TENSOR, N. S.
VOL. 24 (1972)

UNE SURFACE ALGÉBRIQUE DONT LE SYSTÈME CANONIQUE CONTIENT DES COMPOSANTES FIXES NON EXCEPTIONNELLES.

Au Professeur A. Kawaguchi, pour ses soixante-dix ans.

Par Lucien GODEAUX.

La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique nous a permis de construire des surfaces images d'involutions dont le système canonique contient des composantes fixes non exceptionnelles [1][1]. Ces composantes fixes étaient des courbes rationnelles dont le degré virtuel était inférieur à -2. Dans cette note nous construisons une surface dont le système canonique contient sept composantes fixes dont six sont des courbes rationnelles de degré virtuel -3 et dont la dernière est de genre trois. D'une manière précise, nous établissons le théorème suivant:

Il existe des surfaces algébriques dont le système canonique contient sept composantes fixes dont l'une a le genre trois et dont les autres sont rationnelles de degré virtuel -3, *ces courbes n'étant pas exceptionnelles.*

Nous montrons d'ailleurs que le système bicanonique de la surface ne contient pas ces courbes comme composantes fixes.

Rappelons qu'une courbe exceptionnelle sur une surface n'appartenant pas à la classe des réglées est rationnelle et de degré virtuel -1.

Dans la suite, nous supposerons connues les propriétés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique développées dans notre ouvrage cité plus haut.

1. Considérons la surface algébrique F d'équation

$$a_1x_1^{10}x_2+a_2x_2^{10}x_3+a_3x_3^{10}x_1+\sum_0 a_{4+i}(x_1x_2x_3)^i x_4^{11-3i}$$
$$+x_4^6\sum a_{6i}x_1^4x_3+x_4^4\sum a_{4i}x_1^4x_2^3+x_4^3x_1x_2x_3\sum a_{3i}x_1x_2^4+x_4^2\sum a_{1i}x_1^8x_2=0\ ,$$

où nous posons pour abréger

$$\sum a_{6i}x_1^4x_3=a_{61}x_1^4x_3+a_{62}x_2^4x_1+a_{63}x_3^4x_1\ ,$$
$$\sum a_{4i}x_1^4x_2^3=a_{41}x_1^4x_2^3+a_{42}x_2^4x_3^3+a_{43}x_3^4x_1^3\ ,$$
$$\sum a_{3i}x_1x_2^4=a_{31}x_1x_2^4+a_{32}x_2x_3^4+a_{33}x_3x_1^4\ ,$$
$$\sum a_{1i}x_1^8x_2=a_{11}x_1^8x_2+a_{12}x_2^8x_3+a_{13}x_3^8x_1\ .$$

Cette surface est transformée en elle-même par l'homographie H cyclique de période 13, d'équations

$$x_1':x_2':x_3':x_4'=x_1:\varepsilon x_2:\varepsilon^4x_3:\varepsilon^6x_4\ ,$$

où ε est une racine primitive treizième de l'unité.

L'homographie H possède comme points unis les sommets du tétraèdre de référ-

Reçu le 26 Juin, 1971.

1) Les nombres entre crochets renvoient aux références à la fin de cet article.

ence et trois de ces points O_1 (1, 0, 0, 0), O_2 (0, 1, 0, 0), O_3 (0, 0, 1, 0) appartiennent à la surface F. L'involution cyclique I d'ordre 13 engendrée par H sur la surface F possède donc trois points unis, simples pour la surface.

Il existe un système linéaire de surfaces d'ordre suffisamment élevé privé de points-base, dont chaque surface est transformée en soi par H. Soit r la dimension du système formé par ces surfaces ne contenant pas F comme partie. En rapportant projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire à r dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ image de l'involution I. Nous désignerons par O_1', O_2', O_3' les points qui correspondent sur Φ aux points O_1, O_2, O_3 respectivement.

La symétrie de l'équation de F par rapport à x_1, x_2, x_3 montre que les points unis O_1, O_2, O_3 ont la même structure et il suffira d'étudier l'un d'eux.

2. Le plan tangent à F au point O_1 est $x_2 = 0$ et dans ce plan l'homographie H détermine une homographie H' d'équations

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \varepsilon^4 x_3 : \varepsilon^6 x_4 \, .$$

En posant $\eta = \varepsilon^4$, on a $\eta^8 = \varepsilon^6$ et H' peut être représentée par

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \eta x_3 : \eta^8 x_4 \, .$$

En posant $\xi = \varepsilon^6$, on a $\xi^5 = \varepsilon^4$ et H' peut être représentée par les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \xi^5 x_3 : \xi x_4 \, .$$

Le point uni O_1 est donc caractérisé par les valeurs $\alpha = 8$, $\beta = 5$.

Désignons par C les courbes qui correspondent sur F aux sections hyperplans de la surface Φ.

