
Sur une catégorie de surfaces algébrique doubles

Par LUCIEN GODEAUX (Liège).

Dans un mémoire déjà ancien⁽¹⁾, nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique représente une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. D'une manière précise, nous avons démontré que:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique d'ordre n soit l'image d'une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, sont que:

1) la surface possède des points doubles coniques en nombre multiple de quatre:

2) parmi les hypersurfaces passant par ces points doubles, découpant sur la surface le système double de celui des sections hyperplanes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.

Une surface répondant à ces conditions est appelée en abrégé surface de rang deux. Cette surface, comptée deux fois et ayant comme points de diramation les points doubles, est appelée surface double,

Dans cette note, nous appliquons le théorème rappelé aux surfaces d'ordre impair de l'espace ordinaire. Nous déterminons les conditions pour qu'une surface F , d'ordre $2n+1$, irréductible, touche un cône du second ordre en chaque point d'intersection. Nous établissons ensuite que la surface F possède $4n^2$ points doubles coniques sur la courbe de contact et est par conséquent une surface de rang deux. Nous étudions les courbes tracées sur la surface F et sur la surface double ayant F comme support et comme points de diramation les $4n^2$ points doubles de celle-ci. Nous démontrons que cette surface double est régulière.

1. Soit Q un cône du second ordre de sommet O . Représentons point par point ce cône sur un plan σ de manière qu'à ses sections planes correspondent les cubiques φ_3 ayant un point double fixe A et trois points simples fixes A_1, A_2, A_3 situés sur une droite a .

A la droite a correspond sur le cône Q le domaine du sommet O ; au domaine du point A correspond une section plane de Q et à ceux des points A_1, A_2, A_3 , trois génératrices du cône. Aux droites AA_1, AA_2, AA_3 correspondent les points de rencontre de ces génératrices avec la section plane homologue de A .

Supposons qu'il existe une surface F , d'ordre $2n+1$, passant simplement par le sommet O du cône et touchant celui-ci le long d'une courbe D d'ordre $2n+1$.

A la section de Q par une surface d'ordre $2n+1$ correspond dans σ une courbe d'ordre $3(2n+1)$ ayant les multiplicités $2(2n+1)$ en A et $2n+1$ en A_1, A_2, A_3 . Si la surface passe simplement par le point O , la droite a fait partie de cette courbe. Le restant est une courbe d'ordre $6n+2$, passant $2(2n+1)$ fois par A et $2n$ fois par chacun des points A_1, A_2, A_3 . A la courbe D doit correspondre dans le plan σ une courbe Δ qui, comptée deux fois, doit appartenir au système linéaire déterminé par la courbe précédente. Il en résulte que la courbe Δ est d'ordre $3n+1$, a en A la multiplicité $2n+1$ et en chacun des points A_1, A_2, A_3 la multiplicité n . La courbe Δ coupe donc la droite a en un point en dehors de A_1, A_2, A_3 et par conséquent la courbe D passe simplement par O .

La courbe D ne peut appartenir à une surface d'ordre $m \leq n$, ne contenant pas Q comme partie, car alors la courbe Δ devrait faire partie d'une courbe d'ordre $3m$, passant $2m$ fois par A et m fois par chacun des points A_1, A_2, A_3 . On devrait donc avoir

$$3m \leq 3n+1, \quad 2m \leq 2n+1, \quad m \geq n,$$

d'où $m > n$. Il en résulte que la surface F ne peut dégénérer en deux surfaces ne contenant pas Q comme partie et passant par la courbe D . L'existence d'une surface F irréductible, touchant le cône Q le long de la courbe D , est ainsi établie.

2. On peut du reste facilement former l'équation de la surface F .

Rapportons le plan σ au triangle de référence AA_1A_2 et choisissons le point unitaire de manière que A_3 ait pour coordonnées $(0, 1, 1)$, la droite a ayant pour équation $x_3 = 0$.

L'équation des cubiques γ_3 s'écrit

$$x_3 (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2) + \lambda_4 x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0.$$

Celle de la courbe Δ est de la forme

$$x_3^n \varphi_{2n+1}(x_1, x_2) + x_3^{n-1} x_1 x_2 (x_1 - x_2) \varphi_{2n-1} + \dots \\ + x_3^i x_1^{n-1} x_2^{n-i} (x_1 - x_2)^{n-i} \varphi_{2i+1} + \dots + x_1^n x_2^n (x_1 - x_2)^n \varphi_1 = 0,$$

où $\varphi_{2n+1}, \varphi_{2n-1}, \dots, \varphi_1$ sont des polynomes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

Rapportons projectivement les cubiques γ_3 aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_1}{x_3 x_1^2} = \frac{X_2}{x_3 x_1 x_2} = \frac{X_3}{x_3 x_2^2} = \frac{X_4}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}.$$

Le cône Q a pour équation

$$X_3^2 - X_1 X_3 = 0$$

et son sommet est donc le point $O(0, 0, 0, 1)$.

