partie de l'enveloppe de la quadrique Φ_{n+1}.

De même, lorsque v varie, le lieu de la droite d_n fait partie de l'enveloppe de la quadrique Φ_{n+1}.

Il en résulte que lorsque u et v varient, le lieu du point (c_n, d_n) fait partie de l'enveloppe de la quadrique Φ_{n+1}.

Il en est de même des autres sommets du quadrilatère $c_nc'_nd_nd'_n$. Mais la quadrique Φ_n touche la quadrique Φ_{n+1} en ces quatre points, donc leurs lieux font également partie de l'enveloppe des quadriques Φ_n.

Deux quadriques consécutives de la suite (Φ) *se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune de ces quadriques.*

4. – Supposons que les deux suites (U), (V) aient en commun deux points consécutifs.

Nous pouvons supposer sans restriction que ces points sont U, V, les points U^1, V^1 n'appartenant pas à Q.

L'hyperplan polaire de U étant $U^1 U V V^1 V^2$ passe par U et ce point appartient à Q. Il en est de même du point V et de la droite UV.

La droite UV représente un faisceau de rayons de sommet x et de plan ζ. Lorsque u, v varient, le point x engendre une surface (x).

Le plan UVV^1 ne peut rencontrer Q en dehors de la droite UV. Il en est de même du plan U^1UV, donc la quadrique Φ se réduit au plan ζ compté deux fois.

La droite UU^1 touche l'hyperquadrique Q en U. Il en résulte que la droite représentée par le point U rencontre la surface (x) en trois points confondus en x et est donc une tangente asymptotique de la surface (x). Il en est de même de la droite représentée par le point V.

On conclut de ceci que les lignes asymptotiques de la surface (x) sont les courbes u, v et que ζ est le plan tangent à la surface (x) au point x.

La série de quadriques (Φ) coïncide donc avec celle que nous avons associée à un point d'une surface (x), dont il a été question plus haut.

5. – Les droites $C^n C^n_u$, $C'^n C'^n_u$ appartiennent au plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et se rencontrent en un point A. L'hyperplan polaire de A passe par les points C^n, C'^n donc par les points U^n, U^{n+1} et par le plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ conjugué du plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$. C'est donc l'hyperplan $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1} V^{n+2}$.

Les droites $D^n D^n_v$, $D'^n D'^n_v$ appartiennent au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ et se rencontrent en un point B. L'hyperplan polaire de B contient les points V^n, V^{n+1} et le plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$. C'est donc l'hyperplan $U^n U^{n+1} U^n V^{n+1} V^{n+2}$.

Les droites $C^n C^n_v$, $C'^n C'^n_v$ appartiennent au plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et se coupent en un point A' dont l'hyperplan polaire est $U^n U^{n+1} V^{n-1} V^n V^{n+1}$.

Les droites $D^n D^n_u$, $D'^n D'^n_u$ appartiennent au plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ et se coupent en un point B' dont l'hyperplan polaire est $U^{n-1} U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$.

Les hyperplans polaires des points A, B, A', B' passent par l'espace $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$ donc ils appartiennent à la droite r_n conjuguée de cet espace.

Soient R_1, R_2 les points de rencontre de la droite r_n avec Q. Les droites $C^n R_1$, $D^n R_2$ appartiennent à Q, donc la droite r_1 représentée par R_1, rencontre les droites c_n et d_n, c'est-à-dire passe par le point (c_n, d_n).

Pour des raisons analogues, la droite r_1 passe par le point (c'_n, d'_n), c'est donc une diagonale du quadrilatère $c_n c'_n d_n d'_n$. L'autre diagonale de ce quadrilatère est évidemment la droite r_2 représentée par le point R_2.

Les points A, B, A', B' sont situés sur une droite qui rencontre Q aux points représentant les diagonales du quadrilatère $c_n c'_n d_n d'_n$.

6. – Les points A, B et les points A', B' sont conjugués par rapport à Q. Nous allons dorénavant considérer un cas particulier en supposant que B' coïncide avec A et A' avec B. Nous appellerons cette hypothèse l'*hypothèse H*.

Si B' coïncide avec A, les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ appartiennent à un hyperplan ξ et le point A a pour hyperplan polaire un espace η contenant les plans $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ et $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ qui se rencontrent en B.

