Sur certaines courbes fondamentales des transformations birationnelles de l'espace

par LUCIEN GODEAUX

Notre but, dans cette note, est d'étudier une courbe fondamentale d'une transformation birationnelle de l'espace le long de laquelle les surfaces du système homaloidal ont des plans tangents fixes [1].

1. Considérons une transformation birationnelle T entre deux espaces Σ, Σ'. Soient $|F|$ le système homaloidal de la transformation dans l'espace Σ, $|F'|$ le système homaloidal dans l'espace Σ', n l'ordre des surfaces F, n' celui des surfaces F'.

Supposons que le système homaloidal $|F|$ possède une courbe-base C, d'ordre ν, multiple d'ordre s pour les surfaces F. Nous supposerons que les surfaces F ont en commun τ courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$, fixes, infiniment voisines de C, respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\tau$ pour les surfaces, ces nombres satisfaisant à la relation

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\tau = s .$$

(1) Voir, au sujet des transformations birationnelles, l'exposé que nous en avons fait dans le Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. LXVII (Paris, Gauthier-Villars, 1934) et notre ouvrage: Géométrie algébrique, tome I, Transformations birationnelles, Géométrie projective hyperspatiale, qui paraîtra dans le courant de 1948.

En tout point de la courbe C, les surfaces F ont donc des plans tangents fixes.

Pour préciser nos hypothèses, nous dirons que dans le domaine du second ordre d'un point de la courbe C, les points des surfaces F sont tous variables.

2. Soient P un point de la courbe C, p une droite passant par P, non tangente aux surfaces F en ce point. Les surfaces F, assujetties à toucher la droite p en P, acquièrent en ce point une multiplicité supérieure à s et en général égale à $s+1$. Nous nous plaçerons dans le cas général. Ces surfaces F forment un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet O'.

Lorsque le point P décrit la courbe C, deux cas peuvent se présenter:

1) Le point O' décrit une courbe C';

2) Le point O' reste fixe.

Dans le premier cas, les surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en P conservent en général la multiplicité s aux autres points de la courbe C.

Dans le second cas, les surfaces F ont la multiplicité $s+1$ en tout point de la courbe C.

Nous étudierons successivement ces deux cas.

3. Avant d'aller plus loin, nous étudierons une question relative aux systèmes linéaires de courbes planes.

Considérons, dans un plan σ, un système linéaire de courbes $|G|$ d'ordre m, ayant en un point O la multiplicité s et en τ points

O_1, $O_2, \ldots, O_\tau$ infiniment voisins de O dans des directions différentes, des multiplicités s_1, $s_2, \ldots, s_\tau$ telles que

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\tau = s$$

Opérons une transformation quadratique θ ayant O comme point fondamental et soit r la droite fondamentale correspondante. Aux courbes G correspondent des courbes G′, d'ordre $2n-s$, formant un système linéaire $|G'|$. Les courbes G′ ont $\tau + 2$ points multiples sur la droite r, à savoir deux points A_1, A_2, fondamentaux pour θ, multiples d'ordre $n-s$ et τ points O_1', $O_2, \ldots, O_\tau'$, multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\tau$, correspondants aux points $O_1, O_2, \ldots O_\tau$. Les courbes G′ ne rencontrent donc la droite r en aucun point variable.

Aux courbes G touchant en O une droite distincte des tangentes $OO_1, OO_2, \ldots, OO_\tau$, correspondent les courbes G′ passant par un point de la droite r distinct de A_1, A_2, $O_1', O_2', \ldots, O_\tau'$. Ces courbes G′ comprennent la droite r comme partie et sont complétées par des courbes G_0', d'ordre $2n-s-1$, passant $n-s-1$ fois par A_1, A_2, s_1-1 fois par O_1', s_2-1 fois par $O_2', \ldots$, $s_\tau-1$ fois par O_τ'. Ces courbes rencontrent donc encore la droite r en $\tau+1$ points variables, en dehors des points précédents. On en conclut que les courbes G assujetties à toucher en O une droite distincte des tangentes, sont des courbes G_0 ayant en O la multiplicité $s+1$, en O_1 la multiplicité s_1-1, en O_2 la multiplicité $s_2-1, \ldots$, en O_τ la multiplicité $s_\tau-1$ et $\tau+1$ tangentes variables.

Considérons maintenant une droite p' passant par O_1' et distincte de r; il lui correspond une conique γ passant par O et y touchant la droite OO_1. La conique γ rencontre les courbes G en $s + s_1$ points confondus en O. Aux courbes G rencontrant γ en $s+s_1+1$ points confondus en O correspondent les courbes G′ touchant p' en O'. Appelons $|G_1|$ le système formé par les courbes G satisfaisant à la condition indiquée.

Lorsque la droite p' varie, c'est-à-dire lorsque la conique γ varie dans un faisceau, le système $|G_1|$ varie. En particulier, lorsque la droite p' vient coincider avec r, les courbes G_1', homologues des courbes G_1, doivent toucher r en O'; elles comprennent donc r comme partie et le système $|G_1|$ coincide avec le système $|G_0|$.

4. Revenons maintenant à notre problème initial et considérons le premier cas, celui où le point O' décrit une courbe C' lorsque le point P décrit la courbe C.