L'équation d'une surface d'ordre $2n+1$ passant par O est de la forme

$$X_4^{2n} \psi_1(X_1, X_2, X_3) + X_3^{2n-1} \psi_2 + \dots + \psi_{2n+1}(X_1, X_2, X_3) = 0$$

où les ψ sont des polynomes en X_1, X_2, X_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

A la section de Q par cette surface correspond dans le plan σ la courbe dont l'équation, après simplification par x_3 , s'écrit

$$x_1^{2n} x_2^{2n} (x_1 - x_2)^{2n} \psi_1(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) + x_1^{2n-1} x_2^{2n-1} (x_1 - x_2)^{2n-1} x_3 \psi_2(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) + \dots + x_3^{2n} \psi_{2n+1}(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) = 0.$$

Le premier membre de cette équation doit être identique au premier membre de l'équation (1). On aura donc

$$\psi_1(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) \equiv [\varphi_1(x_1, x_2)]^2,$$

$$\psi_2(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) \equiv 2 \varphi_1(x_1, x_2) \varphi_3(x_1, x_2),$$

$$\psi_3(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) \equiv [\varphi_3(x_1, x_2)]^2 + 2 \varphi_1(x_1, x_2) \varphi_5(x_1, x_2),$$

.....

$$\psi_{2n+1}(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) \equiv [\varphi_{2n+1}(x_1, x_2)]^2.$$

Ces équations déterminent les polynomes ψ et par conséquent l'équation de la surface F .

On observera cependant que certains coefficients restent arbitraires dans les polynomes ψ . D'une manière précise, dans ψ_k il restera $\frac{1}{2} k(k-1)$ coefficients arbitraires et par suite, dans l'équation de F , $\frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$ coefficients arbitraires. En d'autres

termes, les surfaces F satisfaisant à la question dépendent de $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$ paramètres.

Deux surfaces F touchant Q le long de la courbe D déterminent un faisceau de surfaces possédant la même propriété, par conséquent ce faisceau contient une surface formée du cône Q et d'une surface d'ordre $2n-1$. Or, ces dernières surfaces dépendent de $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-1$ paramètres, par conséquent il existe bien, dans le système trouvé, des surfaces F irréductibles.

3. La courbe Δ et par suite la courbe D sont de genre $n(n-1)$.

Le plan polaire d'un point P quelconque par rapport à Q passe par O et coupe encore D en $2n$ points, par conséquent, la développable engendrée par les plans tangents à Q et à F le long de D est de classe $2n$.

La polaire du point P par rapport à F est une surface d'ordre $2n$ coupant D en $2n(2n+1)$ points. Parmi ceux-ci se trouvent les $2n$ points en lesquels le plan tangent à F et à Q passe par F . En chacun des $4n^2$ autres points, le plan tangent à F doit être indéterminé et cette surface possède donc $4n^2$ points doubles, en général coniques, sur la courbe D .

On observera qu'une surface F formée du cône Q et d'une surface d'ordre $2n-1$ possède également $4n^2$ points doubles coniques sur D . Ce sont les $4n^2-1$ points de rencontre de cette dernière surface avec la courbe D et le point O .

4. La surface F , irréductible, possède donc $4n^2$ points doubles coniques sur D et il existe un cône du second ordre Q touchant F le long de D .

Désignons les sections planes de F par C . Observons ensuite que chacun des points doubles de F sur D est équivalent à une courbe rationnelle de degré-2 et désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu$, où nous posons $\nu = 4n^2$, les courbes équivalentes aux points doubles de F . La propriété qui vient d'être établie se traduit par la relation fonctionnelle

$$2C \equiv 2D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu.$$

Comme nous l'avons établi ⁽²⁾, la surface F est l'image d'une involution I_2 d'ordre deux, présentant $\nu = 4n^2$ points unis, appartenant à une surface F^* . Les $4n^2$ points de diramation, dans la correspondance entre F et F^* , sont les points doubles de la première de ces surfaces.