Les courbes C passant par O_1 ont en ce point la multiplicité quatre et: quatre points doubles infiniment voisins successifs dont le premier est sur la droite O_1O_4 et dont le dernier, qui sera désigné par P, est uni de première espèce pour l'involution I, un point double infiniment voisin situé sur la droite O_1O_3 auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction six points simples et dans une autre direction un point simple. Le dernier des six points sera désigné par P_1 et l'autre point simple par P_2. Les points P_1 et P_2 sont unis de première espèce pour l'involution I.

Soit Φ_1 la surface projection de la surface Φ à partir du point O_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Aux domaines des points P, P_1, P_2 correspondent respectivement sur la surface Φ_1 une conique ρ_1, une droite ρ_1' et une droite τ_1, celle-ci rencontrant ρ_1 et ρ_1' mais ces deux dernières courbes ne se rencontrant pas.

Le point O_1' est quadruple pour la surface Φ, le cône tangent projetant de ce point les courbes ρ_1, ρ_1', τ.

Si nous désignons par Γ les sections hyperplans de la surface Φ et par Γ_1 celles de Φ_1, on a la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma_1 + \rho_1 + \tau_1 + \rho_1' \, .$$

On en conclut que les courbes ρ_1 et τ_1 ont le degré virtuel -3 et la droite ρ_1' le degré virtuel -2.

Par conséquent, les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques de Φ doivent passer par les points P et P_2, donc aussi par le point infiniment voisin de O_1 sur la droite $O_1 O_3$. Ces courbes ont donc un point triple en O_1, une tangente étant O_1O_4 et les deux autres étant confondues avec O_1O_3. Nous désignerons par K les courbes canoniques de F et par K_0 celles qui correspondent aux courbes canoniques K_0' de Φ.

Les courbes K_0 passent triplement par les points O_1, O_2, O_3.

3. Les courbes canoniques K de F sont découpées par les surfaces du septième ordre. Celles de ces surfaces qui découpent les courbes K_0 doivent passer par les points O_1, O_2, O_3 et s'y comporter de la même manière, c'est-à-dire que si l'équation des surfaces découpant sur F les courbes K_0 contient un terme $x_1^i x_2^j x_3^k x_4^h$, il contient aussi les termes $x_2^i x_3^j x_1^k x_4^h$ et $x_3^i x_1^j x_2^k x_4^h$. De plus on doit avoir

$$4j + 6k = 4i + 6j = 4k + 6i .$$

On en déduit $i = j = k$ et les courbes K_0 sont découpées par les surfaces

$$\lambda_0 x_4^7 + \lambda_1 x_4^4 x_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_4 (x_1 x_2 x_3)^2 = 0 .$$

Il en résulte que le genre arithmétique de Φ est $p_a' = 3$.

Observons en passant que dans la relation qui lie le genre arithmétique $p_a = 120$ de F à celui $p_a' = 3$ de Φ, chacun des points O_1, O_2, O_3 intervient pour un certain nombre X d'unités. La relation

$$12(p_a + 1) = 12.13(p_a' + 1) + 3X$$

donne $X = 4.69$. Ce nombre reste le même pour une involution d'ordre 13 présentant un point uni de la structure du point O_1 quel que soit le genre arithmétique de la surface contenant l'involution.

4. Les courbes K_0 contiennent une composante fixe découpée par le plan $x_4 = 0$, courbe que nous désignerons par G_0. D'autre part, les courbes K_0 sont complétées par deux courbes G découpées par le faisceau

$$\lambda_0 x_4^3 + \lambda_1 x_1 x_2 x_3 = 0 .$$

La courbe G_0 est de genre 45 et H détermine sur cette courbe une involution présentant trois points unis. À G_0 correspond donc sur Φ une courbe G_0' de genre trois d'après la formule de Zeuthen.

Pour évaluer le genre des courbes G, observons que l'on peut représenter point par point la surface [1] sur un plan en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 y_3 : y_2^2 y_1 : y_3^2 y_2 : y_1 y_2 y_3 .$$

À la courbe G correspond une courbe γ d'équation

$$a_1 y_1^{19} y_3^8 + a_2 y_2^{19} y_1^8 + a_3 y_3^{19} y_2^8 + a_4 (y_1 y_2 y_3)^9 + \cdots = 0 ,$$

les termes non écrits étant sans influence sur les singularités de la courbe.

En un des sommets A_1 (1, 0, 0) du triangle de référence, la courbe γ a un point multiple d'ordre huit. En utilisant des transformations quadratiques, on voit qu'au point A_1 sont infiniment voisins successifs un point multiple d'ordre huit, suivi de deux points triples et d'une point double de rebroussement. Il en résulte que la courbe γ et par suite les courbes G, sont de genre 136.

Sur γ, il correspond à l'involution d'ordre 13 déterminée par H sur une courbe G, une involution ayant trois points unis. Par la formule de Zeuthen, on en déduit que le genre des courbes G' est égal à 9.

