UNIVERSITÉ DE PARIS

LA NAISSANCE ET LE DÉVELOPPEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

par

M. Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie Royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liége

Conférence faite au Palais de la Découverte
le 3 Mai 1952

HISTOIRE DES SCIENCES

LA NAISSANCE ET LE DÉVELOPPEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

NOTRE dessein n'est pas de retracer, dans cette conférence, l'histoire de la Géométrie, mais plutôt de montrer comment sont nés quelques-uns des concepts qui sont aujourd'hui à la base de cette Science.

Les premières considérations de géométrie sont sans doute très anciennes et eurent probablement pour origine la délimitation des terrains. Les documents les plus anciens que l'on possède concernent l'Égypte et remontent à près de 2.000 ans avant notre ère. Il s'agit d'un papyrus dû à un prêtre du nom d'Ahmès, conservé à Londres, et d'un autre papyrus conservé à Moscou. De l'examen de ces documents, on peut conclure que les Égyptiens connaissaient certaines règles empiriques pour calculer les aires de certaines figures et les volumes de certains corps. Ils employaient une valeur approchée de π, soit $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, sans que l'on sache comment ils étaient arrivés à cette valeur. Les crues périodiques du Nil rendaient nécessaire, chaque année, la répartition des terrains cultivés et les arpédonaptes ou arpenteurs égyptiens avaient à leur disposition quelques méthodes donnant des résultats suffisamment approchés.

On attribue généralement à Thalès l'introduction en Grèce, vers le VIe siècle av. J.-C., des connaissances géométriques des Égyptiens. Ce que l'on a appelé le miracle grec allait s'accomplir : des données empiriques qui leur étaient fournies, les Grecs allaient tirer une science déductive. Il leur fallut trois siècles de méditations pour arriver aux *Éléments* d'Euclide qui, sous une forme à peine modifiée, sont encore aujourd'hui la base de notre enseignement.

La première École de Géométrie fut sans doute celle de Pythagore, de Samos, vers le début du Ve siècle av. J.-C. On y voit apparaître une première forme déductive de la géométrie, mais les concepts qui sont à la base de ce développement sont encore bien différents de ceux d'Euclide. Les points, les lignes, les surfaces ont encore une existence matérielle : la ligne est une sorte de fil ténu, la surface un voile très mince, le point, appelé *monade*, une sorte de petit grain de sable. Un segment de droite est formé par une réunion de monades et par conséquent le rapport des longueurs de deux segments est toujours un nombre commensurable. Or, en appliquant le théorème du carré de l'hypothénuse, c'est-à-dire précisément un théorème attribué à Pythagore, on trouve que le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à celle du côté de celui-ci est $\sqrt{2}$, c'est-à-dire un nombre incommensurable. Cette remarque devait conduire les géomètres grecs aux concepts de point, ligne et surface que l'on trouve dans la géométrie d'Euclide ; ce fut l'œuvre de Parménide et de son disciple Zénon, qui vivaient à Elée vers la fin du IVe siècle av. J.-C.

Les paradoxes des Eléates sont célèbres et ont donné lieu à bien des controverses jusqu'au moment où Paul Tannery a montré que leur véritable but était une réduction à l'absurde des concepts géométriques des Pythagoriciens.

Prenons le premier de ces paradoxes. Pour passer d'un point A à un point B, un mobile doit passer par le milieu C du segment AB, puis par le milieu du segment CB, et ainsi de suite à l'infini. Le mobile n'atteindra jamais le point B.

Le second paradoxe exprime la même idée sous une autre forme. Achille au pied léger poursuit une tortue qui a 100 mètres d'avance sur lui ; il va 10 fois plus vite que la tortue. Si au début Achille se trouve en A et la tortue en B distant de 100 mètres de A, lorsque Achille sera parvenu en B, la tortue aura parcouru 10 mètres et se trouvera en C ; lorsque Achille se trouvera en C, la tortue aura parcouru 1 mètre et ainsi de suite à l'infini. Achille n'atteindra donc jamais la tortue.

Cependant, si la ligne est, suivant l'idée pythagoricienne, composée de points ayant une certaine longueur, chacun des intervalles parcourus par Achille a une longueur au moins égale à la précédente et le chemin qu'il aura finalement parcouru étant composé d'une infinité de ces intervalles, sera infini.

La contradiction conduit à rejeter le concept de monade et c'est à Parmenide que serait dû le concept de point que l'on trouve dans Euclide : élément idéal qui n'a pas de dimension.

C'est au IIIe siècle av. J.-C., qu'Euclide vivait à Alexandrie. Ses *Éléments* sont un exposé des parties fondamentales de l'arithmétique et de la géométrie. La géométrie d'Euclide est une suite logique de déductions à partir d'un certain nombre de définitions, de postulats et d'axiomes. Le point est ce qui n'a pas de parties, la ligne est une longueur sans largeur, la surface est ce qui a seulement longueur et largeur...

Nous reviendrons tantôt sur cette géométrie à propos des postulats sur lesquels elle est fondée.

L'époque d'Euclide fut l'âge d'or de la Géométrie grecque : à côté de ce géomètre viennent en effet se placer Apollonius et Archimède.

Les Grecs ont considéré les sections coniques tout d'abord comme sections d'un cône de révolution par un plan. Imaginons un cône de révolution d'axe a et soit α l'angle formé par cet axe et une génératrice. Choisissons une génératrice s et soit σ un plan perpendiculaire à cette droite, ne passant pas par le sommet du cône. La section du cône par le plan σ est une conique γ et celle-ci est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que l'angle $2\,\alpha$ est aigu, droit ou obtus. Les Grecs appelaient γ une section conique respectivement à angle aigu, droit ou obtus et ces dénominations figurent encore dans Archimède.

On doit à Apollonius un traité sur les sections coniques qui réunit les connaissances des Grecs sur ces courbes. L'ouvrage comportait huit livres dont les six premiers seuls nous sont parvenus. Apollonius considère un cercle γ_0, un point S extérieur au plan de ce cercle et le cône obtenu en projetant le cercle γ_0 du point S. Les plans parallèles à celui de γ_0 coupent le cône suivant des cercles ; Apollonius montre qu'il existe une seconde famille de plans parallèles coupant également le cône suivant des cercles. Il étudie ensuite les sections du cône par des plans n'appartenant à aucune de ces deux familles. Il établit les propriétés des coniques que l'on rencontre, sous forme analytique, dans notre enseignement secondaire actuel, sauf cependant les notions de foyer et de directrice, qui semblent avoir été inconnues des Grecs.

