SUR LES SURFACES PROJECTIVEMENT APPLICABLES AYANT MÊMES QUADRIQUES DE LIE

PAR

Lucien Godeaux

Professeur à l'Université de Liége

Dans un mémoire récent (1), nous avons étudié les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie; nous proposons de déterminer dans quelles conditions ces surfaces sont projectivement applicables. Nous résolvons ce problème en utilisant la forme de la condition d'applicabilité projective de deux surfaces donnée par M. Cech (2). Précisément, si (x), (y) sont deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie, nous déterminons dans quelles conditions les plans osculateurs aux courbes tracées sur les surfaces (x), (y) en deux points x, y donnant naissance à la même quadrique de Lie, forment deux gerbes homographiques.

1. — Soit x un point d'une surface (x), non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives normales de Wilczynski x_1, x_2, x_3, x_4 du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles (3)

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2\,b\,x^{01} + c_1\,x = 0, \\ x^{02} + 2\,a\,x^{10} + c_2\,x = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$
$$(a\,b \lesseqgtr 0)$$

(1) L. Godeaux, *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* («Bulletin de l'Académie roy. de Belgique», 1928, pp. 158-186). Voir aussi sur ce sujet deux notes antérieures de M. Demoulin: *Sur la quadrique de Lie* («C. R.», 1908, t. CXLVII, pp. 493-496); *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* («C. R.», 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23).

(2) Cech, *Sur la correspondance générale de deux surfaces* («Bulletin international de l'Académie Tchèque des Sciences», 1923, t. XXIII, p. 80). La notion d'applicabilité projective des surfaces est due à M. Fubini; voir à ce sujet la *Geometria projettiva differenziale* de MM. Fubini et Cech. Bologne, Zanichelli, 1927, 2 vol.

(3) Wilczynski, *Projective differential geometry of curved surfaces* («Transactions of the amer. math. Society», 1907, t. VIII, pp. 233-260; 1908, t. IX, pp. 79-120).

où l'on pose

$$x^{ik}=\frac{\partial^{i+k}x}{\partial u^i\,\partial v^k}.$$

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$\left.\begin{aligned} a^{20}+c_2^{10}+2\,b\,a^{01}+4\,a\,b^{01}&=0,\\ b^{02}+c_1^{01}+2\,a\,b^{10}+4\,b\,a^{10}&=0,\\ c_1^{02}+2\,a\,c_1^{10}-4\,c_1\,b^{01}&=c_2^{20}+2\,b\,c_2^{01}-4\,c_2\,a^{10}.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que deux points caractéristiques sont

$$\left.\begin{aligned} 2\,(\log.b)^{02}+\overline{(\log.b)^{01}}^{2}+4\,(a^{10}+c_2)&=0,\\ 2\,(\log.a)^{20}+\overline{(\log.a)^{10}}^{2}+4\,(b^{01}+c_1)&=0.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

L'un des points caractéristiques est le point x, l'autre point caractéristique y est donné par

$$\begin{aligned} y=\Big[4\,ab-\frac{1}{2}\,(\log.a)^{10}.(\log.b)^{01}\Big]x\\ +x^{10}(\log.b)^{01}+x^{01}(\log.a)^{10}-2\,x^{11}.\end{aligned}$$

Ce point y engendre une surface (y) sur laquelle les courbes u, v sont les asymptotiques.

Les tangentes en deux points homologues x, y aux asymptotiques u des deux surfaces (x), (y) se rencontrent en un point

$$m=-x^{10}+\frac{1}{2}\,x(\log.a)^{10}=\frac{1}{h_1}\Big[y^{10}+\frac{1}{2}\,y(\log.a)^{10}\Big],$$

où

$$h_1=-(\log.b)^{11}+4\,a\,b.$$

De même, les tangentes aux asymptotiques v des deux surfaces se rencontrent au point

$$n=-x^{01}+\frac{1}{2}\,x(\log.b)^{01}=\frac{1}{k_1}\Big[y^{01}+\frac{1}{2}\,y(\log.b)^{01}\Big],$$

où

$$k_1 = -(\log . a)^{11} + 4ab.$$

On a d'ailleurs

$$(\log . b h_1)^{01} = 0, \quad (\log . a k_1)^{10} = 0.$$

Les points x, y, m, n, ne sont pas en général dans un même plan. Si z est un point quelconque, nous appelerons coordonnées locales de ce point les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 définies par

$$z = z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y.$$

2.—Considérons sur la surface (x) une courbe $v = v\ (u)$ passant par le point x de coordonnées curvilignes u, v. Le plan osculateur à cette courbe en x passe par les points

$$x, \quad x^{10} + v' x^{01}, \quad x^{20} + 2v' x^{11} + v'^2 x^{02} + v'' x^{01}.$$

L'équation de ce plan osculateur en coordonnées locales est par suite

$$2v'^2 z_2 - 2v' z_3 + (v'' - 2b + 2av'^3) z_4 = 0. \qquad (4)$$

A la courbe $v = v\ (u)$ considérée sur (x) correspond sur (y) une courbe $v = v\ (u)$ passant par le point y de coordonnées curvilignes u, v, homologue du point x considéré. Le plan osculateur à cette courbe en ce point y passe par les points

$$y, \quad y^{10} + v' y^{01}, \quad y^{20} + 2v' y^{11} + v'^2 y^{02} + v'' y^{01}.$$

