SUR LA SURFACE ENVELOPPÉE PAR LES QUADRIQUES DE LIE D'UNE SURFACE

PAR

LUCIEN GODEAUX

Professeur à l'Université de Liége

Dans plusieurs notes antérieures (1), nous nous sommes occupé de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et nous avons déterminé dans quelle condition il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de cette enveloppe. Nous nous proposons d'ajouter quelques compléments à nos recherches antérieures.

1. — Soit *(x)* une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de cette surface satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable, que l'on peut mettre sous la forme (2)

$$x^{20} + 2\,b x^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2\,a x^{10} + c_2 x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions analytiques de u, v, les deux premières n'étant pas nulles, et où l'on représente par φ^{ik} la dérivée d'une fonction φ de u, v, prise i fois par rapport à u, k fois par rapport à v.

Appelons S_3 l'espace contenant la surface *(x)* et soit Q l'hyperquadrique de S_5 qui représente les droites de l'espace S_3. Désignons par U, V les points de Q qui représentent

(1) *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1929, pp. 37-53; pp. 702-710).

(2) WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curved surfaces* (Trans. of amer. Math. Soc., 1907, t. VIII, pp. 233-260).

les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} en un point x de la surface (x). On a

$$U^{10}+2bV=0,\ V^{01}+2aU=0.$$

Les points U, V sont donc les transformés de Laplace l'un de l'autre [1].

Si l'on désigne par $U_1, U_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace du point U dans le sens des v, par $V_1, V_2, \ldots$ ceux de V dans le sens des u, on a

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= U_i^{01}-U_i(\log bh_1\ldots h_i)^{01}, \\ V_{i+1} &= V_i^{10}-V_i(\log ak_1\ldots k_i)^{10}, \end{aligned}$$

les quantités h_i, k_i étant données par les formules

$$\begin{aligned} h_i &= -(\log bh_1\ldots h_{i-1})^{11}+h_{i-1}, \\ k_i &= -(\log ak_1\ldots k_{i-1})^{11}+k_{i-1}. \end{aligned}$$

On a en outre les équations de Laplace

$$\begin{aligned} U_i^{11}-U_i^{10}(\log bh_1\ldots h_i)^{01}-h_iU_i &= 0, \\ V_i^{11}-V_i^{01}(\log ak_1\ldots k_i)^{10}-k_iV_i &= 0. \end{aligned}$$

La suite de Laplace

$$\ldots, U_i, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_i, \ldots \tag{I}$$

est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q, les points U_i, V_i ayant respectivement pour hyperplans polaires les hyperplans

$$V_{i-2}\,V_{i-1}\,V_i\,V_{i+1}\,V_{i+2},\ U_{i-2}\,U_{i-1}\,U_i\,U_{i+1}\,U_{i+2}\ [2].$$

2. — Les plans $UU_1\,U_2$, $VV_1\,V_2$, conjugués par rapport à Q, coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques dont les points représentent dans S_3, les génératrices des

---

(1) Bompiani, *Sull'equazione di Laplace* (Rend. Circ. Palermo, 1912, t. xxxiv, pp. 383-407). Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Paris, 1924.

(2) Godeaux, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41.

deux modes de la quadrique de Lie Φ attachée au point x de la surface (x), ce point étant supposé non parabolique.

Appelons C_1, C_2 les points de rencontre de la droite $V_1 V_2$ avec Q; D_1, D_2 ceux de la droite $U_1 U_2$. Les quatre droites joignant un point C à un point D appartiennent entièrement à Q; elles représentent quatre faisceaux de rayons dont les sommets appartiennent à l'enveloppe de la quadrique de Lie Φ et dont les plans sont tangents à cette enveloppe en ces points (1). L'enveloppe des quadriques de Lie se compose de la surface (x) et de la surface lieu des quatre sommets de ces faisceaux de rayons.