Qu'il nous soit permis d'ouvrir ici une parenthèse. Vers 1830, deux géomètres belges, Ad. Quetelet et G. Dandelin, ont construit une théorie des foyers et des directrices des sections coniques par des procédés élémentaires, qui eût pu trouver place dans le traité d'Apollonius. Ils considèrent la section γ d'un cône de révolution par un plan σ. Il existe deux sphères tangentes au plan σ et inscrites dans le cône ; les points de contact des sphères avec le plan σ sont les foyers de la conique γ. De plus, les plans des cercles suivant lesquels les sphères touchent le cône coupent le plan σ suivant les directrices de γ.

Revenons à la Géométrie grecque. Trois problèmes célèbres ont retenu l'attention des géomètres grecs : la trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle.

Les Grecs avaient à leur disposition deux instruments de dessin : la règle et le compas ; c'est en fonction de ces instruments qu'ils se posaient les problèmes précédents. On sait aujourd'hui que, dans cet esprit, ces problèmes ne peuvent être résolus. On ne peut par exemple, sauf pour des angles particuliers, construire un angle qui vaut le tiers d'un angle donné au moyen de la règle et du compas, mais on peut naturellement construire des appareils plus compliqués — et on en a effectivement construit — qui résolvent ce problème. Quoi qu'il en soit, les Grecs, en cherchant vainement la solution de ces trois problèmes, ont été conduits à l'étude de nombreuses courbes telles que la cissoïde, la conchoïde, etc.

Le dernier des trois problèmes, la quadrature du cercle, peut être envisagé sous un autre aspect. Au lieu de chercher à construire au moyen de la règle et du compas un carré de même aire qu'un cercle donné, on peut se proposer de calculer le côté de ce carré. Cela revient à rechercher la valeur π du rapport de la longueur d'une circonférence de cercle à son diamètre. Archimède a donné plusieurs méthodes pour obtenir une valeur approchée de ce rapport, méthodes qui sont encore enseignées de nos jours. On sait aujourd'hui que π est un nombre transcendant.

A côté de ces travaux, on doit à Archimède de nombreux procédés très ingénieux pour calculer l'aire de certaines surfaces planes. Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ces travaux d'Archimède, qui forment une partie intéressante de la vaste œuvre scientifique qu'il a laissée.

Après Euclide, Apollonius, Archimède, il y eut encore des géomètres grecs de grande valeur, tels Pappus et Diophante, mais l'importance des travaux alla bientôt en diminuant et la production mathématique finit par s'arrêter. Les centres intellectuels allaient se déplacer vers l'Occident, mais il fallut près de dix siècles pour que les *Éléments* d'Euclide, par exemple, soient connus dans nos régions.

Vers le Xe et le XIe siècle, des écoles s'étaient fondées près des cathédrales ; elles avaient primitivement pour but de former des prêtres, mais bientôt ce but s'élargit et l'enseignement s'étendit à l'ensemble des connaissances de l'époque. Analysant les écrits laissés par des écolâtres de Liége du XIe siècle, Paul Tannery dit qu'il s'agit plutôt d'une étude du degré d'ignorance de l'époque que d'une contribution à l'histoire des sciences.

Les acquisitions de la science grecque s'étaient conservées d'une part à Byzance, d'autre part chez les Arabes. Elles parvinrent en Occident par deux voies. D'un côté, les relations commerciales entre les Italiens et l'Orient établirent des contacts d'ordre scientifique et c'est ainsi que Léonard de Pise, connu également sous le nom de Fibonacci, par exemple, introduit en Italie, au début du XIIIe siècle, diverses questions d'arithmétique et de géométrie provenant du fonds grec. D'un autre côté, les Universités de Montpellier et de Toulouse, fondées vers la même époque, reçurent, des Arabes d'Espagne, les premiers éléments des mathématiques grecques.

Pendant plusieurs siècles, l'Occident prendra peu à peu connaissance de l'apport grec aux Mathématiques. Mais il faut attendre le début du XVIIe siècle pour voir la Géométrie s'enrichir de méthodes nouvelles ; c'est à cette époque en effet que Descartes (1596-1650) et Fermat (1601-1663) créèrent la Géométrie analytique et que Desargues (1591-1662) et Pascal (1623-1662) jetèrent les premières bases de la Géométrie projective.

Lorsque nous disons que Descartes et Fermat créèrent la Géométrie analytique, c'est-à-dire la méthode des coordonnées, cela ne signifie nullement que l'idée de faire correspondre à un point du plan deux nombres : l'abscisse et l'ordonnée, leur soit venue à l'un ou à l'autre spontanément à l'esprit. Dès le XIVe siècle, un professeur de l'Université de Paris, Nicolas Oresme, qui fut Grand-Maître du Collège de Navarre en 1356 et évêque de Lisieux en 1382, voulant étudier le mouvement uniforme d'un point sur une droite, imagina de faire correspondre à ce point deux nombres, qu'il appelle longitude et latitude du point et qui ne sont autres que ses coordonnées rectangulaires. Oresme donne même la condition pour que trois points soient en ligne droite, mais comme à l'époque où il écrivait, le symbolisme algébrique restait à créer, il énonce cette condition en langage courant. Descartes et Fermat ne se trouvaient plus dans la même situation, le symbolisme algébrique ayant été créé par Viète (1540-1603) au siècle précédent.

Les architectes et les peintres de la Renaissance avaient été conduits à l'étude des règles de perspective ; Girard Desargues, qui était établi comme architecte à Lyon, eut l'idée d'appliquer ces règles à l'étude des sections coniques. Apollonius avait considéré une conique γ comme section d'un cône le sommet S à base circulaire γ_0. Desargues remarqua qu'un grand nombre de propriétés du cercle γ_0 pouvaient se transporter immédiatement à la conique γ. Il s'agit cependant de propriétés d'une nature particulière appelées propriétés de position, c'est-à-dire de propriétés intéressant la position d'un certain nombre de droites par rapport au cercle γ_0. Nous en verrons un exemple dans un instant.