Son équation en coordonnées locales est

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & h_1 & k_1 v' \\ -h_1 k_1 v' & \begin{array}{l} h_1 (\log . h_1 k_1)^{10} + h_1^{01} v' - 2a k_1 v'^2 \\ \quad + k_1^{10} v' + k_1 (\log . h_1 k_1)^{01} v'^2 + k_1 v'' \end{array} & -2b h_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Appelons ξ_2, ξ_3, ξ_4 les coordonnées des plans de la gerbe de sommet x par rapport au tétraèdre $x\,m\,n\,y$, η_1, η_2, η_3 celles des plans de la gerbe de sommet y par rapport au même tétraèdre. En observant que dans les équations (4) et (5), les dérivées v', v'' ont les mêmes valeurs, on obtient, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\eta_1 &= h_1 k_1 \xi_2 \xi_3 [\xi_2 (\log . b\, k_1)^{01} + \xi_3 (\log . a\, h_1)^{10} + \xi_4] \\ &\quad + 2 (h_1 - k_1)(a\, k_1 \xi_2^3 - b\, h_1 \xi_3^3), \\ \rho\,\eta_2 &= - h_1\ k_1^2 \xi_2^2 \xi_3 , \\ \rho\,\eta_3 &= - h_1^2 k_1\ \xi_2\ \xi_3^2. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

La correspondance entre les plans osculateurs aux courbes homologues en des points homologues des surfaces (x), (y) est donc en général une correspondance birationnelle du troisième ordre [1]. Les formules inverses de correspondance sont, σ étant un facteur de proportionnalité,

$$\left.\begin{aligned} \sigma\,\xi_2 &= - h_1^2 k_1\ \eta_2^2 \eta_3 , \\ \sigma\,\xi_3 &= - h_1\ k_1^2\ \eta_2\ \eta_3^2, \\ \sigma\,\xi_4 &= h_1 k_1 \eta_2 \eta_3 [h_1 \eta_2 (\log . b k_1)^{01} + k_1 \eta_3 (\log . a\, h_1)^{10} + h_1 k_1 \eta_1] \\ &\quad + 2 (h_1 - k_1)(a\, h_1^2 \eta_2^3 - b\, k_1^2 \eta_3^3). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Aux faisceaux de plans de la gerbe de sommet y correspondent, dans la gerbe de sommet x, des cônes enveloppes de troisième classe ayant pour plan double fixe le plan $\xi_2 = \xi_3 = o$, tangent en x à la surface (x), et pour plans simples fixes, les plans $\xi_2 = \xi_4 = o$, $\xi_3 = \xi_4 = o$ et deux plans infiniment voisins successifs des précédents. Il existe, dans la gerbe de sommet x, un seul plan fondamental (multiple), le plan tangent à la surface (x) au point x. On obtient des propriétés analogues en permutant les rôles des gerbes de sommets x, y.

3. — M. Cech a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces soient projectivement applicables est que l'on puisse établir entre ces surfaces une correspondance telle que:

1) les asymptotiques soient conservées;
2) les gerbes des plans osculateurs aux courbes homo-

---

(1) Cette correspondance a été étudiée par M. Bompiani: *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme* («Rendiconti R. Accad. Lincei», 2.° sem., 1923, pp. 376-380); *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie* («Annali di Matematica», 1923-1924, 4e série, t. I, pp. 259-284). Voir également l'appendice écrit par M. Bompiani pour le second volume de l'ouvrage de MM. Fubini et Cech cité plus haut.

logues tracées sur les surfaces en des points homologues, soient homographiques.

D'après ce théorème, pour que les surfaces (x), (y) soient applicables (projectivement), il faut et il suffit que la correspondance représentée par les formules (6) et (7), soit une homographie. Pour cela, le second membre de la première des formules (6) doit être divisible par $\xi_2 \xi_3$ et le second membre de la dernière des formules (7) par $\eta_2 \eta_3$. Observons que la surface (x) n'étant pas réglée par hypothèse, a, b ne peuvent être nuls. Par suite pour que les termes en ξ_2^3, ξ_3^3, η_2^3, η_3^3 disparaissent dans les expressions précitées, nous devons avoir

$$h_1 - k_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\log . a)^{11} = (\log . b)^{11}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces (x), (y) *soient projectivement applicables, est que le rapport de* a *à* b *soit le produit d'une fonction de* u *seule par une fonction de* v *seule.*

Observons qu'actuellement, on a

$$(\log . b\, k_1)^{01} = (\log . b\, h_1)^{01} = 0,$$
$$(\log . a\, h_1)^{10} = (\log . a\, k_1)^{10} = 0.$$

Par suite, les équations (6) et (7) prennent la forme simple

$$\frac{\eta_1}{\xi_4} = \frac{\eta_2}{-h_1 \xi_2} = \frac{\eta_3}{-h_1 \xi_3}.$$

Dans cette homographie entre les gerbes de sommets x, y, la droite xy est unie et de plus tout plan passant par cette droite est uni. Les deux gerbes sont par suite perspectives; elles sont précisément les projections du plan

$$z_1 + h_1 z_4 = 0.$$

Rappelons que dans notre mémoire cité plus haut, nous avons montré que pour les surfaces (x), (y) qui viennent d'être déterminées, la droite xy passe par un point fixe et que la droite mn est située dans un plan fixe.

Liége, Université, le 25 avril 1923.