Posons

$$\begin{aligned}\alpha &= 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4(b^{01} + c_1),\\ \beta &= 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4(a^{10} + c_2).\end{aligned}$$

Les points C, D sont donnés par

$$\begin{aligned}C_1 &= V_1^{10} + \xi V_1, \; C_2 = V_1^{10} - \xi V_1,\\ D_1 &= U_1^{01} + \eta U_1, \; D_2 = U_1^{01} - \eta U_1,\end{aligned}$$

où ξ, η satisfont aux relations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Les droites c_1, c_2, d_1, d_2 de S_3, correspondant aux points C_1, C_2, D_1, D_2, sont des génératrices de la quadrique de Lie Φ, arêtes du tétraèdre de Demoulin. Si nous désignons par y_{ik} le point commun aux droites c_i, d_k, les quatre points y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} sont donc, avec le point x, les points caractéristiques de la quadrique de Lie.

3. — Nous avons, en supposant α, β non nulles,

$$C_1 = V_2 + V_1[\xi + (\log ak_1)^{10}],$$

et

$$C_1^{01} = V_1(\xi^{01} + k_1) + k_1 V[\xi + (\log ak_1)^{10}]$$

(1) Demoulin, *Sur la quadrique de Lie* (C. R., 1908, t. cxlvii, pp. 493-496). Godeaux, *Sur les lignes asymptotiques...* (loc. cit.).

ou, en tenant compte de la relation

$$\alpha^{01} = -2\xi\xi^{01} = -2k_1(\log ak_1)^{10},$$
$$C_1^{01} = (\xi^{01} + k_1)(V_1 + \xi V).$$

On a de même,

$$C_2^{01} = (-\xi^{01} k_1)(V_1 - \xi V).$$

Le point de rencontre A des droites $C_1\, C_1^{01}$, $C_2\, C_2^{01}$ est donc

$$A = V_2 + V_1(\log ak_1)^{10} + \alpha V.$$

De même, le point de rencontre des droites $D_1\, D_1^{10}$, $D_2\, D_2^{10}$ est donné par

$$B = U_2 + U_1(\log bh_1)^{01} + \beta U.$$

On trouve, par un calcul simple,

$$2A^{10} + 2A(\log a)^{10} + 4bB = V(\log a^2\alpha)^{10}, \qquad (1)$$
$$2B^{01} + 2B(\log b)^{01} + 4aA = U(\log b^2\beta)^{01}. \qquad (2)$$

4. — Soit

$$\Omega(p, q) = 0$$

l'équation de la polarité de S_5 dont l'hyperquadrique fondamentale est Q, de telle sorte que l'équation de celle-ci soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

On a

$$\Omega(A, A) = -2\alpha\Delta, \quad \Omega(B, B) = 2\beta\Delta, \quad \Omega(A, B) = 0,$$

où l'on a posé

$$\Delta = |\, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11}\, |,$$

le second membre étant le déterminant des coordonnées des points $x, x^{10}, x^{01}, x^{11}$.

Tout point de la droite AB a des coordonnées de la forme

$$\lambda A + \mu B.$$

Pour que ce point appartienne à l'hyperquadrique Q, on doit avoir

$$\lambda^2 \Omega(A, A) + \mu^2 \Omega(B, B) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\xi^2 \lambda^2 - \eta^2 \mu^2 = 0.$$

Les points de rencontre P_1, P_2 de la droite AB avec Q sont donc donnés par

$$P_1 = \eta A + \xi B, \quad P_2 = \eta A - \xi B.$$

On a

$$\Omega(P_1, C_1) = \eta \Omega(A, C_1) + \xi \Omega(B, C_1).$$

Or, A appartient à la droite $C_1 \, C_1^{01}$, tangente en C_1 à Q; B appartient au plan $UU_1 \, U_2$ contenu dans l'espace à trois dimensions conjugué de la droite $V_1 \, V_2$ par rapport à Q. Il en résulte que le second membre de la relation précédente est identiquement nul, par suite la droite $P_1 \, C_1$ appartient à Q et la droite p_1 de S_3 qui correspond au point P_1 rencontre la droite c_1.

On établit de même que la droite p_1 rencontre également les droites c_2, d_1, d_2 et que la droite p_2, représentée par le point P_2, rencontre les droites c_1, c_2, d_1, d_2. Il en résulte que les droites p_1, p_2 coïncident avec les droites $y_{11} \, y_{22}$, $y_{12} \, y_{21}$, c'est-à-dire sont les arêtes du tétraèdre de Demoulin n'appartenant pas à la quadrique de Lie.