Desargues fut conduit par ces recherches à une sorte d'amplification de l'espace de la géométrie d'Euclide. Considérons deux droites a, b du plan σ_0 du cercle γ_0, qui se coupent en un point P.

On les projette du point S sur le plan σ de la conique γ suivant deux droites a', b' et si le plan σ n'est pas parallèle à la droite SP, ces deux droites se coupent en un point P'. Mais si le plan σ est parallèle à la droite SP, les droites a', b' sont parallèles. Pour conserver à ses énoncés toute la généralité désirable, Desargues fut conduit à considérer des droites parallèles comme se rencontrant en un point fictif. L'espace arguésien est donc constitué par un ensemble de points proprement dits : les points de l'espace euclidien, et par des points improprement dits, que l'on appelle actuellement les points à l'infini et qui sont les points fictifs communs aux droites parallèles.

Le premier disciple de Desargues fut Pascal, qui consacra à l'étude des coniques un traité malheureusement perdu ; on n'a conservé que les quelques pages par lesquelles l'auteur annonçait la publication prochaine de ce traité. Il y énonce son fameux théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en spécifiant qu'il a pu démontrer cette propriété en utilisant les méthodes de Desargues. On sait en quoi consiste ce théorème. Si ABCDEF est un hexagone inscrit dans la conique γ, les points de rencontre des droites AB et DE, BC et EF, CD et FA sont en ligne droite. Eh bien, si l'on projette la figure du point S sur le plan du cercle γ_0, on obtient un hexagone A'B'C'D'E'F' inscrit dans le cercle et si la propriété est vraie pour cet hexagone, elle est vraie pour l'hexagone primitif. Il suffit donc de démontrer la proposition dans le cas où la conique est un cercle. Le théorème de Pascal est une propriété de position. Observons de plus que pour la première fois, on était en possession d'une condition pour qu'un point appartienne à la conique déterminée par cinq points et on pouvait en déduire une construction de la conique par points.

Au début du XVIII^{e} siècle, les géomètres se trouvaient donc en possession de deux méthodes de recherche que l'avenir devait montrer particulièrement fécondes. Elles ne connurent cependant pas tout de suite le même succès et la méthode des coordonnées eut la préférence. Jusqu'à la Révolution, le seul progrès que connurent les méthodes de Desargues fut le suivant : pour obtenir les propriétés des coniques, Desargues devait considérer un cône du second ordre et travailler dans l'espace. De La Hire (1640-1718) et Le Poivre (....-1710) imaginèrent, chacun de leur côté et par des procédés légèrement différents, une construction dérivée de celle de Desargues, permettant de passer d'un cercle à une conique située dans le plan du cercle.

Pourquoi les méthodes de Descartes et de Fermat connurent-elles plus de succès que celles de Desargues et Pascal ? Peut-être une des raisons fut-elle le problème de la construction des tangentes à une courbe ! Le champ des investigations possibles était d'ailleurs beaucoup plus vaste et il fallait notamment étendre la méthode des coordonnées à l'espace.

Les Grecs avaient considéré les tangentes à un cercle, à une conique, à certaines courbes particulières, mais seule la Géométrie analytique allait permettre l'étude du problème général. Si C est une courbe plane et M un de ses points, on appelle tangente à la courbe au point M la limite (si elle existe) d'une droite passant par M et par un second point M′ de la courbe tendant vers M sur celle-ci. Si nous choisissons deux axes de coordonnées Ox, Oy dans le plan de C et si $y = f(x)$ est l'équation de la courbe, la tangente au point x, y a pour coefficient angulaire la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$. Le problème des tangentes eut une répercussion sur la formation du Calcul différentiel ; il donne d'ailleurs une interprétation géométrique commode de la dérivée d'une fonction.

Sans nous attarder à faire l'historique du développement de la Géométrie pendant le XVIIIe siècle, arrivons tout de suite à la Révolution. A cette époque, ce furent surtout Monge (1746-1818) et Carnot (1753-1823) qui firent progresser la Géométrie.

Monge est surtout connu du grand public comme créateur de la Géométrie descriptive, mais il a bien d'autres titres scientifiques. Nous avons dit tantôt que l'on devait à Desargues une amplification de l'espace euclidien ; on en doit une autre à Monge, d'un tout autre genre.

Imaginons une sphère S et une droite a. Si la sphère n'est pas rencontrée par la droite, on peut mener par celle-ci deux plans tangents à la sphère et les points de contact se trouvent sur une droite b que l'on peut d'ailleurs construire directement en partant de a. Si au contraire la droite a rencontre la sphère en deux points, on ne peut plus mener de plans tangents à la sphère par cette droite, mais la droite b existe toujours. Mettons en équations le problème de mener par une droite a un plan tangent à la sphère ; dans nos calculs, nous n'aurons plus à distinguer les cas où la droite a rencontre ou non la sphère, les équations sont les mêmes dans chaque cas. Nous constaterons, à la fin de nos calculs, que si a coupe la sphère en deux points, on trouve encore deux plans tangents, mais les coefficients de leurs équations et les coordonnées des points de contact sont imaginaires ; la droite b existe toujours, est réelle et coupe la sphère en deux points imaginaires : les points de contact. Eh bien, dans des problèmes de cette nature, Monge raisonne géométriquement, en sous-entendant naturellement les équations, mais sans les écrire. Si nous convenons d'appeler point imaginaire un point dont les coordonnées ne sont pas toutes réelles, Monge traite de la même manière, géométriquement, les points réels et imaginaires. Il y a là une seconde amplification de l'espace par l'adjonction d'un nouvel ensemble de points fictifs : les points imaginaires.

Carnot, par sa *Géométrie de position* et sa *Théorie des transversales*, contribua à ramener les esprits vers la géométrie pure. Après lui, Poncelet (1788-1867) érigea en corps de doctrine la Géométrie projective. Reprenant l'idée de Desargues, Poncelet fait un usage systématique de deux opérations : la projection et la section. La première consiste à déduire d'une figure celle que l'on obtient en projetant ses éléments, points et droites, d'un point extérieur. La seconde consiste à couper une figure donnée par un plan ou une droite. Naturellement, il faut que les figures obtenues aient un sens pour que l'on puisse appliquer les opérations. Les propriétés de deux figures qui sont projections ou sections d'une même troisième se déduisent les unes des autres. Supposons par exemple que l'on désire étudier les propriétés d'un quadrilatère quelconque, formé de deux droites a, b se coupant en un point A et de deux droites c, d se coupant en un point B. Projetons la figure d'un point S extérieur au plan du quadrilatère, puis coupons la figure obtenue par un plan parallèle aux droites SA, SB, mais ne passant naturellement pas par S. On obtient ainsi un parallélogramme et des propriétés de position de celui-ci, on pourra déduire celles du quadrilatère.