La surface F n'étant assujettie qu'à la seule condition de toucher Q le long de D et n'ayant de ce fait que des points doubles coniques, a pour système canonique le système $|(2n-3)C|$. Son genre arithmétique vaut donc

$$p_a = \frac{2}{3} n(n-1)(2n-1).$$

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p_a^* de F^* , nous avons la relation ⁽³⁾,

$$12(p_a^* + 1) = 2 \cdot 12(p_a + 1) - 3\nu,$$

qui donne actuellement

$$p_a^* = \frac{1}{3} (n-1) (8n^2 - 7n - 3).$$

Le système canonique de F^* est le système $|(2n-3)C^*|$, où C^* désigne la transformée sur F^* d'une courbe C de F . Ce système a le degré $2(2n-3)^2 (2n+1)$, donc le genre linéaire de F^* est

$$p^{(1)} = 2 (2n-3)^2 (2n+1) + 1.$$

Si nous représentons par

$$F (X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

l'équation de la surface F formée plus haut, on peut prendre, pour l'équations de la surface F^* , dans un espace à quatre dimensions,

$$F (X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, X_0^2 = X_1 X_3 - X_2^2.$$

L'involution I_2 est engendrée sur cette surface par l'homologie harmonique

$$X'_0 : X'_1 : X'_2 : X'_3 : X'_4 = - X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4.$$

5. Lorsque $n=1$, c'est-à-dire lorsque F est une surface cubique possédant quatre points doubles coniques et D une cubique gauche, il existe ∞^2 cônes analogues à Q et touchant F suivant des cubiques gauches⁽⁴⁾. Nous laisserons de côté ce cas et supposerons dorénavant $n > 1$.

Pour $n > 1$, on a $4n^2 \geq 16$; il ne peut exister ∞^2 cônes Q . S'il en existait ∞^1 , la biquadratique commune à deux de ces cô-

nes devrait couper F aux $4n^2$ points doubles, ce qui est absurde. Pour $n > 1$, le cône Q est donc unique.

Cela étant, si nous désignons par D^* la courbe qui correspond à D sur F^* , la relation

$$2C \equiv 2D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu$$

donne, sur F^* ,

$$C^* \equiv D^*.$$

Il en résulte que le système $|C^*|$ complet a la dimension quatre et contient la courbe D^* . Ce système a le genre $2n(2n-1)-1$ et le degré $2(2n+1)$.

Considérons maintenant le système $|2C|$ et son transformé $|2C^*|$. Le système $|2C^*|$ a le genre $4n^2$, le degré $4(2n+1)$ et la dimension 9. Le système $|2C|$ a le genre $8n^2-1$ et le degré $8(2n+1)$. Supposons que sa dimension soit supérieure à 9; il contient alors un second système linéaire partiel appartenant à l'involution I_2 et que nous désignerons par $|D_2^*|$. Ce système a comme points-base simples les $\nu = 4n^2$ points unis de I_2 et aux courbes D_2^* correspondent sur F des courbes D_2 de genre $3n^2$. Les courbes D_2 , si elles existent, satisfont à la relation fonctionnelle

$$4C \equiv 2D_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu.$$

On en conclut que le système $|D_2|$ existe, car il contient les courbes $C + D$.

Supposons qu'il existe une courbe D_2 irréductible. Elle est d'ordre $2(2n + 1)$ et le long de cette courbe, il y a une surface du quatrième ordre Φ inscrite à la surface F . La classe de la développable lieu des plans tangents à F le long de D_2 est

$$\delta = 4n(2n + 1) - 4n^2 = 4n(n + 1).$$

Si l'on calcule cette classe en partant de la surface Φ , on trouve que celle-ci doit posséder

$$\nu' = 6(2n+1) - \delta = 2(-2n^2 + 4n + 3)$$

points doubles sur la courbe D_2 . Ce nombre est négatif pour $n > 2$, par conséquent il n'existe des courbes D_2 irréductibles que pour $n = 2$. On a alors $\nu' = 6$.

Pour $n = 2$, la surface F est du cinquième ordre et l'on sait qu'il existe effectivement des surfaces du cinquième ordre inscrites à une surface de Kummer et passant par six points doubles de cette surface⁽⁶⁾.

Supposons $n > 2$. Le système complet $|2C^*|$ comprend deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 . L'un, $|2C^*_o|$, comprend les transformées des courbes $2C$, il a donc la dimension 9; l'autre, $|D^*_2|$, comprend les transformées des courbes réductibles $C + D$ et a la dimension trois. Il en résulte que le système $|2C^*|$ a la dimension 13.