5. — Supposons toujours α, β différents de zéro. Nous avons établi que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes u, v soient les asymptotiques sur les surfaces (y_{11}), (y_{12}), (y_{21}), (y_{22}), s'exprime par l'une des relations équivalentes

$$(\log a^2 \alpha)^{10} = 0, \quad (\log b^2 \beta)^{01} = 0. \tag{3}$$

De plus, dans ces conditions, les points C_1, C_2 engendrent des réseaux conjugués à la congruence $(V_1 \, V_2)$ et les points D_1, D_2 des réseaux conjugués à la congruence $(U_1\ U_2)$. Les équations (1), (2) donnent d'autre part

$$A^{10} + A(\log a)^{10} + 2bB = 0,$$
$$B^{01} + B(\log b)^{01} + 2aA = 0$$

et les points A, B sont les transformés de Laplace l'un de l'autre. Les relations (1) et (2) montrent en outre que cette circonstance ne se présente que si la condition (3) est remplie.

Le point C_1 détermine une suite de Laplace inscrite dans la suite (I). Appelons C_1' le transformé de Laplace de C_1 dans le sens des v, C_1'' celui de C_1' dans le même sens. Le point C_1'' appartient à la droite UV et la droite de S_3 qu'il représente engendre une congruence W dont la surface (x) est une des surfaces focales. Appelons de même C_2', C_2'' le premier et le second transformés de Laplace de C_2 dans le sens des v. Les droites $C_1'\ C_1''$, $C_2'\ C_2''$ se rencontrent en un point A_1 transformé de Laplace de A dans le sens des v. Désignons par A_2, A_3.... les transformés successifs de Laplace de A_1 dans le sens des v. Cette suite détermine dans l'espace S_3 une suite de quadriques telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces deux quadriques (1). Précisément, le plan $AA_1\ A_2$ coupe Q suivant une conique qui représente les génératrices d'un mode d'une des quadriques de Demoulin (2) associées en couple de congruences W représentées par les surfaces (C_1''), (C_2'').

Mais on peut faire le même raisonnement en partant des points D_1, D_2 et en considérant leurs transformés de Laplace dans le sens des u. En appelant B_1, B_2,... les transformés successifs de Laplace de B dans le sens des u, on obtient une seconde suite de quadriques de S_3, données par les sections de Q par les plans $BB_1\ B_2$, $B_1\ B_2\ B_3$,....

---

(1) Demoulin, *Sur la transformation de Guichard et les systèmes* K (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1919, pp. 101-112); *Sur la théorie des réseaux* (C. R., 9 décembre 1929). Godeaux, *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1929, pp. 953-958); *Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques* (Rend. R. Accad. Lincei, janvier 1930, pp. 54-58).

(2) Demoulin, *Sur la transformation*... (loc. cit.).

Et bien, A et B étant les transformés de Laplace l'un de l'autre, ces deux suites de quadriques n'en forment qu'une.

Nous appelerons Δ_a la quadrique représentée par la section de Q par le plan BAA_1, Δ_b celle qui est représentée par la section de Q par le plan $AB\,B_1$.

6. — Les quadriques Δ_a, Δ_b se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces quadriques. Les deux quadriques ont en commun un quadrilatère gauche. Deux côtés opposés de ce quadrilatère sont les droites représentées par les points de rencontre de la droite AB avec l'hyperquadrique Q, c'est-à-dire les arêtes du tétraèdre de Demoulin $y_{11}\,y_{12}\,y_{21}\,y_{22}$ n'appartenant pas à la quadrique de Lie Φ.

Les deux autres côtés du quadrilatère gauche sont représentés par les points communs à Q et aux plans conjugués de BAA_1, ABB_1 par rapport à cette hyperquadrique. La droite contenant ces points est donc la conjuguée de l'espace $B_1\,BAA_1$.