Mais on doit d'autres résultats importants à Poncelet. Nous mentionnerons pour mémoire son principe de continuité, dont l'énoncé manquait de précision et qui fut l'objet d'attaques très vives de la part de Cauchy. Nous nous arrêterons plutôt à la notion de cercle absolu ou cercle imaginaire à l'infini.

Deux coniques d'un même plan se rencontrent soit en quatre points réels, soit en deux points réels et deux points imaginaires conjugués, soit en deux couples de points imaginaires conjugués. En particulier, deux cercles ayant deux points en commun, se coupent encore suivant deux points imaginaires conjugués. L'intersection de deux sphères ayant en commun un cercle, se complète donc par une courbe rencontrée par tout plan de l'espace en deux points imaginaires conjugués. Eh bien, Poncelet a remarqué que cette courbe imaginaire appartient à toutes les sphères de l'espace et forme l'intersection de chacune de celles-ci avec le plan impropre, ou plan de l'infini, lieu des points à l'infini introduits par Desargues. Cette courbe a été appelée cercle absolu ou cercle imaginaire à l'infini. Pour montrer la fécondité de ce concept, disons que si une quadrique coupe le plan impropre suivant une conique tangente en deux points au cercle absolu, elle est de révolution.

On peut dire qu'en amplifiant l'espace par l'introduction des points impropres ou à l'infini et des points imaginaires, on peut condenser les propriétés géométriques dans un nombre moindre de propositions et donner une plus grande généralité aux énoncés de celles-ci. On réalise en somme une économie de pensée.

Legendre (1752-1833), auquel on doit de profondes recherches notamment sur les fonctions elliptiques, a publié en 1794 un ouvrage sur la Géométrie élémentaire qui eut un très grand succès et dont s'inspirent encore de nos jours la plupart des auteurs d'ouvrages analogues. Ceci nous ramène à la géométrie d'Euclide et plus précisément aux postulats sur lesquels elle fut fondée. Le plus célèbre de ces postulats est celui des parallèles, que nous énoncerons ainsi : par un point, situé hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite et on n'en peut mener qu'une. Il y eut, au cours des siècles, de nombreuses tentatives pour démontrer ce postulat en s'appuyant sur les propositions antérieures. C'est probablement le jésuite italien Saccheri (1667-1733) qui eut le premier des vues claires sur la question. Saccheri considère un quadrilatère ACDB dont deux côtés AC, BD sont égaux et perpendiculaires à AB. Il distingue 3 cas suivant que les angles en C, D sont tous deux aigus, droits ou obtus. La somme des angles de tout triangle est alors respectivement inférieure à deux droits, ou égale à deux droits, ou supérieure à deux droits. Il semble que Saccheri ait entrevu la possibilité de construire une géométrie, développée suivant les règles de la logique, où la somme des angles de tout triangle serait inférieure à deux droits. Après lui, le géomètre suisse Lambert (1728-1777) considère un quadrilatère dont trois angles sont droits et examine les cas où le quatrième angle est aigu, droit ou obtus.

Legendre reprit la question et démontra que si l'on admet, avec Euclide, que la droite est une ligne illimitée dans les deux sens, la somme des angles d'un triangle ne peut être supérieure à deux droits. Ce résultat avait une grande importance, car il montrait que l'on ne peut choisir arbitrairement des postulats pour construire une géométrie ; il peut exister entre ces postulats une certaine dépendance.

Etant donnés une droite s et un point S n'appartenant pas à cette droite, on peut faire trois hypothèses :

a) Par S, on peut mener une infinité de droites ne rencontrant pas s ; la somme des angles d'un triangle est alors inférieure à deux droits.

b) Par S, on ne peut mener qu'une seule droite ne rencontrant pas s ; la somme des angles d'un triangle est alors égale à deux droits ; c'est le cas euclidien.

c) Par S, on ne peut mener aucune droite ne rencontrant pas s ; la somme des angles d'un triangle est alors supérieure à deux droits.

Le résultat de Legendre signifie que l'on ne peut remplacer le postulat d'Euclide par l'hypothèse *c*) sans renoncer à la propriété d'une droite de pouvoir être prolongée indéfiniment dans les deux sens.

Voici un demi-siècle, le mathématicien allemand Hilbert (1862-1943) a dressé le tableau des postulats sur lesquels est basée la Géométrie euclidienne et en a étudié l'interdépendance.

Entre temps, des géomètres avaient cherché à construire des géométries dites non-euclidiennes, où le postulat d'Euclide était remplacé soit par la propriété *a*), soit par la propriété *c*).

Le géomètre russe Lobatchefski (1793-1856) a édifié une géométrie où le postulat d'Euclide est remplacé par le postulat *a*). Cette géométrie s'était également présentée à divers mathématiciens, notamment à Gauss (1777-1856) et à J. Bolyai (1802-1860). Lobatchefski poussa assez loin le développement de sa géométrie sans rencontrer de contradiction, mais, et les euclidiens impénitents ne se firent pas faute de le faire remarquer, cela ne signifie nullement que les développements ultérieurs ne conduiront pas à une contradiction. La réponse à cette objection fut fournie par l'illustre Poincaré (1854-1912) ; il construisit un chapitre de géométrie euclidienne qui, moyennant certaines conventions de langage, peut être interprété comme géométrie lobatchefskienne.

Partageons le plan en deux parties par une droite *s* et considérons une seule de ces parties. Dans cette région, traçons les demi-circonférences dont les centres appartiennent à *s*. Nous appellerons « droite » chacune de ces demi-circonférences et nous dirons que deux « droites » sont parallèles lorsque les demi-circonférences correspondantes se rencontrent sur la droite *s*. Ce vocabulaire adopté, considérons une « droite » *a* rencontrant *s* en deux points B, C et soit A un point n'appartenant pas à *a*. Par A passe une « droite » *b* contenant le point B et une « droite » *c* contenant le point C. Nous pouvons donc, par A, mener deux parallèles à la « droite » *a*. Observons de plus qu'il existe une infinité de « droites » passant par A et ne rencontrant pas *a* : ce sont les non-sécantes et une infinité de « droites » passant par A et rencontrant *a* : ce sont les sécantes. Par cette construction se trouve démontrée la non-contradiction de la géométrie lobatchefskienne.