Une surface F, possédant un point multiple d'ordre $s+1$ en un point de la courbe C, mais passant s fois par cette courbe, peut posséder d'autres points de la courbe C multiples d'ordre $s+1$. Supposons que le nombre des points multiples d'ordre $s+1$ d'une surface F sur la courbe C soit ν'. Alors, la courbe C' est d'ordre ν'.

La courbe C' est une courbe-base du système homaloidal $|F'|$. Considérons en effet une surface F' et le plan σ qui lui correspond dans Σ. Les surfaces F découpent sur le plan σ un système linéaire de courbes $|G|$ ayant le degré effectif n', car deux courbes G se rencontrent, en dehors des points-base de $|F|$ situés dans σ, aux points où la transformée d'une droite de Σ', d'ordre n', coupe σ.

Considérons un des points de rencontre P de σ avec C et soit O' le point qui lui correspond sur C'. Le point P est un point-base du système $|G|$ absorbant

$$s^2 + s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_r^2$$

points d'intersection. Aux plans passant par O' correspondent des surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en P et découpant sur σ un système $|G_0|$. D'après ce qui a été vu plus haut (No. 3), le point P absorbe au moins.

$$(s+1)^2 + \Sigma\,(s_i-1)^2 = s^2 + \Sigma\, s_i^2 + \tau + 1$$

points d'intersection des courbes G. Il en résulte que le degré de $|G_0|$ est moindre que celui de $|G|$. Par conséquent, une droite passant par O′ ne rencontre plus F′ qu'en un nombre de points moindre que n' en dehors de O′. Donc le point O′ et par conséquent la courbe C′ font partie de la base de $|F'|$. La courbe C′ est donc fondamentale pour la transformation T.

5. Reprenons le plan σ passant par un point P de C et considérons dans ce plan un faisceau de coniques $|\gamma|$ passant par P et touchant en ce point les nappes des surfaces F qui passent par C_1. Les coniques γ passent donc par le point P_1 de C_1 infiniment voisin de P dans le plan σ. Les surfaces F rencontrent les coniques γ en $s+s_1$ points confondus en P.

Les surfaces F rencontrant une conique γ en $s+s+1$ points confondus en P forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans de sommet O_1' dans Σ'. Lorsque la conique γ varie dans le faisceau, le point O_1' décrit une courbe C_1'. D'après l'observation faite plus haut (No. 3), parmi les systèmes de courbes découpés sur σ par les différents réseaux de surfaces F considérés, se trouve celui qui est découpé par les surfaces F ayant le multiplicité $s+1$ en P. Il en résulte que la courbe C_1' passe par le point O′ de la courbe C′ homologue du point P. La courbe C_1' est évidemment indépendante de la position du plan σ passant par P.

Une surface F possède, dans le domaine du second ordre de P dans le plan σ, s_1 points infiniment voisins de P_1, par conséquent la courbe C_1' est d'ordre s_1. La courbe C_1' représente le domaine du second ordre du point P, infiniment voisin de C_1.

Lorsque le point P décrit la courbe C, la courbe C_1' varie et décrit une surface Φ_1' passant par C'.

De même, en considérant les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_\tau$, on parvient à des surfaces $\Phi_2', \Phi_3', \ldots, \Phi_\tau'$, passant par la courbe C' et respectivement engendrées par des courbes $C_2', C_3', \ldots, C_\tau'$ d'ordres $s_2, s_3, \ldots, s_\tau$.

Dans le premier cas, nous trouvons donc, dans Σ, Σ', deux courbes fondamentales C, C' associées et τ surfaces fondamentales $\Phi_1', \Phi_2', \ldots, \Phi_\tau'$ respectivement associées aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$.

6. Passons maintenant à l'étude du second cas, où à la courbe C est associé un point fixe O'. En répétant le raisonnement fait plus haut (No. 4), on voit que le point O' est un point-base de $|F'|$ et est donc fondamental pour la transformation T.

Aux plans passant par O' correspondent dans Σ des surfaces F, que nous désignerons par F_0, passant $s+1$ fois par C, s_1-1 fois par C_1, s_2-1 fois par $C_2, \ldots, s_\tau-1$ fois par C_τ et ayant $\tau+1$ plans tangents variables en chaque point de la courbe C.

Actuellement, on peut préciser la multiplicité du point O' pour les surfaces F'; cette multiplicité est égale à $\tau+1$.

Considérons encore un plan σ coupant C en un point P et dans ce plan, un faisceau de coniques $|\gamma|$ passant par P et par le point P_1 de C_1 infiniment voisin de P. En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'aux points du domaine du second ordre de P, infiniment voisins de P_1, correspondent les points d'une courbe C_1' d'ordre s_1, passant par O'.

Lorsque le point P décrit la courbe C, deux cas peuvent se présenter: La courbe C_1' reste fixe ou bien elle décrit une surface Φ_1'.

On arrive à des conclusions analogues en considérant les courbes C_2, C_3,..., C_τ et on voit que dans le second cas, nous trouvons *une courbe fondamentale* C *de* Σ *associée à un point fondamental* O′ *de* Σ'. *Aux courbes* $C_1, C_2,.., C_\tau$ *sont associées respectivement soient des courbes* C_1', C_2',..., C_τ', *soit des surfaces* Φ_1', Φ_2',..., Φ_τ', *passant par* O′.

Il est bien évident que la courbe C_1', par exemple, peut rester fixe lorsque P décrit C, alors que la courbe C_2' engendre une surface Φ_2'.