Sur la surface (y_{11}), les asymptotiques sont les lignes u, v. Les tangentes à ces lignes en un point y_{11} sont représentées par deux points de la droite $C_1\,D_1$. Les points C_1, D_1 engendrent des réseaux conjugués à la congruence $(C_1\,D_1)$, par suite les droites c_1, d_1 engendrent des congruences W ayant (y_{11}) comme surface focale commune. Si l'on observe que les droites $C_1\,C_1^{01}$, $D_1\,D_1^{01}$ passent par A et que les droites $C_1\,C_1^{10}$, $D_1\,D_1^{10}$ passent par B, on voit que les quadriques de Demoulin relatives aux deux congruences W considérées sont les quadriques Δ_a, Δ_b. Il en résulte que les points caractéristiques communs de ces quadriques sont les points de rencontre des droites $y_{11}\,y_{22}$, $y_{12}\,y_{21}$ avec les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires osculateurs aux congruences (c_1), (d_1) le long de deux droit correspondantes.

Le raisonnement précédent peut être répété en considérant les couples de congruences W: (c_1) et (d_2), (c_2) et (d_1), (c_2) et (d_2). On en conclut que

Lorsque les quadriques de Lie d'une surface ont cinq points caractéristiques et qu'il y a conservation des asymptotiques sur les cinq nappes de l'enveloppe, les arêtes du tétraèdre de Demoulin *appartenant à la quadrique de Lie engendrent des congruences* W. *Les complexes linéaires osculateurs à ces congruences appartiennent à un même faisceau. Les points de rencontre des directrices de la congruence linéaire* *commune à ces complexes coupent les arêtes du tétraèdre de* Demoulin *n'appartenant par à la quadrique de Lie suivant les quatre points caractéristiques communs aux quadriques* Δ_a, Δ_b.

7. — Les coordonnées des points A et B satisfont aux équations de Laplace

$$A^{11} + A^{01}(\log a)^{10} - k_1 A = 0,$$
$$B^{11} + B^{10}(\log b)^{01} - h_1 B = 0.$$

On a donc

$$A_1 = A^{01} = k_1 V_1 - k_1 (\log a k_1)^{10} V - 2 a \alpha U,$$
$$B_1 = B^{10} = h_1 U_1 - h_1 (\log b h_1)^{01} U - 2 b \beta V.$$

Les points A_2, B_2 appartiennent respectivement aux plans VUU_1, UVV_1, les points A_i, B_i respectivement aux plans $U_{i-3} U_{i-2} U_{i-1}$, $V_{i-3} V_{i-2} V_{i-1}$. Il en résulte que l'on a

$$\Omega(A_i, B_i) = 0$$

quel que soit i, c'est-à-dire que les points A_i, B_i sont conjugués par rapport à Q. On a en outre

$$\Omega(A_1, A_2) = 0, \quad \Omega(B_1, B_2) = 0,$$
$$\Omega(A\ , A_3) = 0, \quad \Omega(B\ , B_3) = 0.$$

Tout point de S_5 peut être représenté par

$$\mu_2 U_2 + \mu_1 U_1 + \mu U + \lambda V + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2.$$

Les hyperplans polaires des points A, B, A_1, B_1 par rapport à Q sont respectivement représentés par

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0,$$
$$k_1 \lambda_1 - a \alpha \mu_2 = 0, \quad h_1 \mu_1 - b \beta \lambda_2 = 0.$$

Par suite, les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires osculateurs aux congruences (c_1), (c_2), (d_1), (d_2) le long de droites correspondant aux mêmes valeurs de u, v, sont représentatées par les intersections de Q avec la droite joignant les points

$$a\alpha V_1 + k_1 U_2, \quad b\beta U_1 + h_1 V_2.$$

8. — Examinons maintenant le cas où l'une des quantités α, β, par exemple α est nulle, l'autre β étant différente de zéro. Alors les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que trois points caractéristiques (1). On a

$$(\log ak_1)^{10} = 0, \quad (\log b^2\beta)^{01} = 0.$$

Les points C_1, C_2 coïncident avec V_2. Le point A coïncide également avec V_2 et par suite le point B avec V_3, le point B_1 avec $V_4, \ldots$, le point B_i avec V_{i+3}.

Les quadriques Δ coïncident avec des quadriques analogues à la quadrique de Lie que nous avons introduites autrefois (2).

Lorsque les deux quantités α, β sont toutes deux nulles, les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques et les points A, B coïncident respectivement avec les points V_2, U_2.

Liége, le 27 juillet 1931.

(1) Godeaux, *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (Bull. de la Soc. Math. de France, 1928, pp. 26-41).

(2) Godeaux, *Sur les lignes asymptotiques...* (loc. cit.).