On peut d'ailleurs aller plus loin. Supposons que le point A soit suffisamment éloigné de la droite *s* pour que les instruments de mesure dont nous disposons ne nous permettent plus de distinguer la « droite » *b* de la « droite » *c*. Nous serons tenté de dire que par A, on ne peut mener qu'une parallèle à *a*. Dans la région très éloignée de la droite *s* où nous sommes sensés vivre, nous pourrons faire de la géométrie euclidienne : ce sera une géométrie suffisamment approchée de la géométrie réelle et qui suffira à nos besoins. On peut faire ici une comparaison avec ce qui se passe dans la vie courante : nous savons que la direction d'un fil à plomb passe par le centre de la Terre. Deux fils à plomb ne sont donc pas rigoureusement parallèles. Cependant, lorsque l'on a construit cette salle, on a admis ce parallélisme parce que l'approximation ainsi obtenue suffisait largement à nos besoins.

Riemann (1826-1866) a construit une géométrie où le postulat d'Euclide est remplacé par le postulat *c*). On peut aussi montrer la non-contradiction de cette géométrie au moyen d'un « modèle » emprunté à la géométrie euclidienne. Considérons les droites et les plans passant par un point S. Convenant d'appeler « point » une de ces droites et « droite » un de ces plans. Nous constatons que deux « droites » quelconques se rencontrent toujours en un « point », donc la notion de parallélisme n'existe plus. D'autre part, d'après le théorème de Legendre, la « droite » ne peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens. Eh bien, si l'on fait tourner un « point »-droite autour de S sur une « droite »-plan, après un demi-tour, le « point »-droite (droite non orientée) sera revenu à sa position de départ. La « droite » est donc une ligne fermée, qui a pour longueur π.

Dans les *Éléments* d'Euclide, on définit l'égalité de deux figures F, F′ en disant qu'elles sont superposables. Cela implique que l'on peut *déplacer* la figure F pour l'amener en coïncidence avec la figure F′ ou bien que l'on peut déplacer la figure F′ pour l'amener à coïncider avec la figure F. C'est d'ailleurs par superposition que l'on démontre l'égalité de deux triangles, donc l'un de ces triangles doit être soumis à un déplacement. De plus, deux figures égales à une même troisième sont égales.

On peut, comme l'a fait remarquer Henri Poincaré, déduire de ce qui précède une remarque importante.

Nous admettons qu'il existe certaines opérations, que nous appelons *déplacements*, qui permettent d'amener une figure en coïncidence avec une autre qui sera, par définition, égale à la première. Ces déplacements jouissent des propriétés suivantes :

1° S'il existe un déplacement faisant coïncider une figure F avec une figure F′, il existe un déplacement — appelé inverse du précédent — qui fait coïncider F′ avec F.

2° S'il existe un déplacement D faisant coïncider F avec F′ et un déplacement D′ faisant coïncider F′ avec F″, il existe un déplacement D″ faisant coïncider F avec F″. Ce déplacement D″, nous pouvons convenir de l'appeler *produit* des déplacements D, D′ et écrire

$$D'' = D\,.\,D'.$$

Remarquons que D″ ne coïncide pas en général avec D′ . D.

On dit que les déplacements forment un *groupe*. L'étude des propriétés métriques des figures revient à la recherche des propriétés qui ne sont pas altérées par les déplacements, c'est-à-dire des propriétés qui sont *invariantes* par rapport au groupe des déplacements.

On peut d'ailleurs voir facilement que si l'on se borne à la géométrie plane, ces déplacements sont des translations, des rotations autour d'un point, des symétries par rapport à une droite, ou des combinaisons des opérations précédentes. Considérons par exemple, dans un même plan, deux triangles égaux ABC et A′B′C′. Pour déplacer ABC de manière à le faire coïncider avec A′B′C′, sans sortir du plan, nous opèrerons en premier lieu une translation amenant A en A′. Soit A′B″C″ la nouvelle position de ABC. Si B″ coïncide avec B′ et C″ avec C′, les deux triangles sont superposés. Dans le cas contraire, une rotation autour de A′ amène B″ à coïncider avec B′ ; soit C‴ la nouvelle position du point C″. Si C‴ coïncide avec C′, les deux triangles sont superposés. Dans le cas contraire, C‴ est nécessairement le symétrique de C′ par rapport à la droite A′B′. Une symétrie par rapport à cette droite amène donc A′B′C‴ en coïncidence avec A′B′C′. Dans le cas le plus défavorable, le déplacement qui permet de superposer ABC à A′B′C′ se compose d'une translation, d'une rotation autour d'un point et d'une symétrie par rapport à une droite.

Dans l'espace, les déplacements sont des combinaisons de translations, de rotations autour d'une droite et de symétries par rapport à un plan.

Si l'on rapporte l'espace à un trièdre trirectangle $Oxyz$, les déplacements sont exprimés par les formules de changement de trièdre de référence.

Observons qu'en considérant les propriétés des figures invariantes vis-à-vis du groupe de déplacements, nous n'avons pas obtenu toutes les propriétés de la Géométrie euclidienne, car celle-ci s'occupe également des figures semblables. Il faudra adjoindre, aux déplacements, de nouvelles transformations appelées *homothéties*. Si O est un point fixe, faisons correspondre à un point A le point A′ situé sur la droite OA, donné par

$$OA' = k \cdot OA,$$

k étant une constante. (On suppose la droite OA orientée.)

Une homothétie dépend donc du choix du point O et du paramètre k. Si l'on considère toutes les homothéties possibles et si on les adjoint au groupe de déplacements, on obtient un nouveau groupe appelé *groupe des similitudes.* La géométrie euclidienne est l'ensemble des propriétés qui sont invariantes par rapport au groupe des similitudes.