La droite AA_v et la droite $B'B'_v$, qui coïncident rencontrent en un point l'une le plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$, l'autre le plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$, c'est-à-dire que la droite AA_v passe par le point B.

On démontre de même que la droite BB_u rencontre en un point chacun des plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^{n-1} V^n V^{n+1}$, c'est-à-dire passe par A, qui est l'unique point commun à ces plans par construction.

Les droites AA_v et BB_u coïncident donc et A est le transformé de Laplace de B dans le sens des u, B celui de A dans le sens des v.

Dans l'hypothèse H, les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Ces points appartiennent à une suite de Laplace que nous désignerons par (AB).

7. – Le point A appartenant au plan $U^n U^{n+1} U^{n+1}$, la droite AA_u rencontre en un point le plan $U^{n+1} U^{n+2} U^{n+3}$. Nous désignerons ce point par A^1.

Le point $A = B'$ appartenant également au plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$, la droite AA_u rencontre en un point le plan $V^{n-2} V^{n-1} V^n$ et la droite AA_u rencontre ce plan en un point A'^1. Le point ayant pour transformé de Laplace dans le sens des v le point A appartient à la droite $AA_u = AA^1 = AA'^1$. La droite $A^1 A^1_v$ rencontre en un point le plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et la droite $A'^1 A'^1_v$ rencontre en un point le plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ et la droite joignant ces deux points doit passer par A. Ils coïncident donc avec A. Les points A_1 et A'^1 coïncident et ont pour transformés de Laplace dans le sens des v le point A.

Le point A^1 situé dans l'hyperplan ξ_1 contenant les plans $U^{n+1} U^{n+2} U^{n+3}$ et $V^{n-2} V^{n-1} V^n$ est le transformé de A dans le sens des u.

On démontre de même que le point B^1 situé dans un hyperplan η_1 contenant les plans $V^{n+1} V^{n+2} V^{n+3}$ et $U^{n-2} U^{n-1} U^n$ est le transformé de Laplace de B dans le sens des v.

On notera que les points A^1, B^1 sont conjugués par rapport à Q.

8. – En répétant le raisonnement précédent, on voit que le transformé de Laplace de A^1 dans le sens des u est le point A^2 commun au plans $U^{n+2} U^{n+3} U^{n+4}$ et $V^{n-3} V^{n-2} V^{n-1}$, plans qui se trouvent dans un hyperplan ξ_s. Et ainsi de suite.

Les plans $U^{n+i} U^{n+i+1} U^{n+i+2}$ et $V^{n-i-1} V^{n-i} V^{n-i+1}$ ont en commun un point A^i et appartiennent donc à un hyperplan ξ_i: Le point A^i est le transformé de Laplace dans le sens des u du point A^{i-1} et celui-ci est le transformé dans le sens des v du point A^i.

De même, les plans $V^{n+i} V^{n+i+1} V^{n+i+2}$ et $U^{n-i-1} U^{n-i} U^{n-i+1}$ ont en commun un point B^i et appartiennent à un hyperplan η_i. Le point B^i est le transformé de Laplace de B^{i-1} dans le sens des v et B^i celui de B^{i-1} dans le sens des u.

L'hyperplan η_i est le polaire de A^i par rapport à Q et ξ_i celui de B^i. Les points A^i et B^i sont donc conjugués par rapport à Q.

Dans l'hypothèse H, il existe une suite de Laplace dont les points sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q.

Mais la suite (AB) ne donne pas une suite de quadriques analogue aux suites de Segre car les plans $A^i A^{i+1} A^{i+2}$ et $B^i B^{i+1} B^{i+2}$ ne sont pas conjugués par rapport à Q.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Su alcune classi particolari di sistemi di quadriche e sui rispettivi inviluppi* (scritti matematici offerti ad ENRICO D'OVIDIO, Torino, 1918), Opere, vol. II, pp. 130-159.

[2] *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826, 1928, pp. 31-41). Voir aussi notre mémoire sur *La géométrie différentielle des surfaces considérée dans l'espace réglé* (Mémoires in 8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, pp. 1-80).

[3] *Remarques sur la théorie des suites de Laplace* (Mémoires de la Société des Sciences de Liège, 1931, pp. 1-8).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 13 febbraio 1975