6. Nous allons étendre les résultats précédents.

Considérons, sur la surface F , le système $|mC|$, où $m \leq n$

Il a le genre

$$mn(2n-1) + \frac{1}{2} m(m-1)(2n+1) - (m-1),$$

le degré $m^2(2n+1)$ et la dimension

$$\frac{1}{6} (m+1)(m+2)(m+3) - 1.$$

Son transformé $|mC^*|$ sur F^* a le genre

$$4mn^2 + 2m(m-2)n + m^2 - 3m + 3,$$

et le degré $2m^2(2n+1)$. Sa dimension est certainement supérieure à celle de $|mC|$, car il comprend les courbes $(m-1)C^* + D^*$, passant simplement par les points unis de I_2 . Il contient donc deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 : L'un est dépourvu de points-base et contient les transformées des courbes mC ; l'autre a pour points-base les $4n^2$ points unis de I_2 et contient les transformées des courbes $(m-1)C + D$. Désignons par D_m^* les courbes de ce second système et par D_m les courbes qui leur correspondent sur F . Sur cette surface, on a

$$2mC \equiv 2D_m + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu$$

et s'il existe une courbe D_m irréductible il existe une surface Φ irréductible, d'ordre $2m$, inscrite à la surface F le long de cette courbe.

En reprenant le calcul fait plus haut, on voit que la surface doit posséder, sur la courbe D_m ,

$$\nu' = -4(m-1)(n-m)n + m(2m-1)$$

points doubles.

Ce nombre doit évidemment être positif pour que Φ existe. Pour $m=1$, on a naturellement $\nu'=1$, la surface Φ coïncidant avec le cône Q . Pour $n=m$, on a $\nu'=n(2n-1)$. Pour

$$1 < m < n,$$

(ce qui écarte le cas $n=2$), ν' est négatif. Par conséquent, pour ces valeurs, il n'existe pas de courbe D_m irréductible; toutes ces courbes se réduisent aux courbes réductibles $(m-1)C+D$.

Les systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 et au système $|mC^*|$ comprennent le premier les transformées des courbes mC ; il a donc la dimension

$$\frac{1}{6} (m+1)(m+2)(m+3) - 1$$

Le second comprend les transformées des courbes $(m-1)C+D$ et a donc la dimension

$$\frac{1}{6} m(m+1)(m+2) - 1.$$

Il en résulte que le système $|mC^*|$ a la dimension

$$\frac{1}{6} (m+1)(m+2)(2m+3) - 1.$$

7. Nous allons maintenant établir que la surface F^+ est, comme la surface F , régulière.

Le système $|(2n-2)C|$, adjoint au système $|C|$, est régulier et a la dimension

$$r_{2n-2} = \frac{1}{3} (n-1)(4n^2 + 4n + 3).$$

Le système $|(2n-2)C^*|$, adjoint au système $|C^*|$, est régulier et a la dimension

$$r_{2n-2}^* = \frac{1}{3} (n-1)(8n^2 + 5n + 3)$$

Ce système comprend deux systèmes partiels appartenant à l'involution I_2 : l'un est le transformé de $|(2n-2)C|$; l'autre, que

nous désignerons par $|D_{2n-2}^*|$, a pour points-base les points unis de I_2 . Sa dimension ρ_{2n-2} est donnée par

$$r_{2n-2} + \rho_{2n-2} + 2 = r_{2n-2}^* + 1,$$

d'où

$$P_{2n-2} = \frac{1}{3} n (n-1) (4n+1) - 1.$$

Au système $|D_{2n-2}^*|$, correspond sur F un système $|D_{2n-2}|$, de même dimension ρ_{2n-2} , découpant sur une courbe C une série paracanonique.

Le système canonique $|(2n-3)C^*|$ de F^* contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2 : l'un est le transformé du système canonique $|(2n-3)C|$ de F ; l'autre, que nous désignerons par $|D_{2n-3}^*|$, a pour points-base les points unis de I_2 et il lui correspond sur F un système $|D_{2n-3}|$ tel que

$$D_{2n-2} \equiv C + D_{2n-3}.$$

Puisque les courbes D_{2n-2} découpent sur une courbe C une série paracanonique, de dimension $n(2n-1)-2$, la dimension ρ_{2n-3} de $|D_{2n-3}|$ est

$$\rho_{2n-3} = \rho_{2n-2} - n(2n-1) + 1.$$

On a donc

$$\rho_{2n-3} = \frac{1}{3} (n-1) (4n^2 - 5n - 3) - 1.$$

Si la surface F^* est régulière, on doit avoir

$$p_a + \rho_{2n-3} + 1 = p_a^*.$$

Cette relation est vérifiée identiquement.

De même que la surface F , la surface F^* est régulière.

Liège, le 14 juillet 1945.

NOTES A PLACER AU BAS DES PAGES

(1) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles, ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

(2) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles..* loc. cit.

(3) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles..* loc. cit.

(4) *Etude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1916, pp. 49-61).

(5) G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Liouville, 1893) et *Oeuvres de G. Humbert*, tome II, (Paris, Gauthier-Villars, 1935).