La notion de groupe, que nous venons de rencontrer, a été introduite en mathématiques par un jeune géomètre de génie, Evariste Galois (1811-1832), mort à 21 ans. A vrai dire, Galois avait considéré des groupes de substitutions portant sur les racines d'une équation algébrique, mais cette notion de groupe a peu à peu envahi tous les domaines des Mathématiques et même, jusqu'à un certain degré, de la Physique. Sophus Lie (1842-1899) a notamment étudié certains groupes de transformations géométriques et ses recherches ont conduit F. Klein (1849-1925) à une sorte de synthèse de la Géométrie, qu'il a exposée dans le célèbre programme d'Erlangen (1872) et dont nous voudrions dire quelques mots.

Imaginons une transformation qui fasse correspondre un point à tout point de l'espace, suivant certaines constructions géométriques. Pour définir une telle transformation, nous devons introduire certains éléments fixes, comme par exemple dans le cas de l'homothétie nous introduisons un point fixe O et une constante k. En changeant ces données de toutes les manières possibles, nous obtenons un ensemble de transformations. Supposons que cet ensemble jouisse des propriétés suivantes :

1° Si T est une transformation de l'ensemble qui fait passer des points (P) aux points (P′), il existe une autre transformation de l'ensemble qui fait passer des points (P′) aux points (P) ; on convient de l'appeler l'inverse de la première.

2° Si T est une transformation de l'ensemble faisant passer des points (P) aux points (P′) et T′ une transformation de l'ensemble qui fait passer des points (P′) aux points (P″), il existe une transformation de l'ensemble faisant passer des points (P) aux points (P″). On convient de l'appeler le produit des transformations T, T′ et on la représente par T . T′.

Eh bien, dans ces conditions, on dit que l'ensemble des transformations est un groupe G.

Dès lors, on peut créer une géométrie qui soit l'ensemble des propriétés des figures qui sont invariantes pour les transformations du groupe G. Celui-ci est le groupe principal de cette géométrie.

Abandonnons cette forme très générale pour revenir à une géométrie que nous avons déjà rencontrée.

Supposons que les transformations T possèdent les propriétés suivantes :

a) A un point P, une transformation T fait correspondre un point P′ et un seul ;

b) Lorsque le point P décrit un plan, le point P′ décrit un plan.

Analytiquement, on obtient les transformations T de la manière suivante : rapportons l'espace à un trièdre $Oxyz$. Les coordonnées x', y', z' du point P′ s'expriment en fonctions linéaires des coordonnées x, y, z du point P et ces formules peuvent être résolues par rapport à x, y, z d'une manière unique.

Il est clair que les transformations T forment un groupe. Ces transformations sont appelées des homographies ou collinéations et le groupe qu'elles forment est *le groupe projectif*. Les propriétés qui sont invariantes pour les transformations de ce groupe constituent la Géométrie projective. Parmi ces propriétés se trouvent les relations de position, déjà rencontrées à propos des travaux de Desargues et de Pascal.

Observons que parmi les homographies, se trouvent les déplacements et les similitudes, dont il a été question plus haut. Par conséquent, la Géométrie euclidienne doit en quelque sorte dériver de la Géométrie projective. Un déplacement fait correspondre à une sphère, une sphère de même rayon et une similitude, une sphère dont le rayon est différent de celui de la première. Les déplacements et les similitudes changent donc les sphères en sphères. Or, toutes les sphères ont en commun le cercle absolu ou cercle imaginaire à l'infini de Poncelet, par conséquent, les déplacements et les similitudes transforment en lui-même le cercle absolu ; ce sont donc les homographies qui possèdent cette propriété. Et on démontre que l'on obtient bien ainsi toutes les opérations du groupe de la géométrie euclidienne. On dit que ce dernier groupe est un sous-groupe du groupe projectif et que la Géométrie euclidienne est subordonnée à la Géométrie projective.

On peut également former des géométries relatives à des groupes d'homographies transformant en elle-même une quadrique donnée. Sans insister sur ce point, signalons que l'on retrouve ainsi les géométries non-euclidiennes, comme géométries subordonnées à la Géométrie projective.

La Géométrie analytique a permis une classification des courbes et des surfaces. Bornons-nous, pour plus de simplicité, à la géométrie plane. A tout point M du plan correspondent deux nombres x, y, abscisse et ordonnée de ce point par rapport à deux axes Ox, Oy et que l'on peut définir d'une manière précise en disant que x est la mesure de la projection du segment OM sur Ox parallèlement à Oy et y la mesure de la projection du même segment sur Oy parallèlement à Ox. On admet que réciproquement deux nombres x, y peuvent être considérés comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point M. Une équation $$F(x, y) = 0$$

représente une courbe, ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient cette équation. On peut distinguer 2 cas suivant que $F(x, y)$ est un polynome entier en x, y, ou non. Dans le premier cas, la courbe est dite algébrique et le degré du polynome F est l'ordre de la courbe. Une courbe d'ordre n est rencontrée en n points, réels ou imaginaires, par toute droite du plan. Les courbes algébriques du premier ordre sont les droites, celles du second ordre les coniques. Les géomètres qui suivirent Poncelet, tels que Michel Chasles (1793-1880), J. Steiner (1796-1863) et bien d'autres, poursuivirent l'étude des courbes algébriques d'ordre supérieur au second. En général, ces recherches se firent dans le cadre de la Géométrie projective, mais on s'aperçut bientôt que certaines des propriétés rencontrées devaient appartenir à un cadre plus large. En fait, on s'aperçut qu'il devait exister un groupe de transformations plus générales que les homographies. On fut ainsi conduit à la *Géométrie algébrique.*

On appelle transformation birationnelle ou transformation crémonienne, du nom du géomètre italien Cremona (1830-1903) qui en fit le premier la théorie, une opération qui fait passer d'un point M (x, y) à un point M' (x', y') de telle sorte que les coordonnées de chacun de ces points s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées de l'autre.

L'inversion, par exemple, est une transformation birationnelle. Considérons le cercle

$$x^2 + y^2 = 1$$

dont le centre est à l'origine des coordonnées et le rayon égal à l'unité. A un point M (x, y) nous ferons correspondre le point M' (x', y') situé sur la droite OM et tel que

$$\mathrm{OM} \, . \, \mathrm{OM}' = 1.$$

On trouve sans difficulté que l'on a

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \; y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

et

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \; y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

Les transformations birationnelles forment évidemment un groupe et la *Géométrie algébrique* est celle qui a ce groupe comme groupe principal.