Aux points O_2, O_3 correspondent des courbes de degré virtuel -3 analogues aux courbes ρ_1 et τ_1. Nous désignerons par ρ_2, τ_2 celles qui correspondent à O_2 et par ρ_3, τ_3 celles qui correspondent à O_3.

Observons que si nous désignons par Φ' la surface projection de Φ à partir des points O_1', O_2', O_3' sur un espace à $r-3$ dimensions, cette surface contient trois coniques ρ_1, ρ_2, ρ_3 et trois droites τ_1, τ_2, τ_3.

De ce qui précède, il résulte que le système canonique de la surface Φ est

$$|K_0'| = |2G' + G_0' + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3| .$$

Il contient sept composantes fixes: une courbe G_0' de genre trois et six courbes de degré virtuel -3.

5. Les courbes K_0 sont découpées sur F par des surfaces du septième ordre dont l'équation, lorsque l'on effectue H, se reproduit multipliée par ε^3. Par conséquent, à une courbe bicanonique de Φ correspond sur F une courbe découpée par une surface d'ordre 14, ne contenant pas F comme partie et dont l'équation, lorsque l'on effectue H, doit se reproduire multipliée par ε^6.

Or, dans cette équation, figurent les termes

$$\lambda_1 x_1^8 x_2^6 + \lambda_2 x_2^8 x_3^6 + \lambda_3 x_3^8 x_1^6 ,$$

qui, égalés à zéro, représentent des surfaces ne contenant pas F. Il en résulte que le système bicanonique de Φ n'est pas composé avec le faisceau $|G'|$ et que par conséquent, il ne contient pas K_0' comme partie.

Nous avons ainsi démontré le théorème énoncé au début de cette note.

Liége, Belgique

RÉFÉRENCES

[1] Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications, *Ed. Cremonese, Rome*, (1963).

Voir aussi, Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, (1951), 819-825, 826-835, 938-949, 1106-1119; Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, II, 1 (1952), 49-56.

TENSOR, N. S.
VOL. 24 (1972)

SCALAR-TENSOR FIELD THEORIES.

Dedicated to Professor A. Kawaguchi on the occasion of his 70th birthday.

By G. W. HORNDESKI and D. LOVELOCK.

§ 1. **Introduction.** The role played by scalar-tensor field theories in theoretical physics is well known. The field equations corresponding to such theories are usually obtained from a variational principle in which the Lagrange density L is a function of a symmetric metric tensor field g_{ij}[1] (and its first two derivatives $g_{ij,h}$, $g_{ij,hk}$) and a scalar field ϕ (and its first derivatives $\phi_{,i}$), i.e.

$$L = L(g_{ij};\, g_{ij,k};\, g_{ij,kh};\, \phi;\, \phi_{,i})\,. \tag{1.1}$$

More exactly, the Euler-Lagrange expressions $E^{ij}(L)$ and $E(L)$ corresponding to (1.1) are defined by[2]

$$E^{ij}(L) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial L}{\partial g_{ij,k}} - \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,hk}}\right)\right] - \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} \tag{1.2}$$

and

$$E(L) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial L}{\partial \phi_{,k}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \phi} \tag{1.3}$$

respectively (where the former is obtained from L by variation of the g_{ij} regarding ϕ as preassigned and the latter by variation of ϕ regarding the g_{ij} as preassigned) and the field equations corresponding to (1.1) are assumed to be

$$E^{ij}(L) = 0\,, \tag{1.4}$$

$$E(L) = 0\,. \tag{1.5}$$

In general $E^{ij}(L)$ will be of fourth order in the derivatives of g_{ij} and third order in the derivatives of ϕ while $E(L)$ will be of third order in g_{ij} and second order in ϕ.

However, in, for example, the Brans-Dicke theory in vacuo a particular Lagrangian of the type (1.1) is used,[3] viz.

$$L = \sqrt{g}\,(\phi R - \omega\phi_{,i}\phi_{,j}g^{ij}/\phi) \tag{1.6}$$

($\omega =$ constant), and the corresponding equations (1.4) and (1.5) are both of *second*

Received June 26, 1971. This work was supported by a grant from the National Research Council of Canada.

1) In general latin indices will run from 1 to n. A comma denotes partial differentiation, while a vertical bar will denote covariant differentiation. $g = \det(g_{ij})$ is assumed to be non-zero.

2) Throughout this paper the summation convention is operative.

3) If X^i is any contravariant vector field then we define the Riemann curvature tensor $R_h{}^i{}_{jk}$, the Ricci tensor R_{hj} and the curvature scalar R by $X^i{}_{|jk} - X^i{}_{|kj} = R_h{}^i{}_{jk}X^h$, $R_{hj} = R_h{}^i{}_{ji}$ and $R = g^{hj}R_{hj}$ respectively.