Toutes ces considérations ont naturellement été étendues à l'espace. Elles ont ensuite donné naissance à ce que l'on a appelé la Géométrie sur une variété algébrique, qui est peut-être la partie la plus difficile et la plus élevée de la Géométrie. Nous ne pouvons pas insister ici sur ce genre de questions.

Nous nous arrêterons plutôt sur un autre aspect de la Géométrie, où l'on étudie les courbes et les surfaces dans le voisinage d'un point.

Considérons un segment de droite AB, orienté de A vers B et supposons qu'il soit matérialisé par exemple par un morceau de fil de fer, bien rectiligne. En appuyant sur les extrémités A, B de ce fil, nous le courbons. Soit AMB la courbe obtenue ; nous supposerons qu'elle a une tangente en chaque point et nous orienterons cette tangente MT en un point quelconque M de la courbe de telle sorte que si un mobile parcourt la courbe dans le sens AMB et quitte la courbe en M pour suivre la tangente, il n'a pas un mouvement régressif en M. Cela étant, nous aurons une première idée de la courbure de l'arc AMB par la mesure de l'angle ε fait par la tangente orientée en A avec la tangente orientée en B. Mais cette idée de la courbure sera fort imprécise, car on peut très bien imaginer deux arcs de courbes AMB et AM'B ayant mêmes tangentes en A, B mais de courbures différentes parce que, par exemple, ils ont des longueurs différentes. On aura une idée moins imprécise de la courbure de l'arc AMB en considérant le rapport $\frac{\varepsilon}{s}$ de l'angle ε à la longueur s de l'arc AMB. Ce rapport est appelé courbure moyenne de l'arc AMB.

On conçoit que l'on aura une idée plus précise de la courbure de l'arc AMB si l'on connaît la courbure moyenne d'arcs AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., M_kB, obtenus en partageant l'arc total par des points successifs M_1, M_2, M_3, ..., M_k. Et cette idée sera d'autant plus précise que le nombre des arcs partiels sera plus grand et chaque arc partiel plus petit. Cela nous conduit à attacher à chaque point M de l'arc AMB un nombre, appelé courbure de la courbe en ce point, limite de la courbure moyenne d'un arc MM', lorsque M' tend vers M sur la courbe.

Reprenons notre fil de fer courbe AMB et tordons-le en agissant sur ses extrémités A, B. Comment pourrons-nous mesurer cette torsion ? L'arc de courbe tordu AMNB que nous avons obtenu ne peut être situé dans un plan. Prenons en un point M la tangente MT à cet arc ; soit M' un second point de l'arc. Lorsque M' tend vers M sur la courbe, le plan MTM' tend vers une certaine position limite μ (supposée existante) que l'on appelle plan osculateur à la courbe en M. Cela étant, nous aurons une première idée de la torsion de l'arc AMNB en considérant l'angle η des plans osculateurs à la courbe en A et B. Nous en aurons une idée un peu plus précise en considérant le rapport de l'angle η à la longueur s de l'arc ; ce rapport $\frac{\eta}{s}$ est la torsion moyenne de l'arc. Enfin, en procédant comme tantôt, nous appellerons torsion de la courbe en un point M la limite de la torsion moyenne de l'arc MM′ lorsque M′ tend vers M sur la courbe.

Observons que la courbure se définit de la même manière que la courbe considérée soit plane ou gauche. Par contre, la torsion d'une courbe plane est nulle, les plans osculateurs à cette courbe étant tous confondus avec le plan de la courbe.

Envisageons maintenant une surface S et un point M de cette surface. Comment allons-nous procéder pour étudier la surface dans le voisinage du point M ? Eh bien, nous partirons du point M et nous cheminerons sur la surface. En d'autres termes, nous considérerons les différentes courbes tracées sur la surface et passant par M. Chacune de ces courbes a une courbure et une torsion en M et il suffira d'étudier la variation de ces nombres lorsque la courbe varie. Nous ne pouvons entrer dans le détail des résultats obtenus ; bornons-nous à dire que le Général Meusnier (1754-1793) a montré que l'étude de la courbure des courbes tracées sur une surface en un point M se ramène à celle de la courbure des sections de la surface par les plans passant par la normale à celle-ci au point considéré.

Ce genre de recherches a conduit à la *Géométrie infinitésimale* ou *Géométrie différentielle*. Ce sont les travaux d'Euler (1707-1783) et de Monge qui ont donné naissance à cette géométrie, qui fit ensuite l'objet de recherches fondamentales de Gauss (1777-1855).

Gauss part de la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques :

$$x = \varphi_1 (u, v), \quad y = \varphi_2 (u, v), \quad z = \varphi_3 (u, v).$$

Sur cette surface, les lignes $u = \text{cons}^{\text{te}}$, $v = \text{cons}^{\text{te}}$ forment une sorte de quadrillage analogue à celui formé par les droites $x = \text{cons}^{\text{te}}$, $y = \text{cons}^{\text{te}}$ dans un plan rapporté à deux axes Ox, Oy. Dans la région de la surface que l'on considère, on suppose les lignes u, v choisies de manière qu'elles ne se rencontrent qu'en un point. Si les lignes $u = u_0$, $v = v_0$ se rencontrent en un point M, celui-ci a pour coordonnées curvilignes u_0, v_0. Si la surface est une sphère, de rayon R et de centre O, par exemple, on pourra poser

$$x = R \cos u \sin v, \; y = R \sin u \sin v, \; z = R \cos v$$

et si l'on assimile cette sphère à la sphère terrestre, les lignes $u =$ cons^{te} sont les méridiens, les lignes $v =$ cons^{te} les parallèles. On peut évidemment choisir une région où ces lignes ne se rencontrent qu'en un point.

Nous ne pouvons ici entrer dans les détails de cette théorie ; bornons-nous à signaler que parmi les problèmes que l'on y rencontre se trouve celui de la représentation point par point de deux portions de surfaces l'une sur l'autre. Ce problème a été posé par la construction des cartes géographiques. On a particulièrement étudié les cas où la représentation a lieu avec conservation des longueurs et conservation des angles. Ces questions ont fait l'objet de nombreuses recherches des géomètres depuis plus d'un siècle ; parmi ces géomètres, citons G. Darboux (1842-1917) et Cl. Guichard (1861-1924) qui ont illustré la chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne et L. Bianchi (1856-1928) qui professa à l'École Normale Supérieure de Pise.

La chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne fut créée en 1846 et le premier titulaire en fut Michel Chasles, que nous avons eu l'occasion de citer plus haut. Nous venons d'autre part de citer ses deux premiers successeurs, G. Darboux et Cl. Guichard. Le quatrième titulaire en fut Elie Cartan (1869-1951), qui vient de s'éteindre entouré de l'estime et de l'admiration de tous. Elie Cartan est l'auteur de recherches très importantes sur la théorie des groupes ; il laisse également en géométrie d'admirables travaux dont nous voudrions tâcher de faire saisir le sens et la portée, en nous limitant cependant à un cas fort simple.

Considérons une surface S. A chaque point de cette surface, nous pouvons associer son plan tangent en ce point. Imaginons que dans le plan tangent α à S en un point A, nous considérions une géométrie, par exemple la géométrie euclidienne métrique. Nous devons donc considérer dans le plan α le groupe des déplacements G_a et nous devrons choisir dans ce plan deux axes, rectangulaires par exemple, Ax, Ay, par rapport auxquels nous pourrons écrire les équations des opérations du groupe G_a. Par le même procédé, nous pouvons considérer la géométrie euclidienne métrique dans le plan tangent β à la surface S en un point B, le plan β étant rapporté à deux axes rectangulaires Bx', By'. Comment pourrons-nous raccorder les géométries des plans α et β ?

Un procédé qui peut être employé est le suivant : traçons sur la surface S une courbe AMB joignant A à B. Considérons les plans tangents à la surface S aux points de la ligne AMB ; nous obtenons ainsi une surface développable. Développons cette surface sur le plan α en appliquant successivement sur ce plan les plans tangents à S. Dans le plan α, la courbe AMB aura pour image une courbe AM'B' et les axes Bx', By', deux axes rectangulaires $B'x''$, $B'y''$. Nous pourrons rechercher les formules de passage du plan α rapporté aux axes Ax, Ay au même plan rapporté aux axes $B'x''$, $B'y''$. En retournant ensuite à la surface primitive et au plan β, nous aurons deux formules de la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1\, x' + a_2\, y' + a_3\,, \\ y &= b_1\, x' + b_2\, y' + b_3\,, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

qui permettent de passer de la géométrie du plan α à celle du plan β. Mais il est bien clair que les coefficients a, b qui figurent dans ces formules dépendent en général du choix du chemin AMB. Si, au lieu du chemin AMB, nous avions choisi un autre chemin APB, nous serions parvenu à des formules du type (1), mais avec des coefficients a, b ayant en général des valeurs différentes.

Supposons que nous ayons, sur la surface S, un système de coordonnées curvilignes, u, v. Les coordonnées cartésiennes ξ, η, ζ des points de la surface S sont des fonctions de u, v et le coefficient angulaire de la tangente en A à la ligne AMB est une certaine fonction du rapport des accroissements infiniment petits du, dv donnés aux coordonnées u, v de A. Si nous faisons tendre B vers A sur la courbe AMB, les formules (1) conserveront la même forme, mais les coefficients a, b seront à la limite des fonctions des coordonnées u, v de A et des accroissements du, dv donnés à ces quantités. De ces nouvelles formules, nous pourrons déduire les formules (1) en faisant une sorte d'intégration le long de la ligne AMB. Si l'on choisit une autre ligne APB pour passer de A à B, l'intégration se fait le long de cette ligne ; cela conduit à des formules du type (1), mais dont les coefficients sont en général différents. Nous sommes donc maintenant en possession de formules

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1\, x' + A_2\, y' + A_3\,, \\ y &= B_1\, x' + B_2\, y' + B_3\,, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées u, v de A et de du, dv.

Considérons un chemin AMA partant de A et y retournant. Nous intègrerons les formules (2) le long de ce chemin et, arrivé en A nous n'obtiendrons pas nécessairement l'identité, mais une transformation faisant passer des axes Ax, Ay à certains axes $A'x'$, $A'y'$. Pour passer des axes $A'x'$, $A'y'$ aux axes Ax, Ay, il faudra effectuer une transformation T du groupe de la géométrie euclidienne métrique (groupe des déplacements).

On conçoit que lorsque l'on envisage tous les chemins fermés tracés sur S, partant de A et y revenant, on obtient une infinité de transformations T du groupe de la géométrie euclidienne, mais on n'obtient pas en général toutes les transformations de ce groupe. Les transformations T forment un groupe contenu dans le groupe des déplacements, c'est-à-dire ce que l'on appelle un sous-groupe du groupe de la géométrie euclidienne. Ce sous-groupe, g_a, a été appelé par Cartan *groupe d'holonomie* de la surface S.

La théorie dont nous venons d'esquisser la genèse sur un cas très particulier, a été développée par Elie Cartan dans le cas d'une variété V à un nombre quelconque, n, de dimensions. A chaque point de cette variété V, il attache un espace linéaire à n dimensions dans lequel il définit une Géométrie. Il se donne donc un groupe et un repère, lié au point, par rapport auquel il peut définir les transformations du groupe. Il se donne alors les formules de raccord permettant de passer des repères donnés en deux points infiniment voisins de la variété (c'est-à-dire les formules généralisant les formules (2) de tantôt). Il parvient ainsi à définir le groupe d'holonomie dans les espaces attachés aux points de la variété. Ajoutons que ce sont les problèmes géométriques posés par la Relativité générale d'Einstein qui ont conduit Cartan à ces conceptions.

Pour définir une Géométrie suivant le concept de Klein, on se donne un espace et un groupe de transformations. Suivant le concept plus général de Cartan, on se donne une variété, un groupe attaché à chaque point de cette variété et les formules de passage relatives à deux points infiniment voisins. Cartan est donc parvenu à faire rentrer dans le même concept des géométries que Klein considérait comme étrangères à son programme. C'est en rendant hommage au profond géomètre que fut Elie Cartan que nous terminerons cette causerie.

Imprimé par l'Imprimerie Alençonnaise, Maison Poulet-Malassis, Alençon (Orne)
Dépôt légal : 3e trimestre 1952, N° d'ordre 2:611